

طراحی کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی در حضور نامعینی‌های سازگار و ناسازگار بدون چترینگ برای سیستمهای غیرخطی مرتبه دوم

علی کریمی ملانی

استادیار، دانشکده مهندسی برق و رباتیک، گروه کنترل، دانشگاه شاهرود، akarami@shahroodut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۳/۱۱/۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۴/۲/۳۰)

چکیده: مهمترین خصوصیت کنترل حالت لغزشی تغییرناپذیری آن نسبت به نامعینی‌های سازگار بوده که به دلیل استفاده از تابع علامت در ورودی سیستم می‌باشد. این تابع علامت، پدیده مخرب چترینگ را تولید می‌کند. ایراد دیگر این روش کنترلی، تغییرپذیری نسبت به نامعینی ناسازگار می‌باشد. در این مقاله، برای مقابله با این دو مشکل از کنترل حالت لغزشی دینامیکی چند سطحی استفاده می‌شود. در کنترل حالت لغزشی دینامیکی، یک انتگرال‌گیر قبل از سیستم قرار داده می‌شود که باعث حذف چترینگ می‌شود. افزودن این انتگرال‌گیر به سیستم، موجب افزایش درجه سیستم می‌شود که برای اعمال کنترل حالت لغزشی به این سیستم افزوده، مدل و دینامیک سیستم باید شناسایی شود. در این مقاله برای حل این مشکل، از یک رولتگر غیرخطی استفاده شده است که رولتگر زنجیره‌ای انتگرالها نامیده می‌شود. برای مقابله با نامعینی ناسازگار، هر معادله دینامیکی سیستم به عنوان یک سیستم غیرخطی مجزا در نظر گرفته شده و از تعریف چند سطح لغزشی استفاده می‌شود. به علاوه از کران نامعینی در طراحی استفاده نمی‌شود که در کاربردهای عملی اهمیت بسیاری دارد. نتایج شبیه‌سازی گویای مزایای روش پیشنهادی خواهد بود.

کلمات کلیدی: کنترل حالت لغزشی دینامیکی، نامعینی ناسازگار، چترینگ، رولتگر غیرخطی.

Design of Dynamic Sliding Mode Controller in the Presence of both Matched and Mismatched Uncertainty without Chattering for Nonlinear Second Order Systems

Ali Karami-Mollaei

Abstract: The most important property of sliding mode control (SMC) is invariant against matched uncertainties, which is due to the using of Sign function and this Sign function produces chattering. Moreover, SMC is not invariant with respect to the mismatched uncertainties, which is its other problem. In this paper to solve these two problems, using of multiple surface dynamic sliding mode control (DSMC) is proposed. In DSMC the chattering is removed due to the integrator where is placed before the input control signal of the plant. However, in DSMC the augmented system (the system plus the integrator) is one dimension bigger than the actual system and then, the plant model should be completely known. To solve this problem, an observer is proposed called integral-chain observer or ICO. To counteract with mismatched uncertainty, any system dynamics are considered as a distinct nonlinear system and multiple sliding surfaces is defined. One of the advantages of the proposed approach is the upper bound of the uncertainty not used in DSMC and ICO, which is important in practical implementation. Then, a design procedure is described and simulation result is presented to demonstrate the approach.

Keywords: Dynamic sliding mode control, mismatched uncertainty, chattering, nonlinear observer.

۱- مقدمه

یکی از مزایای مهم کنترل حالت لغزشی^۱ تغییرناپذیری^۲ آن نسبت به نامعینی سازگار^۳ است [۲،۱]. به دلیل وجود همین مزیت، کنترل حالت لغزشی ابزار قدرتمندی برای مقابله با نامعینی های ساختاری^۴ یا بدون ساختار^۵، اغتشاش و نویز می باشد. لازم به ذکر است که تغییرناپذیری خاصیتی قویتر از مقاوم بودن^۶ است [۲،۱]. مقاوم بودن یعنی رسیدن به نتیجه مطلوب در بدترین شرایط و تغییرناپذیری یعنی حصول نتیجه مطلوب بدون اینکه سیستم تحت تاثیر نویز، اغتشاش و نامعینی قرار گیرد. سیستم مقاوم ممکن است با اثر پذیری از نویز، اغتشاش و نامعینی عملکرد^۷ نامناسبی نداشته باشد در حالی که تغییرناپذیری یعنی مقاوم بودن به همراه عملکرد مطلوب [۲،۱]. اما مشکل اساسی، تغییرپذیری SMC نسبت به نامعینی ناسازگار^۸ است [۲۲-۱]. اگر نامعینی در راستای سیگنال ورودی به سیستم اعمال شود، سازگار نامیده می شود و در غیر این صورت نامعینی ناسازگار خواهد بود. کارهای معدودی برای مقابله با نامعینی های ناسازگار انجام شده است [۷-۲۲] که در بعضی از آنها تابع علامت^۹ به صورت مستقیم در سیگنال ورودی سیستم قرار گرفته است که موجب تولید چترینگ می شود [۷-۱۴]. روشهای پیشنهادی در [۱۵،۸] از دیدگاه مفهومی و پیاده سازی بسیار پیچیده می باشند. در [۱۶-۱۸] از کران نامعینی ها و مشتقات آنها استفاده شده است، به عنوان مثال روش پیشنهادی در [۱۸] برای مقابله با نامعینی ناسازگار در سیستم های چند ورودی است که در آن از فرض کراندار بودن مشتق نامعینی استفاده شده است. روش پیشنهادی در [۸] بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی^{۱۱} بوده و یا در [۱۴] از نوعی رویتگر پیچیده استفاده شده است. در [۱۳] از رویتگر توسعه یافته^{۱۱} استفاده شده است. در [۱۹] با استفاده از نامساوی های ماتریسی خطی اثر نامعینی فقط کمینه^{۱۲} شده است. در [۲۱،۲۰] از تعریف چند سطح لغزشی به همراه تابع اشباع استفاده شده است، روش بیان شده در [۲۲] نیز از تابع اشباع برای حذف چترینگ استفاده کرده است (روش لایه مرزی).

یکی دیگر از مهمترین مشکلات کنترل حالت لغزشی، چترینگ^{۱۳} می باشد [۱-۶]. چهار روش برای حذف و یا کاهش آن پیشنهاد شده است: لایه مرزی^{۱۴} [۳]، لایه مرزی تطبیقی^{۱۵} [۲۳]، مرتبه بالا^{۱۶}

[۲۵،۲۴،۵،۴] و دینامیکی^{۱۷} [۲۶،۱]. در روشهای لایه مرزی و لایه مرزی تطبیقی تغییرناپذیری سیستم از بین می رود. در روش مرتبه بالا چترینگ با انتقال سویچینگ به مشتقات بالاتر سطح لغزشی حذف می شود. روشهای زیادی برای پیاده سازی کنترل حالت لغزشی مرتبه دو و یا مرتبه های بالاتر پیشنهاد شده است [۲۵،۲۴]. مشکل این روش نیاز به دانستن مشتقات مدل سیستم است که به عنوان مثال در حالت مرتبه دو مشتق مدل سیستم باید تخمین زده شود. در روش دینامیکی، یک انتگرال گیر (به عنوان یک فیلتر پایین گذر) قبل از سیستم قرار داده می شود تا نوسانات فرکانس بالا و چترینگ ناشی از تابع علامت حذف شده و در ورودی سیستم افزوده (سیستم به همراه انتگرال گیر) ظاهر نشود [۲۶،۱]. اگرچه به دلیل وجود انتگرال گیر، مرتبه سیستم افزوده یک واحد بیشتر از مرتبه سیستم اصلی است و بنابراین برای اعمال کنترل حالت لغزشی به سیستم افزوده و تعریف سطح لغزشی، دینامیک و مدل سیستم باید مشخص و معلوم باشد [۲۶،۱]. در نهایت در روش دینامیکی به مدل سیستم نیاز است اما در روش مرتبه بالا به مشتق مدل سیستم، که بیانگر ارجحیت روش دینامیکی نسبت به روش مرتبه بالا است.

