مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۱، بهار ۱۳۸۹، صفحه۲۱-۱۲

شکل‌دهی مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم

آرش صادق‌زاده [۱]، حمیدرضا مومنی [۲]

[۱] دانشجوی دکتری برق- کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، sadeghzadeh@modares.ac.ir
[۲] دانشیار، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، momeni_h@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۱۰/۱۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۲/۱۲)

چکیده: در این مقاله روشی جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی به‌صورت پاسخ به یک مجموعه از نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شده است. از طرفی عملکرد بدست آمده با یک کنترل‌کننده مقاوم برای یک سیستم حلقه بسته با نامعینی پارامتری، نه تنها به خود کنترل‌کننده ارتباط خواهد داشت بلکه به مجموعه نامعینی پارامتری نیز مربوط می‌گردد. در ادامه مساله طراحی توام کنترل‌کننده H_∞ و شکل‌دهی مجموعه نامعینی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین ترتیب علاوه بر طراحی کنترل‌کننده مقاوم، با تعیین سیگنال مناسب ورودی در شناسایی سیستم، مجموعه نامعینی به هدف طراحی کنترل‌کننده مقاوم شکل‌دهی می‌گردد. در شکل‌دهی مجموعه نامعینی پارامتری بیضوی، عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته و ساختار کنترل‌کننده لحاظ می‌گردد. شبیه‌سازی‌های انجام شده بر روی یک سیستم واقعی نشان‌دهنده کارایی این روش است.

کلمات کلیدی: کنترل مقاوم، نامعینی پارامتری بیضوی، شناسایی سیستم، طراحی سیگنال ورودی، شکل‌دهی نامعینی به‌هدف کنترل

Shaping the Uncertainty Set Resulted from System Identification for Robust Control Design

Arash Sadeghzadeh and Hamidreza Momeni

Abstract: In this paper, a new method for robust H_∞ controller design for systems with ellipsoidal parametric uncertainty in terms of solutions to a set of Linear Matrix Inequalities (LMIs) is proposed. It is well-known that the resulted closed-loop robust performance depends as much on the controller as it depends on the shape of the uncertainty set. Subsequently, joint robust H_∞ controller design/ uncertainty set shaping is investigated. Therefore, using input design in system identification, uncertainty set would be shaped for robust control design. This way, desired closed-loop performance and controller structure would be translated into the requirements on the input signal spectrum. The Simulation results show the effectiveness of our proposed method.

Keywords: Robust Control, Ellipsoidal Parametric Uncertainty, System Identification, Input Design, Uncertainty Set Shaping for Robust Control

۱- مقدمه

بدنبال پیشرفت روش‌های طراحی کنترل‌کننده بر پایه مدل سیستم، شناسایی سیستم مورد توجه بسیار قرار گرفته است. بدلیل وجود نویزهای اندازه‌گیری، مدل‌های بدست آمده ازفرایند شناسایی سیستم دقیق نبوده و دارای نامعینی می‌باشند. در شناسایی سیستم وقتی که سیستم واقعی به مجموعه مدل‌های پارامتریزه شده مورد بررسی متعلق باشد، می‌توان نامعینی حاصل از فرایند شناسایی را بصورت نامعینی پارامتری توصیف نمود. در این حال پارامترهای شناسایی شده با یک

احتمال از پیش تعیین شده به یک ناحیه بیضوی شکل متعلق خواهند بود [۱]. بنابراین مدل‌های بدست آمده از شناسایی سیستم، مدل‌هایی با نامعینی پارامتری بیضوی خواهند بود.

روش‌هایی که در آنها طراحی کنترل‌کننده مقاوم با وجود نامعینی بیضوی انجام گیرد بسیار اندک هستند. یک روش جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم مرتبه ثابت در [۲] ارائه شده است. در این روش تنها پایدارسازی سیستم نامعین مدنظر قرار می‌گیرد. به‌طور مشابه روش ارائه شده در [۳] نیز تنها پایدارسازی سیستم نامعین را در نظر می‌گیرد. در [۴] روش جایابی مقاوم قطب‌های حلقه بسته برای یک سیستم با نامعینی پارامتری بیضوی بررسی می‌شود. مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت H_∞ در [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از ایرادهای این روش آن است که پارامترهای نامعین تنها می‌توانند در ماتریس A و یا C از تحقق فضای حالت سیستم نامعین قرار گیرند. بعبارت دیگر حالتی که هم ماتریس A و هم C دارای نامعینی باشند، قابل بررسی نیست. یک روش طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی H_∞ بر پایه پارامتریزاسیون با بعد نامحدود یولا-کوثرا[1] در [۶] آورده شده است. این روش قادر نیست راه‌حلی جهت طراحی کنترل‌کننده‌ای با مرتبه‌ای پایین‌تر از مرتبه مدل ارائه نماید. بنابراین کنترل‌کننده‌های بدست آمده از این روشی همگی کنترل‌کننده‌های مرتبه کامل[2] خواهند بود. یکی از نوآوری‌های ارائه شده در این مقاله ارائه روشی جهت طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی مرتبه ثابت[3] برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی است.

اصولاً استراتژی طراحی کنترل‌کننده مقاوم بر این اصل استوار است که کنترل‌کننده مقاوم به‌صورتی طراحی گردد که بهترین عملکرد ممکن سیستم حلقه بسته در مجموعه نامعینی مدل بدست آید. با این توصیف واضح است که بهترین عملکرد ممکن یا با اغماض حداقل عملکرد مورد نیاز در مجموعه نامعینی مدل (طراحی کنترل‌کننده H_∞) نه تنها به خود کنترل‌کننده بلکه به شکل مجموعه نامعینی مدل ارتباط دارد. بنابراین در جایی که بتوان شکل مجموعه نامعینی را نیز طراحی نمود می‌توان انتظار داشت که عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته بهبود یابد. شکل‌دهی مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم موضوعی است که در چند سال گذشته توجه محققین را به خود جلب نموده است. همان‌طور که پیش از این اشاره شد، شکل مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم تابعی از طیف سیگنال ورودی در پروسه شناسایی سیستم است. با پیشرفت روش های بهینه سازی محدب، در چند سال اخیر توجه خاصی به طراحی سیگنال ورودی[4] در شناسایی سیستم معطوف شده است [۹-۷]. با بهره گیری از ابزار طراحی سیگنال ورودی، یک روش شکل‌دهی مجموعه نامعینی سیستم به هدف کنترل در [۵] ارائه شده است. در این مقاله طراحی توام کنترل‌کننده فیدبک حالت H_∞ و طراحی سیگنال ورودی در قالب یک مساله بهینه‌سازی محدب ارائه شده است. همچین در [۱۰] به مساله شکل‌دهی نامعینی حاصل از شناسایی سیستم به منظور مقاوم‌سازی کنترل‌کننده پرداخته شده است. در واقع طیف سیگنال ورودی در شناسایی سیستم به‌گونه‌ای تعیین می‌گردد که کنترل‌کننده فیدبک خروجی طراحی شده بتواند دارای بیشترین درصد تغییرات ممکن در ضرایب خود باشد.

