مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۸، شماره۴، زمستان ۱۴۰۳، صفحه ۱۳-۱

ترازیابی حین حرکت با رویکرد بهینه‌سازی به کمک انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت در سیستم‌های ناوبری اینرسی

پیام حقیقی[۱]، سیدمحمدمهدی دهقان بنادکی[۲]، محمدجواد رجبی[۳]

[۱]فارغ التحصیل دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، payam13661987@gmail.com

[۲]دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، smmd@mut.ac.ir

[۳]دانشجو دکتری، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، mjrajabi@mut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۶/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۸

چکیده: در این مقاله روش جدیدی برای ترازیابی در حین حرکت برای سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل به بدنه ارزان قیمت با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی ارائه شده است. در این روش پیشنهادی، از اطلاعات سرعت خطی و موقعیت اندازه‌گیری شده توسط سیستم موقعیت‌یاب جهانی و همچنین خروجی‌های حسگرهای اینرسی برای تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. در این روش، با بکارگیری رویکرد تخمین دو نمونه‌ای و گسسته‌سازی جملات انتگرالی موجود در بردار مشاهدات، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی مبتنی بر مشاهدات سرعت/موقعیت برای تخمین ماتریس وضعیت توسعه یافته است. در مقایسه با روش مرسوم تولید بردار مشاهدات با انتگرال‌گیری از سرعت، روش پیشنهادی با حفظ تقریبی سرعت همگرایی، به‌دلیل استفاده از مشاهدات موقعیت دارای قوام بیشتر در برابر بایاس و نویز اندازه‌گیری موجود در خروجی حسگرهای اینرسی است. الگوریتم پیشنهادی در کاربردهایی که شامل تغییرات سریع در سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها و نیروی اندازه‌گیری شده دستگاه بدنه توسط شتاب‌سنج‌ها است، تخمین‌های مناسبی ارائه می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی در سناریوهای مختلف حاکی از آن است که پس از گذشت صد ثانیه، مقدار RMS خطای تخمین در سیستم ناوبری اینرسی ارزان قیمت ADIS16488 برای زاویه سمت[۱] کمتر از مقدار ۰/۶ درجه، زاویه فراز[۲] کمتر از مقدار ۰/۱ درجه و زاویه غلت[۳] کمتر از مقدار ۰/۳ درجه خواهد بود. این دقت در تخمین زوایای اویلر اولیه برای ترازیابی غیردقیق در حین حرکت کافی به‌حساب می‌آید.

کلمات کلیدی: سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه، ترازیابی در حین حرکت، ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی، بردار مشاهدات افزونه، انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت.

Optimization based In-Motion Alignment for SINS using Velocity/Position Integration

P Haghighi, S. M. M. Dehghan, M.J Rajabi

Abstract: This paper is concerned with the in-motion alignment for low-cost strap-down inertial navigation system (SINS) using an optimization method. The proposed method utilizes GPS position/velocity, along with the outputs from inertial sensors to generate the observation vectors. By introducing a two-sample approximation approach, a recursive velocity/position optimization algorithm is developed by discretizing the integral terms of the observation vectors to estimate the initial attitude matrix. Compared with the traditional velocity integration formulae for constructing the vector observations, the proposed method maintains approximately the same convergence speed while exhibiting more robustness against bias and measurement noise present in the inertial sensors outputs due to the use of position observations. The proposed algorithm provides accurate estimates in applications involving rapid changes in the angular velocities measured by gyroscopes and the forces measured by accelerometers. Simulation results in various scenarios indicate that after 100s, the root mean square of estimation error for the low-cost ADIS16488 INS is less than 0.6° for yaw angle, less than 0.1° for pitch angle,

[1] Yaw
[2] Pitch
[3] Roll

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

and less than 0.3° for roll angle. This accuracy in the initial Euler angle estimates is sufficient for the coarse in-motion alignment.

Keywords: Strap-down Inertial Navigation System (SINS), In-motion alignment, optimization based alignment, augmented observation vectors, velocity/position integration formulae.

۱- مقدمه

در سیستم ناوبری اینرسی [1] (INS)، با استفاده از اندازه‌گیری‌های فراهم شده توسط واحد اندازه‌گیری اینرسی [2] (IMU)، معادلات دیفرانسیل ناوبری به‌منظور تعیین اطلاعات موقعیت، سرعت و وضعیت جسم حل می‌شوند [۱]. با توجه به استفاده INS از روش محاسبات کور و انتگرال‌گیری، ضروری است قبل از شروع فرآیند ناوبری، مقادیر اولیه موقعیت، سرعت و وضعیت مشخص باشند که از آن تحت عنوان ترازیابی اولیه یاد می‌شود [۲]. بروز خطایی کوچک در ترازیابی اولیه منجر به‌خطایی بزرگ در زمان طولانی خواهد گردید. برای کاهش خطای ناوبری در زمان‌های طولانی که عمدتاً ناشی از بایاس شتاب‌سنج‌ها و دریفت ژیروسکوپ‌ها است، عموماً INS با واحد موقعیت‌یاب جهانی [3] (GPS) یکپارچه می‌شود و سیستم ناوبری یکپارچه INS/GPS تولید می‌گردد. در سیستم INS/GPS، موقعیت و سرعت اولیه را می‌توان مستقیماً با استفاده از واحد GPS تعیین نمود. بنابراین، هدف اصلی از ترازیابی اولیه، تعیین ماتریس وضعیت اولیه بین دستگاه‌های بدنه و اینرسی است [۳].

به‌طور رایج، ترازیابی اولیه از طریق دو مرحله متوالی ترازیابی غیردقیق و سپس ترازیابی دقیق انجام می‌گیرد [۴]. اجماع محققین بر آن است که تخمین بهینه مبتنی بر فیلتر کالمن بهترین روش برای ترازیابی دقیق است [۵]. با این وجود، رویکرد ترازیابی بر مبنای فیلتر کالمن بر اساس مدل خطای سیستم خطی‌سازی شده بنا شده است [۶]. بنابراین، نیاز به دانستن اطلاعات با دقت بالا از ماتریس وضعیت اولیه توسط روش ترازیابی غیردقیق خواهد بود تا بتوان صحت الگوریتم کالمن مبتنی بر مدل خطی‌سازی شده را تضمین نمود [۷]. اگرچه در سال‌های گذشته روش‌های متنوعی برای تعیین ماتریس وضعیت اولیه با روش ترازیابی غیردقیق از جمله روش ترازیابی تحلیلی [۸] و روش ترازیابی انتقال [۱۰،۹] پیشنهاد شده است، با این وجود روش‌های مذکور برای وقتی‌که جسم در حین حرکت (در شرایط دریا و یا شرایط پرواز) است، قابل استفاده نمی‌باشند [۱۲،۱۱].

برای حل مساله ترازیابی غیردقیق در حین حرکت با استفاده از سیستم ناوبری INS/GPS که هدف اصلی این مقاله نیز می‌باشد، رویکردی مبتنی بر تجزیه ماتریس وضعیت پیشنهاد شده است [۱۴،۱۳]. برای این منظور، بخش ثابت ماتریس وضعیت تجزیه شده که آنرا "ماتریس وضعیت اولیه" می‌نامند، با استفاده از حل مساله وهبا بر اساس بردار مشاهدات محاسبه می‌گردد [۱۴،۱۳]. از آنجایی‌که وهبا یک مساله بهینه‌سازی حداقل مربعات مقید است، این روش ترازیابی اولیه در مراجع تحت عنوان ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی [4] (OBA) نام برده شده است [۱۵]. با توجه به‌آنکه الگوریتم‌های کارآمدی در مراجع از جمله روش دانپورت-q برای حل مساله تعیین وضعیت پیشنهاد شده است [۱۷،۱۶]، اصلی‌ترین گام در تعیین این ماتریس وضعیت اولیه، ساختن بردار مشاهدات است. از آنجایی‌که ماتریس وضعیت اولیه نشان‌دهنده تبدیل بین دستگاه‌های ثابت بدنه و ناوبری در شروع فرآیند ترازیابی است، بردار مشاهدات در دستگاه‌های مرجع مربوطه بر مبنای معادلات نیروی ویژه تولید می‌شوند [۱۸]. معادله نیروی ویژه نشان‌دهنده ارتباط بین انواع مختلف اطلاعات شتاب است. بردارهای مشاهدات مبتنی بر اطلاعات شتاب برای اولین بار در روش OBA در مرجع [۱۵] بکار گرفته شد. با این وجود، اغتشاشات خارجی فراوانی در اطلاعات شتاب وجود دارد که می‌توانند عملکرد روش OBA را به‌طور قابل توجهی تحت تاثیر قرار دهد. برای مهار اثر نامطلوب اغتشاش‌های موجود، پیشنهاد طراحی فیلتر پایین‌گذر در مرجع [۱۵] ارائه گردید. با این‌وجود، تعیین بهینه پارامترهای این فیلتر در شرایط مختلف مانوری امری پیچیده است. همچنین، نویزهای وارده در خروجی‌های اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای اینرسی در مرجع [۱۵] در نظر گرفته نشده است. یک روش کارآمد و سرراست برای مهار اثرات ناشی از اغتشاش و نویز، انتگرال‌گیری از اطلاعات شتاب در بازه زمانی مشخصی است [۷]. با توجه به‌طول بازه زمانی انتگرال‌گیری، عمدتاً دو روش اصلی انتگرال‌گیری به‌صورت ۱) انتگرال‌گیری در کل بازه زمانی ترازیابی و ۲) انتگرال‌گیری در بازه زمانی معین با طول ثابت گزارش شده است. برای وقتی‌که طول بازه زمانی انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد، اثر مهار اغتشاش بهتر خواهد بود و لذا رویه انتگرال‌گیری در کل بازه ترازیابی پاسخ بهتری برای کاربردهای حسگرهای اینرسی ارزان قیمت ارائه می‌دهد. به‌علاوه، استفاده بیشتر از اطلاعات شتاب در روش OBA، می‌تواند سرعت همگرایی الگوریتم پیشنهادی را تسریع بخشد. با این‌وجود، هنگامی‌که بازه زمانی انتگرال‌گیری افزایش یابد، بایاس‌های موجود در حسگرهای اینرسی باعث ایجاد خطاهای تجمعی در بردارهای مشاهدات می‌گردند و لذا، کارآیی روش OBA کاهش می‌یابد [۱۴].