بنابراین چترینگ ناشی از تابع علامت و تغییرپذیری نسبت به نامعینی ناسازگار دو بحث اساسی در کنترل حالت لغزشی هستند که هدف این مقاله رفع همزمان این دو مشکل است. در روش پیشنهادی برای مقابله با نامعینی ناسازگار، هر معادله دینامیکی سیستم به عنوان یک زیر سیستم مجزا در نظر گرفته شده و سپس با تعریف چند سطح لغزشی، برای هر زیر سیستم یک کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی طراحی خواهد شد. استفاده از کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی برای حذف چترینگ می باشد.

برای تخمین مدل و دینامیک هر زیر سیستم، از یک رویتگر غیرخطی استفاده شده است که رویتگر زنجیره ای انتگرالها^{۱۸} نامیده می شود. با استفاده از رویتگر غیرخطی پیشنهاد شده قسمتهای نامشخص هر سطح لغزشی شناسایی شده و تخمین زده می شوند. روش پیشنهادی را کنترل حالت لغزشی دینامیکی چند سطحی^{۱۹} می نامیم. به علاوه بر اساس مطالعات نویسنده، تاکنون کنترل حالت لغزشی دینامیکی برای مقابله با نامعینی ناسازگار استفاده نشده است و رویکردی جدید محسوب می شود. ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش ۲ شرح مساله و مقدمات مورد نیاز بیان می شود. در بخش ۳ با تعریف اولین سطح لغزشی و تخمین آن با استفاده از رویتگر پیشنهاد شده، مقدار مطلوب حالت دوم بدست می آید. در بخش ۴ با استفاده از پارامترهای بدست آمده از مرحله قبل سطح لغزشی دوم تعریف شده و پارامترهای آن به کمک یک رویتگر تخمین زده می شود. سپس ورودی بدون چترینگ سیستم بدست می آید. در نهایت در بخش ۵ شبیه سازی روش پیشنهادی ارائه می شود. بخش ۶ به نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

1. Sliding Mode Control or SMC
2. Invariance
3. Matched
4. Structured
5. Unstructured
6. Robustness
7. Performance
8. Mismatched
9. Sign
10. Linear Matrix Inequality or LMI
11. Extended State Observer
12. Minimized
13. Chattering
14. Boundary Layer
15. Adaptive Boundary Layer
16. Higher Order SMC or HOSMC

17. Dynamic SMC or DSMC

18. Integral-Chain Observer or ICO

19. Multi-Surface DSMC or M-DSMC

اما مشکل این رویکرد در این است که فقط حالت‌های $x = [x_1, x_2]^T$ در دسترس بوده و مشتقات آنها یعنی متغیرهای $\dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dot{x}_2$ به دلیل نامعینی‌های $d(x, t) = [d_1, d_2]^T$ به صورت مستقیم قابل محاسبه نمی‌باشند. مشکل فوق را با پیشنهاد روتگر غیرخطی زنجیره‌ای انتگرالها که توضیح داده خواهد شد حل می‌نماییم.

۳- مرحله اول: محاسبه مقدار مطلوب متغیر

حالت دوم

در ابتدا با تعریف متغیرهای $y_1 = x_1, y_2 = \dot{x}_1, y_3 = \ddot{x}_1$ روتگر ICO زیر را برای معادله (۲) پیشنهاد می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \hat{y}_2 \\ \hat{y}_2 &= \hat{y}_3 \\ \hat{g}_1 &= -\frac{c_1}{\delta^3}(\hat{y}_1 - y_1) - \frac{c_2}{\delta^2} \hat{y}_2 - \frac{c_3}{\delta} \hat{g}_1 \end{aligned} \quad (۶)$$

که $\hat{d}_1(t) = g_1(t)$ و $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{g}_1$ به ترتیب تخمین متغیرهای y_1, y_2, y_3 بوده و g_1 و $u_1 = \dot{x}_2$ می‌باشد. به علاوه نحوه انتخاب پارامترهای c_1, c_2, c_3 و δ در قضیه ۲ توضیح داده شده است. اکنون تخمین سطح لغزشی (۳) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= k\hat{X}_1 = k_1\hat{x}_1 + k_2\dot{\hat{x}}_1 + k_3\ddot{\hat{x}}_1 \\ &= k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2 + k_3\hat{y}_3 \end{aligned} \quad (۷)$$

تذکره ۱: بردار حالت $\hat{X}_1 = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3]^T = [\hat{x}_1, \dot{\hat{x}}_1, \ddot{\hat{x}}_1]^T$ به صفر همگرا می‌شود اگر سطح \hat{s}_1 صفر شده و ضرایب k_3, k_2, k_1 طوری انتخاب شوند که چندجمله‌ای $k_3S^2 + k_2S + k_1 = 0$ هرویتز باشد [۳].

قضیه ۱: سیگنال ورودی $u_1 = \dot{x}_2$ که از معادله دینامیکی زیر بدست می‌آید سطح لغزشی \hat{s}_1 را صفر خواهد نمود.

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \\ &+ \frac{c_1}{\delta^3}(\hat{y}_1 - y) + \frac{c_2}{\delta^2} \hat{y}_2 + \frac{c_3}{\delta} \hat{g}_1 - \frac{k_1}{k_3}(\hat{y}_2) \\ &- \frac{k_2}{k_3}(\hat{g}_1 + u_1) - \frac{\sigma_1}{k_3} \text{sign}(\hat{s}_1) - \frac{\sigma_2}{k_3} \hat{s}_1 \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\sigma_1 > 0 \text{ and } \sigma_2 > 0$$

اثبات: تابع لیاپانوف $V = 0.5\hat{s}_1^2$ را که مشتق آن به صورت $\dot{V} = \hat{s}_1\dot{\hat{s}}_1$ است در نظر بگیرد. اکنون با استفاده از معادلات (۶) و (۷) معادله زیر نتیجه می‌شود.

۲- شرح صورت مساله

برای سادگی بیان صورت مساله و روش پیشنهادی و بدون از دست دادن کلیت، از مدل یک سیستم مرتبه دو غیرخطی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= u + d_2(x, t) \\ y &= x_1 \\ x &= [x_1, x_2]^T \end{aligned} \quad (۱)$$

به طوری که x بردار حالت قابل دسترس سیستم بوده و u ورودی سیستم می‌باشد. به علاوه d_1 و d_2 به ترتیب نامعینی‌های نامشخص ناسازگار و سازگار سیستم هستند و همچنین y خروجی سیستم است. هدف، تعیین و طراحی سیگنال بدون چترینگ u به صورتی است که حتی در حضور نامعینی $d = [d_1, d_2]^T$ خروجی $y = x_1$ به صفر همگرا شده و همچنین تغییرناپذیری سیستم حفظ شود. همانطور که بیان شد به دلیل وجود نامعینی ناسازگار، کنترل حالت لغزشی به صورت مرسوم قابل استفاده نیست. برای رفع این مشکل و همزمان حذف چترینگ، از کنترل حالت لغزشی دینامیکی چند سطحی به صورتی که در ادامه توضیح داده می‌شود استفاده خواهیم نمود. اکنون قسمت اول (۱) را در نظر بگیرد:

$$\dot{x}_1 = x_2 + d_1(x, t) \quad (۲)$$

در اولین مرحله، می‌توان x_2 را به عنوان ورودی این سیستم در نظر گرفته و با استفاده از DSMC آن را طوری طراحی نمود که $y = x_1$ به صفر همگرا شود. مقدار بدست آمده برای x_2 را در این مرحله مقدار مطلوب x_2 و یا x_{d2} می‌نامیم. واضح است که d_1 نسبت به x_2 از نوع سازگار بوده و بنابراین کنترل کننده طراحی شده تغییرناپذیر خواهد بود. برای حصول این امر، سطح لغزشی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} s_1 &= kX_1, X_1 = [x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1]^T \\ k &= [k_1, k_2, k_3] \end{aligned} \quad (۳)$$