در این مقاله، اولین نوآوری، ارائه روشی جهت طراحی کنترل‌کننده H_∞ با ساختار فیدبک خروجی برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی است. در مرحله بعد این روش طراحی کنترل‌کننده با روش طراحی سیگنال ورودی ترکیب شده است. بدین شکل مساله طراحی توام کنترل‌کننده مقاوم و شکل‌دهی مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی مدنظر قرار می‌گیرد. بدین صورت مساله شکل‌دهی مجموعه نامعینی به‌هدف کنترل انجام می‌پذیرد.

در ادامه مقاله و در بخش ۲ روش طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت برای یک سیستم نامی بدون در نظر گرفتن نامعینی آورده شده است. طراحی کنترل‌کننده H_∞ برای سیستمی با نامعینی پارامتری بیضوی در بخش ۳ ارائه می‌شود. در بخش ۴، مساله شکل‌دهی مجموعه نامعینی به تفصیل شرح داده می‌شود و پارامتریزاسیون طیف سیگنال ورودی ارائه می‌شود. بخش ۵ به شبیه‌سازی نتایج بدست آمده بر روی یک سیستم واقعی اختصاص می‌یابد که نشان‌دهنده کارایی روش ارائه شده جهت طراحی شکل مجموعه نامعینی است. در نهایت در انتهای مقاله نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲- پیش‌نیازها

۲-۱- مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم

مساله شناسایی یک سیستم گسسته در زمان خطی نامتغیر با زمان در چارچوب PE و با یک ساختار مدل $M = \{G(z,\theta), H(z,\theta)\}$ که در آن $\theta \in \mathbb{R}^n$ است را در نظر می‌گیریم. ساختار مدل انتخاب شده می‌تواند سیستم واقعی را نمایش دهد. بعبارت دیگر یک بردار پارامتر

[1] Youla-Kucera
[2] Full order
[3] Fixed order
[4] Input design

θ_0 به‌گونه‌ای وجود خواهد داشت که $G(\theta_0)=G_0$ و $H(\theta_0)=H_0$ باشد. G_0 و H_0 نشان‌دهنده سیستم واقعی هستند. سیستم واقعی بصورت زیر مدل می‌شود:

$$M:\ y(t)=G(z,\theta_0)u(t)+H(z,\theta_0)e(t), \qquad (۱)$$

که در اینجا $y(t)$ خروجی و $u(t)$ ورودی و $e(t)$ نویز سفید با میانگین صفر و واریانس λ_0 است و $G(z,\theta_0)$ و $H(z,\theta_0)$ توابع تبدیل گسسته در زمان پایدار هستند. علاوه بر این فرض می‌شود که تابع تبدیل $H(z,\theta_0)$ مینیمم فاز و مونیک[1] می‌باشد. θ شناسایی شده دارای ویژگی‌های مجانبی به قرار زیر است [۱]:

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}_N-\theta_0\right)\rightarrow\mathcal{N}\left(0,P\left(\theta_0\right)\right)\quad as\quad N\rightarrow\infty, \qquad (۲)$$

$$P\left(\theta_0\right)=\lambda_0\left[E\left[\psi\left(t,\theta_0\right)\psi^T\left(t,\theta_0\right)\right]\right]^{-1}, \qquad (۳)$$

که در آن $\psi(t,\theta_0)=d/d\theta[\hat{y}(t,\theta)]|_{\theta_0}$ است و $\mathcal{N}$ نشان‌دهنده توزیع نرمال و N تعداد داده‌های نمونه‌برداری شده است. بنابراین وقتی که سیستم در مجموعه مدل قرار گیرد، تخمین به سیستم واقعی همگرا خواهد شد و کوواریانس خطای تخمین با نرخ $1/N$ کاهش خواهد یافت. در روش شناسایی حلقه باز، معکوس ماتریس کوواریانس، $P^{-1}(\theta_0)$، تابعی affine از طیف سیگنال ورودی، $\Phi_u(\omega)$، می‌باشد و بصورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}P^{-1}\left(\theta_0\right)&=\frac{1}{2\pi\lambda_0}\int_{-\pi}^{\pi}F_u\left(e^{j\omega},\theta_0\right)\Phi_u\left(\omega\right)F_u^*\left(e^{j\omega},\theta_0\right)d\omega\\&\quad+R_0\left(\theta_0\right),\\R_0\left(\theta_0\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_e\left(e^{j\omega},\theta_0\right)F_e^*\left(e^{j\omega},\theta_0\right)d\omega,\end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن

$$F_u\left(\theta_0\right)=H^{-1}\left(\theta_0\right)\frac{dG\left(\theta_0\right)}{d\theta},\ F_e\left(\theta_0\right)=H^{-1}\left(\theta_0\right)\frac{dH\left(\theta_0\right)}{d\theta} \qquad (۵)$$

بنابراین سیگنال ورودی با طیف‌های متفاوت، خطای تخمین را بصورت‌های متفاوتی تحت تاثیر قرار می‌دهد. تخمین θ در ناحیه بیضوی بصورت

$$\tilde{U}=\left\{\theta:\left(\theta-\theta_0\right)^T\frac{NP^{-1}}{\chi}\left(\theta-\theta_0\right)\le 1\right\}, \qquad (۶)$$

با احتمال مشخص شده با $\Pr\left(\chi^2(n)\le\chi\right)$ قرار می‌گیرد. پارامتر $\chi^2(n)$ نشان‌دهنده توزیع χ^2 با n درجه آزادی است. بنابراین طراحی کنترل مقاوم برای سیستم‌های بدست آمده از شناسایی سیستم، به طراحی کنترل‌کننده مقاوم برای یک سیستم با نامعینی پارامتری بیضوی تبدیل می‌گردد. با در نظر گرفتن

$$R=N\,\frac{P^{-1}}{\chi}, \qquad (۷)$$

مجموعه نامعینی پارامتری بیضوی به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$U=\left\{\theta\,|\left(\theta-\theta_0\right)^T R\left(\theta-\theta_0\right)\le 1\right\}. \qquad (۸)$$

۲-۲- طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت

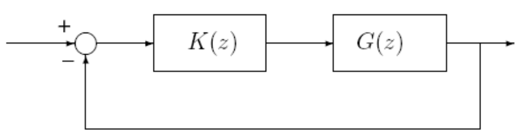
تابع تبدیل یک سیستم گسسته در زمان خطی نامتغیر با زمان تک ورودی- تک خروجی را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(z)=\frac{N(z)}{M(z)} \qquad (۹)$$

که در آن $N(z)$ و $M(z)$ دو چند جمله‌ای از متغیر z هستند. حال سیستم حلقه بسته استاندارد شکل (۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید یک کنترل‌کننده مرتبه ثابت $K(z)$ به‌صورت زیر

$$K\left(z\right)=\frac{X(z)}{Y(z)}=\frac{x_0z^m+x_1z^{m-1}+\cdots+x_m}{z^m+y_1z^{m-1}+\cdots+y_m}, \qquad (۱۰)$$

به‌گونه‌ای وجود دارد که $\|H(z)\|_\infty<\gamma$ است.