برمبنای مصالحه صورت پذیرفته مابین ۱) قوام بیشتر در برابر خطاهای تجمعی به‌وجود آمده در بردار مشاهدات به‌علت بایاس‌های موجود در حسگرهای اینرسی و ۲) افزایش سرعت همگرایی الگوریتم OBA، در این

[1] Inertial Navigation System
[2] Inertial Measurement Unit
[3] Global Positioning System
[4] Optimization Based Alignment

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

مقاله از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت در تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. برای این منظور، با توجه به‌وزن تخصیص داده شده به‌هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت، از ویژگی‌های منحصر به‌فرد هریک از این دو روش در تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. در ادامه، با گسسته‌سازی جملات انتگرالی، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی نوآورانه برای تخمین ماتریس وضعیت ثابت پیشنهاد شده است. مهم‌ترین مزایای این روش ترازیابی در مقایسه با روش‌های مرسوم ترازیابی مبتنی بر انتگرال‌گیری از سرعت در مراجع [۳] و [۱۵,۱۴] عبارت است از:

۱) با وجود سرعت بالای همگرایی، الگوریتم پیشنهاد شده به‌دلیل استفاده از بردارهای مشاهدات موقعیت دارای قوام بیشتر در مواجهه با خطاهای حسگرهای اینرسی می‌باشد.

۲) به‌منظور دقت بیشتر در فرآیند استخراج فرم بازگشتی برای محاسبه بردار های مشاهدات، از رویکرد "تخمین دو نمونه‌ای[1]" برای محاسبه انتگرال‌های شامل جملات مرتبط با سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها و نیروی اندازه‌گیری شده دستگاه بدنه توسط شتاب‌سنج‌ها استفاده شده است. با توجه به‌آنکه سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه دارای تغییرات سریعی است، در نظر گرفتن تقریب خطی برای سرعت زاویه‌ای و نیروی اندازه‌گیری شده در هنگام محاسبه انتگرال‌های موجود در فاصله زمانی بین دو گام متوالی الگوریتم قطعاً دارای دقت بالاتری نسبت به‌وقتی است که مقادیر سرعت زاویه‌ای و نیرو در محاسبه انتگرال‌های موجود در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شوند.

۳) در روش پیشنهادی، نیاز به‌دانستن شتاب خطی در دستگاه ناوبری به‌عنوان ورودی الگوریتم نیست. بنابراین، الگوریتم ارائه شده در این مقاله برای ترازیابی در شرایط دریایی که در آن سیستم ناوبری اینرسی در معرض حرکت انتقالی ناشی از امواج است، کاملاً کاربردی خواهد بود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش اول توصیف مساله ترازیابی و رویکرد ترازیابی مبتنی بر OBA برای تعیین ماتریس وضعیت اولیه و مروری بر سوابق پژوهش‌های مرتبط صورت پذیرفت. بخش دوم به‌تعریف مساله اختصاص دارد و روابط ریاضی حاکم بر معادلات ناوبری، مساله تجزیه ماتریس وضعیت و فرمول‌بندی مساله OBA ارائه می‌شود. در بخش سوم، الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت ارائه می‌شود و گسسته‌سازی بردار مشاهدات صورت می‌پذیرد. در انتهای این بخش، الگوریتم بازگشتی پیشنهادی برای حل مساله ترازیابی بیان می‌گردد. در بخش چهارم با آوردن نتایج شبیه‌سازی به بررسی کارآیی الگوریتم بازگشتی پیشنهادی پرداخته می‌شود. در پایان نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آورده می‌شود.

۲- طرح مساله

در این مقاله، دستگاه مختصات محلی n به‌عنوان دستگاه مرجع ناوبری در نظر گرفته شده است که محورهای آن به‌ترتیب بیانگر شمال، عمودی به‌سمت بالا و شرق می‌باشند. دستگاه بدنه INS با b، دستگاه زمین با e و دستگاه اینرسی بدون چرخش با i نمایش داده می‌شوند. معادلات نرخ ناوبری (وضعیت، سرعت و موقعیت) در دستگاه n عبارت خواهند بود با [۱۷]:

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \left(\omega_{nb}^b\times\right), \quad \omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b\left(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n\right), \tag{۱}$$

$$\dot{v}^n = C_b^n f^b - \left(2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n\right)\times v^n + g^n \tag{۲}$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_N + h} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sec L}{R_E + h} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v^n \tag{۳}$$

که در آن C_b^n بیانگر ماتریس وضعیت دستگاه بدنه نسبت به دستگاه ناوبری، $v^n = \begin{bmatrix} v_N & v_U & v_E \end{bmatrix}^T$ بیانگر سرعت جسم نسبت به زمین، ω_{ib}^b نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به دستگاه اینرسی بیان شده در دستگاه بدنه (اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه)، f^b نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها در دستگاه بدنه، g^n بردار جاذبه در دستگاه ناوبری، $\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \Omega\cos L & \Omega\sin L & 0 \end{bmatrix}^T$ بیانگر نرخ چرخش زمین در دستگاه ناوبری (Ω نرخ زمین و L عرض جغرافیایی) و ω_{en}^n بیانگر نرخ زاویه‌ای دستگاه ناوبری نسبت به دستگاه زمین بیان شده در دستگاه ناوبری است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{\left(R_E + h\right)} & \dfrac{v_E \tan L}{\left(R_E + h\right)} & -\dfrac{v_N}{\left(R_N + h\right)} \end{bmatrix}^T \tag{۴}$$

که در آن R_E و R_N به‌ترتیب بیانگر شعاع انحنای عرضی و شعاع انحنای نصف‌النهاری و h ارتفاع بالای سطح زمین می‌باشند. ماتریس 3×3 پادمتقارن $(\times.)$ بدین صورت تعریف می‌شود که برای هر دو بردار دلخواه a و b، ضرب خارجی آنها رابطه $a\times b = (a\times)b$ را برآورده سازد. بردار موقعیت جسم به صورت $p = \begin{bmatrix} \lambda & L & h \end{bmatrix}^T$ تعریف می‌شود که در آن ارتفاع بالای سطح زمین با h نمایش داده می‌شود و چرخش زاویه‌ای دستگاه ناوبری نسبت به دستگاه زمین با طول جغرافیایی λ و عرض جغرافیایی L بیان می‌شود. R_c بیانگر ماتریس انحنای محلی است و تابعی از موقعیت فعلی است که با رابطه (۵) توصیف می‌گردد:

[1] Two-Sample Approximation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{(R_E+h)\cos L} \\ \dfrac{1}{(R_N+h)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

لازم به ذکر است که تمامی مقادیر ذکر شده در روابط (۱)-(۵) تابعی از زمان می‌باشند و تنها برای خلاصه‌نویسی، وابستگی به زمان حذف شده است.

۱-۲- تخمین ماتریس وضعیت اولیه در فرآیند ترازیابی

فرض شود که فرآیند ترازیابی در زمان صفر شروع شده و یک بازه زمانی محدود به‌صورت $[0,t]$ برای آن در نظر گرفته شود. مساله ترازیابی در سیستم ناوبری اینرسی در حین حرکت معادل با تعیین منحصر به‌فرد وضعیت فعلی (به‌عبارتی تعیین ماتریس وضعیت $C_b^n(t)$) با استفاده از خروجی‌های شتاب‌سنج و ژیروسکوپ است. چالش اساسی در محاسبه ماتریس $C_b^n(t)$ در آن است که مطابق رابطه (۱) این ماتریس تابعی از ω_{nb}^b است و از طرفی، ω_{nb}^b توسط رابطه $\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n$ به C_n^b وابسته است. طبق قاعده زنجیره‌ای، ماتریس وضعیت $C_b^n(t)$ به‌صورت رابطه زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} C_b^n(t) &= C_{b(t)}^{n(t)} = C_{n(0)}^{n(t)} C_{b(0)}^{n(0)} C_{b(t)}^{b(0)} \\ &= C_{n(0)}^{n(t)} C_b^n(0) C_{b(t)}^{b(0)} \end{aligned} \quad (۶)$$

که در آن $C_{b(t)}^{b(0)}$ و $C_{n(0)}^{n(t)}$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس‌های تغییر وضعیت چارچوب بدنه و چارچوب ناوبری از زمان 0 تا t هستند. معادلات نرخ تغییرات آنها عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{b(t)}^{b(0)} &= C_{b(t)}^{b(0)} \omega_{ib}^b \times \\ \dot{C}_{n(0)}^{n(t)} &= C_{n(0)}^{n(t)} \omega_{in}^b \times \end{aligned} \quad (۷)$$

بنابرین، اگر ماتریس وضعیت اولیه $C_b^n(0)$ در رابطه (۶) که مقداری ثابت است، معلوم شود، ماتریس وضعیت $C_b^n(t)$ می‌تواند در هر لحظه زمانی با استفاده از روابط (۶) و (۷) مشخص گردد. مساله تعیین ماتریس وضعیت اولیه $C_b^n(0)$ با دقت نسبتاً مناسب تحت عنوان ترازیابی غیردقیق شناخته می‌شود [۴]. برای این منظور، فرض شود که اطلاعات موقعیت p و سرعت v^n در بازه زمانی $[0,t]$ توسط واحد GPS در دسترس باشند. هدف، ارائه یک روش ترازیابی غیردقیق با استفاده از بهینه‌سازی بر مبنای رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت برای تعیین $C_b^n(0)$ در حین حرکت (در شرایط دریا و یا شرایط پرواز) است. در ادامه، از روش ترازیابی بر مبنای رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت تحت عنوان "ترازیابی با استفاده از بردار مشاهدات افزونه" یاد می‌شود.

