

## طراحی یک رویگر مود لغزشی جدید برای سیستم های خطی با ورودی ناشناخته و تاخیر زمانی

علی اشرف مدرس<sup>۱</sup>، حمیدرضا مؤمنی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، modarres@mapna.com  
<sup>۲</sup> دانشیار، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، momeni\_h@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۱۲/۱۳)

**چکیده:** در این مقاله یک رویگر مود لغزشی جدید برای تخمین حالت های سیستم های خطی دارای تاخیر زمانی نامعین متغیر با زمان و در حضور ورودی ناشناخته ارائه شده است. روش طراحی ارائه شده مبتنی بر توسعه رویگر مود لغزشی ژاک (ak) برای سیستم های با ورودی ناشناخته است. در این روش سادگی قابل ملاحظه ای در فرآیند طراحی در مقایسه با روش مود لغزشی مشابه ایجاد می شود. با انتخاب تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و تضمین پایداری خطای تخمین حالات سیستم، پارامترهای رویگر پیشنهادی از طریق حل نامساوی های ماتریسی خطی به دست می آیند. همچنین به منظور دست یابی به نرخ همگرایی دلخواه، تحلیل دینامیک رویگر مورد توجه قرار گرفته است. در پایان با ارائه یک مثال عددی کارآیی، سادگی و سراسری روش نشان داده می شود.

**کلمات کلیدی:** رویگر مود لغزشی، تاخیر زمانی، ورودی ناشناخته، نامساوی های ماتریسی خطی (LMIs).

### A New Sliding Mode Observer Design for Linear System with Unknown Input and Time-varying Delay

Ali Ashraf-Modarres, Hamid-Reza Momeni

**Abstract:** In this paper, a new sliding mode observer (SMO) for state estimation of linear systems with unknown time-varying delay, and in the presence of unknown input is presented. This method is an extension on well known unknown input SMO, proposed by Zak. In our approach, the design procedure is very simplified in comparison with the other similar SMO. With an adequate choice of a Lyapunov-Krasovskii functional, sufficient conditions are obtained in LMIs terms to guarantee asymptotic stability of the state estimation errors. In order to reach a guaranteed convergence rate, the dynamic properties of observer are also analyzed. The effectiveness, simplicity, and straight-forwardness of method are shown by simulation of a numerical example.

**Keywords:** Sliding Mode Observer, Time-delay, Unknown input, LMIs.

#### ۱- مقدمه

می دانیم مقدار دقیق تاخیر در بسیاری از کاربردها شناخته شده و قابل اندازه گیری نیست. در حال حاضر مراجع اندکی در رابطه با طراحی رویگر برای سیستم های دارای تاخیر زمانی که در ساختار آن نیاز به دانستن مقدار دقیق تاخیر و تغییرات آن نیست وجود دارد [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]. در این مقالات رویکرد به کار رفته در طراحی رویگر برای H سیستم های خطی دارای تاخیر زمانی، تضمین کارآیی فیلتر

مساله طراحی رویگر حالت برای سیستم های خطی دارای تاخیر با مقدار نامعین و متغیر با زمان همچنان یکی از مسائل مورد توجه و علاقه محققین است. در بیشتر پژوهش های ارائه شده پیشین، مقدار تاخیر زمانی معلوم و عمدتاً ثابت فرض شده است [۱]. این در حالی است که

روش مذکور است. همچنین در این مقاله شرایط کافی برای نیل به پاسخ مطلوب و تضمین نرخ همگرایی خطای تخمین مورد توجه قرار گرفته است.

در ادامه به منظور ساده سازی مساله، تاخیر زمانی تنها در حالات سیستم در نظر گرفته شده است. ولی با استفاده از تکنیک ارائه شده، توسعه روش برای سیستم هایی که تاخیر زمانی به طور هم زمان در حالت و ورودی کنترلی سیستم وجود دارد به راحتی امکان پذیر خواهد بود.

## ۲- شرح مساله و مقدمات ریاضی

سیستم LTI با حالات تاخیر یافته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(s) &= \phi(s), \quad \forall s \in [-d_m, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

به طوریکه  $x \in \mathcal{R}^n$ ،  $u \in \mathcal{R}^{m_1}$  و  $y \in \mathcal{R}^q$  به ترتیب عبارتند از بردار حالات سیستم، بردار ورودی کنترل و بردار خروجی اندازه گیری شده سیستم. بردار  $w \in \mathcal{R}^{m_2}$  می تواند عدم قطعیت مدل، اغتشاش خارجی یا حتی اثر تداخل زیر سیستم های مختلف در رویکرد غیر متمرکز در سیستم های مقیاس وسیع باشد.

لذا  $w(t)$  به عنوان ورودی ناشناخته ولی دارای باند محدود مطرح است. به گونه ای که به ازاء تمامی مقادیر  $t > 0$  داریم:

$$\|w(t)\| < \rho_1$$

که  $\rho_1$  یک اسکالر مثبت است. تاخیر زمانی  $d(t)$  در حالات سیستم به گونه ای است که:

$$d(t) \leq d_m, \quad \dot{d}(t) \leq \mu$$

در بردار شرایط اولیه سیستم است.

فرض بر این است که ماتریس های  $A, A_d, B, C, D$ ، ماتریس های ثابت و با ابعاد مناسب می باشند.

در نظر بگیرید که فرض های ساختاری زیر که در طراحی رویکر مورد نیاز می باشند بر قرار است:

$$\text{rank}(C[A_d D]) = \text{rank}([A_d D]) = r \quad A_1$$

تمامی صفرهای تغییر ناپذیر  $(A, [A_d D], C)$  در سمت چپ صفحه مختلط قرار دارند.