اکنون قسمت دوم (۱) را در نظر بگیرد:

$$\dot{x}_2 = u + d_2(x, t) \quad (۴)$$

در مرحله دوم و با استفاده از DSMC ورودی بدون چترینگ u را طوری محاسبه می‌کنیم که حالت x_2 مقدار مطلوب بدست آمده از مرحله قبل یعنی x_{d2} را دنبال نماید. بدین منظور سطح لغزشی دومی به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} s_2 &= \lambda(X_2 - X_{d2}) \\ X_2 &= [x_2, \dot{x}_2]^T \\ X_{d2} &= [x_{d2}, \dot{x}_{d2}]^T, \lambda = [\lambda_1, \lambda_2] \end{aligned} \quad (۵)$$

تذکر ۱: حالت های تخمینی $\hat{y}_1 = \hat{x}_1, \hat{y}_2 = \dot{\hat{x}}_1, \hat{y}_3 = \ddot{\hat{x}}_1$ همگرا خواهند شد.

تذکر ۲: چون اثبات این قضیه با استفاده از تابع لیاپانوف می باشد، بر اساس قضیه لیاپانوف [۳] سیگنالهای موجود در حلقه بسته از جمله $\hat{y}_1 = \hat{x}_1$ و $u_1 = \dot{\hat{x}}_2$ کراندار می باشند.

اکنون پایداری روینگر را ثابت می کنیم به عبارتی ثابت خواهیم کرد که خطای تخمین روینگر به صفر میل می کند.

قضیه ۲: اگر مقادیر c_1, c_2 و c_3 طوری انتخاب شوند که معادله زیر به ازای تمام مقادیر δ هرویتز باشد:

$$s^3 + \frac{c_3}{\delta} s^2 + \frac{c_2}{\delta^2} s + \frac{c_1}{\delta^3} = 0 \quad (20)$$

آنگاه $\hat{y}_1 \rightarrow y_1, \hat{y}_2 \rightarrow y_2$ و $\hat{y}_3 \rightarrow y_3$ اگر $\delta \rightarrow 0$ به عبارت دیگر خطای تخمین روینگر (۶) به صفر همگرا می شود هرگاه δ به صفر همگرا شود.

اثبات: تبدیل لاپلاس معادله (۶) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} s\hat{Y}_1(s) &= \hat{Y}_2(s) \\ s\hat{Y}_2(s) &= \hat{Y}_3(s) \\ s\hat{G}_1(s) + \frac{c_3}{\delta} \hat{G}_1(s) + \frac{c_2}{\delta^2} \hat{Y}_2(s) + \frac{c_1}{\delta^3} \hat{Y}_1(s) &= \frac{c_1}{\delta^3} Y_1(s) \end{aligned} \quad (21)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} s\delta^3 \hat{G}_1(s) + c_3 \delta^2 \hat{G}_1(s) + c_2 \delta \hat{Y}_2(s) \\ + c_1 \hat{Y}_1(s) &= c_1 Y_1(s) \end{aligned} \quad (22)$$

و یا با استفاده از رابطه $\hat{y}_3 = u_1 + \hat{g}_1$:

$$\begin{aligned} s\delta^3 \hat{Y}_3(s) + c_3 \delta^2 \hat{Y}_3(s) + c_2 \delta \hat{Y}_2(s) \\ + c_1 \hat{Y}_1(s) &= c_1 Y_1(s) + s\delta^3 U_1(s) + c_3 \delta^2 U_1(s) \end{aligned} \quad (23)$$

یا:

$$\hat{Y}_1(s) = \frac{c_1 Y_1(s) + s\delta^3 U_1(s) + c_3 \delta^2 U_1(s)}{\delta^3 s^3 + c_3 \delta^2 s^2 + c_2 \delta s + c_1} \quad (24)$$

با توجه به تذکر ۲، متغیرهای $u_1(t)$ و $\hat{y}_1(t)$ کراندار می باشند و بنابراین تبدیل لاپلاس آنها یعنی $U_1(s)$ و $\hat{Y}_1(s)$ موجود بوده و بی نهایت نخواهد شد و به علاوه بر اساس فرض صورت قضیه و معادله (۲۰) مخرج این کسر نیز هرویتز می باشد. بنابراین $Y_1(s) = X_1(s)$ و یا $x_1(t)$ نیز کراندار می باشد. اکنون با در نظر گرفتن حالت حدی

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= k_1 \hat{y}_1 + k_2 \hat{y}_2 + k_3 \hat{y}_3 \\ &= k_1 (\hat{y}_2) + k_2 (\hat{g}_1 + u_1) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$k_3 \left(-\frac{c_1}{\delta^3} (\hat{y}_1 - y_1) - \frac{c_2}{\delta^2} \hat{y}_2 - \frac{c_3}{\delta} \hat{g}_1 + \dot{u}_1 \right)$$

با جایگذاری \dot{u}_1 از معادله (۸) در معادله (۹):

$$\hat{s}_1 = -\sigma_1 \text{sign}(\hat{s}_1) - \sigma_2 \hat{s}_1 \quad (10)$$

بنابراین:

$$\dot{V} = -\sigma_1 |\hat{s}_1| - \sigma_2 \hat{s}_1^2 \leq -\sigma_1 |\hat{s}_1| \quad (11)$$

حال با استفاده از مشتق تابع لیاپانوف و معادله (۱۱):

$$\hat{s}_1 \dot{\hat{s}}_1 \leq -\sigma_1 |\hat{s}_1| \quad (12)$$

به طوری که $\sigma_1 > 0$ است. فرض کنید زمان رسیدن به سطح لغزشی \hat{s}_1 باشد یعنی $\hat{s}_1(t_f) = 0$ ، دو حالت زیر را در نظر بگیرید: حالت اول: فرض کنید $\hat{s}_1 > 0$ باشد، با استفاده از معادله (۱۱) به نامساوی زیر می رسمیم:

$$\dot{\hat{s}}_1 \leq -\sigma_1 \quad (13)$$

محاسبه انتگرال دو سمت این نامساوی بین $t = 0$ و $t = t_f$ به رابطه زیر منجر خواهد شد:

$$-\hat{s}_1(0) \leq -\sigma_1 t_f \quad (14)$$

بنابراین:

$$t_f \leq \frac{\hat{s}_1(0)}{\sigma_1} \quad (15)$$

حالت دوم: فرض کنید $\hat{s}_1 < 0$ باشد، با استفاده از معادله (۱۲) به نامساوی زیر می رسمیم:

$$\dot{\hat{s}}_1 \geq \sigma_1 \quad (16)$$

محاسبه انتگرال دو سمت این نامساوی بین $t = 0$ و $t = t_f$ به رابطه زیر منجر خواهد شد:

$$-\hat{s}_1(0) \geq \sigma_1 t_f \quad (17)$$

بنابراین:

$$t_f \leq \frac{-\hat{s}_1(0)}{\sigma_1} \quad (18)$$

به طور کلی، با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۸) نامساوی زیر را داریم:

$$t_f \leq \frac{|\hat{s}_1(0)|}{\sigma_1} \quad (19)$$

به عبارت دیگر رسیدن به سطح لغزشی \hat{s}_1 در زمان محدود اتفاق می افتد و سطح لغزشی \hat{s}_1 در زمان محدود صفر خواهد شد. بنابراین با توجه به

ضرایب λ_2, λ_1 طوری انتخاب شوند که چندجمله‌ای $\lambda_2 S + \lambda_1 = 0$ هرگز مثبت باشد [۳].