۳- پیشنهاد الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از بردار مشاهدات افزونه

در این بخش، هدف پیشنهاد الگوریتم ترازیابی با رویکرد بهینه‌سازی و با استفاده از بردار مشاهدات افزونه است. برای این منظور، ابتدا چگونگی تولید بردار مشاهدات با رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت توضیح داده می‌شود. در ادامه، با پیشنهاد روش تقریب دوجمله‌ای، روشی برای گسسته‌سازی جملات انتگرالی موجود در بردار مشاهدات ارائه می‌گردد. در انتها، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی برای تخمین ماتریس وضعیت اولیه $C_b^n(0)$ توسعه داده می‌شود. لازم به‌ذکر است که ورودی‌های این الگوریتم ۱) اطلاعات سرعت / موقعیت اندازه‌گیری شده توسط واحد GPS، ۲) نیروی اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و ۳) سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها است.

۱-۳- تولید بردار مشاهدات افزونه

یکی از گام‌های اساسی برای حل مساله ترازیابی با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی، تولید بردار مشاهدات است. برای این منظور، با جای‌گذاری رابطه (۶) در معادله (۲) و سپس ضرب طرفین معادله از چپ در $C_{n(t)}^{n(0)}$، رابطه (۸) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & C_b^n(0) C_{b(t)}^{b(0)} f^b \\ &= C_{n(t)}^{n(0)} \left(\dot{v}^n + (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n - g^n \right) \end{aligned} \quad (۸)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۸) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} & C_b^n(0) \int_0^t C_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ &= \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \dot{v}^n \\ &+ \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \left(2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \right) \times v^n dt \\ &- \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \end{aligned} \quad (۹)$$

با استفاده از روش جزء‌به‌جزء و استفاده از رابطه (۷)، جمله اول از عبارت سمت راست رابطه (۹) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} & \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \dot{v}^n \\ &= C_{n(t)}^{n(0)} v^n \Big|_0^t - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{in}^n \times v^n dt \\ &= C_{n(t)}^{n(0)} v^n - v^n(0) - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{in}^n \times v^n dt \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با توجه به برقراری تساوی $2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{in}^n$ در رابطه (۹) و جای‌گذاری از رابطه (۱۰) در رابطه (۹)، رابطه (۱۱) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & C_b^n(0) \int_0^t C_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ &= C_{n(t)}^{b(0)} v^n - v^n(0) \\ &+ \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n dt - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \end{aligned} \quad (۱۱)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

با تعریف:

$$\begin{aligned}\alpha_v &\triangleq {}^{b}dt \\ \beta_v &\triangleq -v^n(0) \\ &+\int_0^t C_{n(t)}^{n(0)}\omega_{ie}^n\times v^n dt-\int_0^t C_{n(t)}^{n(0)}g^n dt\end{aligned}$$

رابطه (۱۱) به‌فرم زیر بازنویسی می‌گردد:

$$C_b^n(0)\alpha_v=\beta_v \tag{۱۲}$$

از بردارهای α_v و β_v در رابطه (۱۱) تحت عنوان بردار مشاهدات سرعت یاد می‌شود. از نقطه‌نظر تئوری، اگر دو بردار مستقل خطی α_v وجود داشته باشند، آنگاه ماتریس وضعیت $C_b^n(0)$ به‌طور یکتا تعیین می‌شود. در ترازیابی دینامیکی، این شرط به‌صورت طبیعی برقرار است [۱۵].

با انتگرال‌گیری مجدد از طرفین رابطه (۱۱) در بازه زمانی $[0,t]$، فرمول انتگرال‌گیری از موقعیت به‌صورت رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$C_b^n(0)\alpha_p=\beta_p \tag{۱۳}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\alpha_p &\triangleq {}^{))}_{r)}f^b d\sigma d\tau \\ \beta_p &\triangleq {}^{n}dt-tv^n(0) \\ &+\int_0^t\int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)}\omega_{ie}^n\times v^n d\sigma d\tau \\ &-\int_0^t\int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)}g^n d\sigma d\tau\end{aligned} \tag{۱۴}$$

از بردارهای α_p و β_p تحت عنوان بردار مشاهدات موقعیت یاد می‌شود.

توجه ۱: شایان ذکر است که رابطه (۱۳) تنها یک انتگرال‌گیری ساده از طرفین رابطه (۱۱) نیست. با اعمال تقریب‌های پذیرفته شده در کاربردهای عملی، می‌توان به یک الگوریتم ترازیابی بدون نیاز به اطلاعات سرعت v^n دست پیدا نمود. برای این منظور، با اعمال انتگرال‌گیری جزبه‌جز به جمله اول از $\beta_p(t)$ در رابطه (۱۳)، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\beta_p=&\left(C_{n(t)}^{n(0)}r^n-\int_0^t C_{n(t)}^{n(0)}\omega_{in}^n\times r^n dt\right. \\ &+\int_0^t\int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)}\omega_{ie}^n\times v^n d\sigma dt \\ &\left.-\int_0^t\int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)}g^n d\sigma dt\right)-v^n(0)\end{aligned} \tag{۱۵}$$

در رابطه (۱۵) سه جمله وابسته به‌سرعت به‌صورت ۱) انتگرال دوگانه $\int_0^t\int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)}\omega_{ie}^n\times v^n d\sigma dt$، ۲) سرعت اولیه جمع‌شونده $v^n(0)$ و ۳) سرعت زاویه‌ای ω_{in}^n وجود دارد. عبارت (۱) دارای مقداری نسبتاً کوچک است و لذا می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. عبارت (۲) نیز با تفاضل‌گیری بین هر دو گام زمانی حذف می‌شود. علاوه بر آن، در کاربردهای عملی سرعت زاویه‌ای ω_{in}^n که تابعی از v^n است، به‌طور مناسبی با سرعت زاویه‌ای ω_{en}^n تقریب زده می‌شود.

۳-۲- گسسته‌سازی انتگرال‌های موجود در بردار مشاهدات

هدف از این زیربخش، گسسته‌سازی جملات انتگرالی در روابط (۱۲) و (۱۳) است. برای این منظور، فرض شود که زمان فعلی به‌صورت $t_M \triangleq$ تعریف می‌شود که در آن T بیانگر فاصله زمانی بین دو زمان به‌روزرسانی t_k و t_{k+1} برای $k=0,1,\ldots$ است. از فرضیات ساده شونده به‌صورت بیان شده در ادامه در گسسته‌سازی استفاده می‌شود.

فرض ۱: مقدار سرعت v^n در بازه $t\in[t_k,t_{k+1})$ دارای تغییرات خطی است. به‌عبارتی:

$$\begin{aligned}v^n(t)&=v^n(t_k)\\&+\frac{t-t_k}{T}\left(v^n(t_{k+1})-v^n(t_k)\right)\end{aligned} \tag{۱۶}$$

فرض ۲: سرعت زاویه‌ای ω_{in}^n دارای تغییرات آهسته در زمان است [۱۵]. بنابراین، می‌توان ماتریس وضعیت $C_{n(t)}^{n(t_k)}$ را به‌صورت (۱۷) تقریب زد:

$$\begin{aligned}C_{n(t)}^{n(t_k)}&=I+\frac{\sin\left(\|\varphi_n\|\right)}{\|\varphi_n\|}\varphi_n\times\\&+\frac{1-\cos\left(\|\varphi_n\|\right)}{\|\varphi_n\|^2}\left(\varphi_n\times\right)^2\approx I+\varphi_n\times\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن $\varphi_n\approx\int_{t_k}^t\omega_{in}^n d\tau\approx(t-t_k)\omega_{in}^n$.

