مجله کنترل
جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۹-۱۱

پایدارسازی سیستم‌های همگن سوئیچ شونده با استفاده از تابع لیاپانوف مشترک

خاطره سخنور ماهانی [۱]، علی کریم پور [۲]، ناصر پریز [۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، kh.sokhanvar@stu-mail.um.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، karimpor@um.ac.ir

[۳] استاد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۲/۲۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۴/۱۹)

چکیده: در این مقاله روشی جدید برای پایدارسازی و طراحی قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده به عنوان دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده معرفی شده است. سیستم سوئیچ شونده مورد نظر دارای تعداد مشخصی زیرسیستم است که همگی همگن از درجه دلخواه با ضرایب گسترش یکسان هستند. در این روش هیچ محدودیتی در رابطه با بعد سیستم، درجه همگنی و ضرایب گسترش وجود ندارد. روش ارائه شده مبتنی بر وجود تابع لیاپانوف مشترک همگن برای زیرسیستم‌ها است و براساس آن قانون کلیدزنی پایدارساز همگن مشخص می‌گردد. در این روش یک سیستم ترکیبی از زیرسیستم‌ها ساخته می‌شود و در قضیه ای نشان داده شده که پایداری سیستم ترکیبی، پایداری سیستم سوئیچ شونده به همراه قانون کلیدزنی معرفی شده را نتیجه می‌دهد. همچنین تابع لیاپانوف سیستم ترکیبی، به عنوان تابع لیاپانوف مشترک برای سیستم سوئیچ شونده معرفی شده است.

کلمات کلیدی: پایداری، تابع لیاپانوف مشترک، سیستم غیرخطی سوئیچ شونده، سیستم همگن، قانون کلیدزنی پایدارساز.

Stabilization of Switched Homogeneous Systems using Common Lyapunov Function

Khatereh Sokhanvar Mahani, Ali Karimpour, Naser Pariz

Abstract: In this paper, a new method is introduced to study the stabilization and design of stabilizing switching law for switched homogeneous systems as a class of switched nonlinear systems. The considered switched system has a number of homogeneous subsystems with desired degree and similar dilation coefficients. In this method, there is not any limitation about system dimension, homogeneous degree and dilation coefficients. The proposed method is based on existence of homogeneous common Lyapunov function for subsystems and using that, the stabilizing switching law is specified. In this method, a combined system of subsystems is introduced and in a theorem it is shown that the stability of combined system results in the stability of switched system with defined switching law. Thus the Lyapunov function of combined system is introduced as common Lyapunov function for switched system.

Keywords: stability, common Lyapunov function, switched nonlinear system, homogeneous system, stabilizing switching law.

۱- مقدمه

مطالعه وضعیت پایداری یکی از مسائل اصلی مطرح در رابطه با هر سیستم است. سیستم‌های هایبرید و سوئیچ شونده در سالهای اخیر بسیار مورد توجه محققان و پژوهشگران قرار گرفته اند. سیستم سوئیچ شونده دارای دو نوع دینامیک است. یکی دینامیک وابسته به زمان مربوط به زیرسیستم‌ها که با معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی مشخص می‌شود و

دیگری دینامیک منطقی مربوط به متغیرهای گسسته که از قوانین شرطی و منطقی تشکیل می‌شود. این دو نوع دینامیک در تقابل با یکدیگر خصوصیات پیچیده‌ای را ایجاد می‌کنند، مثل کلیدزنی هنگامی که متغیر مورد نظر شرایط خاصی را احراز می‌کند و یا پرش حالت در زمان تغییر متغیر کلیدزنی.

برخی زمینه‌های مورد مطالعه و تحقیق در رابطه با سیستم‌های سوئیچ شونده عبارتند از: بررسی پایداری، مدلسازی، روش‌های سیستماتیک در بررسی عملکرد، کنترل پذیری، کنترل بهینه و ردیابی و ... که در مقالات و پژوهش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند[۱]، [۲]، [۳]،[۴] و [۵] و [۶].

موضوع پایداری یکی از مهم‌ترین مسائل مطرح در تئوری کنترل است. این مسئله در رابطه با سیستم‌های سوئیچ شونده با توجه به تاثیر دینامیک زیرسیستم‌ها و قانون کلیدزنی از پیچیدگی زیادی برخوردار است. به طور مثال، هنگامی که همه زیرسیستم‌ها پایدار نمایی هستند ممکن است یک قانون کلیدزنی وجود داشته باشد که باعث ناپایداری سیستم سوئیچ شونده شود. از طرف دیگر با کلیدزنی مناسب بین زیرسیستم‌های ناپایدار ممکن است بتوان سیستم سوئیچ شونده را پایدار ساخت. مسئله پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده به سه شکل مختلف مطرح شده است:

الف) بررسی وضعیت پایداری تحت قانون کلیدزنی مشخص

ب) بررسی وضعیت پایداری تحت قانون کلیدزنی دلخواه

ج) طراحی قانون کلیدزنی پایدارساز که در این نوع مسائل، هدف پایدار کردن پاسخ سیستم با کلیدزنی بین زیرسیستم‌ها است [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲].

یکی از روشهای بررسی پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده استفاده از تابع لیاپانوف مشترک[۱] است. در این حالت یک تابع لیاپانوف که برای هریک از زیرسیستم‌ها در همه‌جا یا در بخشهایی از فضای حالت که آن زیرسیستم امکان فعال شدن دارد، صادق باشد معرفی شده و بر این اساس پایداری سیستم ثابت می‌گردد [۱۳] و [۱۴]. روش دیگر معرفی تابع لیاپانوف چندگانه[۲] است. در این روش در هر ناحیه از فضا با توجه به زیرسیستم فعال یک تابع لیاپانوف معرفی می‌شود که البته این توابع لیاپانوف باید روی مرزهای کلیدزنی شرایط خاصی داشته باشند که در منبع [۱۵] ذکر شده است.

مسئله پایداری سیستم‌های سوئیچ شونده همانند تمام مسائل کنترلی ابتدا به طور گسترده در مورد سیستم‌های خطی سوئیچ شونده مورد مطالعه قرار گرفته است و با توجه به پیچیدگیهای موجود همچنان ادامه دارد [۷]، [۱۰] و [۱۱]، [۱۶]،[۱۷] و [۱۸].

بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده نیز در مرحله بعدی مطرح و بسیار مورد توجه است [۹] و [۱۰]، [۱۴] و [۱۵] و [۱۹]. هر چند در مسئله پایداری سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده نیز مبنای کار همان توابع لیاپانوف مشترک یا چندگانه است، ولی روش کلی برای ارائه آن وجود ندارد و از این رو معمولا سیستم سوئیچ شونده با دسته خاصی از زیرسیستم‌های غیرخطی که دارای ویژگیهایی باشند مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد. در این مقاله آنالیز پایداری برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده مطرح شده است. سیستم‌های همگن دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی هستند که شامل سیستم‌های خطی و چندجمله‌ای می‌باشند. اهمیت سیستم‌های همگن در این است که می‌توان سیستم‌های غیرخطی را توسط آن تقریب محلی زد. از این‌رو مسائل مختلف کنترلی در رابطه با این سیستم‌ها مورد توجه محققان بوده‌است. به سیستم سوئیچ شونده که زیرسیستم‌های آن همگی همگن با ضرایب گسترش[۳] یکسان باشند، سیستم همگن سوئیچ شونده گفته می‌شود. چنین سیستم‌هایی با توجه به ماهیت غیرخطی زیرسیستم‌ها از یک طرف و خواص جالب آنها از طرف دیگر در سالهای اخیر مورد توجه ویژه قرار گرفته‌اند. موضوع پایداری سیستم‌های همگن سوئیچ شونده در مراجع مختلف با اعمال محدودیتهایی در مورد زیرسیستم‌ها مطالعه شده‌است. در مرجع [۲۰] پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده دوبعدی بررسی شده‌است. در این مقاله دو زیرسیستم پایدار چند جمله‌ای دوبعدی در نظر گرفته شده و مسئله پایداری بر مبنای انتگرال اول تعمیم یافته مطالعه شده‌است. در این مقاله زیرسیستم‌ها دارای ضرایب گسترش استاندارد هستند. دسته دیگری از سیستم‌های همگن سوئیچ شونده مورد توجه، دارای زیرسیستم‌هایی از نوع چندجمله‌ای درجه فرد می‌باشند. در مرجع [۲۱] همه زیرسیستم‌ها چندجمله‌ای (گسترش استاندارد) از یک درجه فرد می‌باشند. در این مقاله نویسنده با استفاده از ضرب کرونکر و ضرب شبه تنسور به معادله شبه لیاپانوف ماتریسی دست یافته و شرایط کافی برای پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده را بیان کرده است. نتایج این مقاله برای سیستم همگن سوئیچ شونده با شرایط مورد نظر به صورت LMI[۴] در آمده‌است. هر چند مقاله مذکور دارای نتایج جالب توجهی است اما مرجع [۲۲] مثال نقضی برای یکی از لم‌های اصلی مورد استفاده در این مقاله ارائه داده-است. در مراجع [۲۳] و [۲۴] نیز پایداری سیستم سوئیچ شونده با زیرسیستم‌های همگن گسسته زمان درجه اول با گسترش استاندارد و تحت سوئیچ دلخواه با مطالعه نرخ رشد بررسی شده‌است. در مرجع [۲۵] نیز ابتدا مسئله پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی دلخواه بررسی شده و شرایط کافی برای آن ارائه شده است. در مرجع [۲۵] ابتدا فرض شده که برای هر زیرسیستم یک تابع لیاپانوف مناسب ساخته شود و سپس شرایط کافی برای وجود تابع لیاپانوف مشترک ارائه شده است. تابع لیاپانوف مشترک به صورت ترکیبی از توابع لیاپانوف زیرسیستم‌ها معرفی شده و پایداری مجانبی همه‌جایی مبدا به ازای قانون کلیدزنی دلخواه را نتیجه می‌دهد. سپس موضوع پایداری سیستم همگن

۱ Common Lyapunov Function

۲ Multiple Lyapunov Function

۳ Dilation coefficient

۴ Linear Matrix Inequality

سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی مشخص مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش ابتدا لحظات کلیدزنی مشخص فرض شده و سپس مسئله برای حالتی که علاوه بر لحظات کلیدزنی، ترتیب زیرسیستم‌ها نیز معلوم باشد حل شده‌است. در تمام بخشهای این مقاله فرض شده‌است که زیرسیستم‌های همگن دارای درجه یکسان هستند.

در مقاله حاضر، هدف بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده است که در آن زیرسیستم‌ها همگن با گسترش یکسان هستند. برای این منظور از ایده وجود ترکیب محدب پایدار برای سیستم خطی سوئیچ شونده استفاده شده و به سیستم مورد بحث تعمیم داده می‌شود. براین اساس شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم همگن سوئیچ شونده بیان می‌گردد.

برخلاف مقالات مورد مطالعه قبلی، در این تحقیق هیچ محدودیت اضافی به سیستم تحمیل نشده‌است. در واقع مهم‌ترین مزیت روش ارائه شده در مقاله حاضر پوشش دادن کامل‌تر مسئله پایدارسازی سیستم همگن سوئیچ شونده نسبت به کارهای قبلی است. در روش ارائه شده زیرسیستم‌ها همگن با ضرایب گسترش یکسان هستند ولی محدودیت دیگری مانند محدودیت بعد [۲۰]، فرد بودن ضرایب گسترش ویا استاندارد (برابر یک) بودن ضرایب گسترش [۲۰]، [۲۱]، [۲۴] و [۲۵] وجود ندارد. همچنین محدودیتی روی درجه همگنی زیرسیستم‌ها [۲۱] و یا برابری آن [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] وجود ندارد. یعنی زیرسیستم‌ها می‌توانند دارای درجات همگنی مختلف باشند، درحالیکه در اکثر کارهای انجام شده قبلی درجه همگنی برای همه زیرسیستم‌ها یکسان فرض شده است. بنابراین نتایج بدست آمده برای سیستم همگن سوئیچ شونده با هر بعد و ضرایب گسترش دلخواه و درجات مختلف همگنی برقرار است.