قضیه ۳: سیگنال ورودی u که از معادله دینامیکی زیر بدست می‌آید سطح لغزشی \hat{s}_2 را صفر خواهد نمود.

$$\begin{aligned} \dot{u} = & + \frac{r_1}{\gamma^2} (\hat{z}_1 - z_1) + \frac{r_2}{\gamma} \hat{g}_2 \\ & - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\hat{z}_2) - \frac{\sigma_3}{\lambda_2} \text{sign}(\hat{s}_2) - \frac{\sigma_4}{\lambda_2} \hat{s}_2 \\ & + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\dot{x}_{d2}) + (\ddot{x}_{d2}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sigma_3 > 0 \text{ and } \sigma_4 > 0$$

اثبات: تابع لیاپانوف $V = 0.5 \hat{s}_2^2$ را که مشتق آن به صورت $\dot{V} = \hat{s}_2 \dot{\hat{s}}_2$ است در نظر بگیرید. اکنون با استفاده از معادلات (۲۸) و (۲۹) معادله زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{s}}_2 = & \lambda_1 (\hat{z}_1 - \dot{x}_{d2}) + \lambda_2 (\hat{z}_2 - \ddot{x}_{d2}) = \\ & \lambda_1 (\hat{z}_1) + \lambda_2 (\hat{z}_2) - \lambda_1 (\dot{x}_{d2}) - \lambda_2 (\ddot{x}_{d2}) = \\ & \lambda_1 (\hat{z}_2) + \lambda_2 (\dot{u} + \hat{g}_2) - \lambda_1 (\dot{x}_{d2}) - \lambda_2 (\ddot{x}_{d2}) \\ = & \lambda_1 (\hat{z}_2) + \lambda_2 \left(\dot{u} - \frac{r_1}{\gamma^2} (\hat{z}_1 - z_1) - \frac{r_2}{\gamma} \hat{g}_2 \right) \\ & - \lambda_1 (\dot{x}_{d2}) - \lambda_2 (\ddot{x}_{d2}) \end{aligned} \quad (31)$$

با جایگذاری \dot{u} از معادله (۳۰) در معادله (۳۱):

$$\dot{\hat{s}}_2 = -\sigma_3 \text{sign}(\hat{s}_2) - \sigma_4 \hat{s}_2 \quad (32)$$

بنابراین:

$$\dot{V} = -\sigma_3 |\hat{s}_2| - \sigma_4 \hat{s}_2^2 \leq -\sigma_3 |\hat{s}_2| \quad (33)$$

حال با استفاده از مشتق تابع لیاپانوف و معادله (۳۳):

$$\hat{s}_2 \dot{\hat{s}}_2 \leq -\sigma_3 |\hat{s}_2| \quad (34)$$

فرض کنید t_f زمان رسیدن به سطح لغزشی \hat{s}_2 باشد یعنی $\hat{s}_2(t_f) = 0$ ، مانند قبل می‌توان ثابت نمود که:

$$t_f \leq \frac{|\hat{s}_2(0)|}{\sigma_3} \quad (35)$$

به عبارت دیگر رسیدن به سطح لغزشی \hat{s}_2 در زمان محدود اتفاق می‌افتد و سطح لغزشی \hat{s}_2 در زمان محدود صفر خواهد شد.

بنابراین با توجه به تذکر ۴ حالت‌های تخمینی بردار حالت

$$X_{d2} = [x_{d2}, \dot{x}_{d2}]^T \text{ به } \hat{X}_2 = [\hat{z}_1, \hat{z}_2]^T = [\hat{x}_2, \dot{\hat{x}}_2]^T \text{ همگرا خواهند شد.}$$

$\delta \rightarrow 0$ داریم: $\hat{Y}_1(s) = Y_1(s)$ یا $\hat{X}_1(s) = X_1(s)$ و یا $\hat{x}_1(t) = x_1(t)$

لم ۱: سطح لغزشی s_1 نیز به صفر همگرا می‌شود هرگاه δ به صفر همگرا شود یعنی $\delta \rightarrow 0$.

اثبات: متغیر $\tilde{s}_1 = s_1 - \hat{s}_1$ را تعریف می‌کنیم و بنابراین با استفاده از (۳) و (۷):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 = & s_1 - \hat{s}_1 = \\ & k_1(x_1 - \hat{x}_1) + k_2(\dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1) + k_3(\ddot{x}_1 - \ddot{\hat{x}}_1) \end{aligned} \quad (25)$$

که با استفاده از قضیه ۲ داریم $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{s}_1 = 0$ و یا به عبارت دیگر:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{s}_1 = s_1 \quad (26)$$

این معادله و معادله $\hat{s}_1(t_f) = 0$ به نتیجه نهایی مطلوب منجر خواهند شد.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_1 = 0 \quad (27)$$

تذکر ۳: مقداری را که از (۸) بدست می‌آید مقدار مطلوب متغیر x_2 یا x_{d2} می‌نامیم. دقت نمایید که ناپیوستگی ناشی از تابع علامت در \ddot{x}_{d2} قرار دارد و بنابراین \dot{x}_{d2} و x_{d2} هر دو متغیرهای پیوسته می‌باشند. دیاگرام و نحوه پیاده سازی و یا تحقق مرحله اول در شکل ۱ نشان داده شده است.

۴- مرحله دوم: محاسبه مقدار مطلوب سیگنال

ورودی

مانند بخش قبل با تعریف متغیرهای $z_1 = x_2, z_2 = \dot{x}_2$ ریتگر ICO زیر را برای معادله (۴) پیشنهاد می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 = & \hat{z}_2 \\ \dot{\hat{z}}_2 = & -\frac{r_1}{\gamma^2} (\hat{z}_1 - z_1) - \frac{r_2}{\gamma} \hat{g}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

که $g_2(t) = \dot{d}_2$ و \hat{z}_1 و \hat{z}_2 به ترتیب تخمین متغیرهای z_1 و z_2 بوده و $\hat{z}_2 = u + \hat{g}_2$ تخمینی از z_2 می‌باشد. به علاوه نحوه انتخاب پارامترهای r_1, r_2 و γ در قضیه ۴ توضیح داده شده است. اکنون تخمین سطح لغزشی (۵) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \hat{s}_2 = & \lambda (\hat{X}_2 - X_{d2}) \\ = & \lambda_1 (\hat{x}_2 - x_{d2}) + \lambda_2 (\dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_{d2}) \\ = & \lambda_1 (\hat{z}_1 - x_{d2}) + \lambda_2 (\hat{z}_2 - \dot{x}_{d2}) \end{aligned} \quad (29)$$

تذکر ۴: بردار حالت $\hat{X}_2 = [\hat{z}_1, \hat{z}_2]^T = [\hat{x}_2, \dot{\hat{x}}_2]^T$ به $X_{d2} = [x_{d2}, \dot{x}_{d2}]^T$ همگرا می‌شود اگر سطح \hat{s}_2 صفر شده و

$$\begin{aligned} \tilde{s}_2 &= s_2 - \hat{s}_2 \\ &= \lambda_1(x_2 - \hat{x}_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2) \end{aligned} \quad (41)$$

که با استفاده از قضیه ۴ داریم $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \tilde{s}_2 = 0$ یا به عبارت دیگر:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \hat{s}_2 = s_2 \quad (42)$$

این معادله و معادله $\hat{s}_2(t_f) = 0$ به نتیجه نهایی مطلوب منجر خواهند شد.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} s_2 = 0 \quad (43)$$

تذکره ۶: دقت نمایید که ناپیوستگی ناشی از تابع علامت در \dot{u} قرار دارد و بنابراین u متغیری صاف و بدون چترینگ می باشد. دیاگرام و نحوه پیاده سازی و یا تحقق مرحله دوم در شکل ۲ نشان داده شده است.

