مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۷، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۲، صفحه ۵۷-۵۳

رابطه درایه های ماتریس تابع تبدیل 3×3 با درایه های RGA آن و کاربردآن در طراحی کنترل کننده های غیرمتمرکز

عارف شاه منصوریان [1]

[1] استادیار گروه مهندسی برق، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

shahmansoorian@eng.ikiu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۶/۳۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۹/۱۱)

چکیده: در این مقاله مقادیر ممکن برای RGA سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان بررسی می شود. نشان می دهیم که برخلاف سیستم های دو ورودی دو خروجی RGA هر مقداری را در فرکانس صفر نمی تواند اختیار کند، در حالیکه در سایر فرکانس ها میتواند مقادیر دلخواهی را اختیار کند. روابط درایه های ماتریس تابع تبدیل 3×3 را برحسب مقادیر درایه های RGA بیان کردیم. در مواردی مثل روش حلقه بستن ترتیبی که مطلوب باشد سیستم کنترل شده دارای RGA مشخصی باشد این روابط می توانند مقادیر مطلوب درایه های سیستم حلقه بسته را در هر فرکانسی ارایه دهند و این مقادیر در طراحی کنترل کننده ویا پیش جبران ساز مورد استفاده قرار گیرند.

کلمات کلیدی: RGA – جفت کردن ورودی و خروجی–حلقه بستن ترتیبی.

Relation between 3×3 Transfer Function Entries and the RGA Entries and Its Application in Decentralized Controllers Design

Aref Shahmansoorian

Abstract: Relative gain array (RGA) possible values are investigated. It is shown that in 3×3 plants RGA in zero frequency can not be equal to any value; nevertheless it can be equal to arbitrary values in nonzero frequencies. The relation between the entries of transfer function and that of RGA is presented. Transfer function entries are parameterized with respect to entries of RGA. This parameterization can be used for designing compensators such that RGA of compensated system has desirable form.

Keywords: RGA- Input-output pairing-Sequential loop closing.

۱- مقدمه

یکی از موضوعات مهم در کنترل غیرمتمرکز سیستم های چندمتغیره انتخاب متغیرهای قابل کنترل (خروجی ها) و متغیرهای قابل دستکاری (ورودی ها) است. بعد از انجام این مرحله لازم است که جفتهای مناسب ورودی و خروجی انتخاب گردند. بدین معنی که یک ورودی یا مجموعه ای از ورودی ها برای کنترل یک خروجی یا مجموعه ای از خروجی ها جایابی شوند که به آن "جفت کردن ورودی/خروجی" گویند[۱]. در نحوه انتخاب جفتهای ورودی و خروجی موضوع تداخل بین حلقه ها و همچنین قابلیت پایدار سازی همه حلقه ها و همچنین حفظ پایداری کل سیستم در صورت باز شدن بعضی حلقه ها (تمامیت[1]) و عملکرد قابل حصول از کنترل کننده مورد توجه است[۲].

برای حل مسئله و همچنین اندازه گیری تداخل ابزارهای متعددی پیشنهاد شده است که از آن جمله می توان به آرایه بهره نسبی[2] (RGA) [۳] و شاخص نیدرلینسکی[3] و مقدار استثنایی ساختاری ماتریس تداخل[۲] اشاره کرد. اما پرکاربردترین آنها RGA است که توسط بریستول در سال ۱۹۶۶ ارایه گردید و به طور گسترده ای در صنعت به کار گرفته شده است. RGA برای تابع تبدیل مربعی $G(s)$ به صورت زیر تعریف می شود:

[1] Integrity
[2] Relative Gain Array
[3] Niderlinski Index

$$\Lambda(G) = G \circ *(G^{-1})^T \qquad (۱)$$

که $\circ *$ نمایشگر ضرب عنصر به عنصر است. این ماتریس عمدتاً در فرکانس صفر استفاده می شود اما در بعضی موارد در فرکانس های غیر صفر نیز مورد توجه بوده است[۴]. خواص RGA در [۱]، [۲]، [۴]، [۵] آمده است. RGA بلوکی نیز در [۶]، [۷] تعریف شده است. در[۸] با استفاده از مفهوم معکوس تعمیم یافته ماتریس ها، RGA برای سیستم های های غیر مربعی تعمیم داده شده است. مهمترین خاصیت RGA آن است که مجموع عناصر هر سطر و ستون آن یک است. از نظر جبری به ظاهر هیچ ارتباطی بین درایه های RGA وجود ندارد و تصور می شود درایه های RGA در فرکانس صفر هر مقداری را- به شرط این که مجموع عناصر هر ردیف و هر ستون یک باشد- اختیار کنند. در قسمت دوم مقاله با ذکر یک مثال عددی نشان می دهیم که RGA در فرکانس صفر هر مقدار دلخواهی نمی تواند داشته باشد و جالب تر این که در فرکانس غیر صفر هر مقداری را می تواند اختیار کند! در قسمت سوم مقاله رابطه درایه های ماتریس تابع تبدیل 3×3 را برحسب درایه های RGA آن بدست می آوریم و به این ترتیب درایه های تابع تبدیل را برحسب درایه های RGA پارامتریزه می کنیم. این کار در طراحی پیش جبران ساز جهت حصول فرم به خصوصی از RGA حائز اهمیت است که یک نمونه طراحی نیز در قسمت سوم مقاله انجام شده است.

۲- یک مثال عددی

در این قسمت با ذکر یک مثال عددی نشان می دهیم که RGA در فرکانس صفر هر مقدار دلخواهی نمی تواند داشته باشد.

مثال ۱: فرض کنید که بخواهیم یک تابع تبدیل مربعی حقیقی $G(s)$را بیابیم که RGA آن در فرکانس صفر به صورت زیر باشد،

$$\Lambda(G(0)) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در نگاه اول شاید تصور شود که مسئله جواب دارد. اما در قسمت سوم مقاله نشان می دهیم چنین سیستمی وجود ندارد! در حالی که سیستم های دو ورودی- دو خروجی بیشماری وجود دارند که RGA آنها در فرکانس صفر به صورت زیر باشد،

$$\Lambda(G(0)) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

اما موضوع جالب تر این که سیستم های بی شماری وجود دارند که در فرکانس غیر صفر مفروض ω_0، RGA آنها به صورت (۲) است! کافیست داشته باشیم:

$$G(j\omega_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-j\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \dfrac{-1-j\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

که توابع تبدیل زیادی در این شرط صدق می کنند.(مقدار تابع تبدیل حقیقی در فرکانس صفر حقیقی است اما در فرکانس غیر صفر هر مقدار مختلطی را می تواند اختیار کند و علاوه براین RGA نیز در فرکانس غیر صفر می تواند مقادیر مختلط اختیار کند.)

مثال بالا نشان می دهد که RGA در فرکانس صفر هر مقداری را نمی تواند اختیار کند در حالیکه در فرکانس غیرصفر هر مقداری را می تواند اختیار کند. *شاید یک علت این که RGA عمدتاً در فرکانس صفر مورد توجه بوده ،همین نکته است.*

۳- رابطه بین درایه های ماتریس تابع تبدیل و RGA آن

در این قسمت رابطه درایه های ماتریس تابع تبدیل 3×3 را برحسب درایه های RGA آن بدست می آوریم. این روابط در مواردی که مطلوب باشد سیستم کنترل شده RGA مشخصی داشته باشد (مثلاً روش حلقه بستن ترتیبی) سودمند است و مقادیر مطلوب درایه های ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته را ارایه می دهد، که این مقادیر می توانند در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار گیرند.

فرض کنید تابع تبدیل سیستم 3×3 به صورت زیر باشد،

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & g_{13}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & g_{23}(s) \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) & g_{33}(s) \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

با فرض صفر نبودن درایه های ردیف اول و ستون اول تابع تبدیل و با توجه به این که RGA مستقل از مقیاس کردن ورودی ها و خروجی ها می باشد، به راحتی دیده می شود که RGA تابع تبدیل(۵) با RGA تابع تبدیل زیر برابر است،

$$G_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{g_{11}(s)g_{22}(s)}{g_{12}(s)g_{21}(s)} & \dfrac{g_{23}(s)g_{11}(s)}{g_{12}(s)g_{21}(s)} \\ 1 & \dfrac{g_{32}(s)g_{11}(s)}{g_{31}(s)g_{12}(s)} & \dfrac{g_{33}(s)g_{11}(s)}{g_{31}(s)g_{13}(s)} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

ملاحظــات ۱: اگــر بعضــی عناصــر ردیــف اول یــا ســتون اول ماتریس $G(s)$ صفر باشند درایـه هـایی در سـطرها یـا سـتونهای دوم و سوم ماتریس تابع تبدیل $G_1(s)$ بی کران بـه دسـت مـی آینـد. امـا ایـن مطلب در اثبات روابطی که در زیر می آید خللی وارد نمی کند.