جمله چهارم از β_v در رابطه (۱۲) در زمان t_M به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_M}C_{n(t)}^{n(0)}g^n dt\\&=\sum_{k=0}^{M-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}C_{n(t)}^{n(0)}g^n dt\\&=\sum_{k=0}^{M-1}C_{n(t_k)}^{n(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}C_{n(t)}^{n(t_k)}g^n dt\end{aligned} \tag{۱۸}$$

با بکارگیری فرض دوم، رابطه (۱۸) به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_M}C_{n(t)}^{n(0)}g^n dt\\&\approx\sum_{k=0}^{M-1}C_{n(t_k)}^{n(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(I+(t-t_k)\omega_{in}^n\times\right)g^n dt\\&=\sum_{k=0}^{M-1}C_{n(t_k)}^{n(0)}\left(TI+\frac{T^2}{2}\omega_{in}^n\times\right)g^n\end{aligned} \tag{۱۹}$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

که در آن $\omega_{in}^{n}(t)=\omega_{in}^{n}(t_k)$ و $g^{n}(t)=g^{n}(t_k)$ برای هر $t\in[t_k,t_{k+1})$ در نظر گرفته شده است. با بکارگیری فرض ۱، جمله سوم از β_v در رابطه (۱۲) در زمان t_M به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_M} C_{n(t)}^{n(0)}\omega_{ie}^{n}\times v^{n}dt\\
&=\sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(t)}^{n(t_k)}\omega_{ie}^{n}\times v^{n}dt\\
&\approx\sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(\Big(I+(t-t_k)\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\\
&\times\Big(v^{n}(t_k)+\frac{t-t_k}{T}\big(v^{n}(t_{k+1})-v^{n}(t_k)\big)\Big)\Big)dt\\
&=\sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)}\Big[\Big(TI+\frac{T^2}{2}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times v^{n}(t_k)\\
&+\Big(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times\big(v^{n}(t_{k+1})-v^{n}(t_k)\big)\Big]\\
&=\sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)}\Big[\Big(TI+\frac{T^2}{6}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times v^{n}(t_k)\\
&+\Big(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times v^{n}(t_{k+1})\Big]
\end{aligned}\qquad(۲۰)$$

که در آن ω_{ie}^{n} در هریک از بازه‌های $[t_k,t_{k+1}]$ مقداری ثابت فرض شده است. با جای‌گذاری روابط (۱۹) و (۲۰) در رابطه (۱۲)، فرم گسسته‌سازی شده β_v در زمان t_M به‌صورت رابطه (۲۱) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&\beta_v(t_M)\approx C_{n(t_M)}^{b(0)}v^{n}-v^{n}(0)\\
&+\sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)}\Big[\Big(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{6}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times v^{n}(t_k)\\
&+\Big(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^{n}\times\Big)\omega_{ie}^{n}\times v^{n}(t_{k+1})\\
&-\Big(TI+\frac{T^2}{2}\omega_{in}^{n}\times\Big)g^{n}\Big]
\end{aligned}\qquad(۲۱)$$

به‌طور مشابه، بردار α_v در رابطه (۱۲) در زمان t_M به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\alpha_v(t_M)&=\int_0^{t_M} C_{b(t)}^{b(0)}f^{b}dt\\
&=\sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{b(t)}^{b(t_k)}f^{b}dt\\
&\approx\sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(I+\Big(\int_{t_k}^{t}\omega_{ib}^{b}d\tau\Big)\times\Big)f^{b}dt
\end{aligned}\qquad(۲۲)$$

در ادامه، روش "تخمین دو نمونه‌ای[1]" برای تقریب جمله انتگرالی موجود در رابطه (۲۲) و تعیین فرم گسسته‌سازی شده بردار α_v ارائه می‌شود.

فرض ۳ (تخمین دو نمونه‌ای [۱۷]): با توجه به‌آنکه سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه و نیروی ویژه دستگاه بدنه دارای تغییرات سریعی می‌باشند، می‌توان از روش تقریب دوجمله‌ای به‌صورت رابطه (۲۳) برای تخمین خطی این دو پارامتر در بازه مابین دو زمان به‌روزرسانی الگوریتم (فاصله زمانی مابین دریافت اطلاعات از واحد GPS) استفاده نمود.

$$\begin{aligned}
\omega_{ib}^{b}&\approx ta_{\omega}+b_{\omega}\\
f^{b}&\approx ta_{f}+b_{f}
\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

که در آن a_ω، b_ω، a_f و b_f بردارهای ضرایب مناسب هستند. زوایای افزایشی $\Delta\theta_1$ و $\Delta\theta_2$ به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_1&=\int_0^{T/2}\omega_{ib}^{b}dt=\int_0^{T/2}(ta_{\omega}+b_{\omega})dt\\
&=\frac{T^2}{8}a_{\omega}+\frac{T}{2}b_{\omega}\\
\Delta\theta_1+\Delta\theta_2&=\int_0^{T}\omega_{ib}^{b}dt=\int_0^{T}(ta_{\omega}+b_{\omega})dt\\
&=\frac{T^2}{2}a_{\omega}+Tb_{\omega}
\end{aligned}\qquad(۲۴)$$

که در آن $\Delta\theta_1$ و $\Delta\theta_2$ به‌ترتیب بیانگر اولین و دومین نمونه از زاویه افزایشی اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ می‌باشند. با حل دو معادله دو مجهول رابطه (۲۴)، ضرایب به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned}
a_{\omega}&=\frac{4}{T^2}(\Delta\theta_2-\Delta\theta_1)\\
b_{\omega}&=\frac{1}{T}(3\Delta\theta_1-\Delta\theta_2)
\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

به‌طریق مشابه، با تعریف Δv_1 و Δv_2 به‌عنوان اولین و دومین نمونه از سرعت افزایشی اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج، ضرایب a_f و b_f به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
T^2a_f&=4(\Delta v_2-\Delta v_1)\\
b_f&=\frac{1}{T}(3\Delta v_1-\Delta v_2)
\end{aligned}\qquad(۲۶)$$

با بکارگیری روش تخمین دو نمونه‌ای در فرض ۳، تقریب انتگرال موجود در رابطه (۲۲) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(I+\Big(\int_{t_k}^{t}\omega_{ib}^{b}d\tau\Big)\times\Big)f^{b}dt\\
&\approx\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big[I+\Big(\int_{t_k}^{t}\big((\tau-t_k)a_{\omega}+b_{\omega}\big)d\tau\Big)\times\Big]\\
&\big[(t-t_k)a_f+b_f\big]dt\\
&=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big((t-t_k)a_f+b_f\\
&+\Big(\frac{1}{2}(t-t_k)^2a_{\omega}+(t-t_k)b_{\omega}\Big)\times\big(ta_f+b_f\big)\Big)dt\\
&=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(b_f+(t-t_k)\big(a_f+b_{\omega}\times b_f\big)+(t-t_k)\\
&\Big(\frac{1}{2}a_{\omega}\times b_f+b_{\omega}\times a_f\Big)+\frac{1}{2}(t-t_k)^3\big(a_{\omega}\times a_f\big)\Big)dt\\
&=Tb_f+\frac{1}{2}T^2\big(a_f+b_{\omega}\times b_f\big)\\
&+\frac{1}{3}T^3\Big(\frac{1}{2}a_{\omega}\times b_f+b_{\omega}\times a_f\Big)+\frac{1}{8}T^3\big(a_{\omega}\times a_f\big)\\
&=\Delta v_1+\Delta v_2+\frac{1}{2}(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)\times(\Delta v_1+\Delta v_2)\\
&+\frac{2}{3}(\Delta\theta_1\times\Delta v_2+\Delta v_1\times\Delta\theta_2)
\end{aligned}\qquad(۲۷)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۷) در رابطه (۲۲)، فرم گسسته‌سازی شده $\alpha_v(t_M)$ عبارت است با:

$$\begin{aligned}
&\alpha_v(t_M)\\
&\approx\sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)}\Big(\Delta v_1+\Delta v_2+\frac{1}{2}(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)\\
&\times(\Delta v_1+\Delta v_2)+\frac{2}{3}(\Delta\theta_1\times\Delta v_2+\Delta v_1\times\Delta\theta_2)\Big)
\end{aligned}\qquad(۲۸)$$

[1] Two-Sample Approximation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

در ادامه، هدف ارائه فرم گسسته بردارهای مشاهدات موقعیت α_p و β_p در رابطه (۱۳) در زمان t_M است. با توجه به فرض ۱ که در آن تغییرات سرعت v^n به صورت خطی فرض شده است، ترم اول از β_p در رابطه (۱۳) در زمان t_M به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_M} C_{n(\tau)}^{n(0)} v^n d\tau = \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(\tau)}^{n(t_k)} v^n d\tau \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_k) \right. \\ &\left. + \left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_k) \right]\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با بکارگیری روابط (۱۶) و (۲۰)، ترم دوم از β_p در زمان t_M به فرم رابطه (۳۰) گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_M} \int_0^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma dt \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left(T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_m)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma \right. \\ &\left. + C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(t_k)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma dt \right) \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \right] \right. \\ &\times v^n(t_m) + \left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{m+1}) \\ &+ C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T^2}{3} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{T^2}{6} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right] \right\}\end{aligned} \tag{۳۰}$$

به‌طور مشابه، با توجه به رابطه (۱۹)، ترم سوم از β_p در زمان t_M به‌فرم رابطه (۳۱) گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_M} \int_0^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_0^{t_k} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right. \\ &\left. + \int_{t_k}^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right) d\tau \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} \left(T \int_0^{t_k} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right. \\ &\left. + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \right) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left(T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_m)} g^n d\sigma \right. \\ &\left. + C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{n(\sigma)}^{n(t_k)} g^n d\sigma d\tau \right) \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} \left(T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left(TI + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right. \\ &\left. + C_{n(t_k)}^{n(0)} \left(\frac{T^2}{2} I + \frac{T^3}{6} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right)\end{aligned} \tag{۳۱}$$