۵- ارزیابی نتایج شبیه سازی

به منظور مقایسه، روش ارزیابی شده در این مقاله به سیستم زیر که در مراجع [۱۳، ۱۱] استفاده شده است، اعمال می شود.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 \\ \dot{x}_2 &= u - 2x_1 - x_2 + \exp(x_1) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (44)$$

لازم به ذکر است که در [۱۳، ۱۱] نامعینی سازگار $d_2(x, t)$ در نظر گرفته نشده است و به علاوه نامعینی ناسازگار $d_1(x, t)$ فقط به صورت یک عدد ثابت ۰.۵ به سیستم اعمال شده است. به علاوه همانطور که در بخش مقدمه ذکر شد، در این دو مقاله توجهی به مساله چترینگ نشده است. برای نشان دادن برتری روش این مقاله، (۴۴) را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 \\ \dot{x}_2 &= u + d_2 \\ y &= x_1 \\ d_1(x, t) &= -\sin(x_1) - x_2^2 + x_1 x_2^2 \\ &\quad + x_2 \exp(x_1^2) + 0.5 x_1 \cos(2t) \\ d_2(x, t) &= -2x_1 - x_2 + \exp(x_1) \end{aligned} \quad (45)$$

پارامترهای کنترل کننده در مرحله اول به این صورت می باشند: $c_2 = 0.5$, $c_1 = 1$, $k_3 = 0.5$, $k_2 = 0.5$, $k_1 = 1$, $\delta = 0.2$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.5$, $c_3 = 0.5$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ کنترل کننده در مرحله دوم به این صورت: $\lambda_2 = 0.1$, $\lambda_1 = 1$, $r_2 = 0.1$, $r_1 = 1$, $\sigma_4 = 0.5$, $\sigma_3 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.5$.

تذکره ۵: چون اثبات این قضیه با استفاده از تابع لیاپانوف می باشد، بر اساس قضیه لیاپانوف [۳] سیگنالهای موجود در حلقه بسته از جمله u و $\hat{x}_2 = \hat{z}_2$ کراندار می باشند.

قضیه ۴: اگر مقادیر r_1 و r_2 طوری انتخاب شوند که معادله زیر به ازای تمام مقادیر γ هرویتز باشد:

$$s^2 + \frac{r_2}{\gamma} s + \frac{r_1}{\gamma^2} = 0 \quad (36)$$

آنگاه $\hat{z}_1 \rightarrow z_1$ و $\hat{z}_2 \rightarrow z_2$ اگر $\gamma \rightarrow 0$. به عبارت دیگر خطای تخمین رویتگر (۲۸) به صفر همگرا می شود هرگاه γ به صفر همگرا شود.

اثبات: تبدیل لاپلاس معادله (۲۸) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} s\hat{Z}_1(s) &= \hat{Z}_2(s) \\ s\hat{G}_2(s) + \frac{r_2}{\gamma} \hat{G}_2(s) + \frac{r_1}{\gamma^2} \hat{Z}_1(s) &= \frac{r_1}{\gamma^2} Z_1(s) \end{aligned} \quad (37)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} s\gamma^2 \hat{G}_2(s) + r_2 \gamma \hat{G}_2(s) + r_1 \hat{Z}_1(s) &= r_1 Z_1(s) \end{aligned} \quad (38)$$

و یا با استفاده از رابطه $\hat{z}_2 = u + \hat{g}_2$:

$$\begin{aligned} \gamma^2 s^2 \hat{Z}_1(s) + r_2 \gamma s \hat{Z}_1(s) + r_1 \hat{Z}_1(s) &= r_1 Z_1(s) + s\gamma^2 U(s) + r_2 \gamma U \end{aligned} \quad (39)$$

یا:

$$\hat{Z}_1(s) = \frac{r_1 Z_1(s) + s\gamma^2 U(s) + r_2 \gamma U}{\gamma^2 s^2 + r_2 \gamma s + r_1} \quad (40)$$

با توجه به تذکره ۵، متغیرهای $u(t)$ و $\hat{z}_1(t)$ کراندار می باشند و بنابراین تبدیل لاپلاس آنها یعنی $\hat{Z}_1(s)$ و $U(s)$ موجود بوده و بی نهایت نخواهد شد و به علاوه بر اساس فرض صورت قضیه و معادله (۳۶) مخرج این کسر نیز هرویتز می باشد. بنابراین $Z_1(s) = X_2(s)$ و یا $x_2(t)$ نیز کراندار می باشد. اکنون با در نظر گرفتن حالت حدی $\gamma \rightarrow 0$ داریم: $\hat{Z}_1(s) = Z_1(s)$ یا $\hat{x}_2(t) = x_2(t)$ و $\hat{X}_2(s) = X_2(s)$.

لم ۲: سطح لغزشی s_2 نیز به صفر همگرا می شود هرگاه γ به صفر همگرا شود یعنی $\gamma \rightarrow 0$.

اثبات: متغیر $\tilde{s}_2 = s_2 - \hat{s}_2$ را تعریف می کنیم و بنابراین با استفاده از (۳) و (۲۹):

دینامیکی، از نوعی رویکرد غیرخطی که به صورت زنجیره‌ای از انتگرالها (ICO) می‌باشد استفاده کرده‌ایم. اثباتها بر اساس قضیه لیاپانوف (Lyapunov) بوده و بنابراین تمام سیگنالهای موجود در سیستم حلقه بسته، کراندار (Bounded) می‌باشند. به علاوه در روش پیشنهادی هم در کنترل کننده و هم در رویکرد از کران بالای نامعینی‌ها استفاده نشده است که در کاربردهای عملی (Practical Implementation) اهمیت بسیاری دارد. همچنین همه دینامیکهای سیستم ناشناخته فرض شده و به دو صورت سازگار و یا ناسازگار در نظر گرفته شده‌اند. در نهایت همانطور که در شبیه‌سازی انجام شده نیز دیده شد، تغییرناپذیری سیستم نیز حفظ شده است. واضح است که رویکرد پیشنهاد شده هم در مفهوم (Concept) و هم در پیاده سازی (Implementation) بسیار ساده می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی و مقایسه انجام شده نشان دهنده مزایای این روش است.

مراجع

- [1] A. Karami-Mollaei, N. Pariz and H. M. Shanechi, "Position control of servomotors using neural dynamic sliding mode", Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineering), Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 133, no. 6, pp. 141-150, 2011.
- [2] H. Lee and V.-I. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems", Elsevier, Annual Reviews in Control, vol. 31, no. 2, pp. 179-188, 2007.
- [3] W. Perruquetti and J. Pierre-Barbot, Sliding mode control in engineering, Marcel Dekker, 2002.
- [4] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", Wiley, International Journal of Control, vol. 58, pp. 1247-1263, 1993.
- [5] G. Bartolini, A. Ferrara and E. Usai, "Chattering avoidance by second-order sliding mode control", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 43, no. 2, pp. 241-246, 1998.
- [6] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode techniques", Elsevier, Automatica, vol. 34, pp. 379-384, 1998.
- [7] M.-L. Chan, C. W. Tao and T.-T. Lee, "Sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties", Elsevier, Journal of the Franklin Institute, vol. 337, pp. 105-115, 2000.
- [8] H. H. Choi, "LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 52, no. 4, 2007.
- [9] C.-C. Wen and C.-C. Cheng "Design of sliding surface for mismatched uncertain systems to achieve asymptotical stability", Elsevier, Journal

$x_2(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ به علاوه برای محاسبه \dot{u} به مقدار اولیه u نیاز است که به صورت $u(0) = 0$ انتخاب شده است. شبیه‌سازی با نرم افزار متلب و با گام ۰,۰۱ انجام شده است. در شکل ۳ دیاگرام کلی کنترل کننده، یعنی ترکیب مراحل ۱ و ۲ نشان داده شده است که به نوعی خلاصه ترسیمی^۱ مقاله می‌باشد.