مبنای روش ارائه شده، معرفی تابع لیاپانوف مشترک برای سیستم همگن سوئیچ شونده است که براساس آن هر یک از زیرسیستم‌ها در بخشی از فضای حالت امکان فعال شدن دارند. معرفی تابع لیاپانوف مشترک از دشواری‌های این روش است. همچنین ممکن است نتوان تابع لیاپانوف مشترک را یافت ولی قانون کلیدزنی پایدارساز وجود داشته باشد.

در ادامه مقاله، ابتدا در بخش ۲ تعاریف و ریاضیات مورد نیاز بیان شده‌است. در بخش ۳ نتایج اصلی به همراه مثال و شبیه سازی ارائه شده و درنهایت بخش ۴ شامل نتیجه گیری است.

۲- تعاریف و ریاضیات مورد نیاز

در این بخش ابتدا به بیان تعریف تابع و سیستم همگن می‌پردازیم.

تعریف ۱: [۲۶] تابع $f : R^n \to R$ همگن از درجه d با توجه به Δ_λ^r است، هرگاه

$$f\left(\Delta_\lambda^r(x)\right)=\lambda^d f(x) \qquad (۱)$$

به ازای تمام مقادیر $\lambda > 0$ و $r = (r_1,\ldots,r_n) \in R^n$ که در آن $r_i > 0$ است، برقرار باشد. همچنین r_i ها ضرایب وزنی گسترش و $\Delta_\lambda^r(x) = (\lambda^{r_1}x_1,\ldots,\lambda^{r_n}x_n)$ گسترش نامیده می‌شود.

تعریف ۲: [۲۶] میدان برداری n بعدی f همگن از درجه d با توجه به Δ_λ^r است، اگر برای همه مقادیر $1 \le i \le n$ ، f_i همگن از درجه $r_i + d$ باشد. یعنی

$$f_i\left(\Delta_\lambda^r(x)\right)=\lambda^{r_i+d} f_i(x) \qquad (۲)$$

تعریف ۳: [۲۶] به مجموعه نقاطی که توسط یکی عناصر آن مانند x_0 و گسترش Δ_λ^r بصورت زیر تعریف می‌شود شعاع همگن گفته می‌شود؛

$$R_{x_0} = \left\{x \mid x = \Delta_\lambda^r(x_0); \forall\lambda > 0\right\}. \qquad (۳)$$

سیستم همگن سوئیچ شونده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f_\sigma(x) \qquad (۴)$$

که در آن x بردار حالت و $\sigma = \sigma(t)$ تابع قطعه‌ای ثابت است که سیگنال کلیدزنی را مشخص می‌کند:

$$\sigma(t) : [0,+\infty) \to Q = \{1,\ldots,m\} \qquad (۵)$$

تابع $\sigma(t)$ مشخص می‌کند که در هر لحظه یکی از زیرسیستم‌ها فعال است و دینامیک (۴) توسط آن توصیف می‌شود.

لازم به ذکر است که ترتیب فعالیت زیرسیستم‌ها را قانون کلیدزنی مشخص می‌کند که در حالت کلی می‌تواند به یک یا چند مورد از متغیرهای زمان، شرایط اولیه، حالت، خروجی سیستم و سیگنال کلیدزنی لحظه قبل و... وابسته باشد. با اعمال قانون کلیدزنی به سیستم سوئیچ شونده سیگنال کلیدزنی برحسب زمان $\sigma(t)$ مشخص می‌شود.

در این مقاله فرض می‌کنیم که توابع $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ توابع پیوسته‌ای در $x \in R^n$ هستند و زیرسیستم‌ها، همگن از درجات $d_i, i = 1,\ldots,m$ با توجه به ضرایب گسترش $r = (r_1,\ldots,r_n)$ می‌باشند. چنانچه ملاحظه می‌شود در اینجا هیچ محدودیتی از قبیل بعد سیستم [۲۰]، هم درجه بودن زیرسیستم‌ها [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] و یا فرد بودن درجه همگنی[۲۱] در نظر گرفته نشده‌است.

تعریف ۴: قانون کلیدزنی وابسته به حالت $\sigma(t) = \sigma\left(x(t)\right)$ را قانون کلیدزنی همگن می‌نامیم اگر در همه نقاط روی یک شعاع همگن یک زیرسیستم خاص فعال شود. یعنی

$$\sigma(x_0) = q \Rightarrow \sigma(x) = q,\ \forall x \in R_{x_0} \qquad (۶)$$

با توجه به تعاریف مربوط به سیستم همگن و قانون کلیدزنی همگن، در مسئله بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده تحت قانون کلیدزنی همگن و یا طراحی قانون کلیدزنی همگن برای سیستم سوئیچ شونده n بعدی، مطالعه فضای $n-1$ بعدی کافی است و نتایج بدست آمده قابل تعمیم به کل فضای حالت است. چنانچه قانون کلیدزنی را برای همه نقاط مجموعه $n-1$ بعدی $S_{n-1}=\{x \,\|\, \|x\|=1\}$ مشخص کنیم، با توجه به همگن بودن قانون کلیدزنی نتایج قابل تعمیم به کل فضای S_n است و

$$\sigma\left(\Delta_\lambda^r(x_0)\right)=\sigma(x_0), x_0 \in S_{n-1} \qquad (۷)$$

۳- پایداری سیستم سوئیچ شونده

در بخش اصلی این مقاله راه حلی برای مسئله بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده ارائه و شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی همگن پایدارساز مطرح می‌شود. روش مقاله حاضر برای حل مسئله مورد بحث بر توسعه فرض وجود ترکیب محدب پایدار برای سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیرخطی و همگن استوار است. شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی پایدارساز برای سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده در حالت کلی در لم ۱ بیان می‌شود. احراز شرایط لم ۱ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده بدون هیچ محدودیتی بسیار دشوار است. در قضیه ۲ شرایط کافی برای وجود قانون کلیدزنی همگن پایدارساز برای سیستم‌های همگن سوئیچ شونده به عنوان کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده بیان می‌گردد. همچنین از قضایای مربوط به پایداری سیستم همگن [۲۷] برای اثبات پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده استفاده می‌شود.