با توجه به روابط (۲۹)–(۳۱)، فرم گسسته شده بردار مشاهدات $\beta_p(t_M)$ در رابطه (۱۳) به‌فرم رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\beta_p(t_M) = \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_k) \right. \\ &\left. + \left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_k) \right] - t_M v^n(0) \\ &+ \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_m) \right. \right. \\ &\left. + \left(\frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{m+1}) \right] \\ &+ C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[\left(\frac{T^2}{3} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \\ &\left. \left. \left(\frac{T^2}{6} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right] \right\} \\ &- \sum_{k=0}^{M-1} \left(T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left(TI + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right. \\ &\left. + C_{n(t_k)}^{n(0)} \left(\frac{T^2}{2} I + \frac{T^3}{6} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right)\end{aligned} \tag{۳۲}$$

از طرفی، مشابه روند اشاره شده در رابطه (۲۲)، بردار α_p در رابطه (۱۳) در زمان t_M به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned}&\alpha_p(t_M) = \int_0^{t_M} \int_0^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_0^{t_k} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma + \int_{t_k}^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma \right) d\tau \\ &\approx \sum_{k=0}^{M-1} \left[T \int_0^{t_k} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \right] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} T \sum_{m=0}^{k-1} \left[C_{b(t_m)}^{b(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{b(\sigma)}^{b(t_m)} f^b d\sigma \right. \\ &\left. + C_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(t_k)} f^b d\sigma d\tau \right]\end{aligned} \tag{۳۳}$$

همانند روند اشاره شده در رابطه (۲۲)، عبارت اول انتگرالی در رابطه (۳۳) به‌فرم زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned}&\int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{b(\sigma)}^{b(t_m)} f^b d\sigma \\ &\approx \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(I + \left(\int_{t_m}^{t} \omega_{ib}^b d\tau \right) \times \right) f^b dt\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با بکارگیری تخمین دونمونه‌ای اشاره شده در فرض ۳ برای تخمین ω_{ib}^b و f^b و مشابه روند توضیح داده شده در رابطه (۲۷)، فرم گسسته‌سازی شده عبارت دوم انتگرالی در رابطه (۳۳) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{\tau} C_{b(\sigma)}^{b(t_k)} f^b d\sigma d\tau \\ &\approx \frac{T}{30} \left(25\Delta v_1 + 5\Delta v_2 + 12\Delta\theta_1 \times \Delta v_1 \right. \\ &\left. + 8\Delta\theta_1 \times \Delta v_2 + 2\Delta v_1 \times \Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_2 \times \Delta v_2 \right)\end{aligned} \tag{۳۵}$$

با بکارگیری رابطه (۲۷) برای تعیین فرم گسسته شده (۳۴)، بردار $\alpha_p(t_M)$ در رابطه (۱۴) به‌فرم رابطه (۳۶) گسسته‌سازی می‌گردد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

$$\alpha_p(t_M) \approx T\sum_{m=0}^{M-1} C_{b(t_m)}^{b(0)}\Big(\Delta v_1+\Delta v_2 + \frac{1}{2}(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)\times(\Delta v_1+\Delta v_2) + \frac{2}{3}(\Delta\theta_1\times\Delta v_2+\Delta v_1\times\Delta\theta_2)\Big) + C_{b(t_{M-1})}^{b(0)}\Big[\frac{T}{30}\big(25\Delta v_1+5\Delta v_2+12\Delta\theta_1\times\Delta v_1 + 8\Delta\theta_1\times\Delta v_2+2\Delta v_1\times\Delta\theta_2+2\Delta\theta_2\times\Delta v_2\big)\Big] \quad (۳۶)$$

۳-۳-پیشنهاد الگوریتم مبتنی بر بهینه‌سازی بازگشتی برای حل مساله ترازیابی

در زیر بخش ۳-۲ فرم گسسته شده بردارهای مشاهدات سرعت $\beta_v(t_M)$ و $\alpha_v(t_M)$ در رابطه (۱۲) برای زمان t_M و همچنین فرم گسسته‌شده بردارهای مشاهدات موقعیت $\beta_p(t_M)$ و $\alpha_p(t_M)$ در رابطه (۱۳) برای زمان t_M ارائه گردید. در این بخش، بر پایه این فرم‌های گسسته‌سازی شده، هدف پیشنهاد یک الگوریتم بازگشتی برای حل مساله ترازیابی است. برای این منظور، با بهره‌گیری از رابطه (۱۱)، مساله تعیین ماتریس وضعیت اولیه $C_b^n(0)$ به‌صورت رابطه (۳۷) می‌باشد:

$$C_b^n(0)\alpha_a(t_M)=\beta_a(t_M),\quad (M=1,2,\dots \quad (۳۷)$$

که در آن بردارهای مشاهدات افزونه β_a و α_a به‌صورت رابطه زیر پیشنهاد شده است:

$$\alpha_a(t_M)=\eta\alpha_v(t_M)+\alpha_p(t_M)$$
$$\beta_a(t_M)=\eta\beta_v(t_M)+\beta_p(t_M) \quad (۳۸)$$

که در آن اسکالر مثبت η بیانگر وزن تخصیص داده شده به‌هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت است.

توجه ۲: مزیت روش تولید بردار مشاهدات افزونه در مقایسه با هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در آن است که می‌توان با ادغام هریک از ویژگی‌های منحصر به فرد این دو روش تولید بردار مشاهدات به‌صورت ۱) سرعت همگرایی سریع‌تر الگوریتم ترازیابی پیشنهادی بر مبنای بردارهای مشاهدات سرعت و ۲) قوام بیشتر الگوریتم ترازیابی بر مبنای بردارهای مشاهدات موقعیت در برابر دریفت/بایاس و همچنین نویز اندازه‌گیری بر روی خروجی‌های حسگرهای اینرسی، نتایج الگوریتم ترازیابی را بهبود بخشید. این مساله در بخش نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نحوه تعیین ماتریس $C_b^n(0)$ با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از پارامتر کواترنیون وضعیت واحد در مرجع [۱] توضیح داده شده است. برای این منظور، اگر بردار کواترنیون واحد به صورت $q=\begin{bmatrix}s & \eta^T\end{bmatrix}^T$ تجزیه شود، که در آن s بیانگر بخش اسکالر و η بخش برداری بردار کواترنیون هستند، ماتریس وضعیت $C_b^n(0)$ به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌گردد:

$$C_n^b(0)=\left(s^2-\eta^T\eta\right)I+2\eta\eta^T-2s(\eta\times) \quad (۳۹)$$

کلیت الگوریتم بدین صورت است که با تعریف

$$\left[q^+\right]\triangleq\begin{bmatrix} & -\eta^T\\ & +(\eta\times)\end{bmatrix},\quad \left[q^-\right]\triangleq\begin{bmatrix} & -\eta^T\\ & -(\eta\times)\end{bmatrix} \quad (۴۰)$$

رابطه (۳۷) به‌فرم معادل $\left(\left[\beta_a^+(t_M)\right]-\left[\alpha_a^-(t_M)\right]\right)q=0$ بازنویسی می‌گردد. در مرجع [۱۵] اثبات شده است که تعیین کواترنیون وضعیت به‌صورت مساله بهینه‌سازی رابطه (۴۱) تبدیل می‌شود.

$$\min_q\ q^TKq\ \text{ subject to }\ q^Tq=1 \quad (۴۱)$$

که در آن ماتریس متقارن $K_{4\times4}$ به‌صورت رابطه (۴۲) بیان می‌گردد.

$$K(t_M)=\sum_M\Big(\left(\left[\beta_a^+(t_M)\right]-\left[\alpha_a^-(t_M)\right]\right)^T \left(\left[\beta_a^+(t_M)\right]-\left[\alpha_a^-(t_M)\right]\right)\Big) \quad (۴۲)$$

کواترنیون بهینه در مساله بهینه‌سازی رابطه (۴۱) برابر با بردار ویژه نرمالیزه شده متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس K است [۳].

در جدول ۱، الگوریتم بازگشتی توسعه داده شده برای حل مساله ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی آورده شده است.

٤- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی مساله ترازیابی در حین حرکت با الگوریتم توسعه داده شده در جدول ۱ در قالب دو مثال صورت می‌پذیرد.

مثال ۱: در این مثال مساله شبیه‌سازی ترازیابی در حین حرکت برای وقتی‌که دریفت/ بایاس و همچنین نویز اندازه‌گیری بر روی خروجی‌های حسگرهای اینرسی وجود دارد، در سناریوهای مختلف صورت می‌پذیرد و RMS های خطای بدست آمده در تخمین زوایای اویلر اولیه در هریک از سناریوها گزارش می‌گردد. در جدول ۲ سه سناریوی مختلف مربوط به زوایای اویلر در ماتریس $C_b^n(0)$ آورده شده است.

در جدول ۳ اطلاعات مرتبط با مقادیر در نظر گرفته شده برای بایاس/دریفت و انحراف معیار نویزهای موجود در شتاب‌سنج و ژیروسکوپ آورده شده است. لازم به‌ذکر است که این مشخصات براساس سیستم ناوبری اینرسی ADIS16488 انتخاب شده‌اند.