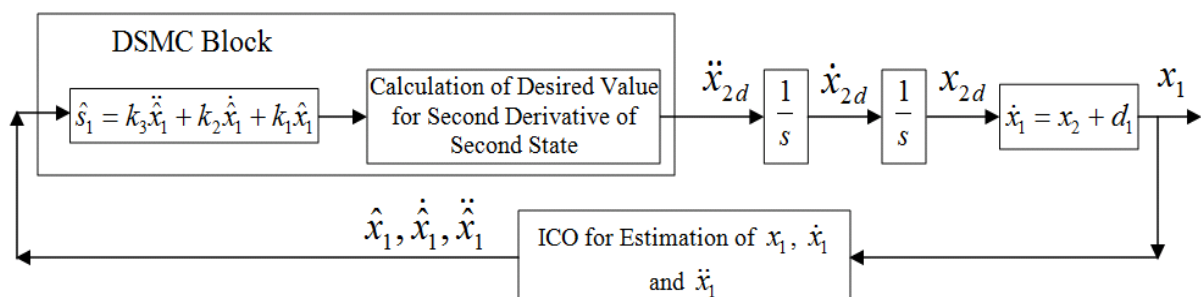
همانطور که از این شکل دیده می‌شود دو حلقه فیدبک وجود دارد که در هر کدام از یک رویکرد استفاده شده است. طراحی حلقه فیدبک پایینی در بخش سوم و طراحی حلقه فیدبک بالایی در بخش چهارم بیان شده است. نتایج شبیه‌سازی نیز در شکل‌های (۴)، (۵)، (۶)، (۷)، (۸) و (۹) نشان داده شده است. سعی شده است که در این شکلها همه جزئیات سیستم نشان داده شوند به طوری که با تمرکز بر زمان و دامنه در هر شکل، جزئیات آن به طور کامل مشخص شده است. شکل‌های (۴) و (۵) متغیرهای حالت سیستم را نشان می‌دهند. همانطور که در شکل (۴) دیده می‌شود خروجی سیستم حتی در حضور نامعینی‌ها نیز به صفر همگرا شده است. به علاوه دامنه نوسانات خروجی سیستم بسیار کوچک بوده و بعد از دوازده ثانیه خروجی به طور کامل صفر شده و بنابراین اثر اغتشاش ناسازگار $d_1(x,t)$ به طور کامل حذف شده و خروجی سیستم تغییرناپذیر شده است. دو شکل بعدی یعنی (۶) و (۷) سطوح لغزشی تعریف شده در معادلات (۳) و (۵) و همگرایی آنها را به سمت صفر نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود دامنه سوئیچینگ ناشی از تابع علامت بسیار کوچک است. در نهایت در شکل (۸) سیگنال ورودی صاف و بدون سوئیچینگ سیستم یعنی u را می‌توان مشاهده نمود. دقت نمایند که دامنه \dot{u} و سوئیچینگ آن در شکل (۹) اهمیتی ندارد زیرا \dot{u} سیگنال قبل از انتگرال گیر می‌باشد و به سیستم اعمال نمی‌شود. همانطور که از این مثال دیده می‌شود در روش پیشنهادی هم چترینگ حذف شده و هم تغییرناپذیری سیستم حلقه بسته در حضور هر دو نوع نامعینی سازگار و ناسازگار محفوظ می‌ماند.

تذکره ۷: واضح است که در روش پیشنهادی و در شبیه‌سازی، همه دینامیکهای سیستم به عنوان نامعینی (سازگار و یا ناسازگار) در نظر گرفته شده است.

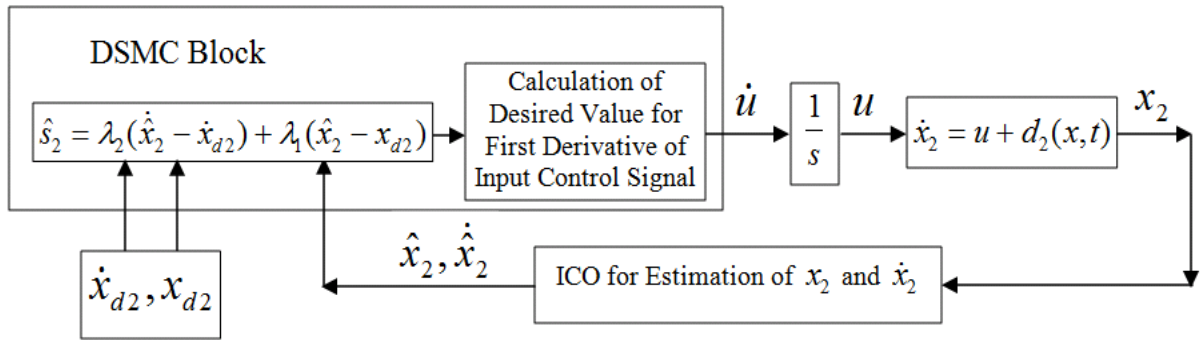
۶- نتیجه گیری

کنترل حالت لغزشی (SMC) دو ایراد اساسی دارد: چترینگ (Chattering) و تغییرپذیری نسبت به نامعینی ناسازگار (Mismatched). در روش ارایه شده و رویکرد پیشنهادی در این مقاله هر دو مشکل به طور همزمان حل می‌شوند. برای حل مشکل چترینگ از کنترل حالت لغزشی دینامیکی (DSMC) استفاده شده است و مشکل نامعینی ناسازگار با تبدیل سیستم اصلی به چند زیر سیستم و تعریف چند سطح لغزشی حل شده است. برای حل مشکل کنترل حالت لغزشی