شکل ۱: سیستم حلقه بسته استاندارد

$H(z)=S(z)/L(z)$ می‌تواند یکی از توابع حساسیت، $K(z)/(1+K(z)G(z))$، $G(z)/(1+K(z)G(z))$ و یا $G(z)K(z)/(1+K(z)G(z))$، $1/(1+K(z)G(z))$ باشد.

روش طراحی این کنترل‌کننده مرتبه ثابت در لم زیر ارائه شده است.

لم ۱- [۱۱] فرض کنید یک چند جمله‌ای پایدار $E(z)$ داده شده است، در اینصورت $\|S(z)/L(z)\|_\infty<\gamma$ خواهد بود اگر یک ماتریس متقارن $P=P^T>0$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$\begin{bmatrix}A^TPA-P & A^TPB-C_1^T\\B^TPA-C_1 & B^TPB-D_1-D_1^T\end{bmatrix}<0, \qquad (۱۱)$$

$$\begin{bmatrix}A^TPA-P & A^TPB-C_2^T\\B^TPA-C_2 & B^TPB-D_2-D_2^T\end{bmatrix}<0. \qquad (۱۲)$$

[1] Monic

که در آن $\left(A,B,C_1,D_1\right)$ و $\left(A,B,C_2,D_2\right)$ به‌ترتیب تحقق فضای حالت کانونیکال کنترل‌کننده از توابع تبدیل $\left(L(z)+\gamma^{-1}S(z)\right)/E(z)$ و $\left(L(z)-\gamma^{-1}S(z)\right)/E(z)$ هستند.

لم ۱ شرط کافی جهت طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت را ارائه می‌کند. چندجمله‌ای $E(z)$ را چندجمله‌ای مرکزی[1] گویند. نقش چند جمله‌ای مرکزی آن است که مساله طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت را که یک مساله بهینه‌سازی غیر محدب[2] است با یک مساله محدب[3] تقریب می‌زند. جهت انتخاب چندجمله‌ای مرکزی روش‌هایی ارائه شده است که برای مرور آن می‌توان به [۱۲] مراجعه نمود. در لم ذکر شده پارامترهای کنترل‌کننده در ماتریس‌های C_1, C_2, D_1, و D_2 ظاهر می‌شوند. شرط (۱۱) و (۱۲) نامساوی‌های ماتریس خطی (LMI) نسبت به پارامترهای کنترل‌کننده و ماتریس P می‌باشند.

۳- طراحی کنترل‌کننده H_∞ برای سیستمی با نامعینی پارامتری بیضوی

در این بخش فرض می‌کنیم که سیستم داده شده در (۹) دارای نامعینی پارامتری باشد. بعبارت دیگر در این بخش بدنبال طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت برای یک سیستم با نامعینی پارامتری بیضوی هستیم. سیستم نامعین زیر را در نظر بگیرید:

$$G(z,\theta)=\frac{N(z,\theta)}{M(z,\theta)}=\frac{\theta_0 z^{p}+\theta_1 z^{p-1}+\cdots+\theta_p}{z^{q}+\theta_{p+1}z^{q-1}+\cdots+\theta_{n-1}}$$

که در آن $N(z,\theta)$ و $M(z,\theta)$ چند جمله‌ای‌هایی هستند که در آنها پارامتر $\theta=\left[\theta_0 \quad \theta_1 \quad \cdots \quad \theta_{n-1}\right]^T\in\mathbb{R}^n$ برداری است که G را پارامتریزه می‌نماید. فرض بر این است که پارامتر θ در یک ناحیه بیضوی شکل مطابق با رابطه (۸) قرار گرفته است. با توجه به روش طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت ارائه شده در بخش ۲-۲، اگر هدف طراحی یک کنترل‌کننده مرتبه ثابت داده شده با رابطه (۱۰) باشد، بازای کلیه پارامترها در مجموعه نامعینی بیضوی شکل، نامساوی‌های ماتریسی خطی داده شده در (۱۱) و (۱۲) می‌بایست برقرار گردند. از آنجایی که تعداد پارامترها در این مجموعه نامعینی نامحدود است، مساله طراحی کنترل‌کننده مرتبه ثابت برای این سیستم نامعین به یک مساله بهینه‌سازی محدب با بعد نامحدود تبدیل می‌گردد. در قضیه زیر این مساله بهینه‌سازی با بعد نامحدود را که در عمل حل آن امکان‌پذیر نمی‌باشد را با در نظر گرفتن محافظه‌کاری قابل قبول به یک مساله بهینه‌سازی با بعد محدود تبدیل می‌نماییم.

قضیه ۱- فرض کنید چندجمله‌ای مرکزی $E(z)$ داده شده است، در این صورت به‌ازای تمامی پارامترهای متعلق به مجموعه نامعینی بیضوی، $\forall\theta\in U$ ، $\left\|H(z,\theta)\right\|_\infty=\left\|S(z,\theta)/L(z,\theta)\right\|_\infty<\gamma$ است، اگر اسکالرهای مثبت $\tau_1,\tau_2>0$ و ماتریس متقارن $P=P^T>0$ وجود داشته باشد به‌صورتی‌که

$$\begin{bmatrix} A^T PA-P & A^T PB-F_1 & E_1 \\ B^T PA-F_1^T & B^T PB-D_1-D_1^T+\tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) & -\tau_1\theta_0^T R \\ E_1^T & -\tau_1 R\theta_0 & -\tau_1 R \end{bmatrix}<0, \qquad (۱۳)$$

$$\begin{bmatrix} A^T PA-P & A^T PB-F_2 & E_2 \\ B^T PA-F_2^T & B^T PB-D_2-D_2^T+\tau_2\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) & -\tau_2\theta_0^T R \\ E_2^T & -\tau_2 R\theta_0 & -\tau_2 R \end{bmatrix}<0. \qquad (۱۴)$$

باشند. در نامساوی‌های ماتریسی فوق $\left(A,B,\theta^T E_1^T+F_1^T,D_1\right)$ و $\left(A,B,\theta^T E_2^T+F_2^T,D_2\right)$ به ترتیب تحقق کانونیکال کنترل‌کننده توابع تبدیل $\left(L(z,\theta)-\gamma^{-1}S(z,\theta)\right)/E(z)$ و $\left(L(z,\theta)+\gamma^{-1}S(z,\theta)\right)/E(z)$ می‌باشند.