$A_3$  زوج  $(A, C)$  رویت پذیر باشد. یعنی ماتریس  $L \in \mathcal{R}^{n \times q}$  به گونه ای که مقادیر ویژه  $(A-LC)$  در نیمه چپ صفحه مختلط قرار گیرند، قابل یافتن است.

از حد مشخصی کوچکتر شود. ویژگی دیگر رویکرهای معرفی شده در این مقالات این است که طراحی رویکر با رویکرد مستقل از تاخیر (i.o.d) انجام شده است و این مساله شرایط وجود جواب را محافظه کارانه می سازد.

روش دیگری که جدیداً در مراجع برای طراحی رویکرهای تاخیر زمانی (TDO) ارائه شده است، استفاده از رویکرهای مد لغزشی است که کاربرد آن در ابتدا با هدف طراحی رویکرهای ورودی ناشناخته (UIO) بوده است که به تازگی برای سیستم های دارای تاخیر زمانی نیز توسعه داده شده اند [۷]، [۸]. مزیت استفاده از رویکرهای مد لغزشی در مقایسه با دیگر رویکرهای مقاوم نظیر  $H_\infty$  در این است که این رویکرها در برابر عدم قطعیت های سیستم، ورودی های ناشناخته یا اغتشاش غیرحساس می باشند و این ویژگی عملاً قابلیتی بیش از مقاومت رویکر را در اختیار قرار می دهد و پایداری مجانبی خطای تخمین حالت را تضمین می کند [۹].

به طور کلی دو روش و ساختار برای رویکرهای مد لغزشی وجود دارد [۱۰]. روش اول که توسط اُتکین (Utkin) ارائه شده است و سپس توسط ادواردز (Edwards) و اسپورژون (Spurgeon) توسعه یافته است [۱۰]، [۱۱] و در مراجع گوناگون به آن ارجاع داده شده است [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] اصولاً مبتنی بر استفاده از چندین ماتریس تبدیل و تغییر متغیر حالت در حین فرآیند طراحی است که مساله طراحی رویکر را کم و بیش مشکل می سازد. در روش دیگر که توسط ژاک و والکات (Zak and Walcott) ارائه شده است از ماتریس تبدیل استفاده نمی شود ولی عملاً مساله طراحی به مساله لیاپانوف محدود شده (GLP) منجر می شود [۱۵]، [۱۶] که برای حل این مساله و یافتن بهره های رویکر به استفاده از نرم افزارهای با قابلیت حل پارامتری نیاز است [۱۰]، [۱۷]. این مساله سبب شده است علی رغم سادگی روش اخیر نسبت به روش قبلی از آن کمتر استفاده شود.

البته علی رغم اشکال ذکر شده در مراجع، در مقاله حاضر اثبات می شود با در نظر گرفتن تمهیداتی می توان به راحتی بهره های رویکر را با استفاده از حل نامساوی های ماتریسی خطی (LMIs) به دست آورد و عملاً محدودیت ذکر شده در این روش را بر طرف ساخت. همچنین در این مقاله با استفاده از اصول رویکر مد لغزشی ژاک [۱۷]، [۱۸] روش مذکور به گونه ای اصلاح و توسعه داده می شود که قابل استفاده برای سیستم های دارای تاخیر زمانی با مقدار تاخیر ناشناخته و متغیر باشد. ویژگی مهم و برتری رویکر پیشنهادی نسبت به روش پیشنهاد شده در [۷] و [۸]، سادگی فرآیند طراحی و پیاده سازی این رویکر در مقایسه با

حالات سیستم، یعنی  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  با گذشت زمان به طور مجانی به سمت صفر میل کند.

در رابطه (۳)، ضریب  $K$  یک اسکالر است به گونه ای که  $K \geq \rho_1$  و داریم:

$$e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) = Ce(t) \quad (۴)$$

در این حالت دینامیک خطای تخمین عبارت است از:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - DE(e, \kappa) + Dw(t) \quad (۵)$$

با تعریف تابع لیاپانوف به صورت:

$$V(t) = e(t)^T P e(t) > 0 \quad (۶)$$

$$P = P^T > 0$$

و با مشتق گیری از  $V(t)$  خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) = e(t)^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)]e(t) - 2e(t)^T P D(v(t) - w(t)) \quad (۷)$$

که با تعریف سطح لغزش به شکل  $\sigma(e) = D^T P e = 0$  و فرض برقراری مساله لیاپانوف محدود شده:

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) < 0$$

و انتخاب سیگنال  $v(t)$  به شکل:

$$v(t) = E(e, \kappa) = \kappa \frac{\sigma(e)}{\|\sigma(e)\|} = \kappa \frac{D^T P e}{\|D^T P e\|}$$

خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t) < 0$$

همانطور که مشاهده می شود در این حالت سیگنال  $v(t)$  وابسته به مقدار خطای تخمین حالت  $e(t)$  خواهد بود و این در حالی است که می دانیم بدون استفاده از اطلاعات مربوط به حالات اندازه گیری نشده، رویکرد باید قادر به تخمین تمامی حالات سیستم باشد. لذا به منظور استقلال  $v(t)$  از حالات سیستم و وابستگی آن تنها به خطای تخمین سیگنال خروجی باید رابطه  $D^T P = FC$  نیز برقرار باشد. در این حالت داریم:

$$v(t) = E(e_y, \kappa) = \kappa \frac{F C e}{\|F C e\|} = \kappa \frac{F e_y}{\|F e_y\|}; F \in R^{m_2 \times q} \quad (۸)$$

ملاحظه می شود طراحی رویکرد جدید برای سیستم (۲) به فرم

(۳) به حل مساله لیاپانوف محدود شده زیر منتهی می شود:

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) < 0 \quad (۹)$$

$$D^T P = FC$$

توجه داریم که برای حل (۹) و محاسبه بهره های رویکرد  $L$  و  $F$  نیاز به استفاده از نرم افزارهای باقابلیت حل پارامتری است. برای حل این مساله الگوریتم هایی در [۱۷] و [۲۱] ارائه شده است.