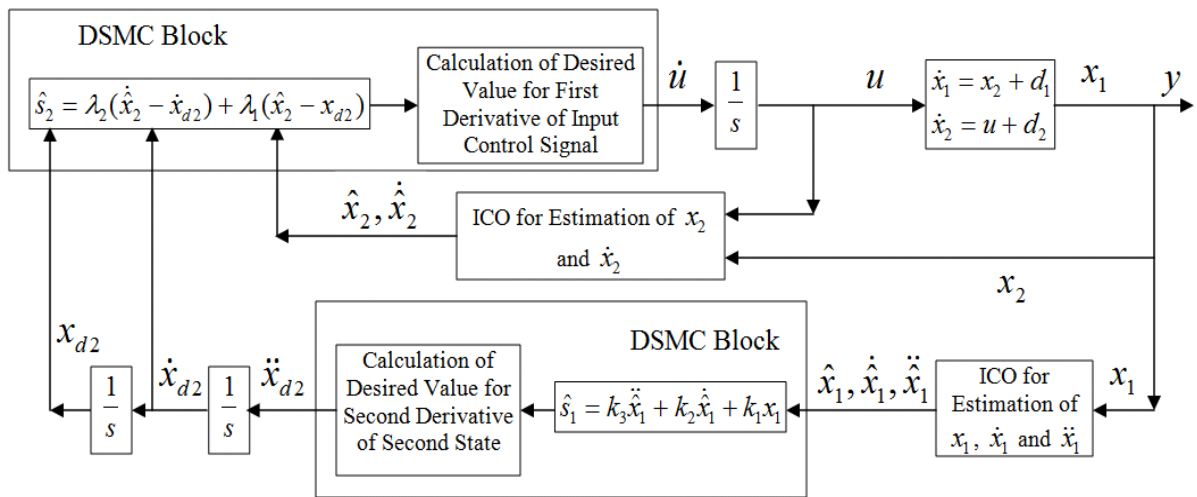
- systems with matched and mismatched uncertainty”, Elsevier, ISA Transactions, vol. 52, pp. 335-341, 2013.
- [19] A. Polyakov and A. Poznyak, “Invariant ellipsoid method for minimization of unmatched disturbances effects in sliding mode control”, Elsevier, Automatica, vol. 47, pp. 1450-1454, 2011.
- [20] A.-C. Huang and Y.-C. Chen, “Adaptive multiple-surface sliding control for non-autonomous systems with mismatched uncertainties”, Elsevier, Automatica, vol. 40, pp. 1939-1945, 2004.
- [21] Y.-C. Tsai and A.-C. Huang, “FAT-based adaptive control for pneumatic servo systems with mismatched uncertainties”, Elsevier, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 22, pp. 1263-1273, 2008.
- [22] S. Mahieddine Mahmoud, L. Chrifi-Alaoui, V. Van Assche and P. Bussy, “Sliding mode control of nonlinear SISO systems with both matched and unmatched disturbances”, International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (IG-STA), vol. 2, no. 1, pp. 350-367, 2008.
- [23] M.-S. Chen, Y.-R. Hwang and M. Tomizuka, “A state-dependent boundary layer design for sliding mode control”, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 47, no. 10, pp. 1677-1681, 2000.
- [24] A. Levant “Homogeneity approach to high order sliding mode design”, Elsevier, Automatica, vol. 41, pp. 823-830, 2005.
- [25] A. Levant, “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, Wiley, International Journal of Control, vol. 76, pp. 924-941, 2003.
- [26] M. Chen, C. Chen and F. Yang, “An LTR-observer-based dynamic sliding mode control for chattering reduction”, Elsevier, Automatica, vol. 43, no. 6, pp. 1111-1116, 2007.
- of the Franklin Institute, vol. 345, pp. 926-941, 2008.
- [10] Y. Wang, C. Jiang, D. Zhou and F. Gao, “Variable structure control for a class of nonlinear systems with mismatched uncertainties”, Elsevier, Applied Mathematics and Computation, vol. 200, pp. 387-400, 2008.
- [11] J. Yang, S. Li and X. Yu, “Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer”, IEEE Transaction on Industrial Electronics, vol. 60, no. 1, 2013.
- [12] J. Yang, S. Li, J. Su and X. Yu, “Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances”, Elsevier, Automatica, vol. 49, pp. 2287-2291, 2013.
- [13] D. Ginoya, P. D. Shendge and S. B. Phadke, “Sliding mode control for mismatched uncertain systems using an extended disturbance observer”, IEEE Transaction on Industrial Electronics, vol. 61, no. 4, 2014.
- [14] J. Yang, J. Su, S. Li and X. Yu, “High-order mismatched disturbance compensation for motion control systems via a continuous dynamic sliding-mode approach”, IEEE Transaction on Industrial Informatics, vol. 10, no. 1, 2014.
- [15] K.-K. Shyu, Y.-W. Tsai and C.-K. Lai, “A dynamic output feedback controllers for mismatched uncertain variable structure systems”, Elsevier, Automatica, vol. 37, pp. 775-779, 2001.
- [16] X. G. Yan, S. K. Spurgeon and C. Edwards, “Dynamic sliding mode control for a class of systems with mismatched uncertainty”, Wiley, European Journal of Control, vol. 11, pp. 1-10, 2005.
- [17] W. Xiang and F. Chen, “An adaptive sliding mode control scheme for a class of chaotic systems with mismatched perturbations and input nonlinearities”, Elsevier, Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, pp. 1-9, 2011.
- [18] S. Mondal and C. Mahanta, “Chattering free adaptive multivariable sliding mode controller for



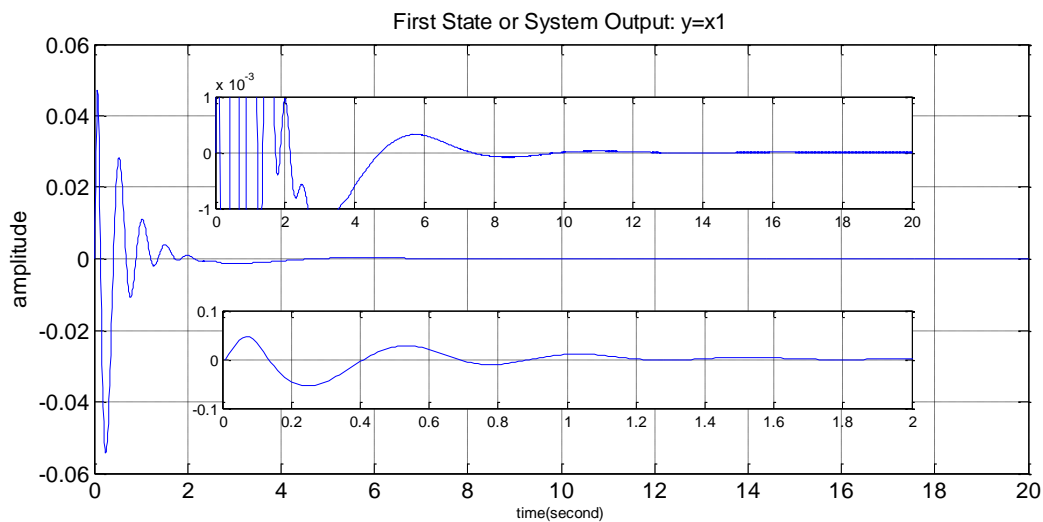
شکل ۱: ساختار و دیاگرام مرحله اول



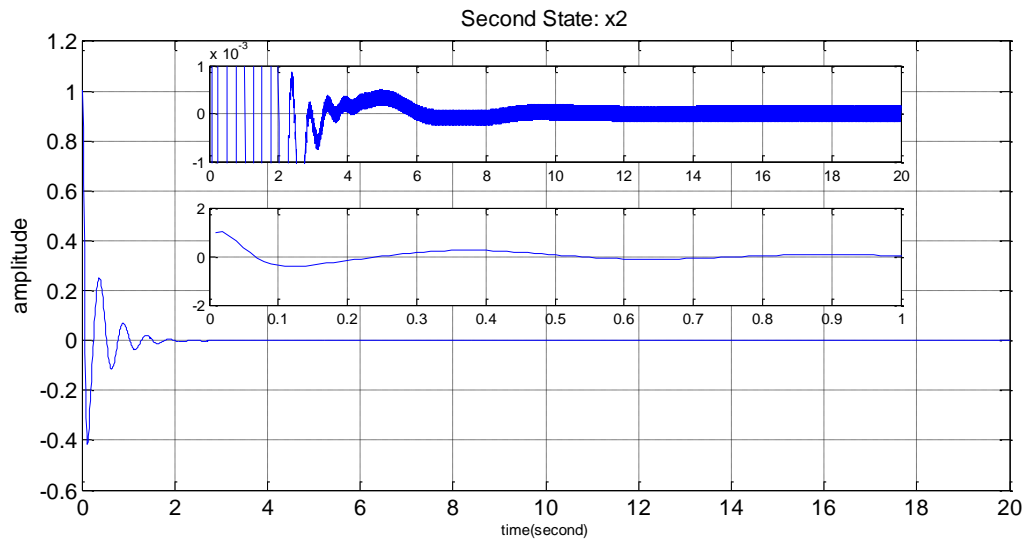
شکل ۲: ساختار و دیاگرام مرحله دوم



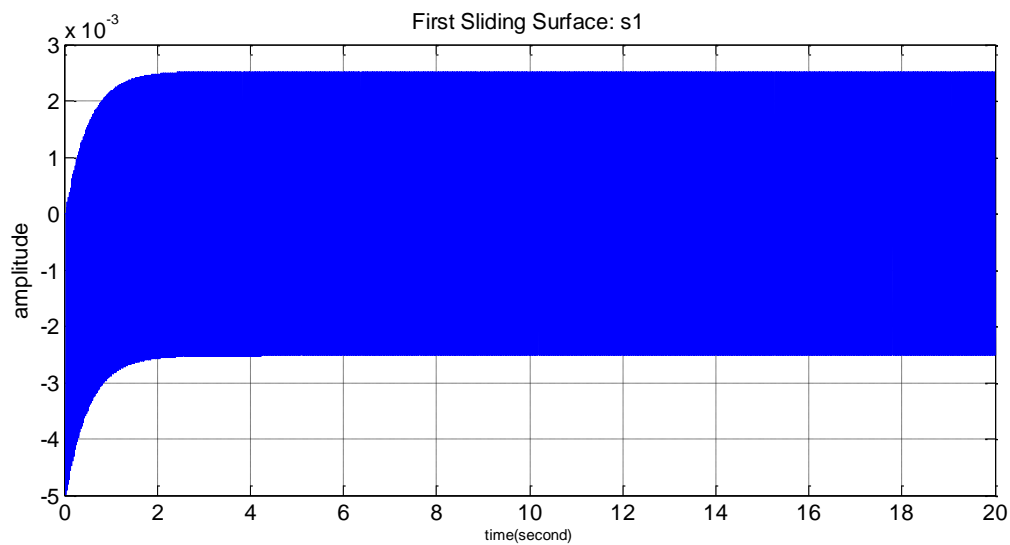
شکل ۳: ساختار و دیاگرام کلی کنترل کننده



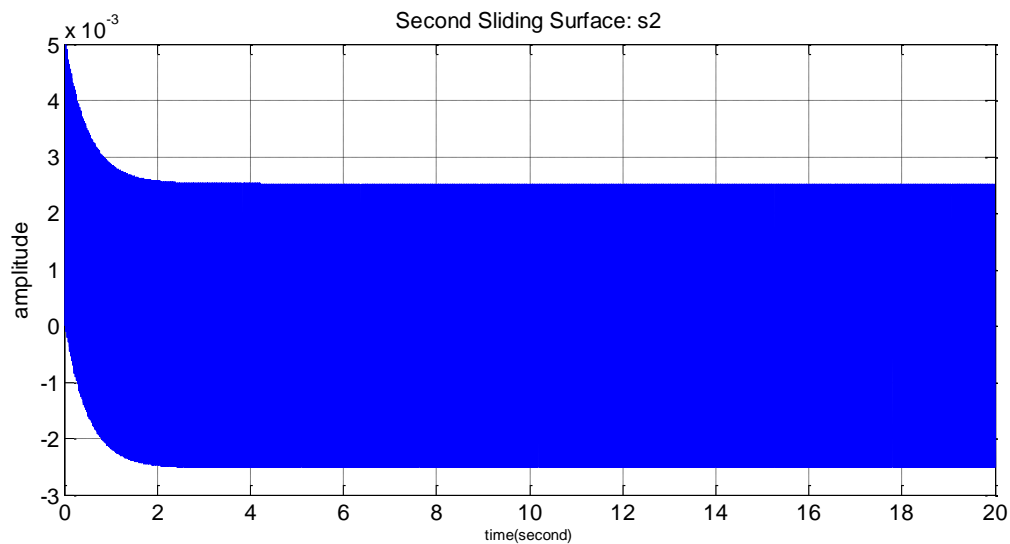
شکل ۴: خروجی سیستم



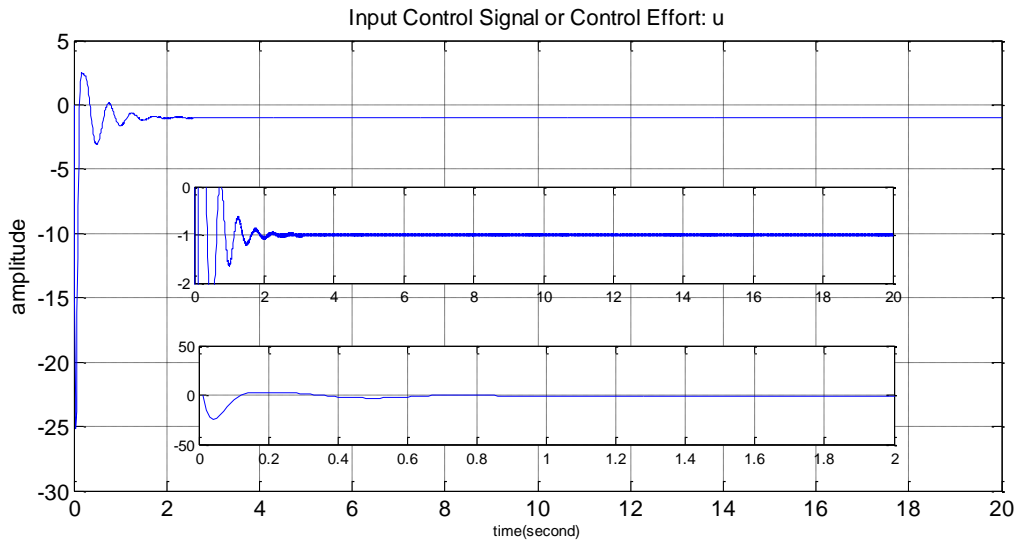
شکل ۵: متغیر حالت دوم سیستم



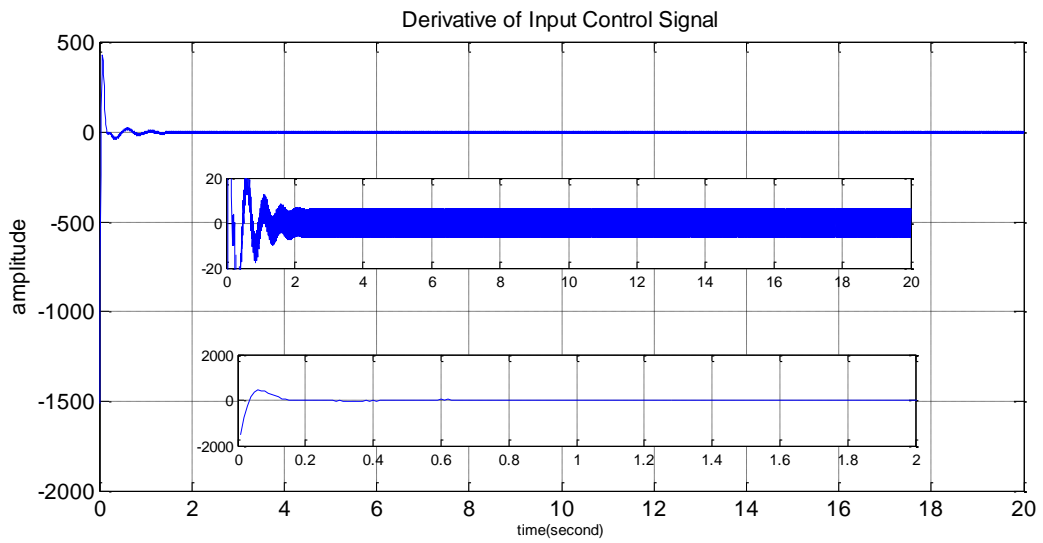
شکل ۶: سطح لغزشی اول



شکل ۷: سطح لغزشی دوم



شکل ۸: سیگنال ورودی سیستم



شکل ۹: مشتق سیگنال ورودی سیستم