اثبات- ضمیمه ۱.

با توجه به تابع تبدیل سیستم داده شده، $G(z,\theta)$، پارامتر نامعین θ بصورت خطی در صورت و مخرج تابع حساسیت $H(z,\theta)=S(z,\theta)/L(z,\theta)$ ظاهر می‌شود. بنابراین در تحقق کانونیکال کنترل‌کننده $\left(L(z,\theta)-\gamma^{-1}S(z,\theta)\right)/E(z)$ و $\left(L(z,\theta)+\gamma^{-1}S(z,\theta)\right)/E(z)$، ماتریس C_1 و C_2 را می‌توان بصورت $\theta^T E_1^T+F_1^T$ و $\theta^T E_2^T+F_2^T$ در نظر گرفت. در روابط (۱۳) و (۱۴) پارامترهای کنترل‌کننده به‌صورت خطی در ماتریس‌های E_1، E_2، F_1 و F_2 ظاهر می‌گردند. ضرایب چندجمله‌ای مرکزی $E(z)$ نیز در ماتریس A ظاهر می‌گردند. بنابراین روابط (۱۳) و (۱۴) نامساوی‌های ماتریسی خطی نسبت به پارامترهای کنترل‌کننده، ماتریس P و اسکالرهای τ_1,τ_2 می‌باشند و از این روابط می‌توان جهت طراحی کنترل‌کننده H_∞ مقاوم برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی استفاده نمود.

[1] Central Polynomial
[2] Nonconvex
[3] Convex

۴- شکل‌دهی مجموعه نامعینی حاصل از شناسایی سیستم

۴-۱- توصیف مساله

در بخش قبل روشی برای طراحی کنترل‌کننده مقاوم برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی ارائه شد. در طراحی کنترل‌کننده مقاوم استراتژی کلی بر تعیین کنترل‌کننده به‌گونه‌ای استوار است که بهترین عملکرد ممکن در مجموعه نامعینی سیستم بدست آید. از طرفی بهترین عملکرد ممکن بدست آمده نه تنها به کنترل‌کننده مربوط خواهد بود بلکه به شکل مجموعه نامعینی نیز ارتباط خواهد داشت. از سوی دیگر در بخش ۲-۱ دیدیم که نامعینی پارامتری حاصل از شناسایی سیستم به طیف سیگنال ورودی استفاده شده در شناسایی سیستم مربوط است. بنابراین این ایده شکل می‌گیرد که با انتخاب مناسب سیگنال ورودی در شناسایی سیستم می‌توان نامعینی را به‌گونه‌ای شکل داد که مناسب جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم باشد. تا بحال فرض بر این بود که پارامتر R که تعیین کننده شکل نامعینی پارامتری بیضوی است، از پیش معین است. در ادامه با در نظر گرفتن یک درجه آزادی دیگر، فرض می‌کنیم که R نیز متغیر باشد. با این ایده در طراحی کنترل‌کننده مقاوم علاوه بر تعیین کنترل‌کننده، شکل مجموعه نامعینی سیستم را نیز تعیین می‌کنیم. از آنجایی که شکل مجموعه نامعینی تابعی از طیف سیگنال وروردی در شناسایی سیستم است در واقع سیگنال ورودی در شناسایی سیستم تعیین می‌گردد. این روش در طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت در مقاله [۵] مورد استفاده قرار گرفته است که در اینجا هدف ما طراحی کنترل‌کننده بر پایه ساختار فیدبک خروجی است.

در این مقاله هدف طراحی کنترل‌کننده‌ای با مرتبه و ساختار از پیش تعیین شده است. از سوی دیگر مشخصه عملکردی در نظر گرفته شده به صورت نرم بینهایت توابع حساسیت سیستم حلقه بسته می‌باشد. بنابراین در تعیین شکل نامعینی سیستم، عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته و ساختار کنترل‌کننده بر روی توزیع طیفی سیگنال ورودی مورد استفاده در شناسایی سیستم اثر خواهد گذاشت. بعبارت دیگر طیف سیگنال وروردی تابعی از عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته و ساختار کنترل‌کننده خواهد بود.

در ادامه این بخش بدنبال تعیین سیگنال ورودی در شناسایی سیستم به‌گونه‌ای هستیم که این سیگنال ورودی از یک سو دارای کمترین انرژی بوده و از سوی دیگر ویژگی‌های مطلوب عملکردی سیستم حلقه بسته در تعیین آن لحاظ گردد. بعبارت دیگر سیگنال ورودی باید به‌گونه‌ای باشد که نامعینی پارامتری بیضوی حاصل از شناسایی سیستم به‌طور مناسب شکل‌دهی گردد. شکل‌یابی مناسب نامعینی بیضوی به این معنی است که می‌بایست یک کنترل‌کننده با ساختار از پیش تعیین شده قادر باشد برای کلیه سیستم‌ها در مجموعه نامعینی بیضوی، ویژگی‌های عملکردی را برآورده نماید. بنابراین در ادامه بدنبال حل یک مساله بهینه‌سازی بصورت زیر خواهیم بود:

$$\begin{aligned}
&\underset{\Phi_u,\beta,x_0,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m}{\text{minimize}} \quad \beta \\
&\text{subject to:} \\
&\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_u(\omega)\,\mathrm{d}\omega \le \beta, \\
&\qquad \Phi_u(\omega)\ge 0, \forall\omega, \\
&\qquad (13)\ \text{and}\ (14).
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

در اینجا β توان سیگنال ورودی است. مانند اکثر روش‌های طراحی ورودی، این روش نیز از طریق ماتریس R و یا بعبارت دیگر P^{-1} و LMI های قضیه ۱ به θ_0 وابسته است. که در عمل چون θ_0 را در ابتدا نداریم آنرا با یک تخمین اولیه جایگزین نموده و یک روش تکرار شونده مورد استفاده قرار می‌گیرد تا عملکرد سیگنال ورودی بهبود یابد [۸ و ۵].

۴-۲- پارامتریزاسیون مساله

مساله بهینه‌سازی (۱۶) یک مساله بهینه‌سازی غیر متعارف است. نکته کلیدی در یافتن یک مساله بهینه‌سازی قابل انجام، بکاربردن یک پارامتریزاسیون با بعد محدود از طیف سیگنال ورودی است. یک امکان استفاده از پارامتریزاسیون با بعد محدود بصورت زیر است:

$$\Phi_u=\sum_{k=-(M-1)}^{M-1}C_{|k|}e^{-j\omega k} \tag{۱۷}$$

که M یک عدد صحیح مثبت است. شرط $\forall\omega,\ \Phi_u(\omega)\ge 0$ بدین جهت در مساله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود تا اطمینان یافت که Φ_u بدست آمده در بهینه‌سازی، طیف یک سیگنال است [۸]. بجای پارامتریزه نمودن طیف می‌توان به‌طور معادل با قسمت حقیقی مثبت کار نمود، یعنی

$$\begin{aligned}
\Phi_u(\omega)&=\Psi\left(e^{j\omega}\right)+\Psi^*\left(e^{j\omega}\right),\\
\Psi\left(e^{j\omega}\right)&=\sum_{k=0}^{M-1}C_k e^{-j\omega k}.
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

به‌منظور اطمینان از شرط $\forall\omega,\ \Phi_u(\omega)\ge 0$ لم زیر را می‌توان مورد استفاده قرار داد.