هدف، طراحی یک رویکرد حالت برای سیستم (۱) است به گونه ای که بدون داشتن مقدار دقیق تاخیر زمانی سیستم  $d(t)$  و ورودی ناشناخته  $w(t)$ ، و تنها با اطلاع از حد بالای آن ها تمامی حالات سیستم قابل تخمین باشد. به این منظور در ادامه به عنوان مقدمات ریاضی بحث، به بیان چند لم می پردازیم.

لم [۱۹]: مکمل شور (Schur complement) - برای ماتریس های متقارن  $R$  و  $Q$  نامساوی های ماتریسی زیر معادل می باشند:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{cases} Q - SR^{-1}S^T > 0 \\ R > 0 \end{cases}$$

لم [۲۰]: برای هر ماتریس ثابت مثبت معین و متقارن  $M \in R^{n \times n}$ ، اسکالر  $\gamma > 0$  و تابع برداری  $\omega: [0, r] \rightarrow R^n$  به گونه ای که انتگرال آن خوش تعریف باشد داریم:

$$\left( \int_0^r \omega(s) ds \right)^T M \left( \int_0^r \omega(s) ds \right) \leq \gamma \int_0^r \omega(s)^T M \omega(s) ds$$

لم ۳: برای هر دو بردار دلخواه  $u \in R^n$  و  $v \in R^n$  و ماتریس مثبت معین  $R \in R^{n \times n}$  رابطه زیر برقرار است:

$$\bar{v}^T u + 2u^T v \leq u^T R^{-1} u + v^T R v$$

### ۳- طراحی رویکرد جدید برای سیستم های با ورودی ناشناخته (بدون تاخیر زمانی)

۳-۱- رویکرد ژاک برای سیستم های دارای ورودی ناشناخته سیستم LTI بدون تاخیر زمانی و با ورودی ناشناخته زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \quad (۲)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

که در این سیستم زوج  $(A, C)$  آشکارپذیر می باشد و صفراهای تغییر ناپذیر سیستم  $(A, D, C)$  سمت چپ صفحه مختلط قرار گرفته اند. همچنین داریم:

$$\text{rank}(CD) = \text{rank}(D) = m_2$$

ژاک و والکات در [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] نشان داده اند که رویکرد به شکل:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) + Dv(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ v(t) &= E(e_y, \kappa) = \kappa \frac{F C e}{\|F C e\|} \end{aligned} \quad (۳)$$

می تواند تنها با دریافت اطلاعات مربوط به ورودی کنترلی و خروجی قابل اندازه گیری سیستم، تمامی حالات سیستم را در حضور اغتشاش خارجی و ناشناخته  $w(t)$  تخمین بزند، به گونه ای که خطای تخمین

### ۳-۲- حل مساله CLP در طراحی رویکرد ژاک در

#### قالب نامساوی های ماتریسی خطی

در [۲۲] و [۲۳] شرط وجود جواب برای (۹)، برقراری شرایط اساسی  $B_1$  تا  $B_3$  به شرح زیر ذکر شده است.

$$Rank(CD) = rank(D) = m_2 \quad B_1$$

$B_2$ . تمامی صفرهای تغییر ناپذیر  $(A, D, C)$  در سمت چپ

صفحه مختلط قرار دارند.

$B_3$ . زوج  $(A, C)$  رویت پذیر باشد.

برای تبدیل این مساله به فرم LMI به بیان قضیه زیر می پردازیم.

**قضیه ۱:** با فرض برقراری شرایط  $B_1$  تا  $B_3$ ، مساله لیاپانوف محدود شده (۹) برقرار است یا به عبارت دیگر رویکرد مورد لغزشی به فرم (۳) برای سیستم (۲) وجود دارد اگر و تنها اگر نامساوی ماتریسی خطی زیر برقرار باشد:

$$A^T(D^+MD^{+T} + C^TNC) - C^TK + (D^+MD^{+T} + C^TNC)A - K^TC < 0 \quad (10)$$

که در این حالت  $L$  و  $F$  از روابط زیر حاصل می شوند:

$$F = D^TC^TN \quad L = (D^+MD^{+T} + C^TNC)^{-1}K^T \quad (11)$$

در این روابط  $K, M=M^T$  و  $N=N^T$  متغیرهای ماتریسی هستند که متعاقباً معرفی می شوند. همچنین اپراتور  $\perp$  اشاره به مکمل متعامد ماتریس مربوطه دارد.

**اثبات:** واضح است که رابطه اول از (۹)، به طور همزمان بر حسب  $L$  و  $P$  یک نامساوی ماتریسی خطی نمی باشد. با تعریف متغیرهای  $K, M=M^T$  و  $N=N^T$  به شکلی که  $L = P^{-1}K^T$  و  $P = (D^+MD^{+T} + C^TNC)$  داریم:

$$\begin{aligned} &(A^T - C^TL^T)(D^+MD^{+T} + C^TNC) \\ &+ (D^+MD^{+T} + C^TNC)(A^T - C^TL^T)^T < 0 \Rightarrow \\ &(A^T - C^TK(D^+MD^{+T} + C^TNC)^{-1})(D^+MD^{+T} + C^TNC) \\ &+ (D^+MD^{+T} + C^TNC)(A^T - C^TK(D^+MD^{+T} + C^TNC)^{-1})^T < 0 \Rightarrow \\ &A^T(D^+MD^{+T} + C^TNC) - C^TK + (D^+MD^{+T} + C^TNC)A - K^TC < 0 \end{aligned}$$

همچنین می توان  $F$  را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} FC = D^TP &\Rightarrow F = D^TPC^T(CC^T)^{-1} \Rightarrow \\ F = D^T(D^+MD^{+T} + C^TNC)C^T(CC^T)^{-1} &\Rightarrow \\ F = D^TC^TN \end{aligned} \quad (12)$$

حال به تعمیم کاربرد رویکرد ژاک برای استفاده در سیستم های

دارای تاخیر زمانی می پردازیم.