لم ۱- سیستم غیرخطی سوئیچ شونده n بعدی $\dot{x}=f_i(x), i=1,\dots,m$ را در نظر بگیرید که در آن $f_i(0)=0$ است. فرض کنید توابع اسکالر پیوسته $g_i(x), i=1,\dots,m$ که $g_i(x)\ge 0$ است وجود دارد بطوریکه سیستم $\dot{x}=\sum_{i=1}^{m} g_i(x) f_i(x)$ در $x=0$ پایدار مجانبی محلی باشد، آنگاه قانون کلیدزنی پایدارسازی وجود دارد که سیستم غیرخطی سوئیچ شونده به همراه آن در $x=0$ پایدار مجانبی محلی خواهد بود.

اثبات- سیستم $\dot{x}=\sum_{i=1}^{m} g_i(x) f_i(x)=h(x)$ پایدار مجانبی محلی است، بنابراین در یک همسایگی نقطه تعادل $x=0$ مثل D تابع لیاپانوف $V(x)$ وجود دارد بطوریکه

$$V(0)=0 \qquad (۸)$$

$$V(x)>0, \forall x \in D \qquad (۹)$$

$$\nabla V . h(x)<0, \forall x \in D \qquad (۱۰)$$

رابطه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla V . \sum_{i=1}^{m} g_i(x) f_i(x)<0 \qquad (۱۱)$$

که معادل است با

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x)\left(\nabla V . f_i(x)\right)<0 \qquad (۱۲)$$

با توجه به اینکه $g_i(x)\ge 0$ است، پس به ازای هر یک از عناصر فضای حالت حداقل یکی از جملات $\nabla V . f_i(x)$ کوچکتر از صفر خواهد بود.

مجموعه $I(x)=\{i \in Q \,|\, Q=\{1,\dots,m\}, \nabla V . f_i(x)<0\}$ را تشکیل می‌دهیم. قبلا نشان دادیم که تعداد عناصر $I(x)$ به ازای هر x، حداقل یک است. قانون کلیدزنی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\sigma(x)=i, \; i \in I(x) \qquad (۱۳)$$

اکنون نشان می‌دهیم سیستم سوئیچ شونده غیرخطی به همراه قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار است. تابع لیاپانوف $V(x)$ مطرح شده در بالا، تابع لیاپانوف مشترک سیستم سوئیچ شونده غیرخطی نیز هست. زیرا $V(0)=0$ و برای هر $V(x)>0, x \in D$ است. همچنین با توجه به قانون کلیدزنی انتخابی (۱۳) در هر نقطه از همسایگی D، $\nabla V . f_{\sigma(x)}(x)<0$ است. لازم به ذکر است چون تابع لیاپانوف تغییر نمی‌کند و پیوسته است نیازی به بررسی شرایط مرزی نیست و سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار مجانبی محلی است.

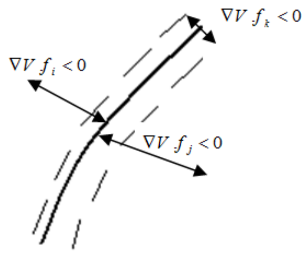
نکته ۱: چنانچه تابع لیاپانوف ارائه شده در لم ۱، شعاعی نامحدود نیز باشد سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی (۱۳) پایدار مجانبی همه جایی است.

نکته ۲: تعیین قانون کلیدزنی با استفاده از لم فوق ممکن است منجر به تعداد کلیدزنی بیشمار در بازه زمانی محدود شود. برای جلوگیری از وقوع این مسئله می‌توان در نواحی که بیش از یک زیرسیستم امکان فعالیت دارد، قانون کلیدزنی را طوری تعریف کرد که با هر زیرسیستم که مسیر حالت وارد ناحیه مذکور شد تا خروج از آن ناحیه همان زیرسیستم فعال بماند و کلیدزنی جدید اتفاق نیفتد. این قانون کلیدزنی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma\left(x(t_0)\right)=\arg\min_i \nabla V . f_i\left(x(t_0)\right), \; i \in Q$$
$$\sigma\left(x(t)\right)=\begin{cases}\sigma\left(x(t^-)\right), & if\ \sigma\left(x(t^-)\right)\in I(x(t))\\ \min j \quad j \in I(x(t)), & oth.\end{cases} \qquad (۱۴)$$

می‌توان نشان داد که نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها در نزدیکی مرزهایشان با هم تداخل دارند. بنابراین قانون کلیدزنی (۱۴) از هرگونه

امکان وقوع کلیدزنی بیشمار در بازه زمانی محدود جلوگیری می‌کند. با توجه به شرایط لم ۱ در هر نقطه از فضا حداقل یک زیرسیستم وجود دارد که $\nabla V.f_i<0$ است. همچنین در مرز نواحی ممکن برای زیرسیستم‌ها $\nabla V.f_i=0$ و خود این مرز جزو ناحیه ممکن نیست. بنابراین چنانچه دو ناحیه ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌های i,j ام تنها در مرز مشترک باشند، با توجه به شرایط لم ۱ حتما زیرسیستم دیگری مثل k وجود دارد که روی مرز مذکور $\nabla V.f_k<0$ برقرار است. چون V و f_k توابع پیوسته‌ای هستند، در یک همسایگی این مرز نیز $\nabla V.f_k<0$ است. این وضعیت در شکل (۱) نمایش داده شده است. باتوجه به قانون کلیدزنی اصلاح شده (۱۴) وقتی پاسخ سیستم توسط هریک از زیرسیستم‌های i,j ام به مرز مذکور برسد زیرسیستم k ام فعال می‌شود وتا زمانی که $\nabla V.f_k<0$ است فعال باقی می‌ماند.



شکل ۱: وضعیت تداخل نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها.