لم ۲ [۸]- فرض کنید که $\{A,B,C,D\}$ یک تحقق فضای حالت کنترل‌پذیر از $\Psi\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{M-1}c_k e^{-j\omega k}$ باشد. در اینصورت ماتریس متقارن $Q=Q^T$ به‌گونه‌ای وجود خواهد داشت که

$$\begin{bmatrix} Q-A^TQA & -A^TQB \\ -B^TQA & -B^TQB \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D+D^T \end{bmatrix}\geq 0 \tag{۱۹}$$

اگر و تنها اگر

$\Phi_u\left(\omega\right)\triangleq\sum_{k=0}^{M-1}c_k\left[e^{-j\omega k}+e^{j\omega k}\right]\geq 0,\ \forall\omega$ باشد.

شرایط قضیه ۱ نسبت به $x_0,\ldots,x_m$ و $y_1,\ldots,y_m$ خطی هستند. اگر $\tau=\tau_1=\tau_2$ در نظر گرفته شود و در ضمن $\tilde{R}=\tau R$ در نظر بگیریم، شرایط این قضیه نیز نسبت به $\tilde{R}$ خطی خواهد شد. با اعمال (۱۷) در (۴) در می‌یابیم که P^{-1} و نیز R توابعی affine از $\{C_k\}$ خواهند شد. بنابراین $\tilde{R}$ نیز تابعی affine از $\tilde{C}_k=\tau C_k,\ \forall k$ می‌گردد [۵]. بنابراین شرایط قضیه ۱ نسبت به متغیرهای $x_0,\ldots,x_m\,,\,y_1,\ldots,y_m\,,\tilde{C}_0,\ldots,\tilde{C}_k\ ,\ P\ ,\ \tau$ خطی خواهد بود. شرط $1/2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_u\left(\omega\right)\mathrm{d}\omega\leq\beta$ نیز معادل با $2C_0\leq\beta$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\beta\tau-2\tilde{c}_0\geq 0 \tag{۲۰}$$

بنابراین مساله (۱۶) را میتوان به صورت یک مساله نیمه معین[۱] تبدیل نمود. کوچکترین مقدار ممکن β با استفاده از جستجوی خطی[۲] و با استفاده از نرم‌افزارهای مربوط به حل LMIها، بدست خواهد آمد. با حل این مساله بهینه‌سازی سیگنال ورودی در شناسایی سیستم و کنترل‌کننده مقاوم مطلوب بدست خواهد آمد.

۵- شبیه‌سازی یک سیستم واقعی

۵-۱- طراحی توام کنترل‌کننده مقاوم و سیگنال ورودی در شناسایی سیستم

به‌منظور نشان دادن روش ارائه شده در این مقاله، یک سیستم انتقال انعطاف‌پذیر[۳] [۱۳] با ساختار ARX در نظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر مدل سیستم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G\left(z,\theta_0\right)=\frac{B\left(z,\theta_0\right)}{A\left(z,\theta_0\right)},\quad H\left(z,\theta_0\right)=\frac{1}{A\left(z,\theta_0\right)},$$

که در آن

$$A(z,\theta_0)=z^4-1.99185z^3+2.20265z^2-1.84083z+0.89413$$
$$B\left(z,\theta_0\right)=0.10276z+0.18123$$

و $e\left(t\right)$ یک نویز سفید با واریانس $\lambda_0=0.5$ است. پریود نمونه‌برداری هم 0.05 در نظر گرفته شده است. آزمایش شناسایی را بر روی این سیستم واقعی با $N=500$ داده و یک ساختار مدل کامل در نظر می‌گیریم. هدف طراحی سیگنال ورودی با کمترین انرژی و همچنین طراحی کنترل‌کننده مقاوم است به‌صورتی‌که قطب‌های سیستم حلقه بسته حداقل با احتمال ۹۵ درصد در درون دایره واحد قرار گیرند و نرم ∞ وزن‌دار شده تابع تبدیل حساسیت حلقه بسته نیز کوچکتر از واحد گردد، در صورتی‌که تابع وزنی

$$W=\frac{0.5165z-0.4632}{z-0.999455}$$

باشد، عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$\left\|W\left(z\right)\frac{1}{1+K\left(z\right)G\left(z,\theta\right)}\right\|_\infty<1.$$

برای آنکه چگونگی تاثیر ساختار کنترل‌کننده را نیز بر شکل‌دهی مجموعه نامعینی، حاصل از شناسایی سیستم نشان دهیم، دو کنترل‌کننده مرتبه ثابت یکی از مرتبه ۶ و دیگری از مرتبه ۴ طراحی خواهیم نمود. به‌منظور آنکه مساله را به یک مساله بهینه‌سازی قابل انجام تبدیل نماییم، طیف سیگنال ورودی را مطابق با آنچه که در بخش قبل شرح داده شد و با در نظر گرفتن $M=30$، پارامتریزه می‌نماییم. بنابراین مساله‌ای بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\underset{\tilde{c}_0,\ldots\tilde{c}_{29},x_0,\ldots,x_4,y_1,\ldots y_4,P,\beta,\tau}{\text{minimize}}\quad\beta\\&\text{subject to: } P=P^T>0,\ \tau>0\\&\qquad\qquad(13),(14),(19)\text{ and }(20)\end{aligned} \tag{۲۱}$$

برای انتخاب چندجمله‌ای مرکزی ابتدا یک کنترل‌کننده مرتبه ثابت برای سیستم نامی و بدون در نظر گرفتن نامعینی با استفاده از روش ارائه شده در [۱۱] طراحی می‌شود. سپس چندجمله‌ای مرکزی را برابر با معادله مشخصه این سیستم حلقه بسته در نظر می‌گیریم. قطب‌تابع وزنی نیز در تعیین چندجمله‌ای مرکزی به معادله مشخصه اضافه می‌گردد. با

[۱] semidefinite
[۲] Line search
[۳] flexible transmission system

حل مساله (۲۱) پارامترهای یک کنترل‌کننده مرتبه ۴ بصورت زیر بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} &x0 = 3.6915, && y1 = 0.9049, \\ &x1 = -6.3842, && y2 = -0.0298, \\ &x2 = 5.877, && y3 = -0.8533, \\ &x3 = -6.1445, && y4 = -1.0153, \\ &x4 = 3.5917. \end{aligned}$$