### ۴- طراحی رویکرد برای سیستم دارای تاخیر

#### متغیر با زمان و ورودی ناشناخته

در این بخش با توسعه ساختار رویکرد ژاک، رویکرد جدیدی برای تخمین حالات سیستم تاخیر دار (۱) ارائه می شود. فرض کنید رویکرد مورد نظر دارای ساختاری به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-d) + Bu(t) + \\ L(y(t) - \hat{y}(t)) &+ Gv(t) \end{aligned} \quad (13)$$

در این رابطه  $\hat{d}$  تنها تخمینی از تاخیر زمانی موجود می باشد و نیازی به دانستن مقدار دقیق میزان تاخیر و نحوه تغییرات آن نیست. هدف تعیین بهره رویکرد  $L$  و سیگنال  $v(t)$  با ساختاری مشابه (۴) است به گونه ای که خطای تخمین  $e(t)$  با گذشت زمان به طور مجانبی به سمت صفر همگرا شود. در رابطه فوق ماتریس  $G$  معلوم است که متعاقباً تعریف می شود.

**قضیه ۲:** سیستم خطی با ورودی ناشناخته و دارای تاخیر با مقدار نامشخص و متغیر با زمان (۱) را به گونه ای که حد بالای تاخیر زمانی  $d(t)$  و مشتق آن  $\dot{d}(t)$  مشخص و به شکل  $d(t) \leq \mu$  و  $\dot{d}(t) \leq d_m$  است، در نظر بگیرید و فرض کنید که شرایط  $A_1$  تا  $A_3$  برقرار می باشد. اگر نامساوی ماتریسی خطی زیر برقرار باشد، آنگاه رویکردی مطابق رابطه (۱۳) وجود خواهد داشت که خطای تخمین حالات سیستم به صورت مجانبی به صفر همگرا شود.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & P_5 & \Omega_{13} & -P_4^T & -d_m P_3^T & -d_m P_4^T \\ * & d_m R_1 & -P_5^T & 0 & -d_m P_5^T & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & -P_7^T & -d_m P_6^T & -d_m P_7^T \\ * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d_m R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -d_m R_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Omega_{11} = A^TP_2 + P_2A - C^TK - K^TC + P_3 + P_3^T + Q_1 + Q_2$$

$$\Omega_{13} = P_2^T A_d - P_3^T + P_6 + P_4^T$$

$$\Omega_{33} = -P_6^T - P_6 + P_7^T + P_7 - (1-\mu)Q_2 \quad (14)$$

که در آن  $Q_1 = Q_1^T > 0, R_1 = R_1^T > 0, P_1 = P_1^T > 0$

$Q_2 = Q_2^T > 0, P_2 = P_2^T, P_3$  تا  $P_7$  همگی ماتریس های مربعی با بعد

$n$  می باشند و  $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$

و در این حالت بهره های رویکرد  $L$  و  $F$  و همچنین سیگنال

مطابق زیر به دست می آیند:

$$G^TP_2 = FC; L = P_2^{-1}K^T \quad (15)$$

$$v(t) = E(e_y, \kappa) = \kappa \frac{Fce}{\|Fce\|} = \kappa \frac{Fe_y}{\|Fe_y\|}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 \\ P_3 & P_5 & P_6 \\ P_4 & 0 & P_7 \end{bmatrix}$$

بر این اساس  $V_1(t)$  به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$V_1(t) = e^T(t)P_1e(t) = \eta^T(t)TP\eta(t) \quad (۲۳)$$

که در این رابطه  $\eta(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t) \quad e(t-d(t))]^T$  می باشد.

با مشتق گیری از (۲۳) داریم:

$$\dot{V}_1(t) = 2e^T(t)P_1\dot{e}(t) = 2\eta^T(t)P^T \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = 2\eta^T(t)P^T \begin{bmatrix} -\dot{e}(t) + (A-LC)e(t) + A_d e(t-d(t)) + Gw_1(t) - v(t) \\ e(t) - e(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s)ds \\ e(t-d(t)) - e(t-d_m) - \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s)ds \end{bmatrix}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -2e(t)P_1\dot{e}(t) - 2e(t)P_2\dot{e}(t) + 2e(t)P_2(A-LC)e(t) + 2e(t)P_2A_d e(t-d(t)) + 2e(t)P_2G(w_1(t) - v(t)) + 2\dot{e}(t)P_5e(t) - 2\dot{e}(t)P_5e(t-d(t)) - \\ & 2\dot{e}(t)P_5 \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s)ds + 2e(t)P_3e(t) - 2e(t)P_3e(t-d(t)) - \\ & 2e(t)P_3 \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s)ds + 2e(t-d(t))P_6e(t) - 2e(t-d(t))P_6e(t-d(t)) - 2e(t-d(t))P_6 \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s)ds + \\ & 2e(t)P_4e(t-d(t)) - 2e(t)P_4e(t-d_m) - \\ & 2e(t)P_4 \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s)ds + 2e(t-d(t))P_7e(t-d(t)) - \\ & 2e(t-d(t))P_7e(t-d_m) \end{aligned}$$