که با تعریف،

$$a_{22}(s)=\frac{g_{11}(s)g_{22}(s)}{g_{12}(s)g_{21}(s)},\ a_{23}(s)=\frac{g_{23}(s)g_{11}(s)}{g_{12}(s)g_{21}(s)},\quad a_{32}(s)=\frac{g_{32}(s)g_{11}(s)}{g_{31}(s)g_{12}(s)},\ a_{33}(s)=\frac{g_{33}(s)g_{11}(s)}{g_{31}(s)g_{13}(s)} \quad (۷)$$

ماتریس $G_1(s)$ به صورت زیر در می آید،

$$G_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{22}(s) & a_{23}(s) \\ 1 & a_{32}(s) & a_{33}(s) \end{bmatrix} \quad (۸)$$

بنابراین درایه های ماتریس $G_1(s)$ را برحسب درایـه هـای RGA خودش (که همان RGA تابع تبدیل $G(s)$ است) بدست مـی آوریـم. البته واضح است کـه متقـارن بـودن مـاتریس $G_1(s)$ بـه معنـی متقـارن بودن $G(s)$ نیست و علاوه براین توابع تبدیل بی شـماری وجـود دارنـد که RGA آنها به فرم داده شده Λ باشد. یعنی مسئله در صورت جـواب داشتن،بی شمار جواب خواهد داشت.

در واقع RGA برای یک سیستم 3×3 دارای ۴ درایه مستقل است و آنها را $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ می نامیم و با توجه به اینکه مجمـوع درایه های هر سطر و ستون RGA برابر یک است، فرض می کنیم،

$$\Lambda(G)=\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 1-\lambda_{11}-\lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 1-\lambda_{21}-\lambda_{22} \\ 1-\lambda_{11}-\lambda_{21} & 1-\lambda_{12}-\lambda_{22} & \lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{22}+\lambda_{21}-1 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که درایه های $\Lambda(G)$ و $G_1(s)$ تابع فرکانس s هستند و برای راحتی اندیس s را حذف کرده ایم.

روابط زیر را داریم،

$$\lambda_{11}|G_1| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \quad (۱۰)$$

$$\lambda_{12}|G_1| = a_{23} - a_{33} \quad (۱۱)$$

$$\lambda_{21}|G_1| = a_{32} - a_{33} \quad (۱۲)$$

$$\lambda_{22}|G_1| = a_{22}(a_{33}-1) \quad (۱۳)$$

که (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) نتیجه می دهند،

$$a_{23} = \lambda_{12}|G_1| + a_{33} \quad (۱۴)$$

$$a_{32} = \lambda_{21}|G_1| + a_{33} \quad (۱۵)$$

$$a_{22} = \frac{\lambda_{22}|G_1|}{a_{33}-1} \quad (۱۶)$$

که با جایگزین کردن (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) در (۱۰) می دهد،

$$\lambda_{11}|G_1| = \frac{\lambda_{22}|G_1|}{a_{33}-1}a_{33} - (\lambda_{12}|G_1|+a_{33})(\lambda_{21}|G_1|+a_{33}) \quad (۱۷)$$

از طرفی داریم،

$$|G_1| = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{22} - a_{33} + a_{23} + a_{32} \quad (۱۸)$$

و اگـــر بـــه جـــای $a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$ از رابطـــه (۱۰) و بـــه جای a_{22} از رابطه (۱۳) و بـه جـای a_{23} , a_{32} از روابـط (۱۴) و (۱۵) استفاده کنیم رابطه (۱۸) به صورت زیر در می آید،

$$|G_1| = (\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{21})|G_1| - \frac{\lambda_{22}|G_1|}{a_{33}-1} + a_{33} \quad (۱۹)$$

با ضرب کردن طرفین رابطه (۱۹) در a_{33} و جمع کردن آن با رابطه (۱۷) بدست می آید،

$$(a_{33}+\lambda_{11})|G_1| = \lambda_{11}a_{33}|G_1| - \lambda_{12}\lambda_{21}|G_1|^2 \quad (۲۰)$$

با فرض $|G_1| \neq 0$ داریم،

$$a_{33}+\lambda_{11} = \lambda_{11}a_{33} - \lambda_{12}\lambda_{21}|G_1| \quad (۲۱)$$