همین مساله را با ساختار کنترل‌کننده مرتبه ۶ نیز حل خواهیم نمود، پارامترهای کنترل‌کننده به‌قرار زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} &x0 = 1.0775, && y1 = 1.3837, \\ &x1 = -0.2317, && y2 = 0.3800, \\ &x2 = -0.3986, && y3 = -0.6787, \\ &x3 = -0.7944, && y4 = -0.8772, \\ &x4 = 0.5681, && y5 = -0.7873, \\ &x5 = -0.3514, && y6 = -0.4169, \\ &x6 = 1.0300. \end{aligned}$$

پس از تعیین طیف سیگنال ورودی با استفاده از رابطه (۱۷)، سیگنال‌های ورودی بهینه با فیلتر نمودن سیگنال نویز سفید و استفاده از معادلات یول-واکر[1] [۱۴] بدست خواهد آمد. در شکل ۲ طیف سیگنال‌های ورودی نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود طیف سیگنال‌های بهینه ورودی در اطراف مودهای ارتعاش پروسه، دارای اندازه بزرگتری هستند. همانطور که انتظار می‌رود در شکل‌دهی مجموعه نامعینی با در نظر گرفتن کنترل‌کننده مرتبه ۴ انرژی سیگنال ورودی طراحی شده، بیشتر می‌باشد. بعبارت دیگر اگر هدف طراحی کنترل‌کننده مرتبه ۴ باشد می‌بایست سیستم‌های شناسایی شده دقیق‌تر باشند که دقیق‌تر بودن شناسایی مستلزم بکار بردن سیگنال ورودی با انرژی بیشتر است. بنابراین همان‌طور که در بخش‌های قبل ذکر شد در شکل‌دهی مجموعه نامعینی هم عملکرد مطلوب حلقه بسته و هم ساختار کنترل‌کننده مدنظر قرار گرفته شده است. به‌منظور نشان دادن کارایی روش ارائه شده، ۱۰۰ تکرار مونت‌کارلو از آزمایش شناسایی انجام شده است و نمودار اندازه بود توابع حساسیت وزندار شده با استفاده از کنترل‌کننده مرتبه ۶ در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود اندازه بود توابع حساسیت وزندار شده همگی از صفر دسی‌بل ($\gamma = 1$) کمتر می‌باشد.

۵-۲- طراحی کنترل‌کننده مقاوم برای سیستم شناسایی شده با استفاده از سیگنال نویز سفید

در این بخش به‌منظور نشان دادن کارامدی روش ارائه شده طراحی توام کنترل‌کننده مقاوم و سیگنال ورودی در شناسایی سیستم، مساله طراحی کنترل‌کننده مقاوم را به‌طور مجزا مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌شود که سیستم انتقال انعطاف‌پذیر تحت بررسی بجای شناسایی با سیگنال‌های طراحی شده در بخش ۵-۱ با یک سیگنال نویز سفید شناسایی گردد. سپس برای سیستم شناسایی شده که دارای نامعینی پارامتری بیضوی است، کنترل‌کننده مقاوم طراحی خواهیم نمود. پس از آن عملکرد این کنترل‌کننده طراحی شده را با کنترل‌کننده‌های بخش ۵-۱ بر روی مجموعه مدل مورد مقایسه قرارمی‌دهیم. علاوه بر این به‌منظور انجام یک مقایسه منصفانه، سیگنال نویز سفیدی با همان توان سیگنال طراحی شده در بخش ۵-۱ را در نظر می‌گیریم. برای طراحی کنترل‌کننده مرتبه ۶ در بخش قبل در مساله طراحی سیگنال ورودی و کنترل‌کننده مقاوم، مقدار $\beta = 1.05$ در مساله بهینه‌سازی (۲۱) بدست می‌آید. حال یک سیگنال نویز سفید با همین توان را جهت شناسایی مورد استفاده قرار می‌دهیم. با انجام پروسه شناسایی بر روی این سیستم، مدلی نامی به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$A(z,\theta) = z^4 - 1.99z^3 + 2.217z^2 - 1.874z + 0.9035$$

$$B(z,\theta) = 0.1221z + 0.1897$$

علاوه بر مدل نامی سیستم، پروسه شناسایی یک نامعینی پارامتری بیضوی را نتیجه می‌دهد که با رابطه (۸) توصیف می‌گردد، که در آن R برابر است با

$$R = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2.0726 & 1.8170 & 1.2570 & 0.7460 & -0.0078 & -0.0286 \\ 1.8170 & 2.0699 & 1.8148 & 1.2753 & 0.0108 & -0.0075 \\ 1.2750 & 1.8148 & 2.0682 & 1.8151 & 0.0199 & 0.0111 \\ 0.7460 & 1.2753 & 1.8151 & 2.0681 & 0.0162 & 0.0199 \\ -0.0078 & 0.0108 & 0.0199 & 0.0162 & 0.0877 & 0.0066 \\ -0.0286 & -0.0075 & 0.0111 & 0.0199 & 0.0066 & 0.0883 \end{bmatrix}.$$

حال مساله طراحی کنترل‌کننده مقاوم را برای این سیستم با نامعینی پارامتری بیضوی بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\underset{x_0,\dots,x_6,y_1,\dots y_6,P,\gamma,\tau_1,\tau_2}{\text{minimize}} \quad \gamma \\ &\text{subject to: } P = P^T > 0,\ \tau_1 > 0, \tau_2 > 0 \\ &\qquad\qquad (13)\,\text{and}\,(14). \end{aligned}$$

این مساله بهینه‌سازی را با روش جستجوی خطی و با استفاده از نرم‌افزارهای حل LMIها حل خواهیم نمود. از حل این مساله مقدار

[1] Yule-Walker

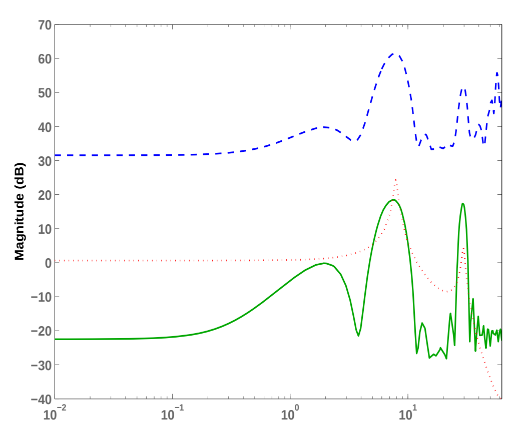
$\gamma = 1.25$ و یک کنترل‌کننده مرتبه ۶ به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{array}{ll} x0 = 1.125, & y1 = 1.308, \\ x1 = -0.2498, & y2 = 0.4813, \\ x2 = -0.1122, & y3 = -0.5538, \\ x3 = -1.841, & y4 = -0.9146, \\ x4 = 1.482, & y5 = -0.852, \\ x5 = -1.087, & y6 = -0.4671, \\ x6 = 1.422. & \end{array}$$