با تعریف  $\varepsilon(t)$  به صورت زیر:

$$\varepsilon(t) = [e(t), \dot{e}(t), e(t-d(t)), e(t-d_m), \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s)ds, \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s)ds]^T$$

داریم:

$$\dot{V}_1(t) = \varepsilon(t)^T \bar{\Omega} \varepsilon(t) + 2e(t)P_2G(w_1(t) - v(t)) \quad (۲۴)$$

که در آن  $\bar{\Omega}$  مطابق رابطه زیر است:

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \bar{\Omega}_{13} & -P_4^T & -P_3^T & -P_4^T \\ * & 0 & -P_5^T & 0 & -P_5^T & 0 \\ * & * & \bar{\Omega}_{33} & -P_7^T & -P_6^T & -P_7^T \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_{11} = A^T P_2 + P_2 A - C^T K - K^T C + P_3 + P_3^T$$

$$\bar{\Omega}_{12} = P_5 + P_1 - P_2^T$$

$$\bar{\Omega}_{13} = P_2^T A_d - P_3^T + P_6 + P_4^T$$

$$\bar{\Omega}_{33} = -P_6^T - P_6 + P_7^T + P_7$$

همچنین با مشتق گیری از (۲۱) بدست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & d_m \dot{e}^T(t) \cdot R_1 \cdot \dot{e}(t) - \int_{t-d_m}^t \dot{e}^T(s) \cdot R_1 \cdot \dot{e}(s) ds = \\ & d_m \dot{e}^T(t) \cdot R_1 \cdot \dot{e}(t) - \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}^T(s) \cdot R_1 \cdot \dot{e}(s) ds - \\ & \int_{t-d(t)}^t \dot{e}^T(s) \cdot R_1 \cdot \dot{e}(s) ds \end{aligned}$$

**اثبات:** با توجه به تفاضل (۱) و (۱۳)، دینامیک خطای تخمین

مطابق عبارت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A-LC)e(t) + \\ & A_d(x(t-d(t)) - \hat{x}(t-d)) + Dw(t) - Gv(t) = \\ & (A-LC)e(t) + A_d e(t-d(t)) + Dw(t) - \\ & Gv(t) + A_d \zeta(t) \end{aligned} \quad (۱۶)$$

که در این رابطه:

$$\zeta(t) = \hat{x}(t-d(t)) - \hat{x}(t-d) = \int_{t-d}^{t-d(t)} \hat{\dot{x}}(s) ds \quad (۱۷)$$

توجه شود که به علت نا معلوم بودن مقدار دقیق  $d(t)$  در هر

لحظه، سیگنال  $\zeta(t)$  در رابطه (۱۶) به مثابه یک ورودی ناشناخته عمل

می کند. لذا می توان رابطه (۱۶) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & (A-LC)e(t) + A_d e(t-d(t)) + Gw_1(t) - Gv(t) \\ Gw_1(t) = & Dw(t) + A_d \zeta(t) \quad ; \|w_1(t)\| < \rho_2 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که در آن  $rank(G) = rank([D \mid A_d])$  می باشد و با فرض

$$rank(CG) = rank(G) \text{ داریم } A_1$$

برقراری  $w_1(t)$  نماینده تمامی عدم قطعیت ها و  $\rho_2$  یک اسکالر مثبت

است.

حال تابعی نامزد لیاپانوف-کراسوفسکی را به شکل زیر در نظر

می گیریم:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (۱۹)$$

$$V_1(t) = e^T(t)P_1e(t) \quad (۲۰)$$

$$V_2(t) = \int_{-d_m}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s)R_1\dot{e}(s)dsd\theta \quad (۲۱)$$

$$V_3(t) = \int_{t-d_m}^t e^T(s)Q_1e(s)ds + \int_{t-d(t)}^t e^T(s)Q_2e(s)ds \quad (۲۲)$$

که در آن  $Q_1 = Q_1^T > 0, R_1 = R_1^T > 0, P_1 = P_1^T > 0$  و

$$Q_2 = Q_2^T > 0$$

واضح است که به ازاء تمام  $t \geq 0; V(t) \geq 0$  خواهد بود. بر

اساس قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی [۲۴] برای بررسی پایداری مجانبی

دینامیک خطای تخمین (رابطه (۱۸)) کافی است که به ازاء تمام

$\dot{V}(t) \leq 0; t \geq 0$  را تحقیق کنیم. به این منظور با استفاده از ایده ای

مشابه آنچه که در [۲۵] به کار گرفته شده است، ماتریس های  $P$  و  $T$  را

به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$T = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

همگرایی خطای تخمین به میزان  $\alpha$ ، در حضور ورودی ناشناخته و تاخیر زمانی، قضیه زیر مطرح می شود.  
**قضیه ۳:** دینامیک خطای تخمین رویکرد بر اساس رابطه (۱۸) را در نظر بگیرید. با فرض آنکه شرایط  $A_1$  تا  $A_3$  برقرار باشد، آنگاه این دینامیک پایدار نمایی با نرخ  $\alpha$  است اگر نامساوی ماتریسی خطی زیر برقرار باشد:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & P_2 b_m A_d & P_5 & \Psi_{14} & -P_4^T & -d_m P_3^T & -d_m P_4^T \\ * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & d_m R_1 & -P_5^T & 0 & -d_m P_5^T & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & -P_7^T & -d_m P_6^T & -d_m P_7^T \\ * & * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -d_m R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -d_m R_1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= (A + \alpha I)^T P_2 + P_2 (A + \alpha I) - C^T K - K^T C + P_3 + P_3^T + Q_1 + Q_2 \\ \Psi_{14} &= P_2^T A_d b_0 - P_3^T + P_6 + P_4^T \\ \Psi_{44} &= -P_6^T - P_6 + P_7^T + P_7 - (1 - \mu) Q_2 + R_2 \end{aligned} \quad (۲۸)$$