که از این رابطه $|G_1|$ بدست می آید،

$$|G_1| = \frac{a_{33}(\lambda_{11}-1)-\lambda_{11}}{\lambda_{12}\lambda_{21}} \quad (۲۲)$$

بـا تقسـیم کـردن رابطـه (۱۹) بـر $|G_1|$ و بـا اسـتفاده از رابطـه (۲۲) داریم،

(۲۳)

$$(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{21})-\frac{\lambda_{22}}{a_{33}-1}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{21}}{a_{33}(\lambda_{11}-1)-\lambda_{11}}a_{33}=1$$

معادله (۲۳) ارتباط بین درایه های ماتریس $G_1(s)$ را به λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} نشان می دهد. به طوری که با داشتن λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} از این رابطه a_{33} به دست می آید و از رابطه (۲۲) مقدار $|G_1|$ و سپس از روابط (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) مقادیر a_{22}, a_{23}, a_{32} به دست می آیند.

حال اگر معادله (۲۳) را در فرکانس صفر، $s=0$، در نظر بگیریم، تمام کمیت ها در این معادله باید اعداد حقیقی شوند. اما واضح است که به ازای هر ۴ مقدار اختیاری λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} معادله (۲۳) برای a_{33} جواب حقیقی ندارد. بنابراین ثابت کردیم RGA در فرکانس صفر هر مقداری را نمی تواند اختیار کند و علاوه براین روش محاسبه درایه های ماتریس برحسب درایه های RGA آن را بیان کردیم. حالا به مثال قسمت دوم مقاله برمی گردیم، مطابق رابطه (۱۲) داریم، $\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{21}=\lambda_{12}=1/3$ و با جایگذاری در معادله (۲۳) معادله زیر حاصل می شود.

$$0=-\frac{1}{3(a_{33}-1)}+\frac{a_{33}}{3(-2a_{33}-1)} \qquad (۲۴)$$

که برای a_{33} ریشه حقیقی ندارد. لذا تابع تبدیلی حقیقی که RGA آن در فرکانس صفر به صورت (۲) باشد وجود ندارد. اما در فرکانس غیر صفر چون a_{33} می تواند مختلط باشد لذا سیستمی حقیقی وجود دارد که در فرکانس غیر صفر مفروض RGA آن به صورت رابطه (۲) باشد. کافیست در رابطه (۴) صدق کند.

مثال ۲: می خواهیم کلیه توابع تبدیل 3×3 که RGA آنها در فرکانس صفر در شرط $\lambda_{11}(0)=\lambda_{22}(0)=\lambda_{33}(0)=1$ صدق می کنند را پارامتریزه کنیم. (یک نمونه از چنین سیستمی در [۸] آمده است) ابتدا مسئله را برای سیستم های به صورت (۸) حل می کنیم و سپس در روابط به دست آمده به جای $a_{22}(s),a_{23}(s),a_{32}(s),a_{33}(s)$ معادلشان بر حسب درایه های تابع تبدیل (۴) قرار می دهیم. از روابط (۱۰) و(۱۳) و (۱۸) و،

$$\lambda_{33}|G_1|=a_{33}(a_{22}-1) \qquad (۲۵)$$

روابط زیر را به دست می آوریم،

$$a_{22}=a_{33}=a_{23}a_{32} \qquad (۲۶)$$

$$\frac{1}{a_{23}}+\frac{1}{a_{32}}=2 \qquad (۲۷)$$

که حالا در این دو رابطه اخیر می توانیم به جای $a_{22}(s),a_{23}(s),a_{32}(s),a_{33}(s)$ معادلشان را از رابطه (۷) قرار دهیم و برای حصول $\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}=1$ روابط را بر حسب درایه های تابع تبدیل $G(s)$ به دست آوریم.

مثال ۳: برای سیستم با تابع تبدیل،

(۲۸)

$$G(s)=\frac{1-s}{(5s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & -4.19 & -25.96\\ 6.19 & 1 & -25.96\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

ی خواهیم یک جبران ساز طراحی کنیم که RGA سیستم جبران سازی شده به فرم زیر باشد،

$$\Lambda(G(0)K(0))=\begin{bmatrix}1 & x & -x\\ -x & 1 & x\\ x & -x & 1\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