جدول ۲: سناریوهای مختلف درنظر گرفته شده برای زوایای اویلر ماتریس $C_b^n(0)$ بر حسب درجه

زوایای اویلر ماتریس $C_b^n(0)$	سناریوی ۱	سناریوی ۲	سناریوی ۳
زاویه سمت	۳/۵	۱۰	۲۳/۵
زاویه غلت	۱/۴۱۴۲	۲/۸۲۸۴	۵/۶۵۶۹
زاویه فراز	۲/۷۰۲۹	۴/۵۰۴۸	۹/۰۰۹۷

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۱: الگوریتم مربوط به ترازیابی در شرایط پرواز بر مبنای بردار مشاهدات افزونه

مرحله مقداردهی اولیه: $M=0$ ، $\alpha_v(0)=\beta'_v(0)=0_{3\times1}$ ، $\alpha_p(0)=r^n(0)=0_{3\times1}$ ، $u_r(0)=u_v(0)=u_g(0)=0_{3\times1}$ ، $K=0_{4\times4}$ و برای η یک مقدار مثبت دلخواه در نظر گرفته شود.

مرحله اول: $M=M+1$ قرار دهید.

مرحله دوم: با استفاده از اطلاعات ω_{in}^n ، ماتریس $C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}$ به $C_{n(t_M)}^{n(0)}$ به صورت رابطه زیر به‌روزرسانی شود.

$$\varphi_n=T\omega_{in}^n, C_{n(t_M)}^{n(t_{M-1})}=I+\frac{\sin\left(\|\varphi_n\|\right)}{\|\varphi_n\|}\varphi_n\times+\frac{1-\cos\left(\|\varphi_n\|\right)}{\|\varphi_n\|^2}\left(\varphi_n\times\right)^2,\ C_{n(t_M)}^{n(0)}=C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}C_{n(0)}^{n(t_{M-1})}$$

با استفاده از اطلاعات مربوط به اندازه‌گیری زاویه‌ای ژیروسکوپ، ماتریس $C_{b(t_M)}^{b(0)}$ به $C_{b(t_M-1)}^{b(0)}$ به‌صورت رابطه زیر به‌روزرسانی شود.

$$\varphi_b=\Delta\theta_1\times\Delta\theta_2,\ C_{b(t_M)}^{b(t_{M-1})}=I+\frac{\sin\left(\|\varphi_b\|\right)}{\|\varphi_b\|}\varphi_b\times+\frac{1-\cos\left(\|\varphi_b\|\right)}{\|\varphi_b\|^2}\left(\varphi_b\times\right)^2,$$
$$C_{b(t_M)}^{b(0)}=C_{b(t_{M-1})}^{b(0)}C_{b(0)}^{b(t_{M-1})}$$

مرحله سوم: با استفاده از خروجی‌های حسگرهای ژیروسکوپ و شتاب‌سنج، بردار $\alpha_v(t_M)$ و $\alpha_p(t_M)$ به‌صورت زیر محاسبه گردند.

$$\alpha_v(t_M)=\alpha_v(t_{M-1})$$
$$+C_{b(t_{M-1})}^{b(0)}\left[\Delta v_1+\Delta v_2+\frac{1}{2}\left(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2\right)\times\left(\Delta v_1+\Delta v_2\right)+\frac{2}{3}\left(\Delta\theta_1\times\Delta v_2+\Delta v_1\times\Delta\theta_2\right)\right]$$
$$\alpha_p(t_M)=\alpha_p(t_M)+T\sum_{m=0}^{M-2}C_{b(t_m)}^{b(0)}\left(\Delta v_1+\Delta v_2+\frac{1}{2}\left(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2\right)\times\left(\Delta v_1+\Delta v_2\right)+\frac{2}{3}\left(\Delta\theta_1\times\Delta v_2+\Delta v_1\times\Delta\theta_2\right)\right)$$
$$+C_{b(t_{M-1})}^{b(0)}\left[\frac{T}{30}\left(25\Delta v_1+5\Delta v_2+12\Delta\theta_1\times\Delta v_1+8\Delta\theta_1\times\Delta v_2+2\Delta v_1\times\Delta\theta_2+2\Delta\theta_2\times\Delta v_2\right)\right]$$

مرحله چهارم: با استفاده از اطلاعات سرعت و موقعیت بدست آمده از واحد GPS، بردار $\beta_v(t_M)$ به صورت زیر محاسبه گردد:

$$\beta'_v(t_M)=\beta'_v(t_{M-1})$$
$$+C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}\left[\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{6}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_{M-1})+\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_M)\right.$$
$$\left.-\left(TI+\frac{T^2}{2}\omega_{in}^n\times\right)g^n\right]$$
$$\beta_v(t_M)=C_{n(t_M)}^{n(0)}v^n-v^n(0)+\beta'_v(t_M)$$

با استفاده از اطلاعات واحد GPS، بردار $\beta_p(t_M)$ به صورت زیر محاسبه گردد:

$$u_r\left(t_M\right)=u_r\left(t_{M-1}\right)+C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}\left[\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{6}\omega_{in}^n\times\right)v^n(t_k)+\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^n\times\right)v^n(t_{k+1})\right]$$
$$u_v\left(t_M\right)=u_v\left(t_{M-1}\right)+C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}\left[\left(\frac{T^2}{3}I+\frac{T^3}{12}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_{M-1})+\left(\frac{T^2}{6}I+\frac{T^3}{12}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_M)\right]$$
$$+T\sum_{m=0}^{M-2}C_{n(t_m)}^{n(0)}\left[\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{6}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_m)+\left(\frac{T}{2}I+\frac{T^2}{3}\omega_{in}^n\times\right)\omega_{ie}^n\times v^n(t_{m+1})\right]$$
$$u_g\left(t_M\right)=u_g\left(t_{M-1}\right)+C_{n(t_{M-1})}^{n(0)}\left(\frac{T^2}{2}I+\frac{T^3}{12}\omega_{in}^n\times\right)g^n+T\sum_{m=0}^{M-2}C_{n(t_m)}^{n(0)}\left(TI+\frac{T^2}{2}\omega_{in}^n\times\right)g^n$$
$$\beta_p(t_M)=u_r\left(t_M\right)-t_Mv^n(0)+u_v\left(t_M\right)-u_g\left(t_M\right)$$

مرحله پنجم: بردارهای مشاهدات افزونه به صورت $\alpha_a(t_M)=\eta\alpha_v(t_M)+\alpha_p(t_M)$ و $\beta_a(t_M)=\eta\beta_v(t_M)+\beta_p(t_M)$ محاسبه گردند.

مرحله ششم: $K(t_M)=K(t_{M-1})+\left(\left[\beta_a^+(t_M)\right]-\left[\alpha_a^-(t_M)\right]\right)^T\left(\left[\beta_a^+(t_M)\right]-\left[\alpha_a^-(t_M)\right]\right)$ محاسبه گردد.

مرحله ششم: بردار کواترنیون وضعیت q با توجه به بردار ویژه نرمالیزه شده ماتریس $K(t_M)$ متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه تعیین گردد.

مرحله هفتم: ماتریس وضعیت در زمان صفر با توجه به بردار کواترنیون در مرحله هفتم تعیین گردد. (رابطه (۳۹))

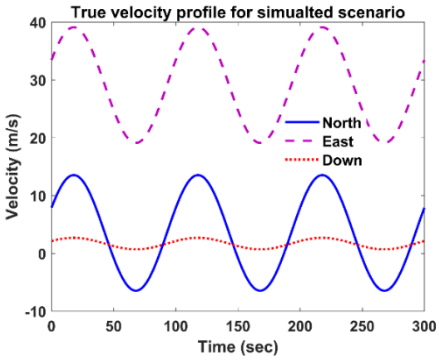
مرحله هشتم: به مرحله اول بروید و روند ذکر شده تا پایان زمان ترازیابی تکرار گردد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۳: اطلاعات مربوط به نویزها و بایاس / دریفت شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها

	ژیروسکوپ	شتاب‌سنج
دریفت/بایاس	$0.2\ {}^{\deg}/_{s}$	$16\times10^{-2}\ {}^{m}/_{s^2}$
انحراف معیار نویز	$0.005\ {}^{\deg}/_{h}$	$5\times10^{-3}\ {}^{m}/_{s^2}$

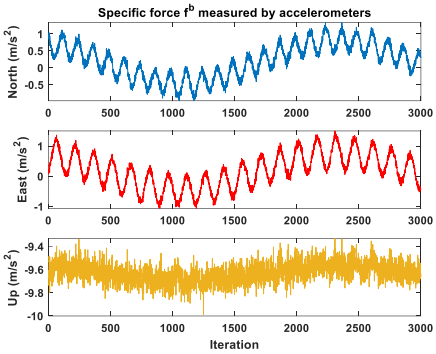
در شبیه‌سازی فرض بر آن است که در تولید داده‌های ناوبری، نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد IMU برابر با ۲۰ Hz و نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد GPS برابر با ۱۰ Hz در نظر گرفته شده است و داده‌ها برای مدت زمان ۳۰۰ ثانیه تولید شده است. در شکل ۱ نمایی از پروفایل در نظر گرفته شده برای سرعت v^n به‌منظور شبیه‌سازی مشاهده می‌شود.



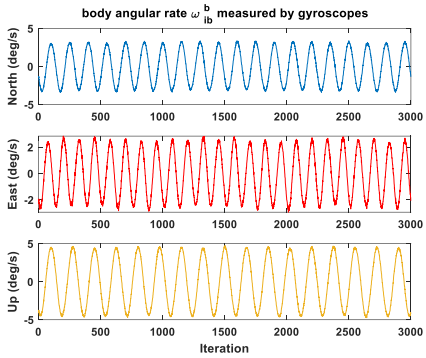
شکل ۱: منحنی‌های در نظر گرفته شده برای سرعت v^n به‌منظور تولید داده‌های شبیه‌سازی

در شکل‌های ۲ و ۳ به‌ترتیب قسمتی از داده‌های مرتبط با نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به اینرسی اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه که به‌عنوان ورودی الگوریتم می‌باشند، مشاهده می‌شود. لازم‌به‌ذکر است که در ۶۰۰۰ داده از حسگرهای اینرسی برای پیاده‌سازی الگوریتم در دسترس است که تنها برای نمایش بهتر، ۳۰۰۰ داده اول از هریک از حسگرهای اینرسی نمایش داده شده است.

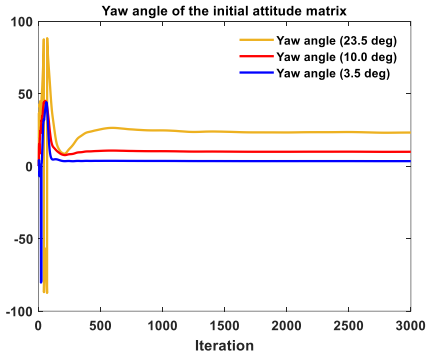
وزن تخصیص داده به‌هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در رابطه (۳۷) به‌صورت $\eta = 0.7$ در نظر گرفته شده است. با اجرای الگوریتم توسعه داده شده در جدول ۱، در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ همگرایی تخمین هریک از زوایای اویلر ماتریس $C_b^n(0)$ آورده شده در جدول ۲ به مقدار واقعی این سه زاویه مشاهده می‌شود. با توجه به شکل‌های ۴، ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که پس از ۱۰۰۰ مرتبه تکرار الگوریتم (معادل ۱۰۰ ثانیه)، مقدار تخمین زده شده برای زوایای اویلر ماتریس وضعیت اولیه همگرا شده است.



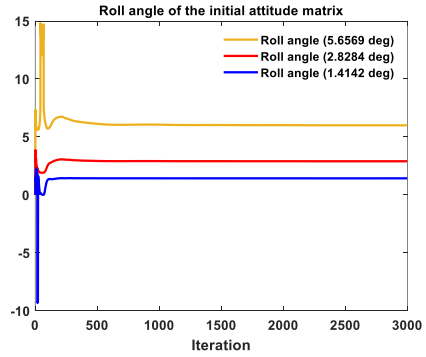
شکل ۲: نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها در دستگاه بدنه (سناریوی اول)



شکل ۳: نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به اینرسی اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه (سناریوی اول)

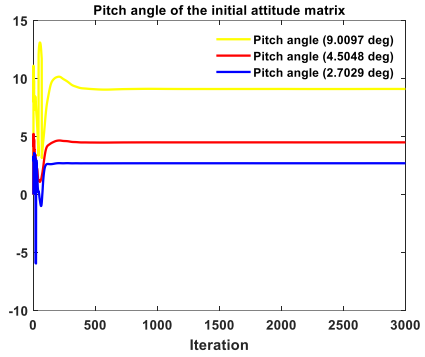


شکل ۴: نمایی از تخمین زاویه سمت در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط ترازیابی در حین حرکت



شکل ۵: نمایی از تخمین زاویه غلت در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط ترازیابی در حین حرکت

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]



شکل ۶: نمایی از تخمین زاویه فراز در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط ترازیابی در حین حرکت

در ادامه، برای هریک از سناریوهای ذکر شده در جدول ۱ شبیه‌سازی ۱۰۰ مرتبه تکرار می‌گردد و از RMSهای خطای بدست آمده در تخمین زوایای اویلر برای گام ۵۰۰ تا ۳۰۰۰ میانگین‌گیری می‌گردد. مقدار میانگین RMS خطای بدست آمده برای هریک از سناریوها در جدول ۴ آورده شده است.

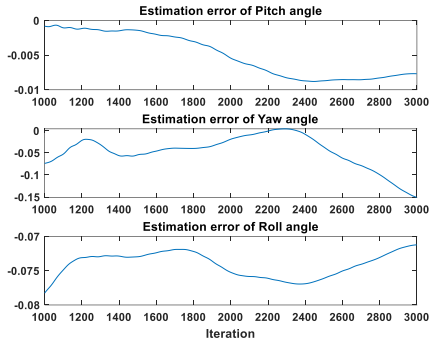
جدول ۴: مقدار RMS خطا در سناریوهای مختلف شبیه‌سازی

مقدار میانگین RMS خطای تخمین بر حسب درجه	سناریوی ۱	سناریوی ۲	سناریوی ۳
زاویه سمت	۰/۰۶۴۹	۰/۱۷۶۴	۰/۵۴۵۸
زاویه غلت	۰/۰۴۱۰	۰/۰۷۲۵	۰/۲۶۵۶
زاویه فراز	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۹۱	۰/۰۹۷۷

نتایج آورده شده در جدول ۴ گویای آن است که مقدار میانگین RMS خطای تخمین برای زاویه سمت در سناریوهای اشاره شده کمتر از ۰/۵۵ درجه است. از طرفی، برای وقتی‌که داده‌های INS/GPS تنها برای مدت زمانی ۴۰ ثانیه در دسترس هستند، میزان میانگین خطای تخمین زاویه سمت کمتر از مقدار ۰/۹۴ درجه بدست می‌آید. این دقت‌های بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی در جدول ۱ کاملاً مناسب برای ترازیابی غیردقیق در شرایط پروازی و همچنین شرایط دریا است و می‌توان از تخمین‌های بدست آمده برای زوایای اویلر به‌عنوان شرایط اولیه در الگوریتم ترازیابی دقیق با استفاده از فیلتر کالمن استفاده نمود.

به‌منظور بررسی سرعت همگرایی به‌همراه قوام الگوریتم پیشنهادی در برابر خطاهای مربوط به حسگرهای اینرسی، مقایسه‌ای با الگوریتم ترازیابی مرسوم انتگرال‌گیری از سرعت و الگوریتم انتگرال‌گیری از موقعیت پیشنهاد شده صورت پذیرفته است. داده‌های ورودی الگوریتم مربوط به سناریوی ۲ است.

در شکل ۷ نمایی از خطای تخمین وضعیت زوایای اویلر برای حالت ترازیابی با استفاده از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت مشاهده می‌شود. برای نمایش بهتر مقدار تقریبی خطای تخمین، نتایج مربوطه از گام زمانی ۱۰۰۰ به بعد الگوریتم نمایش داده شده است.



شکل ۷: نمایی از خطای وضعیت در ترازیابی با روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت

در جدول ۵ نتایج مربوط به مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی هریک از روش‌های مذکور با ۱۰ مرتبه تکرار الگوریتم به‌همراه سرعت همگرایی روش مذکور آورده شده است.

جدول ۵: مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی و سرعت همگرایی در سناریوی ۲ جدول ۲

روش ترازیابی	RMS خطای سمت	RMS خطای غلت	RMS خطای فراز	گام زمانی همگرایی
انتگرال‌گیری سرعت/موقعیت	۰/۱۷۶۴	۰/۰۷۲۵	۰/۰۰۹۱	۴۹۴
انتگرال‌گیری سرعت	۰/۱۹۱۲	۰/۰۹۰۱	۰/۰۱۳۲	۴۷۶
انتگرال‌گیری موقعیت	۰/۱۷۲۸	۰/۰۷۰۸	۰/۰۰۸۹	۵۵۸

نتایج آورده شده در جدول ۵ گویای آن است که مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی برای هریک از زوایای اویلر اولیه بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی در این مقاله کمتر از روش مرسوم ترازیابی با رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت است. با این‌وجود، گام زمانی همگرایی روش پیشنهاد شده در اینجا بسیار نزدیک به روش انتگرال‌گیری از سرعت است. روش ترازیابی مبتنی بر انتگرال‌گیری از موقعیت دارای خطای ترازیابی کمتری از روش پیشنهاد شده در این مقاله است. با این وجود، گام زمانی همگرایی روش مبتنی بر انتگرال‌گیری از موقعیت به‌میزان قابل توجهی افزایش یافته است.