مثال ۱: سیستم غیرخطی سوئیچ شونده با سه زیرسیستم بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$s_1:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1-\frac{1}{2}x_1x_2^2\\ x_2-\frac{1}{2}x_1^2x_2\end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

$$s_2:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+2x_1x_2^2-x_2\\ x_1\end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

$$s_3:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ -3x_2\end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

مبدا تنها نقطه تعادل همه زیرسیستم‌های فوق است و زیرسیستم‌های اول (۱۵) و سوم (۱۷) ناپایدارند و همچنین سیستم دوم (۱۶) پایدار مجانبی محلی است. توابع $g_i(x), i=1,2,3$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g_1(x)=x_1^2 \tag{۱۸}$$

$$g_2(x)=x_2^2 \tag{۱۹}$$

$$g_3(x)=x_1^2x_2^2 \tag{۲۰}$$

سپس سیستم ترکیبی $\dot{x}=\sum_{i=1}^{3}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1^3-x_2^3-x_1x_2^2+2x_1x_2^4+\frac{1}{2}x_1^3x_2^2\\ x_1^2x_2+x_1x_2^2-3x_1^2x_2^3-\frac{1}{2}x_1^4x_2\end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

تابع لیاپانوف زیر را برای سیستم فوق معرفی می‌کنیم

$$V=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right) \tag{۲۲}$$

بنابراین برای سیستم ترکیبی فوق داریم

$$\dot{V}=-x_1^4-x_1^2x_2^4<0 \tag{۲۳}$$

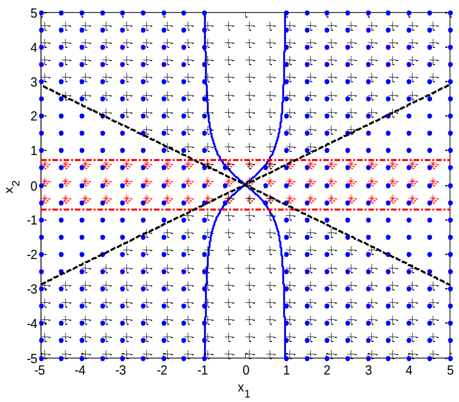
پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی همه جایی است. با توجه به لم ۱ نواحی ممکن برای هر یک از زیرسیستم‌ها را مشخص می‌کنیم. $\dot{V}_i, i=1,2,3$ مشتق تابع لیاپانوف معرفی شده در رابطه (۲۲) روی مسیرهای حالت زیرسیستم i ام است.

$$\dot{V}_1=-x_1^2\left(1+x_2^2\right)+x_2^2 \tag{۲۴}$$

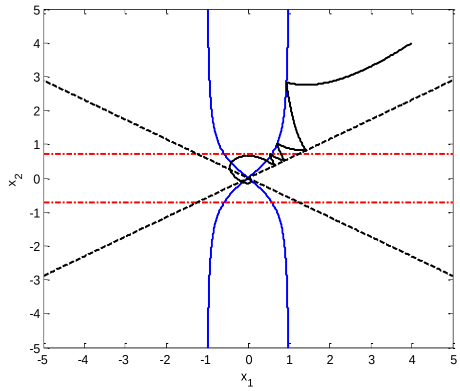
$$\dot{V}_2=-x_1^2+2x_1^2x_2^2 \tag{۲۵}$$

$$\dot{V}_3=x_1^2-3x_2^2 \tag{۲۶}$$

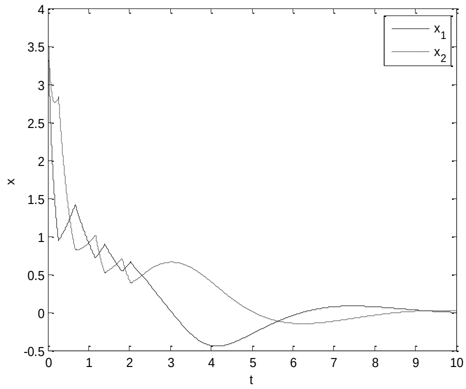
ناحیه ممکن برای فعال بودن هر یک از زیرسیستم‌ها، ناحیه‌ایست که در آن $\dot{V}_i<0$ است. این نواحی و مرزهای آنها در شکل (۲) مشخص شده اند. مشاهده می‌شود که زیرسیستم‌ها همه فضای حالت را تحت پوشش قرار داده اند و در برخی نواحی بیش از یک زیرسیستم امکان فعال شدن دارد. قانون کلیدزنی را براساس رابطه (۱۴) معرفی می‌کنیم. مسیر حالت و پاسخ سیستم برای شرط اولیه [۴، ۴] و همچنین سیگنال کلیدزنی به ترتیب در شکلهای (۳) تا (۵) نشان داده شده است.



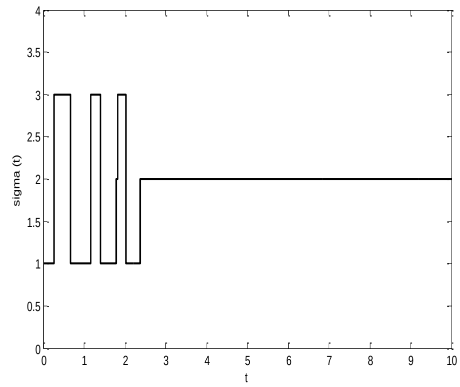
شکل ۲: نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها: (۰) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۵) با مرز آبی، (*) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۶) با مرز قرمز و (+)ناحیه مربوط به زیرسیستم (۱۷) با مرز سیاه.



شکل ۳: مسیر حالت سیستم سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) به ازای شرط اولیه [۴، ۴].



شکل ۴: حالتهای سیستم سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) نسبت به زمان



شکل ۵: سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده (۱۷)–(۱۵) با شرایط اولیه [۴، ۴].

در ادامه برای بررسی پایداری سیستم همگن سوئیچ شونده که هدف اصلی این مقاله است به بیان یک قضیه از مرجع [۲۲] می‌پردازیم. این قضیه به وجود تابع لیاپانوف همگن برای سیستم همگن پایدار مجانبی اشاره می‌کند.

قضیه ۱- [۲۲] فرض کنید $\dot{x}=f(x)$ پیوسته و همگن از درجه d با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بوده و $x=0$ نقطه تعادل سیستم و پایدار مجانبی محلی باشد. همچنین فرض کنید p یک عدد طبیعی مثبت و k یک عدد حقیقی بزرگتر از $p.\max\limits_{1\le i\le n} r_i$ باشد، آنگاه تابع $\overline{V}:R^n\to R$ وجود دارد بطوریکه:

۱) $\overline{V}\in C^P$ که در آن C^P کلاس توابعی با p مشتق پیوسته است.