که در آن اندازه x هرچه کوچکتر باشد به معنی تداخل کمتر است. با فرض،

$$G(0)K(0)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

با استفاده از رابطه (۲۳) داریم،

$$x^2{a_{33}}^2-x^2a_{33}-1=0 \qquad (۳۱)$$

که با فرض $x=\frac{1}{3}$ به دست می آید، $a_{33}=0.5(1\pm\sqrt{37})$ که هر دو جواب قابل قبول است و با جواب $a_{33}=0.5(1+\sqrt{37})$ از (۲۲) داریم $|G(0)k(0)|=9$ واز روابط (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) داریم،

$$a_{22}=0.5(\sqrt{37}+1),\ a_{32}=0.5(\sqrt{37}-5),$$
$$\frac{g_{23}(s)g_{11}(s)}{g_{12}(s)g_{21}(s)},a_{23}(s)=0.5(7+\sqrt{37})$$

لذا یک جواب قابل قبول برای $G(0)K(0)$ می شود:

(۳۲)

$$G(0)K(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0.5(\sqrt{37}+1) & 0.5(\sqrt{37}+7)\\ 1 & 0.5(\sqrt{37}-5) & 0.5(\sqrt{37}+1)\end{bmatrix}$$

و یک $K(0)$ قابل قبول می شود:

(۳۳)

$$K(0)=\begin{bmatrix}5.1946 & 0.8467 & 13.4278\\ -5.1946 & -0.3570 & -12.3601\\ 1 & 0.0517 & 2.4737\end{bmatrix}$$

نکته ۱: همانطور که اشاره شد این یک $K(0)$ قابل قبول است. با مقیاس کردن سطری این $K(0)$ جواب های دیگر قابل حصول است. با انتخاب جواب دیگر a_{33} سری دیگر جوابها به دست می آیند.

نکته ۲: در روش حلقه بستن ترتیبی قبل از بستن هر حلقه جدید می توان چنین جبران سازی را جهت کاهش تداخل انجام داد.

نکته ۳: سیستم جبران نشده عدد حالت ۲۷۵/۸۶ دارد که بسیار بزرگ است درحالیکه سیستم جبران سازی شده عدد حالت ۹/۵۸ دارد که مقدار مناسبی است.

٤- نتیجه‌گیری

نشان دادیم که در سیستم های 3×3، RGA در فرکانس صفر هر مقدار دلخواهی نمی تواند داشته باشد. در حالیکه در فرکانس غیرصفر محدودیتی وجود ندارد. روش محاسبه درایه های ماتریس تابع تبدیل برحسب درایه ها RGA آن را ارایه دادیم و بدین ترتیب درایه های تابع تبدیل را برحسب درایه های RGA آن پارامتریزه نمودیم. این پارامتریزه کردن، وقتی که فرم خاصی از RGA برای سیستم قبل از بستن حلقه کنترل مطلوب باشد، می تواند مقادیر مطلوب درایه های تابع تبدیل جبران شده را ارایه می دهد، که این مقادیر می توانند در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار گیرند. مثلاً در روش حلقه بستن ترتیبی در بستن هر حلقه می توان طوری کنترل کننده را طراحی کرد که بعد از بستن هر حلقه، RGA فرم مطلوبی داشته باشد که مناسب برای بستن حلقه بعدی باشد. علاوه بر این می توان درایه های سیستم حلقه بسته را بر حسب RGA پارامتریزه کرد.

مراجع

[1] J. M. Maciejowski, “Multivariable feedback design,” Addison-Wesley, 1989.

[2] S. Skogestad, I. Postlethwaite, “Multivariable feedback control analysis and design,” Wiley, Second
edition, 2005.

[3] E. H. Bristol, “On a new measure of interactions for multivariable process control,” IEEE transaction on automatic control, AC-11, pp.133-134,1966.

[4] A. Khaki-Sedigh, B. Moaveni, “Control configuration selection for multivariable plants,” LNCIS 391, Springer Verlag, 2009.

[5] M. Hovd, S. Skogestad, “Use of simple frequency-dependent tools for control system analysis, structure selection and design,” Automatica, Vol. 28, No. 5, pp.989-996, 1992.

[6] V. Manousioutakis, R. Savage, Y. Arkun, “Synthesis of decentralized processes control structure using the concept of block relative gain,” AIChE Journal, Vol. 32, pp. 991-1003, 1986.

[7] V. Kariwala, J. F. Forbes, E. S. Meadows, “Block relative gain: properties and pairing rules,” Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 42, No. 20, pp.4664-4574, 2003.

[8] J. Chang, C. Yu, “The relative gain for non-square multivariable systems,” Chemical Engineering Science, Vol. 45, No. 5, pp. 1309-1323, 1990.