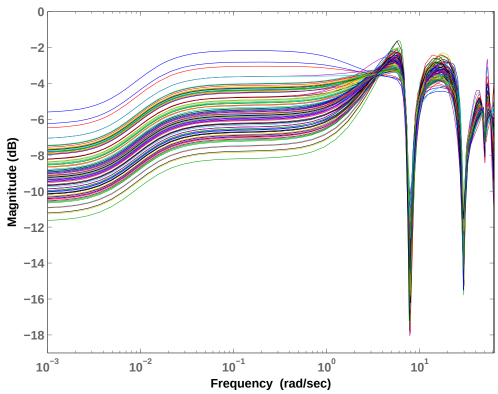
همان‌طور که مشخص است در این حالت حد بالا بر روی نرم بینهایت کلیه توابع حساسیت وزندار شده سیستم‌های متعلق به مجموعه مدل بیضوی برابر با $\gamma = 1.25$ می‌باشد. در صورتیکه در بخش ۵-۱ با در نظر گرفتن مساله توام طراحی سیگنال ورودی و کنترل‌کننده مقاوم این حد بالا برابر با $\gamma = 1$ بدست آمد. این امر نشان‌دهنده مزیت بکارگیری مساله توام شناسایی و طراحی کنترل‌کننده مقاوم می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

یک روش جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ برای سیستم‌های با نامعینی پارامتری بیضوی بر اساس ساختار فیدبک خروجی ارائه شد. این کنترل‌کننده یک کنترل‌کننده مرتبه ثابت است که پارامترهای کنترل‌کننده متغیرهای بهینه‌سازی هستند. بنابراین هر ساختاری از کنترل‌کننده را می‌توان در این روش طراحی انتخاب نمود، به‌طور مثال کنترل‌کننده PID. در ادامه با استفاده از پارامتریزاسیون مناسب از طیف سیگنال ورودی در شناسایی سیستم، مجموعه نامعینی بیضوی شکل حاصل از شناسایی سیستم به‌صورت بهینه شکل‌دهی



شکل ۲–طیف سیگنال‌های بهینه ورودی. نمودار خط‌چین (--): طیف سیگنال بهینه ورودی در طراحی کنترل‌کننده مرتبه ۴ است. نمودار یک پارچه (–):طیف سیگنال بهینه ورودی در طراحی کنترل‌کننده مرتبه ۶ است. نمودار نقطه‌چین (..): اندازه دیاگرام بود مدل نامی پروسه است.



شکل ۳- نمودار اندازه دیاگرام بود توابع تبدیل حساسیت وزندار شده با استفاده از کنترل‌کننده مرتبه ۶ مربوط به سیستم‌های شناسایی شده در ۱۰۰ تکرار مونت‌کارلو

گردید. در شکل‌دهی مجموعه نامعینی عملکرد مطلوب حلقه بسته و ساختار مورد نیاز کنترل‌کننده مدنظر قرار می‌گیرد. بدین معنی که عملکرد مطلوب سیستم حلقه بسته با در نظر گرفتن نامعینی پارامتری و همچنین ساختار کنترل‌کننده به طیف سیگنال مناسب ورودی در شناسایی سیستم ترجمه می‌گردند. بنابراین مساله طراحی توام کنترل‌کننده و شکل‌دهی مجموعه نامعینی به هدف طراحی کنترل‌کننده مقاوم انجام پذیرفت.

ضمیمه ۱

فرض کنید که یک ماتریس P شرایط لم ۱ را بازای تمامی $\theta \in U$ ارضا نماید، در این صورت به‌ازای تمامی $\theta \in U$، $\|H(z,\theta)\|_\infty = \|S(z,\theta)/L(z,\theta)\|_\infty < \gamma$ خواهد بود. پارامتر نامعین θ بصورت خطی در صورت و مخرج تابع حساسیت $H(z,\theta) = S(z,\theta)/L(z,\theta)$ ظاهر می‌شود. بنابراین در تحقق کانونیکال کنترل‌کننده $\left(L(z,\theta) - \gamma^{-1} S(z,\theta)\right)/E(z)$ و $\left(L(z,\theta) + \gamma^{-1} S(z,\theta)\right)/E(z)$، ماتریس C_1 و C_2 را می‌توان بصورت $\theta^T E_1^T + F_1^T$ و $\theta^T E_2^T + F_2^T$ در نظر گرفت. ماتریس A نیز یک ماتریس ثابت خواهد بود که تنها ضرایب چندجمله‌ای مرکزی که اعدادی ثابت هستند در ماتریس A وجود خواهند داشت. فرض می‌کنیم که شرط (۱۱) بازای تمامی $\theta \in U$ برقرار باشد، داریم

$$\begin{bmatrix} Z & A^T PB - E_1\theta - F_1 \\ B^T PA - \theta^T E_1^T - F_1^T & B^T PB - D_1 - D_1^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{آ-۱})$$

که در آن $Z = A^T PA - P$. با توجه به فرمول مکمل شور[1] [۱۵]، رابطه (آ–۱) معادل با دو رابطه زیر خواهد بود.

$$0 > Z, \tag{آ–۲}$$

$$\begin{aligned} 0 > {} & B^T PB - D_1 - D_1^T \\ & -\left(B^T PA - \theta^T E_1^T - F_1^T\right) Z^{-1} \left(A^T PB - E_1\theta - F_1\right) \end{aligned} \tag{آ–۳}$$

رابطه (آ–۳) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} E_1^T Z^{-1} E_1 & * \\ -\left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1} E_1 & V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \tag{آ–۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned} V = {} & -B^T PB + D_1 + D_1^T \\ & + \left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1} \left(A^T PB - F_1\right). \end{aligned}$$

است. * نیز ترانهاده $-\left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1} E_1$ می‌باشد. بنابراین تا اینجا نشان دادیم که شرط (۱۱) بازای تمامی $\theta \in U$ معادل با روابط (آ–۲) و (آ–۴) می‌باشد. از طرفی ناحیه نامعینی U را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -R & R\theta_0 \\ \theta_0^T R & 1-\theta_0^T R\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{آ–۵}$$

بعبارت دیگر مطلوب آن است که شرط (آ–۴) بازای کلیه θهایی که در رابطه (آ–۵) صدق می‌کنند، برقرار باشد. بنابراین می‌توان روابط (آ–۴) و (آ–۵) را با استفاده از S-procedure [۱۵] با یکدیگر ترکیب نمود. فرض کنید که $T_0, T_1 \in \mathrm{R}^{n\times n}$ دو ماتریس متقارن باشند. در اینصورت S-procedure به معادل بودن دو گزاره زیر اشاره دارد.

الف- بازای $0 \neq \zeta$، $\forall \zeta$ $\quad \zeta^T T_0 \zeta > 0$ است بازای ζهایی که $\zeta^T T_1 \zeta \geq 0$ باشد.

ب- $\exists \tau \geq 0 \in \mathbb{R}$ به‌گونه‌ای که $T_0 - \tau T_1 > 0$ است به‌شرط آنکه یک ζ_0 وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\zeta_0^T T_1 \zeta_0 > 0$.

طرف چپ شرط (آ–۵) بازای $\theta = \theta_0$ اکیداً مثبت است. بنابراین (آ–۴) و (آ–۵) با دو شرط زیر معادل هستند:

$$\tau_1 \geq 0, \tag{آ–۶}$$

$$\begin{bmatrix} E_1^T Z^{-1} E_1 + \tau_1 R & -L \\ -L^T & V - \tau\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) \end{bmatrix} > 0, \tag{آ–۷}$$

که در آن $L = E_1^T Z^{-1}\left(A^T PB - F_1\right) + \tau_1 R\theta_0$ است. با توجه به فرمول مکمل شور (آ–۷) معادل با دو رابطه زیر خواهد بود:

$$V - \tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) > 0 \tag{آ–۸}$$

$$E_1^T Z^{-1} E_1 + \tau_1 R - L\left\{V - \tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right)\right\}^{-1} L^T > 0 \tag{آ–۹}$$

یکبار دیگر استفاده از مکمل شور نتیجه می‌دهد که (آ–۸) و (آ–۲) معادلند با

$$\Pi = \begin{bmatrix} Z & A^T PB - F_1 \\ B^T PA - F_1^T & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \tag{آ–۱۰}$$

که $\Upsilon = B^T PB - D_1 - D_1^T + \tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right)$ است.

معکوس ماتریس Π برابر است با

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} Q & * \\ -\Delta^{-1}\left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

که در آن * ترانهاده $-\Delta^{-1}\left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1}$ است و همچنین

$$Q = Z^{-1} + Z^{-1}\left(A^T PB - F_1\right)\Delta^{-1}\left(B^T PA - F_1^T\right) Z^{-1}$$

و $\Delta = \tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) - V$ می‌باشند.

بنابراین می‌توان (آ–۹) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$-\tau_1 R - \begin{bmatrix} E_1^T & -\tau R\theta_0 \end{bmatrix} \Pi^{-1} \begin{bmatrix} E_1 \\ -\tau_1\theta_0^T R \end{bmatrix} < 0 \tag{آ–۱۱}$$

با توجه به مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت که (آ–۱۰) و (آ–۱۱) معادلند با

$$\begin{bmatrix} A^T PA - P & A^T PB - F_1 & E_1 \\ B^T PA - F_1^T & B^T PB - D_1 - D_1^T + \tau_1\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) & -\tau_1\theta_0^T R \\ E_1^T & -\tau_1 R\theta_0 & -\tau_1 R \end{bmatrix} < 0 \tag{آ–۱۲}$$

نامساوی اخیر نسبت به P، τ_1، E_1 و F_1 خطی می‌باشد. باید توجه نمود که نمی‌توان $\tau_1 = 0$ در نظر گرفت زیرا با توجه به رابطه (آ–۷) شرط $Z < 0$ نقض خواهد شد. بنابراین شرط (آ–۶) به $\tau_1 > 0$ تبدیل می‌گردد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که شرط (۱۲) به ازای تمامی $\theta \in U$ معادل است با وجود $\tau_2 > 0$ به‌صورتی که

$$\begin{bmatrix} A^T PA - P & A^T PB - F_2 & E_2 \\ B^T PA - F_2^T & B^T PB - D_2 - D_2^T + \tau_2\left(1-\theta_0^T R\theta_0\right) & -\tau_2\theta_0^T R \\ E_2^T & -\tau_2 R\theta_0 & -\tau_2 R \end{bmatrix} < 0. \tag{آ–۱۳}$$

[1] Schur complement formula

برقرار باشد. بنابراین با توجه به لم ۱ و اعمال این لم به تمامی سیستم‌ها در مجموعه نامعینی U، شرایط قضیه ۱ بدست خواهد آمد و اثبات به پایان می‌رسد.

مراجع

[1] L. Ljung, System Identification - Theory for the User, 2nd ed. NJ, USA: Prentice Hall, 1999.

[2] D. Henrion, M. Sebek, and V. Kucera, "LMIs for robust stabilization of systems with ellipsoidal uncertainty," in ProcessControl Conference, Strbske Pleso, Slovakia, 2001.

[3] H. F. Raynaud, L. Pronzato, and E. Walter, "Robust identification and control based on ellipsoidal parametric uncertainty descriptions," in European Journal of Control, vol. 6, pp. 245–255, 2000.

[4] R. K. Ballamudi and O. D. Crisalle, "Robust pole-placement for ellipsoidally uncertain systems," in IEEE conference on decision and control, New Orleans, Louisiana, 1995.

[5] M. Barenthin and H. Hjalmarsson, "Identification and control: Joint input design and H_∞ state feedback with ellipsoidal parametric uncertainty via LMIs," in Automatica, vol. 44, pp. 543–551, 2008.

[6] A. Rantzer and A. Megretski, "Convex parameterization of robustly stabilizing controllers," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, no. 9, pp. 1802–1808, September 1994.

[7] R. Hildebrand and M. Gevers, "Identification for control: Optimal input design with respect to a worst case υ-gap cost function," in SIAM Journal on Control and Optimization, 41 (5), 1586–1608, 2003.

[8] H. Jansson and H. Hjalmarsson, "Input design via LMIs admitting frequency-wise model specifications in confidence regions," in IEEE Transactions on Automatic Control, 50 (10), 1534–1549, 2005.

[9] X. Bombois, G. Scorletti, M. Gevers, P. Van den Hof and R. Hildebrand, "Least costly identification experiment for control," in Automatica, 42 (10), 1651–1662, 2006.

[10] A. Sadeghzadeh and H. Momeni, "Input design admitting non-fragile robust control by convex optimization," in Proc. 15th IFAC symposium on system identification (SYSID2009), Saint-Malo, France, 2009.

[11] H. Khatibi and A. Karimi, "Fixed-order H_∞ controller design via convex optimization using an alternative to Youla parameterization," submitted to IEEE Transactions on Automatic Control, 2009.

[12] D. Henrion, M. Sebek, and V. Kucera, "Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 7, pp. 1178–1186, 2003.

[13] I. D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda and A. Franco, "A flexible transmission system as a benchmark for robust digital control," in European Journal of Control, 1(2), 77–96, 1995.

[14] T. Söderström and P. Stoica, System identification, Hertfordshire, UK: Prentice-Hall International, 1989.

[15] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM studies in applied mathematics, Philadelphia, 1994.