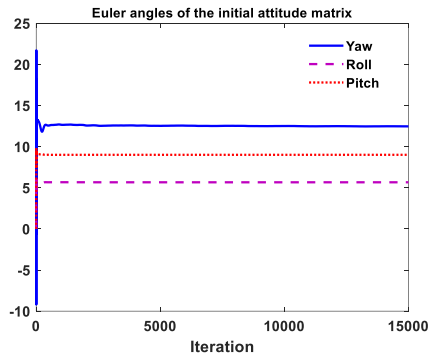
مثال ۲: مساله ترازیابی غیردقیق با رویکرد بهینه‌سازی در مرجع [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور ارزیابی الگوریتم توسعه داده شده در این مقاله، در این مثال مقایسه الگوریتم جدول ۱ و مرجع [۱۵] صورت می‌پذیرد. برای این منظور، در یکی از حالت‌های مورد مطالعه در بخش شبیه‌سازی مرجع [۱۵]، حرکت‌های زاویه‌ای بدون تغییر در نظر گرفته شده است و تنها انتقال‌های ارتعاشی بر روی آنها اضافه گردیده است. نرخ تغییرات مربوط به زوایای سمت، فراز و غلت به‌ترتیب برابر $7.85\times10^{-4}\sin(0.1\pi t)$ ، $7.85\times10^{-4}\sin(0.1\pi t+2\pi/3)$ و $7.85\times10^{-4}\sin(0.1\pi t+4\pi/3)$ در نظر گرفته شده است. همچنین،

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

سرعت v^n در زمان شروع ($t=0$) برابر صفر فرض شده است و نرخ تغییرات آن در راستای شمال، عمودی به سمت بالا و شرق به ترتیب برابر با $0.05\sin(4\pi t)$، $0.05\sin(4\pi t+2\pi/3)$ و $0.05\sin(4\pi t+4\pi/3)$ در نظر گرفته شده است. نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد GPS برابر با ۱۰۰ Hz در نظر گرفته شده است. در تولید داده‌های مربوطه برای مدت زمان ۳۰۰ ثانیه، زوایای اویلر اولیه در تولید ماتریس وضعیت به‌صورت زاویه سمت ۱۲/۵ درجه، زاویه فراز ۹/۰۰۹۷ درجه و زاویه غلت ۵/۶۵۶۹ درجه در نظر گرفته شده است. همچنین، از اطلاعات جدول ۳ برای بایاس/دریفت و انحراف معیار نویزهای موجود در حسگرهای ناوبری اینرسی استفاده شده است.

برای اجرای الگوریتم ترازیابی جدول ۱، فاصله زمانی بین هر دو اجرای الگوریتم برابر ۰/۰۲ در نظر گرفته شده است. همچنین، وزن تخصیص داده به هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در رابطه (۳۷) به صورت $\eta=0.7$ در نظر گرفته شده است. با اجرای الگوریتم جدول ۱، در شکل زیر نمایی از همگرایی مقادیر تخمین زده شده برای زوایای اویلر مربوط به ماتریس $C_b^n(0)$ به‌مقدار واقعی آنها مشاهده می‌شود.

با ۱۰۰ مرتبه تکرار الگوریتم و میانگین‌گیری از RMS خطای تخمین مربوط به هریک از زوایا، مقادیر بدست آمده به صورت $\mathrm{RMS}(e_{yaw})=0.0215$، $\mathrm{RMS}(e_{pitch})=2.3443\times10^{-4}$ و $\mathrm{RMS}(e_{roll})=0.0006$ است. در مقایسه با نتایج گزارش شده برای خطای تخمین در مرجع [۱۵]، دقت الگوریتم پیشنهادی در اینجا در حدود سه برابر بهبود یافته است.



شکل ۸: نمایی از چگونگی همگرایی تخمین زوایای اویلر ماتریس وضعیت اولیه به مقدار واقعی آنها در شرایط ترازیابی دینامیکی (در حضور نویز و دریفت)

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش جدیدی برای ترازیابی غیردقیق با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی پیشنهاد گردید. الگوریتم ارائه شده بر مبنای بردار مشاهدات افزونه با انتگرال‌گیری توام از بردارهای مشاهدات سرعت و موقعیت است. این روش توانسته است مزایای هریک از روش‌های ترازیابی به‌صورت ۱) ترازیابی بر مبنای بردار مشاهدات سرعت مرسوم در مراجع و ۲) ترازیابی بر مبنای بردار مشاهدات موقعیت پیشنهادی در این مقاله را تواماً حفظ نماید. براساس نتایج شبیه‌سازی ارائه شده برای سیستم ناوبری اینرسی ارزان‌قیمت ADIS16488، الگوریتم پیشنهادی دارای قوام کافی در برابر خطای حسگرهای اینرسی و سرعت همگرایی مناسب در تخمین زوایای اویلر اولیه است. همچنین، با توجه به دقت بدست آمده در بخش نتایج شبیه‌سازی، الگوریتم پیشنهادی برای رویکرد ترازیابی غیردقیق در حین حرکت کاملاً مناسب است و می‌توان از تخمین‌های بدست‌آمده از الگوریتم، به‌عنوان شرایط اولیه روش ترازیابی دقیق برمبنای فیلتر کالمن استفاده نمود. علاوه بر آن، با توجه به‌آنکه این الگوریتم به اطلاعات شتاب در دستگاه ناوبری نیاز ندارد، می‌تواند برای ترازیابی در شرایط دریایی که در آن سیستم ناوبری اینرسی در معرض حرکت انتقالی ناشی از امواج است، کارآمد باشد. به‌عنوان یک پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی می‌توان به توسعه الگوریتمی برای تعیین مناسب وزن تخصیص داده شده به‌هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت اشاره نمود. همچنین، با الهام از مرجع [۱۹]، می‌توان تلفیق مراحل غیردقیق و دقیق در رویکرد رایج ترازیابی دو مرحله‌ای و پیشنهاد یک الگوریتم ترازیابی تک‌مرحله‌ای را مدنظر قرار داد که در آن با بکارگیری یک فیلتر کالمن به موازات الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی، بایاس شتاب‌سنج و دریفت ژیروسکوپ نیز همراه با وضعیت اولیه تخمین زده می‌شوند.

مراجع

[۱] قسمتی، حیرانی نوبری، عاروان، کاشانی نیا، ۱۳۹۹. تحلیل خطای انحراف ژیروسکوپ در الگوریتم ناوبری مستقل از موقعیت سامانه‌ی اینرسی صفحه پایدار. مجله کنترل، جلد ۱۴، شماره ۲، صفحه ۱۵-۱.

[2] Savage, P.G., 2008. Computational elements for strapdown systems. Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology, pp.3-3.

[3] Lu, Z., Li, J., Zhang, X., Feng, K., Wei, X., Zhang, D., Mi, J. and Liu, Y., 2020. A new in-flight alignment method with an application to the low-cost SINS/GPS integrated navigation system. Sensors, 20(2), p.512.

[4] Xu, X., Sun, Y., Yao, Y. and Zhang, T., 2021. A robust in-motion optimization-based alignment for SINS/GPS integration. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 23(5), pp.4362-4372.

[5] Ouyang, W. and Wu, Y., 2022. Optimization-based strapdown attitude alignment for high-accuracy systems: Covariance analysis with applications. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems, 58(5), pp.4053-4069.

[۶] قهرمانی, ماجدالحسن، ۱۴۰۱. طراحی الگوریتمی برای افزایش همگرایی فیلتر کالمن توسعه‌یافته مبنی بر مدل پیش‌بین تفاضلی در ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی و تحلیل پایداری آن. *مجله کنترل*، جلد ۱۶، شماره ۱، صفحه ۳۶-۲۷.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]

[7] Chang, L., Qin, F. and Jiang, S., 2019. Strap-down inertial navigation system initial alignment based on modified process model. IEEE Sensors Journal, 19(15), pp.6381-6391.

[8] Lu, J., Xie, L. and Li, B., 2015. Analytic coarse transfer alignment based on inertial measurement vector matching and real-time precision evaluation. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 65(2), pp.355-364.

[9] Chattaraj, S., Mukherjee, A. and Chaudhuri, S.K., 2013. Transfer alignment problem: Algorithms and design issues. Gyroscopy and navigation, 4(3), pp.130-146.

[10] Zhao, H., Shang, H., Wang, Z. and Jiang, M., 2011, June. Comparison of initial alignment methods for SINS. In 2011 9th World Congress on Intelligent Control and Automation (pp. 42-47). IEEE.

[11] Li, W., Tang, K., Lu, L. and Wu, Y., 2013. Optimization-based INS in-motion alignment approach for underwater vehicles. Optik, 124(20), pp.4581-4585.

[12] Jin, K., Chai, H., Su, C., Xiang, M. and Hui, J., 2022. An optimization-based in-motion fine alignment and positioning algorithm for underwater vehicles. Measurement, 202, p.111746.

[13] Chang, L., Qin, F. and Jiang, S., 2019. Strap-down inertial navigation system initial alignment based on modified process model. IEEE Sensors Journal, 19(15), pp.6381-6391.

[14] Chang, L., Li, J. and Li, K., 2016. Optimization-based alignment for strap-down inertial navigation system: Comparison and extension. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 52(4), pp.1697-1713.

[15] Wu, M., Wu, Y., Hu, X. and Hu, D., 2011. Optimization-based alignment for inertial navigation systems: Theory and algorithm. Aerospace science and technology, 15(1), pp.1-17.

[16] Wahba, G., 1965. A least squares estimate of satellite attitude. SIAM review, 7(3), pp.409-409.

[17] Titterton, D. and Weston, J.L., 2004. Strap-down inertial navigation technology (Vol. 17). IET.

[18] Huang, Y., Zhang, Y. and Chang, L., 2018. A new fast in-motion coarse alignment method for GPS-aided low-cost SINS. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 23(3), pp.1303-1313.

[19] Chang, L., Zha, F. and Qin, F., 2017. Indirect Kalman filtering based attitude estimation for low-cost attitude and heading reference systems. IEEE/ASME Transactions On Mechatronics, 22(4), pp.1850-1858.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]