۲) $\overline{V}(0)=0, \overline{V}(x)>0 \;\; \forall x\neq 0 \,\&\, \lim\limits_{\|x\|\to\infty}\overline{V}=\infty$

۳) $\overline{V}$ همگن از درجه k است، یعنی
$$\overline{V}\left(\lambda^{r_1}x_1,\ldots,\lambda^{r_n}x_n\right)=\lambda^k\overline{V}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

۴) $\nabla\overline{V}.f(x)<0$.

همچنین در [۲۲] نشان داده شده است که برای سیستم‌های همگن، پایداری مجانبی محلی معادل پایداری مجانبی همه جایی است.

با استفاده از لم ۱ و قضیه ۱ به بیان نتیجه اصلی این مقاله در قضیه ۲ می‌پردازیم.

قضیه ۲- سیستم همگن سوئیچ شونده n بعدی $\dot{x}=f_i(x), i=1,\ldots,m$ را در نظر بگیرید که در آن $f_i(0)=0$ و $\dot{x}=f_i(x)$ سیستم همگن از درجه d_i بوده و ضرایب گسترش همه زیرسیستم‌ها $(r_1,\ldots,r_n)$ است. چنانچه

۱) عدد حقیقی مثبت l وجود داشته باشد بطوریکه $l\ge\max\limits_i d_i$،

۲) توابع اسکالر مثبت $g_i(x), i=1,\ldots,m$ وجود داشته باشد که $g_i(x)$ همگن از درجه $l-d_i$ با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بوده و سیستم ترکیبی $\dot{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}g_i(x)f_i(x)$ پایدار مجانبی باشد،

آنگاه قانون کلیدزنی همگن پایدارسازی وجود دارد که سیستم همگن سوئیچ شونده به همراه آن پایدار مجانبی همه جایی است.

اثبات- با توجه به اینکه f_i همگن از درجه d_i و g_i همگن از درجه $l-d_i$ است و ضرایب گسترش همه توابع $(r_1,\ldots,r_n)$ می‌باشد، پس g_if_i و همچنین $\sum\limits_{i=1}^{m}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ همگن از درجه l با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ است. بنا به قضیه ۱ برای سیستم همگن و پایدار $h(x)$ تابع لیاپانوف V همگن از درجه k با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ وجود دارد. با توجه به لم ۱ قانون کلیدزنی پایدارساز برای این سیستم سوئیچ شونده وجود دارد. قانون کلیدزنی پایدارساز را مطابق لم ۱ فقط برای عناصر روی گوی واحد تعیین می‌کنیم. مجموعه $I(x_0)$ را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$I(x_0)=\{i\in Q \,|\, Q=\{1,\ldots,m\}, \nabla V.f_i(x_0)<0, \|x_0\|=1\} \quad (۲۷)$$

و قانون کلیدزنی را روی گوی واحد بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\sigma(x_0)=i\,,\; i\in I(x_0), \|x_0\|=1 \quad (۲۸)$$

قانون کلیدزنی کلی را نیز بصورت همگن مشخص می‌کنیم

$$\sigma(x)=i\,;\; x\in R_{x_0},\|x_0\|=1,\sigma(x_0)=i \quad (۲۹)$$

چنانچه ذکر شد بنا به قضیه ۱ تابع لیاپانوف V همگن است و بنا به لم ۱ قانون کلیدزنی روی گوی واحد طوری انتخاب شده که شرط منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف برای سیستم در حال کار برقرار باشد، یعنی

$$\nabla V\,.f_i(x_0)<0 \quad (۳۰)$$

قانون کلیدزنی کلی نیز طوری انتخاب شده که در همه نقاط روی شعاع همگن همان زیرسیستمی فعال باشد که در اشتراک آن شعاع با گوی واحد فعال بوده است. می‌دانیم که هر یک از عناصر روی یک شعاع همگن را می‌توان بصورت $x=\Delta_\lambda^r(x_0)$ نوشت که در آن λ عدد حقیقی مثبت است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&\nabla V\,.f_i(x)=\nabla V\,.f_i\left(\Delta_\lambda^r(x_0)\right)\\&=\nabla V\,.\lambda^{d_i}f_i(x_0)=\lambda^{d_i}\left(\nabla V\,.f_i(x_0)\right)<0\end{aligned} \quad (۳۱)$$

پس نتیجه می‌گیریم که سیستم همگن سوئیچ شونده به همراه قانون کلیدزنی تعریف شده در (۲۸) و (۲۹) پایدار مجانبی می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه قانون کلیدزنی در همه فضای حالت صادق است و تابع لیاپانوف V نیز بنابه قضیه ۱ شعاعی نامحدود است، پس پایداری سیستم فوق همه جایی است. قانون کلیدزنی همگن که توسط روابط (۲۸) و (۲۹) بیان شده را می‌توان برای جلوگیری از وقوع کلیدزنی بیشمار در زمان محدود بصورت (۱۴) اصلاح نمود.

واضح است که روش کلی به منظور انتخاب تابع لیاپانوف و توابع وزنی $g_i(x)$ وجود ندارد و انتخاب آنها از طریق جستجو انجام می‌شود. اما با توجه به اینکه تابع لیاپانوف، همگن با ضرایب گسترش مشابه زیرسیستم‌ها است می‌توان حدسهای مناسبی برای تابع لیاپانوف زد یکی از ساده ترین انتخاب‌ها برای یک تابع لیاپانوف از درجه k با ضرایب گسترش $(r_1,\ldots,r_n)$ بصورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i^2)^{\frac{k}{2r_i}},\, a_i\ge 0, i=1,\ldots,n \quad (۳۲)$$

همچنین درجه $\max_i d_i\le l$ برای سیستم ترکیبی در نظر گرفته می‌شود. براین اساس درجه همگنی هر یک از $g_i(x)$ ها مشخص می‌گردد. سپس برای هر یک از $g_i(x)$ها یک تابع همگن با ضرایب گسترش مشابه زیرسیستم‌ها و از درجه $l-d_i$ با ضرایب متغیر پیشنهاد داده می‌شود. سپس ضرایب مجهول در V و $g_i(x)$ ها طوری انتخاب می‌شوند که $\dot V$ برای سیستم ترکیبی در همه فضا منفی شود. چنانچه با Vو $g_i(x)$ های در نظر گرفته شده به نتیجه نرسیدیم آنها را تغییر می‌دهیم.