که در آن  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  ماتریس های متقارن مثبت معین بوده و  $b_0$  و  $b_m$  مقادیر ثابتی هستند که طبق رابطه زیر تعریف می شوند:

$$e^{\alpha d(t)} = b_0 + \Delta(t) b_m; \quad \|\Delta(t)\| < 1 \quad (۲۹)$$

$$b_0 = \frac{1+e^{\alpha d_m}}{2}; \quad b_m = \frac{-1+e^{\alpha d_m}}{2}$$

**اثبات:** متغیر  $e_\alpha(t)$  را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$e_\alpha(t) = e^{\alpha t} e(t) \quad (۳۰)$$

با توجه به تعریف فوق بدیهی است که اگر  $e_\alpha(t)$  پایدار مجانبی باشد آنگاه  $e(t)$  پایدار نمایی با نرخ  $\alpha$  خواهد بود.

با مشتق گیری از رابطه (۳۰) و استفاده از رابطه (۱۸) بدست می آوریم:

$$\dot{e}_\alpha(t) = (A + \alpha I - LC) e_\alpha(t) + e^{\alpha d(t)} A_d e_\alpha(t - d(t)) + G(w_1(t) - v(t)) e^{\alpha t} \quad (۳۱)$$

از رابطه (۲۹) در (۳۱) داریم:  $e^{\alpha d(t)}$  که با جایگزینی مقدار معادل

$$\dot{e}_\alpha(t) = (A + \alpha I - LC) e_\alpha(t) + (b_0 + \Delta(t) b_m) A_d e_\alpha(t - d(t)) + G(w_1(t) - v(t)) e^{\alpha t} \quad (۳۲)$$

با تعریف  $\varepsilon_\alpha(t)$  به صورت زیر:

$$\varepsilon_\alpha(t) = [e_\alpha(t), \dot{e}_\alpha(t), e_\alpha(t - d(t)), e_\alpha(t - d_m), \int_{t-d(t)}^t \dot{e}_\alpha(s) ds, \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}_\alpha(s) ds]^T$$

و استفاده از تکنیکی مشابه روش اثبات قضیه ۲ و استفاده از تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مشابه و بر اساس متغیر حالت جدید بدست می-آید:

$$\dot{V}(t) \leq \varepsilon_\alpha^T(t) \Phi \varepsilon_\alpha(t) + 2e_\alpha(t) P_2 G(w_1(t) - v(t)) e^{\alpha t} \quad (۳۳)$$

با استفاده از لم ۲ ارائه شده در بخش دوم مقاله داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &< d_m \dot{e}^T(t) R_1 \dot{e}(t) - \frac{1}{d_m} \left( \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s) ds \right)^T R_1 \left( \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s) ds \right) - \frac{1}{d_m} \left( \int_{t-d(t)}^t \dot{e}(s) ds \right)^T R_1 \left( \int_{t-d_m}^{t-d(t)} \dot{e}(s) ds \right) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

و نهایتاً با مشتق گیری از رابطه (۲۲) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= e^T(t) (Q_1 + Q_2) e(t) - e^T(t - d_m) Q_1 e(t - d_m) - (1 - \mu) e^T(t - d(t)) Q_2 e(t - d(t)) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

با جایگزینی روابط (۲۴) تا (۲۶) در (۱۹) نتیجه می شود:

$$\dot{V}(t) \leq \varepsilon(t)^T \Omega \varepsilon(t) + 2e(t) P_2 G(w_1(t) - v(t)) \quad (۲۷)$$

$\Omega =$

$$\bar{\Omega} + \text{diag} \left[ (Q_1 + Q_2), d_m R_1, -(1 - \mu) Q_2, -Q_1, -\frac{R_1}{d_m}, -\frac{R_1}{d_m} \right]$$

لذا با استفاده از رابطه اخیر و مکمل شور (لم ۱)، رابطه (۱۴) را

خواهیم داشت.

از رابطه (۲۷) نتیجه می شود که اگر  $\Omega < 0$  باشد و سطح لغزش

$$\sigma(e) = G^T P_1 e = 0$$

$$P_1 = P_2 \text{ با انتخاب } \kappa > \rho_2 \text{ و } \mathcal{U}(t) = E(e, \kappa) = \kappa \frac{G^T P_2 e}{\|G^T P_2 e\|};$$

و  $FC = G^T P_1$  همواره  $\dot{V}(t) \leq 0$  بوده و دینامیک خطای تخمین

(۱۸) پایدار مجانبی خواهد بود و رویکرد مورد لغزشی مورد نظر بر اساس

روابط (۱۳) و (۱۵) قابل تحقق است.

■

باید توجه شود که در طراحی رویکرد پیشنهادی و حل  $LMI$  ذکر شده

در رابطه (۱۴) حضور ماتریس های  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  تا  $P_7$  باعث

افزایش انعطاف پذیری طراحی و امکان پذیری  $LMI$  مورد نظر می شود.

به عنوان مثال در نظر بگیرید که اگر  $P_5 = 0$  باشد، نامساوی ماتریسی

خطی (۲۷) امکان پذیر نمی باشد.

## ۵- تحلیل دینامیک رویکرد و تضمین نرخ همگرایی خطای تخمین حالت

طبق تعریف [۲۶] با فرض مقدار اسکالر  $\alpha > 0$ ، دینامیک خطای

تخمین (۱۸) را پایدار نمایی با نرخ  $\alpha$  می نامند اگر یک اسکالر  $\beta > 1$

وجود داشته باشد به گونه ای که به ازاء هر شرایط اولیه  $\phi$ ، پاسخ معادله

حالت خطا یا به عبارت دیگر  $e(t; t_0, \phi)$  نامعادله زیر را برآورده

سازد.

$$|e(t; t_0, \phi)| \leq \beta |\phi| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

در رابطه اخیر  $t_0$  زمان محدودی است که طی آن دینامیک خطای

تخمین بر روی سطح لغزش قرار می گیرد. به منظور تضمین نرخ

نامساوی ماتریسی خطی (۲۸) را می‌سازیم. از حل این نامساوی توسط نرم افزار Matlab نسخه ۷.۲ به دست می‌آوریم:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.044 * 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 61.563 & -5.189 \\ 0 & -5.189 & 15.568 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 39.785 \\ 61.257 \\ -4.270 \end{bmatrix}^T, L = \begin{bmatrix} 1.946 * 10^6 \\ 0.9999 \\ 0.0591 \end{bmatrix}, F = 2.044 * 10^{-5}$$

با استفاده از مقادیر به دست آمده برای  $L$  و  $F$  و با فرض  $\kappa = 50$  سیگنال  $v(t)$  و نهایتاً کل ساختار روتنگر شکل می‌گیرد. نتایج شبیه سازی در شکل (۱) دیده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود تخمین حالات سیستم به خوبی انجام می‌شود. در شکل مربوط به حالت اول به علت همگرایی سریع، مقدار واقعی و تخمین زده شده بر یک دیگر منطبق شده است. در شکل پایین سمت راست، خطای تخمین حالت برای هر سه حالت نشان داده شده است.

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش طراحی روتنگر مد لغزشی جدید برای تخمین حالات سیستم‌های خطی دارای تاخیر زمانی با حضور ورودی ناشناخته ارائه شده است. این روش در مقایسه با روش‌های مقاوم دیگر نظیر  $H_\infty$  دارای این مزیت است که پایداری مجانبی خطای تخمین حالات تضمین می‌شود. با استفاده از تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب، شرایط کافی برای وجود جواب در قالب نامساوی های ماتریسی خطی ارائه شده است. همچنین برای دستیابی به دینامیک دلخواه روتنگر، مساله پایداری نمایی خطای تخمین حالات نیز مورد توجه قرار گرفته است. در پایان با ارائه یک مثال عددی، نتایج شبیه سازی موفقیت و کارایی روش را نشان می‌دهد.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & P_5 & \Phi_{13} & -P_4^T & -d_m P_3^T & -d_m P_4^T \\ * & d_m R_1 & -P_5^T & 0 & -d_m P_5^T & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & -P_7^T & -d_m P_6^T & -d_m P_7^T \\ * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d_m R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -d_m R_1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{11} = (A + \alpha I)^T P_2 + P_2 (A + \alpha I) - C^T K - K^T C + P_3 + P_3^T + Q_1 + Q_2 + P_2 b_m A_d R_2^{-1} A_d^T b_m P_2$$

$$\Phi_{13} = P_2^T A_d b_0 - P_3^T + P_6 + P_4^T$$

$$\Phi_{33} = -P_6^T - P_6 + P_7^T + P_7 - (1 - \mu) Q_2 + R_2$$

که برای آنکه  $\dot{V}(t)$  همواره کوچکتر از صفر باشد باید  $\Phi < 0$  باشد. همچنین توجه داریم که جمله آخر در عبارت مربوط به  $\Phi_{11}$  غیر خطی است که باعث می‌شود  $\Phi < 0$  یک  $LMI$  نباشد. با استفاده از مکمل شور، نامساوی ماتریسی اخیر به فرم خطی (۲۸) در خواهد آمد.

توضیح: به هنگام محاسبات مربوط به  $\dot{V}(t)$  از رابطه زیر که منتج از به کارگیری لم ۳ است استفاده شده است:

$$2e_\alpha(t) P_2 b_m \Delta(t) A_d e_\alpha((t) - d(t)) < e_\alpha(t)^T P_2 b_m A_d R_2^{-1} A_d^T b_m P_2 e_\alpha(t) + e_\alpha((t) - d(t))^T R_2 e_\alpha((t) - d(t))$$

## ۶- مثال عددی

سیستم (۱) را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$d(t) = 0.2 + 0.5 \sin 4\pi t ;$$

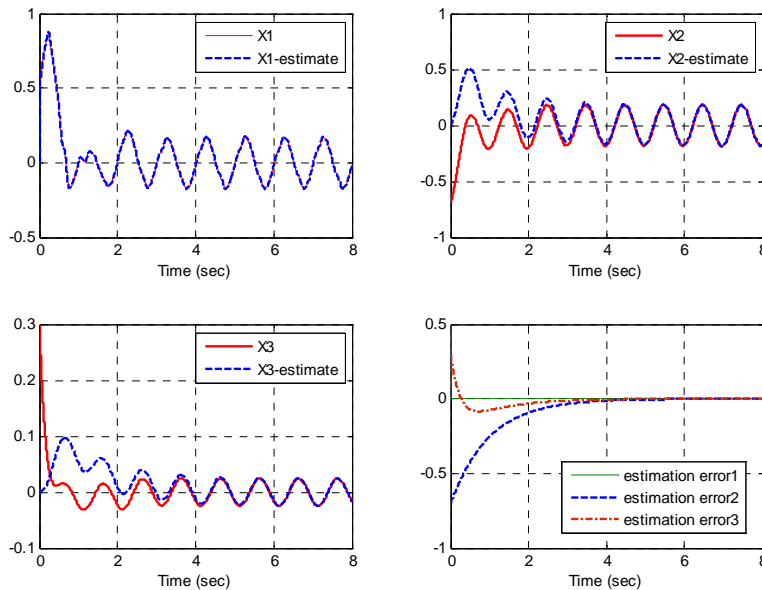
$$w(t) = 0.5 \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) ; u(t) = \sin 2\pi t$$

مطلوب است طراحی روتنگری به فرم (۱۳) به گونه‌ای که دینامیک خطای تخمین حالت به طور مجانبی به صفر همگرا شود و نرخ همگرایی بزرگتر از  $\alpha = 1$  باشد. با استفاده از اطلاعات موجود

## مراجع

- [1] J.-P. Richard, 2003, "Time Delay Systems: An overview of some recent advances and open problems", *Automatica* Vol. 39, pp. 1667-1694.
- [2] H. H. Choi, M. J. Chung, 1996, "Observer-based  $H_\infty$  controller design for state delayed linear systems", *Automatica*, Vol. 32, pp. 1073-1075.
- [3] H. H. Choi and M. J. Chung, 1997, "Robust Observer-based  $H_\infty$  controller design for linear uncertain time-delay systems", *Automatica*, Vol. 33, pp. 1749-1752.
- [4] C.E. de Souza, R.E. Palhares and P.L.D. Peres, 1999, "Robust  $H_\infty$  filtering for uncertain linear systems with multiple time-varying state: An LMI approach", *38th IEEE CDC'99, Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, pp. 2023-2028.
- [5] E. Fridman, U. Shaked and L. Xie, 2003, "Robust  $H_\infty$  filtering of linear systems with time-varying delay", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 159-165.
- [6] Z. Wang, B. Huang and H. Unbehauen, 1999 "Robust  $H_\infty$  observer design for uncertain time-delay systems:(I) the continuous case", *14th IFAC World Congress*, Beijing, China, pp. 231-236.
- [7] A. Seuret, T. Floquet, J.P. Richard, S.K. Spurgeon, 2007, "A Sliding Mode Observer for Linear Systems with Unknown Time Varying Delay", *American Control Conference*, New York City, USA .
- [8] A. Seuret, T. Floquet, J.P. Richard, S.K. Spurgeon, 2009, "Observer Design for Systems with Non Small and

- Applied Mathematics and Computer Science*, Vol.15, No. 4, pp. 431-446.
- [18] S. Hui, S. Sudhoff and S.H. Zak, 2006, "On estimation regions of stability of estimation error of sliding mode observers for uncertain systems", *Proceedings of American Control Conference*, USA.
- [19] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, *Delft university*, The Netherlands, DISC.
- [20] K. Gu, 2000, "An integral inequality in the stability problem of time-delay systems", *Proceedings of the IEEE Conference Decision Control*, Sydney, Australia, pp. 2805-2810.
- [21] K. Kalsi, J. Lian and S. H. Zak, 2008, "Decentralized control of nonlinear interconnected systems", *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France.
- [22] C. Edwards, X. Yan and S. K. Spurgeon, 2007, "On the solvability of the constrained Lyapunov problem, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 52, No. 10, pp. 1982-1987.
- [23] M. Corless and J. Tu, 1998, "State and input estimation for a class of uncertain systems", *Automatica*, Vol. 34, pp. 757-764.
- [24] M. S. Mahmoud, Robust Control and Filtering for Time-Delay, *Marcel Dekker*, NewYork, 2000.
- [25] T. Li, L. Guo and Y. Zhang, 2008, "Delay-range-dependent robust stability and stabilization for uncertain systems with time-varying delay", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 18, No.13, pp. 1372-1387.
- [26] S-I. Niculescu, C-E. de Souza, L. Dugard and J-M. Dion, 1998, "Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, pp. 743-748.
- Unknown Time-Varying Delay", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, Volume 388/2009, 233-242,
- [9] L. Fridman, A. Levant and Jorge. Davila, "High-Order Sliding-Mode Observer for Linear Systems with Unknown Inputs", *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems*, Alghero, Italy, 2006.
- [10] Edwards C. and Spurgeon S. K., Sliding Mode Control: Theory and Applications, *Taylor & Francis*, 1998.
- [11] C. Edwards and S. K. Spurgeon, 1994, "On the development of discontinuous observers", *International Journal of Control*, Vol. 59, pp. 1211-1229.
- [12] X. G. Yan, C. Edwards, 2007, "Sensor fault detection and isolation for nonlinear systems based on a sliding mode observer", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Volume 21, Issue 8, pp. 657-673.
- [13] T. Floquet, C. Edwards, S. K. Spurgeon, 2007, "On sliding mode observers for systems with unknown inputs", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Volume 21, pp. 638-656.
- [14] C. Edwards , S.K. Spurgeon , and R.J. Patton, 2000, "Sliding mode observers for fault detection and isolation", *Automatica*, Vol. 36, No. 4, pp. 541-553.
- [15] B.L. Walcott and S.H. Zak, 1987, "State observation of nonlinear uncertain dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 2, pp. 166-170.
- [16] B.L. Walcott and S.H. Zak, 1998, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 18, No. 1, pp. 88-104.
- [17] S. Hui and S.H. Zak , 2005, "Observer design for systems with unknown input", *International Journal of*



شکل ۱: مقدار واقعی و تخمینی برای سه حالت  $x_1(t)$ ،  $x_2(t)$  و  $x_3(t)$  و وضعیت خطای تخمین این سه حالت