برای نشان دادن چگونگی عملکرد قضیه فوق به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲: سیستم همگن سوئیچ شونده با دو زیرسیستم بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$s_1:\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1\\ -x_1^3+x_2\end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

$$s_2:\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5x_2\\ -x_1^2x_2+0.5x_1^5-x_2^{5/3}\end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

هر دو زیرسیستم فوق همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) و ناپایدار هستند. زیرسیستم اول (۳۳) همگن از درجه صفر و زیرسیستم دوم (۳۴) همگن از درجه دو است. توابع $g_i(x), i=1,2$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g_1(x)=x_1^2 \quad (۳۵)$$

$$g_2(x)=1 \quad (۳۶)$$

سیستم ترکیبی $\dot x=\sum_{i=1}^{2}g_i(x)f_i(x)=h(x)$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1^3+0.5x_2\\ -0.5x_1^5-x_2^{5/3}\end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

سیستم ترکیبی فوق همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) و از درجه ۲ است. تابع لیاپانوف همگن با ضرایب گسترش (۱,۳) از درجه ۲ را بصورت زیر برای سیستم ترکیبی معرفی می‌کنیم:

$$V=\frac{1}{6}x_1^6+\frac{1}{2}x_2^2 \quad (۳۸)$$

برای سیستم ترکیبی فوق داریم

$$\dot V=-2x_1^8-x_2^{8/3}<0 \quad (۳۹)$$

پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی است و چون تابع لیاپانوف شعاعی نامحدود است، پس سیستم ترکیبی پایدار مجانبی همه جایی است. با توجه به قضیه ۲ نواحی ممکن برای هر یک از زیرسیستم‌ها را مشخص می‌کنیم. $\dot V_i, i=1,2$ مشتق تابع لیاپانوف معرفی شده روی مسیرهای حالت زیرسیستم i ام است.

$$\dot V_1=-2x_1^6-x_2x_1^3+x_2^2 \quad (۴۰)$$

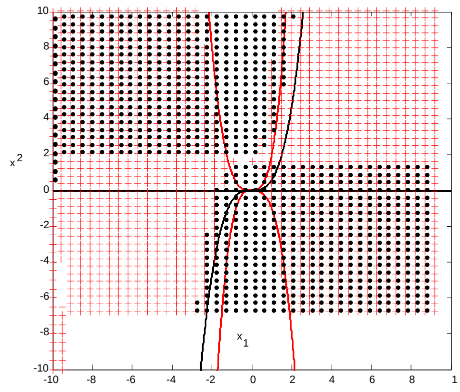
$$\dot V_2=-x_1^2x_2^2-x_2^{8/3}+x_1^5x_2 \quad (۴۱)$$

ناحیه ممکن برای فعال بودن هر یک از زیرسیستم‌ها، ناحیه‌ایست که در آن $\dot V_i<0$ است. این نواحی بصورت زیر مشخص می‌شود

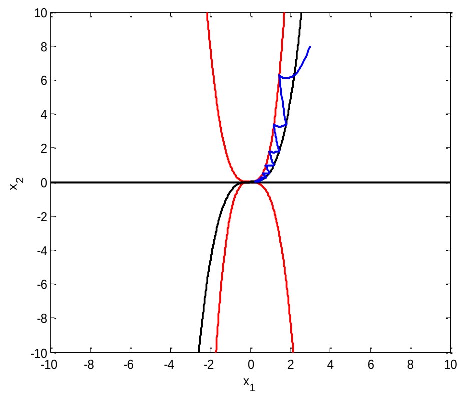
$$\dot V_1<0\Rightarrow\begin{cases}-x_1^3<x_2<2x_1^3,\, x_1>0\\ 2x_1^3<x_2<-x_1^3,\, x_1<0\end{cases} \quad (۴۲)$$

$$\dot{V}_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 < 0 \\ x_2 > 0.5877 x_1^3,\ x_1 > 0 \\ x_2 < 0.5877 x_1^3,\ x_1 < 0 \end{cases} \qquad (۴۳)$$

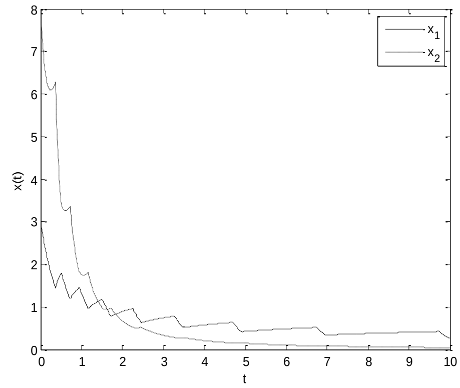
این نواحی و مرزهای آنها در شکل (۶) مشخص شده اند. مشاهده می‌شود که زیرسیستم‌ها همه فضای حالت را تحت پوشش قرار داده اند و در برخی نواحی بیش از یک زیرسیستم امکان فعال شدن دارد. قانون کلیدزنی را بصورت رابطه (۱۴) معرفی می‌کنیم. واضح است که قانون کلیدزنی ارائه شده همگن می‌باشد. مسیر حالت و پاسخ سیستم برای شرط اولیه [۸ ۳] و همچنین سیگنال کلیدزنی به ترتیب در شکلهای (۷) تا (۹) نشان داده شده است.



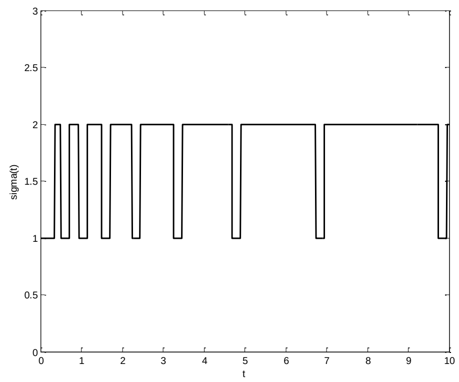
شکل ۶: نواحی ممکن برای فعالیت زیرسیستم‌ها: (+) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۳۳) با مرز قرمز، (۰) ناحیه مربوط به زیرسیستم (۳۴) با مرز سیاه.



شکل ۷: مسیر حالت سیستم سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) به ازای شرط اولیه [۸ ۳]



شکل ۸: حالتهای سیستم سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) نسبت به زمان.



شکل ۹: سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ برای سیستم غیرخطی سوئیچ شونده (۳۳) و (۳۴) با شرایط اولیه [۸، ۳].

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش جدیدی برای بررسی پایداری دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ شونده معرفی شده است. سیستم سوئیچ شونده مورد بحث دارای زیرسیستم‌های همگن با ضرایب گسترش یکسان است. روش ارائه شده مبتنی بر وجود تابع لیاپانوف مشترک همگن است و براساس آن قانون کلیدزنی پایدارساز همگن مشخص می‌گردد. در این روش هیچ محدودیتی در رابطه با بعد سیستم، درجه همگنی و ضرایب گسترش وجود ندارد. بنابراین جامعیت روش ارائه شده مهمترین مزیت آن نسبت به مطالعات قبلی است. همچنین ارائه قانون کلیدزنی همگن برای سیستم همگن سوئیچ شونده از دیگر مزایای این روش است که منجر به کاهش بعد فضای مورد مطالعه به n −۱ می‌شود. از طرف دیگر معرفی توابع وزنی مناسب و تابع لیاپانوف از دشواریهای این روش محسوب می‌شود.

مراجع

[1] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, M. Morari, "Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems", Proc. of the 38th Conference on Decision & Control, pp. 3966-3971, 1999.

Systems & Control Letters 54, pp. 1163-1182, 2005.

[16] H. Lin, P. J. Antsaklis, " Switching Stabilizability for Continuous-Time Uncertain Switched Linear Systems ", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 52, NO. 4, pp. 633-646, 2007.

[17] H. Lin, P. J. Antsaklis, "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 54, NO. 2, pp. 308-322, 2009.

[۱۸] ح. ملااحمدیان، ع. کریم‌پور و ن. پریز، ۱۳۹۰، "پایدارسازی و کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده با قانون کلیدزنی مقید به حالت-ورودی منطقی: دیدگاه مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی"، مجله کنترلISSN 2008-8345، جلد ۵، شماره ۲، ص ۱۲-۲۱.

[19] J. Wu, "Feedback Stabilization for Multiinput Switched Nonlinear Systems: Two Subsystems Case", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, NO. 4, pp. 1037-1042, 2008.

[20] D. Holcman, M. Margaliot, "Stability Analysis of Second-Order Switched Homogeneouse Systems", SIAM Journal of Control Optimization, vol. 41, NO. 5, pp. 1609-1625, 2003.

[21] L. Zhang, S. Liu, H. Lan, "On Stability of Switched Homogeneous Nonlinear Systems", Mathematical Analysis and Applications, 334, pp. 414-430, 2007.

[22] A. Ignatyev, "Comments on “On stability of switched homogeneous nonlinear systems” by Lijun Zhang, Sheng Liu, and Hai Lan[J. Math. Anal. Appl. 334 (1) (2007) 414–430]", Math. Anal. Appl., 373:343-344.

[23] S. Emre Tuna, "Optimal regulation of homogeneous systems", Automatica 41, pp. 1879-1890, 2005.

[24] S. Emre Tuna, "Growth rate of switched homogeneous systems", Automatica 44, pp. 2857-2862, 2008.

[25] S. Emre Tuna, "Growth rate of switched homogeneous systems", Automatica 44, pp. 2857-2862, 2008.A. Yu. Aleksandrov, A. A. Kosov, A. V. Platonov, "On the asymptotic stability of switched homogeneous systems", Systems and Control Letters 61: 127-133, 2012.

[26] V. I. Zubov, "Mathematical Methods for the Study of Automatical Control Systems", Pergamon Press, Jerusalem Acad. Press, Oxford Jerusalem, 1962.

[27] L. Rosier, "Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field", Systems and Control Letters 19, pp. 467-473, 1992.

[2] S. Galeani, L. Menini, A. Potini, "Trajectory tracking in linear hybrid systems: an internal principle approach", Proc. of 2008 American Control Conference, pp. 4627-4632, 2008.

[3] S. Hedlund, A. Rantzer, "Optimal Control of Hybrid Systems", Proc. of the 38th Conference on Decision & Control, pp. 3972-3977, 1999.

[4] J. P. Hespanha, A. Stephen Morse, "Switching between stabilizing controllers", Automatica 38, pp. 1905-1917, 2002.

[5] S. Jiang, P. G. Voulgaris, "Performance Optimization of Switched Systems: A Model Matching Approach", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 54, NO. 9, pp. 2058-2071, 2009.

[6] M. Rinehart, M. Dahleh, I. Kolmanovsky, "Optimal Control of Switched Homogeneous Systems", Proc. of the 2007 American Control Conference, pp. 1377-1382, 2007.

[7] A.A. Zevin, M. A. Pinsky, "General Solution of Stability Problem for Plane Linear Switched Systems and Differential Inclusions", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, NO. 9, 2008.

[8] S. Nishiyama, T. Hayakawa, "Optimal Stable State-Space Partitioning for Piecewise Linear Planar System", Proc. 2008 American control Conference, pp. 3959-3964, 2008.

[9] J. L. Mancilla, "A Condition for the Stability of Switched Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 45, NO. 11,pp. 2077-2079, 2000.

[10] Z. H. Huang, C. Xiang, H. Lin, T. H. Lee, "Necessary and sufficient conditions for regional stabilisability of generic switched linear systems with a pair of planar subsystems", Int. Journal of Control, vol. 83, Issue 4, pp. 694-715, 2010.

[11] B. Hu, G. Zhai, A. N. Michel, "Hybrid static output feedback stabilization of second-order linear time-invariant systems", Linear Algebra and its Application 351-352, pp. 475-785, 2002.

[12] S. Cong, L. Yin, Y. Zou, "Exponential Stabilization of Second-Order Switched Systems: Necessary and Sufficient Conditions", Proc. of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, pp. 3859-3863, 2009.

[13] L. Vu, D. Liberzon, "Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems", Systems and Control Letters 54, pp. 405-416, 2005.

[14] E. Moulay, R. Bourdais, W. Perruqetti, "Stabilization of nonlinear switched systems using control Lyapunov functions", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 1, pp. 482-490, 2007.

[15] N. H. El-Farra, P. Mhaskar, P. D. Christofides, "Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions",