

## طراحی کنترل کننده مد لغزشی - تطبیقی برای سیستم کروز کنترل در قطارهای پرسرعت

محمد رضا فایقی<sup>۱</sup>، علی اکبر جلالی<sup>۲</sup>، سید کمال الدین موسوی مشهدی<sup>۳</sup>، سید علی ظهیری پور<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه رباتیک و کنترل، دانشگاه وسترن اونتااریو، mfaieghi@uwo.ca

<sup>۲</sup> استاد دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، drjalali@iust.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، sk\_mousavi@iust.ac.ir

<sup>۴</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، zahiri@elec.iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱۰/۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۱/۱۹)

**چکیده:** در این مقاله کاربرد کنترل مد لغزشی برای سیستم کروز کنترل قطارهای پرسرعت در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری و اغتشاشات خارجی مطالعه شده است. در ابتدا، یک قانون فیدبک حالت مد لغزشی طراحی شده تا خطای ردیابی را به یک مجموعه مثبت ناوردای به اندازه دلخواه محدود که شامل مبدأ است، سوق دهد. نشان داده شده است که تحت شرایط مناسب، می‌توان به طور هم‌زمان به ردیابی و دفع اغتشاش دست یافت. سپس با هدف مقاوم‌سازی کنترل کننده در برابر نامعینی‌های با حد بالای نامعلوم، یک مکانیزم تطبیقی برای تنظیم بهره‌های کلیدزنی ارائه شده است. به منظور کاهش زیگزاگ در سیگنال کنترلی، تغییری در قانون کنترل ایجاد شده است که توانایی دست‌یابی به ردیابی خروجی را با سیگنال کنترلی نرم‌تر دارا می‌باشد. طراحی ارائه شده برای دو نوع قطار انجام شده و از طریق پیاده‌سازی‌های عددی با هم‌دیگر مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** قطار پرسرعت، کنترل مد لغزشی، قانون تطبیق، عدم قطعیت‌های پارامتری

## Adaptive Sliding Mode Controller Design for Cruise Control of High Speed Trains

Mohammadreza Faieghi, Ali Akbar Jalali, Seyed Kamal-e-ddin Mousavi  
Mashhadi, Seyed Ali Zahiripour

**Abstract:** This paper studies application of sliding mode control for cruise control of high speed trains in the presence of parametric uncertainties and external disturbances. First, a state feedback sliding mode control law is designed to drive the tracking error to a positively invariant set which is arbitrarily bounded and contains the origin. It is shown that under suitable conditions, command tracking and disturbance rejection could be achieved simultaneously. Then, an adaptive mechanism is derived for switching gains to make the controller robust against perturbations with unknown upper bounds. In order to reduce chattering, a modified controller is proposed; achieving output tracking, but with smooth control effort. The design is performed for both Distributed Driving (DD) and Push-Pull Deriving (PPD) trains. Both designs are compared through numerical simulations.

**Keywords:** high speed train, sliding mode control, adaptation law, parametric uncertainties

## ۱- مقدمه

امروزه، قطارهای پرسرعت به عنوان یک سیستم حمل و نقل عمومی کارآمد مطرح شده و استفاده از آن در کشورهای مختلف با شتاب خوبی در حال رشد است. یکی از مهم ترین مسائل مرتبط با این قطارها، کنترل سرعت آن‌ها است. کنترل کننده سرعت را عموماً به نام سیستم کروز کنترل می‌شناسند که امروزه در اکثر وسایل نقلیه استفاده می‌شود. اما، طراحی کروز کنترل برای قطارهای پرسرعت به دلایل عمده زیر چالش برانگیز است [۱]:

دینامیک غیر خطی: نیروی آیرودینامیکی وارد بر قطار با مجذور سرعت رابطه مستقیم داشته و در سرعت‌های بالا به طور قابل توجهی بر دینامیک سیستم تأثیر می‌گذارد.

نامعینی‌های پارامتری: در هر سفر، وزن مسافری و توشه‌ها متفاوت است که موجب عدم قطعیت در معادلات سیستم می‌شود.

اغتشاشات خارجی: به هنگام ورود به تونل، عبور از مسیرهای شیب دار و یا وزش باد مخالف، سرعت قطار تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

علاوه بر موارد فوق باید در نظر داشت کوپلرهایی که دو واگن مجاور را به هم متصل می‌کنند دارای خاصیت الاستیک بوده و در عمل همانند یک فنر غیر خطی مدل می‌شوند. پس قطاری با  $n$  واگن، در واقع یک سیستم جرم- فنر متشکل از  $n$  جرم بوده که با فنرهای غیر خطی به هم متصل هستند. به این ترتیب، انتظار داریم تداخل زیادی بین حالت‌های سیستم وجود داشته باشد که مسئله کنترلی را پیچیده تر می‌سازد. قطارهای پرسرعت بر اساس نحوه اعمال نیروی کشش در آن‌ها به دو دسته  $PPD^1$  و  $DD^2$  تقسیم می‌شوند. در حالت  $PPD$  نیروی کشش از طریق دو موتور که در دو انتهای قطار می‌باشند تأمین می‌گردد در حالی که برای حالت  $DD$  هر واگن دارای یک موتور جدا است. پس در هر دو حالت، با یک سیستم چند ورودی - چند خروجی غیر خطی روبرو هستیم.

به طور کلی برای مدل سازی قطار، دو روش وجود دارد: ۱- تک جرم نقطه‌ای<sup>۳</sup> و ۲- چند جرم نقطه‌ای<sup>۴</sup>. در روش اول کل مجموعه واگن‌های قطار به عنوان یک جسم صلب در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از قوانین نیوتن یک مدل ریاضی ساده بدست می‌آید. در مراجع [۲-۴] از این مدل ریاضی استفاده شده است که از دقت کافی برخوردار نیست. اما، در روش دوم که اخیراً در مقالات از آن استفاده می‌شود، هر واگن به عنوان یک جسم صلب در نظر گرفته شده و برای هر کدام از آن‌ها معادلات نیوتن نوشته می‌شود. چنانچه در بخش ۲ خواهیم دید، در این حالت با یک سیستم غیر خطی چند متغیره روبرو هستیم که تعداد ورودی- خروجی‌های آن بستگی به نوع طراحی قطار دارد. با توجه به پیچیدگی یک سیستم غیر خطی چند متغیره، در مقالات [۵، ۶] ابتدا مدل سیستم خطی شده و سپس با استفاده از تئوری‌های کنترل سیستم‌های

خطی چند متغیره، کنترل کننده مناسب برای آن طراحی می‌شود. یکی از مشکلاتی که استفاده از کنترل کننده خطی برای سیستم غیر خطی وجود می‌آورد پایداری محلی<sup>۵</sup> آن است و نتایج فقط برای زمانی معتبر است که حالت‌های سیستم در بستر جذب نقطه تعادل باشند. در [۷، ۸] از کنترل کننده غیر خطی استفاده شده و پایداری به صورت کلی<sup>۶</sup> به اثبات رسیده است. برای مقابله با پیچیدگی فرآیند طراحی، در این مقالات مدل چند متغیره قطار ساده شده و از یک مدل مرتبه دوم غیر خطی برای واگن اول، استفاده شده است. برای بدست آوردن این مدل، معادلات همه واگن‌ها بر حسب موقعیت واگن اول نوشته شده و در نهایت با هم جمع شده‌اند. اگرچه مدل بدست آمده ساده بوده و فرآیند طراحی را ساده می‌نماید ولی با این کار، بخش بزرگی از اطلاعات دینامیک سیستم حذف و در واقع به صورت عدم قطعیت جمع شونده مدل می‌شوند. از آنجا که دانش هر چه بیشتر از دینامیک‌های سیستم، ما را به کنترل کننده- هایی با کارایی بالاتر رهنمون می‌سازد، در این مقاله از همان مدل غیر خطی چند متغیره استفاده خواهد شد و همان طور که خواهیم دید، خوشبختانه علی‌رغم وجود برخی پیچیدگی‌ها در طراحی، کنترل کننده نهایی ساختار ساده تری از آنچه که در [۸] ارائه شده است خواهد داشت. از آنجا که سیستم مورد مطالعه در این مقاله غیر خطی بوده و دارای جملات نامعین است، یک روش کنترلی غیر خطی مقاوم می‌بایست مورد استفاده قرار گیرد. به همین دلیل، از روش کنترل مد لغزشی  $(SMC)^7$  استفاده خواهیم نمود. یکی از ویژگی‌های مهم  $SMC$ ، توانایی آن در جبران سازی نامعینی‌های تطابق یافته<sup>۸</sup> است [۹]. این روش بر روی سیستم- های مختلفی پیاده سازی شده است که برخی از آن‌ها را می‌توان در [۱۰-۱۴] مشاهده نمود.

مرجع [۸] یکی از آخرین کارهای انجام شده در مورد کنترل سرعت قطارهای پرسرعت می‌باشد که در آن اثرات بروز خطا در عمل گر نیز در نظر گرفته شده و یک کنترل کننده تحمل پذیر خطا برای آن طراحی شده است. در مقایسه با [۸]، در این مقاله از مدل دقیق تر و پیچیده تری برای توصیف سیستم استفاده شده است. علاوه بر این اثرات ناشی از رفتار غیر خطی کوپلرها در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته و در نهایت کنترل کننده ای ساده تر با کارایی یکسان ارائه شده است. بخش ۲ این مقاله، به ارائه مدل ریاضی قطار اختصاص داده شده است. در بخش ۳، تعریف مسئله بیان گردیده است. در بخش ۴، طراحی کنترل کننده برای حالت  $DD$  و در بخش ۵، برای حالت  $PPD$  ارائه شده است. در بخش ۶ به ارائه نتایج شبیه سازی می‌پردازیم و در نهایت، در بخش ۷ نتیجه گیری آمده است.

**علائم و نشانه‌ها.** در این مقاله،  $R^n$  بیان گر فضای اعداد حقیقی  $n$ - بعدی می‌باشد. فضای اعداد حقیقی تک بعدی با  $R$  نمایش داده می-

<sup>5</sup> Local<sup>6</sup> Global<sup>7</sup> Sliding Mode Control<sup>8</sup> Matched Uncertainties<sup>1</sup> Push Pull Driving<sup>2</sup> Distributed Driving<sup>3</sup> Single Point Mass<sup>4</sup> Multiple Point Mass

$$m_n \ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) - (c_0 + c_v \dot{x}_1) m_n - d'_n + u_n \quad (5)$$

در معادلات فوق جملات  $d'_i$  برای نمایش اغتشاشات مدل نشده خارجی از جمله: مقاومت هوا به هنگام ورود به تونل، عبور از مسیرهای شیب دار و یا وزش باد مخالف می باشند. تنها جمله غیر خطی در معادلات بالا، عبارت  $c_v \dot{x}_1^2$  است که ناشی از نیروی مخالف باد است. در سرعت های پایین می توان از این جمله صرف نظر کرد و به همین خاطر معادلات مربوط به قطارهای باری را می توان با تقریب خوبی خطی در نظر گرفت [۱۵]. ولی برای قطارهای پرسرعت که با سرعت های بالایی حرکت می کنند این جمله غیرخطی قابل اغماض نیست. این از دلایلی است که کنترل قطارهای پرسرعت را چالش برانگیز می سازد چرا که دینامیک حاصل از آن غیرخطی است.

### ۳- تعریف مسئله

در این مقاله هدف آن است که با استفاده از  $SMC$  یک کنترل کننده مقاوم به گونه ای طراحی شود تا قطار را به سرعت و موقعیت مطلوب برساند. برای این کار، ابتدا سیستم را به فرم نرمال تبدیل می کنیم. با تعریف  $\dot{x}_i = v_i$  و  $d_i = d'_i/m_i$  و تقسیم طرفین معادلات (۳) تا (۵) بر جرم واگن ها، معادلات (۶) تا (۸) به دست می آیند.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{v}_1 = -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) - (c_0 + c_v v_1) - \frac{c_a M}{m_1} v_1^2 - d_1 + \frac{1}{m_1} u_1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = -\frac{k}{m_i}(x_i - x_{i-1}) - \frac{k}{m_i}(x_i - x_{i+1}) - (c_0 + c_v v_i) - d_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_n = v_n, \\ \dot{v}_n = -\frac{k}{m_n}(x_n - x_{n-1}) - (c_0 + c_v v_n) - d_n + \frac{1}{m_n} u_n. \end{cases} \quad (8)$$

برای قطار از نوع  $DD$  معادله خروجی به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad (9)$$

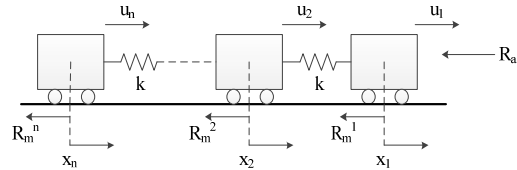
که  $\mathbf{x}$  بیانگر بردار موقعیت است. در این حالت با یک سیستم  $n$  ورودی- $n$  خروجی روبرو هستیم. در حالت  $PPD$  معادلات خروجی عبارتند از

$$\mathbf{y} = [x_1, x_n]^T. \quad (10)$$

در این حالت یک سیستم ۲ ورودی-۲ خروجی داریم و با توجه به (۱۰)، معادلات (۶) و (۸) بیانگر دینامیک خارجی سیستم بوده و معادلات (۷) بیانگر دینامیک داخلی سیستم هستند. در قطارهای پرسرعت موقعیت مطلوب قطار توسط سیستم کنترل ترافیک تعیین می شود. اگر فرمان مرجع اعمالی را  $\mathbf{r}$  بنامیم، خطای ردیابی را می توان به صورت  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{r}$  تعریف نمود. برای حالت  $DD$ ، خطای ردیابی یک بردار  $n$  بعدی و برای حالت  $PPD$  یک بردار ۲ بعدی است.

**فرض ۱.** فرمان مرجع اعمالی  $\mathbf{r}$ ، به گونه ای است که شرط

شود. حروف کوچک پرننگ برای نمایش بردارها و حروف بزرگ پرننگ برای نمایش ماتریس ها به کار می رود. درایه های برداری مانند  $x$  را با  $x_i$  نشان می دهیم. عبارت  $\mathbf{M}^T$  جهت نمایش ترانزاده  $\mathbf{M}$  استفاده می شود. نمادهای  $\mathbf{O}_n$  و  $\mathbf{I}_n$  به ترتیب ماتریس های صفر و همانی از مرتبه  $n$  بوده و  $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  یک ماتریس قطری با درایه های  $x_i$  می باشد. نماد  $\|\cdot\|_p$  برای نمایش نرم  $p$  استفاده می شود و زمانی که  $p$  صراحتاً ذکر نشود، مقدار آن مهم نیست. هم چنین نماد  $L_p$  بیانگر فضای Lebesgue-p است.



شکل ۱: نمای شماتیک قطار و نیروهای موثر در حرکت آن

### ۲- مدل ریاضی قطار پرسرعت

شکل ۱ شماتیکی از یک قطار با  $n$  واگن است. مرکز جرم هر یک از این واگن ها با  $x_i$  نشان داده شده است. هر کدام از این واگن ها به جرم  $m_i$  هستند که از طریق کوپلرهای مشابه با ضریب سختی  $k$  به هم متصل هستند. برای حالت  $DD$ ، هر کدام از واگن ها دارای موتور کششی هستند که این نیرو را با  $u_i$  نشان می دهیم. واضح است که در حالت  $PPD$ ،  $u_i = 0, i = 2, \dots, n-1$  می باشد. نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت بر هر یک از واگن ها اعمال می شود که با  $R_m^i$  نشان داده شده است. از طرفی، واگن اول در برابر نیروی مخالف باد قرار دارد که آن را با  $R_a$  نشان می دهیم. به این ترتیب نیروهای مخالف در برابر حرکت قطار عبارتند از  $R_m^i$  و  $R_a$  که به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R_a = c_a M \dot{x}_1^2 \quad (1)$$

$$R_m^i = (c_0 + c_v \dot{x}_i) m_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

که در آن ها  $c_a, c_0, c_v$  پارامترهای ثابت بوده و  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  می باشد. با نوشتن قانون حرکت نیوتن برای هر یک از واگن ها داریم [۵]

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - (c_0 + c_v \dot{x}_1) m_1 - c_a M \dot{x}_1^2 - d'_1 + u_1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i = & -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1}) \\ & - (c_0 + c_v \dot{x}_i) m_i - d'_i + u_i, \quad i = 2, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4)$$

برای طراحی کنترل کننده مد لغزشی، ابتدا می‌بایست جملات نامعین را به صورت نامعینی‌های جمع شونده در نظر بگیریم. در عمل می‌توان مقادیر دقیق  $c_0$ ،  $c_v$ ،  $c_a$  و  $k$  را اندازه‌گیری نمود. برای اندازه‌گیری  $c_a$  عموماً از ایزاری به نام تونل باد<sup>۴</sup> استفاده می‌شود که در آن، جسم تحت آزمایش، مجهز به سنسوری جهت اندازه‌گیری نیروهای تولید شده در اثر جریان هواست.  $c_0$ ، پارامتری مرتبط با ضریب اصطکاک ایستایی جسم است که با تقسیم حداکثر نیروی قراردونده واگن در آستانه حرکت بر جرم جسم به دست می‌آید.  $c_v$ ، پارامتری مرتبط با ضریب اصطکاک جنبشی جسم است که با اعمال نیروی ثابت و مشخصی که باعث حرکت واگن می‌شود و با استفاده از قانون نیوتن به دست می‌آید. پس مهم‌ترین منبع نامعینی، همان جرم واگن‌ها است که در هر سفر، بسته به تعداد مسافری و توشه‌های آن‌ها، تغییر می‌نمایند. فرض کنید  $m_i = \hat{m}_i(1 + \delta_i)$  باشد به طوری که  $\hat{m}_i$  مقدار نامی و  $\delta_i$  نامعینی ضرب شونده باشد. به این ترتیب می‌توان برای کل جرم قطار نیز نوشت:  $M_i = \hat{M}_i(1 + \delta_M)$ . از آن‌جا که در معادلات (۶) تا (۸) جرم واگن‌ها در مخرج کسرها قرار دارند نمی‌توان به آسانی این معادلات را به فرم مجموع جملات نامی و نامعین نوشت. برای فایق آمدن بر این مشکل، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{\hat{m}_i(1 + \delta_i)} = \frac{1}{\hat{m}_i} \left(1 - \frac{\delta_i}{1 + \delta_i}\right), \quad (14)$$

که نامعینی ضرب شونده را به نامعینی جمع شونده تبدیل می‌کند. با جای-گذاری (۱۴) در (۶) برای واگن اول داریم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{v}_1 = \hat{f}_1 + \Delta f_1 + (\hat{g}_1 + \Delta g_1)u_1, \end{cases} \quad (15)$$

جایی که

$$\hat{f}_1 = -\frac{k}{\hat{m}_1}(x_1 - x_2) - (c_0 + c_v v_1) - \frac{c_a \hat{M}}{\hat{m}_1} v_1^2, \quad (16)$$

$$\Delta f_1 = \frac{k \delta_1}{\hat{m}_1(1 + \delta_1)}(x_1 - x_2) + \left( \frac{c_a \hat{M} \delta_1(1 + \delta_M)}{\hat{m}_1(1 + \delta_1)} - \frac{c_a \hat{M} \delta_M}{\hat{m}_1} \right) \dot{x}_1^2 - d_1, \quad (17)$$

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{\hat{m}_1}, \quad (18)$$

$$\Delta g_1 = -\frac{\delta_1}{\hat{m}_1(1 + \delta_1)}. \quad (19)$$

به روش مشابه می‌توان روابط (۷) و (۸) را به فرم (۱۵) نوشت. به این ترتیب معادلات توصیف کننده حرکت قطار به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}} + \Delta \mathbf{f} + (\hat{\mathbf{g}} + \Delta \mathbf{g})\mathbf{u}. \end{cases} \quad (20)$$

رابطه (۲۰) برای هر دو حالت  $DD$  و  $PPD$  می‌باشد با این تفاوت که در حالت  $PPD$  داریم:  $\hat{g}_i = 0, \Delta g_i = 0, i = 2, \dots, n-1$ . در حالی که

$$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \in L_\infty, \quad (11)$$

برآورده گردد. با توجه به آن که روش کنترلی پیشنهادی این مقاله وجود این ترم‌ها را در سیگنال کنترلی ایجاب می‌کند، این فرض به منظور جلوگیری از نامحدود شدن سیگنال کنترلی در نظر گرفته شده است. فرمان مرجع می‌تواند یک مقدار ثابت باشد که در این حالت یک مسئله رگولاسیون<sup>۱</sup> داریم.

هدف آن است که کنترل کننده مد لغزشی چنان طراحی شود که در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات، به ازای  $t \rightarrow \infty$ ، خطای ردیابی برابر صفر باشد. قبل از این که به طراحی کنترل کننده مد لغزشی پردازیم، یک سری محاسبات مقدماتی در مورد نمایش نامعینی‌ها در مدل ریاضی سیستم انجام شده است.

### ۳-۱- تحلیل بدترین حالت

در بخش ۲، به هنگام مدل‌سازی قطار فرض بر این بود که کوپلرها همانند یک فنر خطی عمل می‌نمایند. در حالی که در عمل، این فنرها دارای رفتار غیر خطی بوده و فقط به ازای محدوده خاصی از عملکرد می‌توان آن‌ها را خطی در نظر گرفت. به طور کلی رفتار یک فنر غیر خطی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۹]

$$f = k(\zeta) \zeta, \quad (12)$$

که در آن  $f$  برآیند نیروی اعمالی به فنر،  $\zeta$  تغییر طول فنر و  $k(\zeta)$  ضریب سختی فنر است. در یک فنر خطی (ایده آل) ضریب سختی یک عدد ثابت است و با تغییر طول فنر تغییر نمی‌کند ولی در یک فنر غیر-خطی، ضریب سختی بسته به طول فنر متفاوت است و این رفتار را می-توان به صورت زیر بیان نمود

$$k(\zeta) = k_0(1 + \varepsilon \zeta^2), \quad (12)$$

که در آن  $k_0$  ضریب سختی اولیه و  $\varepsilon$  یک عدد ثابت است. با توجه به (۱۳) مشاهده می‌شود که به ازای  $\varepsilon > 0$  با افزایش  $\zeta$  ضریب سختی افزایش می‌یابد. به این فنرها، فنر سخت شونده<sup>۲</sup> می‌گویند. بالعکس، به-ازای  $\varepsilon < 0$ ، با افزایش  $\zeta$  ضریب سختی کاهش می‌یابد که به این-گونه از فنرها، فنر نرم شونده<sup>۳</sup> اطلاق می‌شود. طبق نتایج [۹]، کنترل فنرهای نرم شونده دشوارتر از فنرهای سخت شونده است چرا که هر اندازه ضریب سختی کم‌تر باشد سیستم تمایل بیشتری به رفتار نوسانی دارد. بنابراین، بدترین حالت زمانی است که کوپلرهای موجود به صورت فنرهای نرم شونده عمل نمایند. در بخش ۶ با ارائه یک مثال طراحی، توضیحات لازم جهت چگونگی در نظر گرفتن بدترین حالت در طراحی را ارائه می‌نماییم.

### ۳-۲- جداسازی نامعینی‌ها

<sup>1</sup> Regulation  
<sup>2</sup> Hardening  
<sup>3</sup> Softening

<sup>4</sup> Wind tunnel

$$u_i = \hat{g}_i^{-1} \alpha_i - \hat{g}_i^{-1} (\beta_i + \gamma_i |\alpha_i|) \text{sgn}(s_i) \quad (25)$$

که در آن  $\beta_i$  و  $\gamma_i$  بهره‌های کلیدزنی بوده و نحوه انتخاب آن‌ها در قضیه ۱ آمده است.

**قضیه ۱.** سیستم (۶) تا (۸) با معادله خرجی (۹) را در نظر بگیرید. فرض کنید که شرایط (۱۱)، (۲۱) و (۲۲) برقرار باشند. در این صورت تحت قانون کنترل مد لغزشی (۲۵)، پایداری مجانبی خطای ردیابی قابل تضمین است اگر شرایط زیر برقرار باشند

$$\beta_i > \frac{F_i}{1-G_i}, \quad \gamma_i > \frac{G_i}{1-G_i}, \quad i=1, \dots, n. \quad (26)$$

**اثبات.** تابع لیاپانوف را به صورت  $V_i = 0.5s_i^2, i=1, \dots, n$  انتخاب می‌نماییم. با مشتق‌گیری از  $V_i$  و جای‌گزینی (۲۴) و (۲۵) در عبارات بدست آمده، داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_i \Delta f_i + s_i \Delta g_i \hat{g}_i^{-1} \alpha_i - \beta_i |s_i| \\ &- \Delta g_i \hat{g}_i^{-1} \alpha_i \beta_i |s_i| - \gamma_i |\alpha_i| |s_i| - \Delta g_i \hat{g}_i^{-1} \gamma_i |\alpha_i| |s_i| \end{aligned} \quad (27)$$

با به‌کارگیری (۲۶)، می‌توان از رابطه (۲۷) به نامساوی زیر دست یافت

$$\dot{V}_i < -(\beta_i(1-G_i) - F_i) |s_i| - (\gamma_i(1-G_i) - G_i) |\alpha_i| |s_i|. \quad (28)$$

با توجه به (۲۱) و (۲۲) به راحتی می‌توان به  $\dot{V}_i < 0$  رسید. پس، نامساوی (۲۸) تضمین می‌نماید که همه مسیرهای حالت سیستم که خارج از منیفولد لغزش قرار دارند، طی یک زمان محدود به منیفولد می‌رسند. بنابراین منیفولد لغزش  $s=0$  یک مجموعه ناوردای مثبت است که بیان‌گر وجود مدل‌لغزشی بوده و پایداری مجانبی خطای ردیابی را تضمین می‌نماید. بنابراین، اثبات تمام است.

توجه شود که در قضیه بالا دانستن مقادیر  $F_i$  و  $G_i$  جهت تضمین پایداری حلقه بسته مهم است. در بسیاری از موارد، پیدا کردن یک مقدار دقیق برای این پارامترها کار آسانی نیست. البته، می‌توان این اعداد را چنان بزرگ در نظر گرفت که از پایداری سیستم کنترل مطمئن شد. ولی این مسئله سبب می‌شود که محافظه‌کاری کنترل‌کننده افزایش یابد. برای غلبه بر این مشکل، فرض می‌کنیم که شرط (۲۶) هم‌چنان برقرار باشد ولی مقادیر  $F_i$  و  $G_i$  نامعلوم باشند. با استفاده از قانون تطبیق می‌توان بهره‌های کلیدزنی  $\beta_i$  و  $\gamma_i$  را به صورت خودکار طوری تنظیم نمود که سیستم پایدار باقی بماند. قانون تطبیق را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\dot{\beta}_i = -\vartheta_i |s_i|, \quad \dot{\gamma}_i = -\sigma_i |s_i| |\alpha_i|, \quad i=1, \dots, n. \quad (29)$$

که در آن  $\vartheta_i$  و  $\sigma_i$  پارامترهای طراحی بوده و مقادیر مثبت انتخاب می‌شوند.

با مشاهده (۲۵) و (۲۹) و مقایسه آن با [۸]، مشخص می‌شود که استراتژی کنترلی حاصله نسبت به ورودی کنترل [۸]، ساختار ساده‌تری دارد که باعث کاهش حجم محاسباتی و پردازشی شده و با پردازنده ارزان‌تری نیز می‌تواند پیاده‌سازی شود.

در حالت  $DD$  همه درایه‌ها غیرصفر هستند. پیش از این که به طراحی پردازیم، بایستی شرایطی را برای نامعینی‌های سیستم در نظر بگیریم. همان‌طور که می‌دانیم نامعینی‌های موجود در سیستم یا به صورت عدم قطعیت در جرم واگن‌ها  $m_i = \hat{m}_i(1 + \delta_i)$  است و یا به صورت اغتشاشات خارجی که با  $d_i$  نشان داده می‌شود. با فرض محدود بودن این نامعینی‌ها داریم:

**فرض ۲.** اعداد ثابت مثبتی مانند  $F_i$  و  $G_i$  وجود دارند به طوری که شرایط زیر را برآورده سازند

$$|\Delta f_i| < F_i < \infty, \quad i=1, \dots, n, \quad (21)$$

$$|\Delta g_i \hat{g}_i^{-1}| < G_i < 1, \quad j=1, \dots, n. \quad (22)$$

توجه نمایید که در رابطه (۲۲) داریم  $\Delta g_i \hat{g}_i^{-1} = \delta_i / (1 + \delta_i)$ . بنابراین با فرض محدود بودن عدم قطعیت در جرم می‌توان گفت که شرط (۲۲) فرض معقولی است و نامساوی  $G_i < 1$  همواره برقرار خواهد بود. حال به طراحی کنترل‌کننده می‌پردازیم.

## ۴- طراحی کنترل‌کننده برای حالت

### DD

در این بخش اقدام به طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای حالت  $DD$  می‌نماییم. در این حالت یک سیستم  $n$  ورودی -  $n$  خروجی داریم و با توجه به (۹) دینامیک داخلی نداریم. فرمان ورودی مرجع به صورت  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]^T$  تعریف شده و خطای ردیابی برابر با  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{r}$  است که یک بردار  $n$  بعدی به صورت  $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n]^T$  می‌باشد. طراحی را با تعریف منیفولد لغزش  $s=0$  شروع می‌کنیم. فرض کنید که متغیر لغزشی به صورت زیر باشد

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e} \quad (33)$$

که در آن  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  پارامتر طراحی بوده و  $\lambda_i > 0$  است تا مد لغزشی را به صورت مجانبی پایدار سازد. در مرحله بعد، سیگنال کنترل را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که  $\mathbf{s}$  را در زمان محدود به صفر رسانده و برای همه زمان‌های آتی، در آن نگاه دارد. برای این کار

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \dot{\mathbf{e}} \\ &= \hat{\mathbf{f}} + \Delta \mathbf{f} + (\hat{\mathbf{g}} + \Delta \mathbf{g}) \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (34)$$

در صورت عدم حضور نامعینی‌ها، قانون کنترلی  $u_i = \hat{g}_i^{-1} (-\hat{f}_i + \ddot{i}_i - \lambda_i \dot{e}_i - \beta_i \text{sgn}(s_i))$  موجب برقراری  $\dot{\mathbf{s}} = 0$  شده که بیان‌گر آن است که شرط  $s=0$  برای زمان‌های آتی برقرار خواهد بود. اما در حضور نامعینی‌ها، قانون کنترل را بایستی به گونه‌ای تغییر داد که بتواند اثر نامعینی‌ها را برطرف سازد. در همین راستا، ابتدا  $\dot{\mathbf{s}} = -\hat{\mathbf{f}} + \ddot{\mathbf{i}} - \lambda_i \dot{e}_i$  را تعریف می‌نماییم و قانون  $SMC$  زیر را در نظر می‌گیریم

<sup>1</sup> Sliding manifold

علامت در قانون کنترل نمود. به این ترتیب قانون کنترل اصلاح یافته به صورت زیر خواهد بود

$$u_i = \hat{g}_i^{-1} \alpha_i - \hat{g}_i^{-1} (\beta_i + \gamma_i |\alpha_i|) \text{sat}(s_i / \mu_i), \quad (37)$$

که در آن  $\mu_i$  یک ثابت مثبت است و تعیین کننده ناحیه مرزی<sup>۱</sup> می باشد. در ناحیه  $|s_i| > \mu_i$  داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -(\bar{\beta}_i(1-G_i) - F_i)|s_i| - (\bar{\gamma}_i(1-G_i) - G_i)|\alpha_i||s_i| \\ & - (\bar{\beta}_n(1-G_n) - F_n)|s_n| - (\bar{\gamma}_n(1-G_n) - G_n)|\alpha_n||s_n| \\ & < 0. \end{aligned} \quad (38)$$

که نشان می دهد اگر مسیرهای حالت سیستم در ابتدا بیرون ناحیه مرزی قرار داشته باشند، به عبارت دیگر داشته باشیم  $|s_i(0)| > \mu_i$ ، به سمت منیفولد حرکت کرده و به  $|s_i| \leq \mu_i$  می رسند. در این ناحیه نیز داریم:  $\text{sat}(s_i / \mu_i) = s_i / \mu_i$ . به این ترتیب با انتخاب یک مقدار کوچک برای  $\mu_i$  در داخل ناحیه مرزی یک فیدبک حالت با بهره بالا خواهیم داشت که می تواند پایداری سیستم را تضمین نماید.

## ۵- طراحی کنترل کننده برای حالت

### PPD

از دیدگاه کنترلی، تفاوتی که قطارهای PPD با انواع DD دارند در این است که در انواع PPD با یک سیستم ۲ ورودی - ۲ خروجی روبرو هستیم و دینامیک داخلی برای یک قطار با  $n$  واگن، از مرتبه  $2n-4$  است. حال آن که در حالت DD دینامیک داخلی نداریم. بنابراین، چالش اصلی در طراحی PPD این است که می بایست پایداری دینامیک داخلی را هم علاوه بر پایداری دینامیک خارجی نشان دهیم. البته، نیازی به پایداری مجانبی دینامیک داخلی نیست و نشان دادن پایداری لیاپانوف و در نتیجه تضمین محدود بودن متغیرهای حالت داخلی، کافی است. با تعریف  $\xi = [x_1, v_1, x_n, v_n]^T$  و  $\eta = [v_2, \dots, v_n, x_2, \dots, x_n]^T$  دینامیک خارجی و داخلی را می توان به صورت مجزا نوشت. معادله (۳۹) بیان گر دینامیک خارجی سیستم است.

$$\dot{\xi} = \hat{f}_\xi + \Delta f_\xi + (\hat{g}_\xi + \Delta g_\xi)u \quad (39)$$

طراحی کنترل کننده و اثبات پایداری حلقه بسته برای (۳۹) کاملاً مشابه بخش ۴ است. فرمان ورودی مرجع به صورت  $r = [r_1, r_2]^T$  تعریف شده و خطای ردیابی یک بردار ۲ بعدی به صورت  $e = [e_1, e_2]^T$  می باشد. سطح لغزش را به صورت  $s = \dot{e} + \Lambda e$  تعریف می نمایم که در آن  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  بوده و  $\lambda_i > 0$  می باشد. قانون کنترلی به صورت زیر اتخاذ می گردد

**قضیه ۲.** پایداری مجانبی خطای ردیابی برای سیستم (۶) تا (۸) با معادله خروجی (۹) قابل تضمین است اگر قانون کنترل (۲۵) به سیستم اعمال شود و بهره های کلیدزنی با قانون تطبیق (۲۹) تنظیم گردند.

**اثبات.** ابتدا متغیرهای زیر را تعریف می کنیم

$$\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i - \beta_i, \quad \bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i - \gamma_i, \quad (30)$$

که در آن  $\bar{\beta}_i$  و  $\bar{\gamma}_i$  مقادیری هستند که در نامساوی های زیر صدق می کنند.

$$\bar{\beta}_i > \frac{F_i}{1-G_i}, \quad \bar{\gamma}_i > \frac{G_i}{1-G_i}. \quad (31)$$

توجه داشته باشید که وجود  $\bar{\beta}_i$  و  $\bar{\gamma}_i$  به طوری که (۳۱) را ارضا نمایند کافی است و نیازی به دانستن مقادیر دقیق آن ها نداریم. برای اثبات پایداری در حضور قانون تطبیق، تابع لیاپانوف انتخاب شده در قضیه ۱ را اندکی تغییر داده و به صورت زیر در نظر می گیریم

$$V_i = 0.5(s_i^2 + (1-G_i)(\theta_i^{-1}\bar{\beta}_i^2 + \sigma_i^{-1}\bar{\gamma}_i^2)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (32)$$

با مشتق گیری از (۳۲) و جای گذاری از (۲۵) و (۳۰) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -(\beta_i(1-G_i) - F_i)|s_i| - (\gamma_i(1-G_i) - G_i)|\alpha_i||s_i| \\ & - (1-G_i)(\theta_i^{-1}\bar{\beta}_i\dot{\beta}_i + \sigma_i^{-1}\bar{\gamma}_i\dot{\gamma}_i) \end{aligned} \quad (33)$$

اکنون به سادگی می توان نشان داد که قانون تطبیق (۳۰) پایداری سیستم را نتیجه می دهد. با اضافه و کم کردن  $\bar{\beta}_i$  و  $\bar{\gamma}_i$  و یک سری عملیات ریاضی داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -(\bar{\beta}_i(1-G_i) - F_i)|s_i| - (\bar{\gamma}_i(1-G_i) - G_i)|\alpha_i||s_i| \\ & + (1-G_i)(\bar{\beta}_i|s_i| + \bar{\gamma}_i|\alpha_i||s_i| - \theta_i^{-1}\bar{\beta}_i\dot{\beta}_i - \sigma_i^{-1}\bar{\gamma}_i\dot{\gamma}_i) \end{aligned} \quad (34)$$

اگر مجموع سطر آخر سمت راست نامساوی (۳۴) صفر باشد، به عبارتی مشابه آن چه که در قضیه ۱ دیدیم می رسمیم. به این ترتیب با مساوی صفر قرار دادن جملات انتهایی داریم

$$\dot{\beta}_i = -\theta_i|s_i|, \quad \dot{\gamma}_i = -\sigma_i|s_i||\alpha_i|. \quad (35)$$

نتیجتاً به عبارت زیر می رسمیم

$$\dot{V}_i \leq -(\bar{\beta}_i(1-G_i) - F_i)|s_i| - (\bar{\gamma}_i(1-G_i) - G_i)|\alpha_i||s_i|. \quad (36)$$

با توجه به (۳۶) و قضیه ۱ مشاهده می نمایم که  $\dot{V}_i < 0$  بوده که نشان دهنده پایداری سیستم است. بنابراین اثبات تمام است و قانون کنترل تطبیقی (۳۰) پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می نماید.

یکی از مهم ترین مسائلی که در مورد SMC وجود دارد وجود زیگزاگ های شدید در سیگنال کنترل است که بدلیل ناپیوستگی در تابع علامت است. برای حل این مشکل، می توان تابع اشباع را جایگزین تابع

<sup>1</sup> Boundary layer

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2\rho_2 k/m_2 & -\rho_2 k/m_2 & & & 0 \\ -\rho_2 k/m_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -\rho_2 k/m_{n-2} & \\ 0 & & -\rho_2 k/m_{n-1} & 2\rho_2 k/m_{n-1} & \end{bmatrix} \quad (46)$$

حال باید نشان دهیم  $Q_2$  مثبت معین است. واضح است که همواره یک  $\rho_2$  به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که  $Q_2$  را تبدیل به یک ماتریس غالب قطری نماید. در این صورت به اندازه تعداد درایه‌های مثبت روی قطر اصلی مقادیر ویژه مثبت خواهیم داشت. از آن‌جا که در (44) تمامی درایه‌های روی قطر اصلی مثبت هستند، لذا تمامی مقادیر ویژه مثبت بوده و در نتیجه  $Q_2$  مثبت معین است. پس  $A_{12}$  یک ماتریس هورویتز است. حال پایداری  $A$  را مطالعه می‌کنیم. ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

که در آن  $P_1 > 0$  و  $P_3 - P_2 P_1^{-1} P_2 > 0$  می‌باشد. توجه داشته باشید که این دو شرط نشان دهنده مثبت معین بودن سیستم است. با نوشتن معادله لیاپانوف برای  $A$  و  $P$  داریم

$$A^T P + P A = \begin{bmatrix} 2(-c_v P_1 + P_2) & P_1 A_{12} - c_v P_2 + P_3 \\ A_{12}^T P_1 - c_v P_2 + P_3 & A_{12}^T P_2 + P_2 A_{12} \end{bmatrix} \quad (48)$$

به این ترتیب براساس Schur Complement عبارت (48) منفی معین خواهد بود اگر داشته باشیم:

$$-c_v P_1 + P_2 > 0 \quad (49)$$

و

$$Q_2 + 2(P_1 A_{12} - c_v P_2 + P_3) \times (-c_v P_1 + P_2)(A_{12}^T P_1 - c_v P_2 + P_3) > 0 \quad (50)$$

که در آن  $Q_2$  از رابطه (45) آمده است. بنابراین اگر دو شرط (49) و (50) با هم برآورده شوند آن‌گاه ماتریس  $A$  هورویتز بوده و در نتیجه سیستم نامی  $\dot{\eta} = A\eta$  به صورت مجانبی پایدار است. توجه شود که پیدا کردن ماتریس  $P$  که در شرایط فوق صدق کند کار دشواری نیست. به عنوان مثال اگر  $P_2 = \rho_2 I_{2(n-2)}$  باشد، آن‌گاه یک انتخاب مناسب برای  $P_1$  و  $P_3$  به صورت زیر خواهد بود:

$$P_1 = \left( \frac{\rho_2 + 1}{c_v} \right) I_{2(n-2)} \quad (51)$$

$$P_3 = \left( \frac{\rho_2^2 c_v}{\rho_2 + 1} + 1 \right) I_{2(n-2)} \quad (52)$$

حال که پایداری سیستم نامی را نشان دادیم، اثر اغتشاش را بررسی می‌نماییم. برای این کار ابتدا از شرط محدود بودن اغتشاشات استفاده می‌نماییم. با توجه به (11) و (21) می‌توان یک حد بالا نظیر  $B^u$  برای اغتشاشات  $B$  در نظر گرفت. به عبارت دیگر داریم  $\|B\| < B^u$ . چون

$$\begin{cases} u_1 = \hat{g}_1^{-1} \alpha_1 - \hat{g}_1^{-1} (\beta_1 + \gamma_1 |\alpha_1|) \text{sat}(s_1 / \mu_1), \\ \alpha_1 = -\hat{f}_1 + \ddot{r}_1 - \lambda_1 \dot{e}_1, \quad \dot{\beta}_1 = -\mathcal{Q}_1 |s_1|, \quad \dot{\gamma}_1 = -\sigma_1 |s_1| |\alpha_1|. \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} u_2 = \hat{g}_2^{-1} \alpha_2 - \hat{g}_2^{-1} (\beta_2 + \gamma_2 |\alpha_2|) \text{sat}(s_2 / \mu_2) \\ \alpha_2 = -\hat{f}_n + \ddot{r}_2 - \lambda_2 \dot{e}_2, \quad \dot{\beta}_2 = -\mathcal{Q}_2 |s_2|, \quad \dot{\gamma}_2 = -\sigma_2 |s_2| |\alpha_2| \end{cases} \quad (41)$$

در روابط فوق  $\vartheta_i, \sigma_i, \mu_i > 0$  می‌باشد تا پایداری تضمین گردد. از آنجا که اثبات پایداری حلقه بسته مشابه قضایای 1 و 2 است از ذکر جزئیات در این جا خودداری می‌گردد.

دینامیک داخلی سیستم در (7) آمده است. با جای گذاری  $\dot{\xi} = 0$  دینامیک صفر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید

$$\dot{\eta} = A\eta + B \quad (42)$$

که در آن  $A$  عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} -c_v I_{n-2} & A_{12} \\ I_{n-2} & O_{n-2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

جایی که

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -2k/m_2 & k/m_2 & & & 0 \\ k/m_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & k/m_{n-2} & \\ 0 & & k/m_{n-1} & -2k/m_{n-1} & \end{bmatrix}$$

ماتریس  $B$  نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ O_{(n-2) \times 1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

جایی که

$$B_1 = \begin{bmatrix} -c_0 + \Delta f_2 + \frac{k}{m_2} r_1, -c_0 + \Delta f_3, \dots, -c_0 + \Delta f_{n-2}, -c_0 + \Delta f_{n-1} + \frac{k}{m_{n-1}} r_2 \end{bmatrix}^T$$

در قضیه 3 نشان می‌دهیم که سیستم (42) پایدار لیاپانوف است.

**قضیه 3.** سیستم (42) پایدار لیاپانوف است اگر فرمان ورودی مرجع در (11) صدق نماید و جملات نامعین در  $B$ ، شرط (21) را برآورده سازند.

**اثبات.** ایده کار چنین است که سیستم (42) را به صورت یک سیستم نامی  $\dot{\eta} = A\eta$  در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر نامعینی  $B$  قرار دارد. اگر بتوان نشان داد که سیستم نامی پایدار مجانبی است، در آن صورت می‌توان پایداری لیاپانوف را برای سیستم  $\dot{\eta} = A\eta + B$  نشان داد. برای اثبات پایداری سیستم نامی، باید نشان داد که  $A$  هورویتز است. برای این کار ابتدا نشان می‌دهیم  $A_{12}$  هورویتز است. معادله لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$A_{12}^T P_2 + P_2 A_{12} = -Q_2 \quad (45)$$

که در آن  $P_2$  و  $Q_2$  دو ماتریس معین مثبت هستند. فرض کنید  $P_2 = \rho_2 I_{2(n-2)}$  باشد که در آن  $\rho_2 > 0$  یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ است. به این ترتیب خواهیم داشت

دو شرط (۱۱) و (۲۱) تضمین می‌نمایند. با استفاده از قضایای ۱ تا ۳، قضیه زیر را بیان می‌نماییم.

**قضیه ۴.** سیستم (۶) تا (۸) با معادله خرجی (۱۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید که شرایط (۱۱)، (۲۱) و (۲۲) برقرار باشند. در این صورت پایداری مجانبی خطای ردیابی در حضور قانون کنترلی (۴۰) و (۴۱) قابل تضمین است.

**اثبات.** این قضیه در دو بخش اثبات می‌شود. در بخش اول، با انتخاب تابع لیاپانوف

$$V_i = 0.5 \left( s_i^2 + (1 - G_i) (\beta_i^{-1} \tilde{\beta}_i^2 + \sigma_i^{-1} \tilde{\gamma}_i^2) \right), \quad i = 1, 2 \quad (63)$$

و محاسباتی مشابه با قضایای ۱ و ۲ پایداری دینامیک خارجی به اثبات می‌رسد. در بخش دوم، پایداری دینامیک داخلی سیستم بایستی تضمین گردد که از قضیه ۳ نتیجه می‌شود.

با مشخص شدن طراحی برای هر دو حالت *PPD* و *DD* در بخش بعد به پیاده‌سازی عددی کنترل کننده‌ها می‌پردازیم.

### ۶- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، کنترل کننده طراحی شده در دو بخش ۴ و ۵ را بر روی یک قطار پرسرعت اعمال می‌نماییم. پارامترهای قطار را مطابق با قطار پرسرعت ژاپنی مطالعه شده در [۵] انتخاب می‌کنیم که در جدول ۱ آمده‌اند. فرض می‌کنیم که ۱۰٪ نامعینی در جرم واگن‌ها داریم. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که بیشترین تغییر طول کوپلرها برابر با یک متر باشد. با توجه به جدول ۱، بدترین حالت مربوط به شرایطی است که  $\mathcal{E} = -0.5$  باشد. در شکل ۲ نمودار نیرو - جابه‌جایی فنر براساس معادلات (۱۲) و (۱۳)، رسم شده

جدول ۱ مقادیر پارامترهای قطار مورد بررسی [۵]

پارامتر	مقدار	واحد
$m_1, m_5$	$80 \times 10^3$	kg
$m_2, m_3, m_4$	$40 \times 10^3$	kg
$c_0$	0.01176	N/kg
$c_v$	0.00077616	Ns/mkg
$c_a$	$1.6 \times 10^{-5}$	Ns <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> kg
$k_0$	$80 \times 10^3$	N/m
$\mathcal{E}$	$\pm 0.5$	-

سیستم نامی پایدار مجانبی است از عکس قضیه لیاپانوف<sup>۱</sup> [۹] نتیجه می‌گیریم تابع لیاپانوفی هم‌چون  $V$  در مجموعه  $\{\eta \in R^{2(n-2)} \mid \|\eta\| < b\}, b > 0$  برای  $\dot{\eta} = A\eta$  وجود دارد که در شرایط زیر صدق نماید

$$c_1 \|\eta\|^2 \leq V \leq c_2 \|\eta\|^2 \quad (53)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} A\eta \leq -c_3 \|\eta\|^2 \quad (54)$$

$$\|\partial V / \partial \eta\| \leq c_4 \|\eta\| \quad (55)$$

که در آن  $c_i$  اعداد ثابت مثبت هستند. حال، با مشتق‌گیری از  $V$  و جای‌گذاری (۴۲) و (۵۴) به نامساوی زیر می‌رسیم

$$\dot{V} \leq -c_3 \|\eta\|^2 + \|\partial V / \partial \eta\| \|B\|. \quad (56)$$

با استفاده از شرط  $\|B\| < B''$  خواهیم داشت

$$\dot{V} \leq -c_3 \|\eta\|^2 + c_4 B'' \|\eta\|. \quad (57)$$

با استفاده از (۵۳) می‌توان یک حد بالا برای  $\dot{V}$  به صورت زیر یافت

$$\dot{V} \leq -\frac{c_3}{c_2} V + c_4 B'' \sqrt{\frac{V}{c_1}}. \quad (58)$$

برای تبدیل این نامعادله دیفرانسیل غیرخطی به یک معادله خطی از تغییر متغیر  $W = \sqrt{V}$  استفاده می‌کنیم. به‌ازای  $V \neq 0$  داریم:

$$\dot{W} \leq -\frac{c_3}{2c_2} W + \frac{c_4}{2\sqrt{c_1}} B'' \quad (59)$$

با تعریف  $c_6 = c_4 B'' / 2\sqrt{c_1}$  و  $c_5 = c_3 / 2c_2$  داریم

$$\dot{W} \leq -c_5 W + c_6 \quad (60)$$

با حل این نامعادله خطی و استفاده از لم قیاس<sup>۲</sup> [۹] داریم

$$W \leq \phi(t, t_0) W(0^+) + c_6 t \phi(t, t_0) \quad (61)$$

که در آن  $\phi(t, t_0) = \exp(-c_5 t)$  است. با جای‌گذاری (۶۱) در (۵۳) داریم

$$\|\eta\| \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \phi(t, t_0) W(0^+) + \frac{c_6}{\sqrt{c_1}} t \phi(t, t_0) \quad (62)$$

که نشان می‌دهد حالت‌های دینامیک داخلی سیستم دارای مقدار محدود هستند. به عبارت دیگر، دینامیک داخلی سیستم پایدار لیاپانوف است و اثبات تمام است.

نتیجه قضیه ۳ برای بحث ردیابی سرعت قطارهای *PPD* بسیار مهم است. این قضیه محدود بودن اندازه متغیرهای حالت دینامیک داخلی را به‌ازای

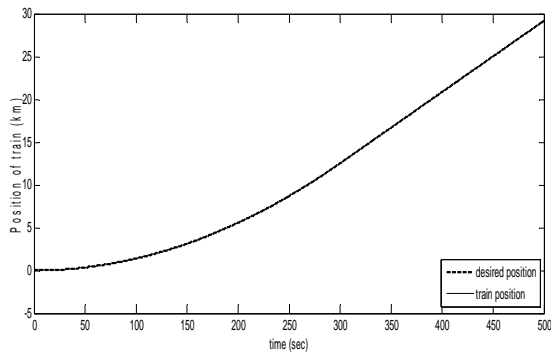
<sup>1</sup> Lyapunov converse theorem

<sup>2</sup> Comparison lemma

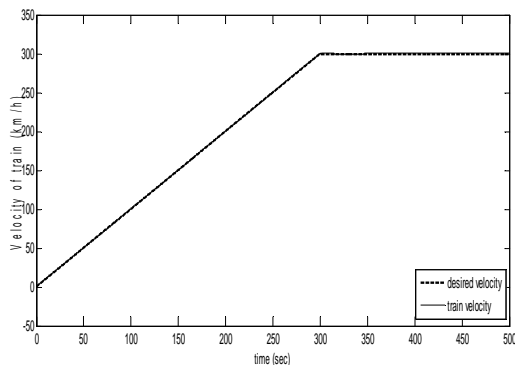


می شود که سیگنال کنترلی و جابجایی نسبی واگن‌ها را بررسی نماییم. جهت انجام مقایسه، معیار  $SACE^1$  را معرفی می‌نماییم که برابر با مجموع قدر مطلق تمامی سیگنال‌های کنترلی می‌باشد. نمودار  $SACE$  برای هر دو نوع قطار در شکل ۱۱ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌نماییم، ضمن نوسانات شدید در شکل موج مربوط به حالت  $PPD$ ، بیشینه اندازه نیروی کشش اعمالی هم بسیار بالاتر است. جابجایی نسبی واگن‌ها برای حالت  $PPD$  در شکل ۱۲ آمده است که قابل مقایسه با طراحی  $DD$  نیست.

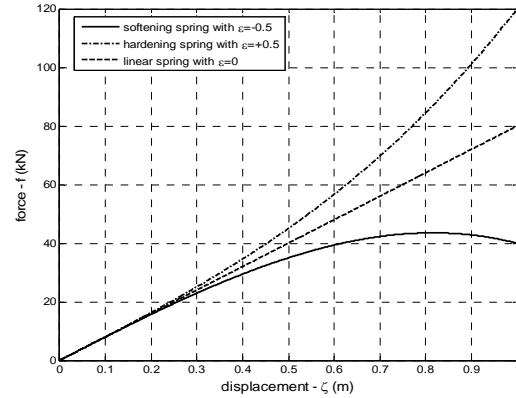
بر اساس نتایج شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که در حالت  $DD$  کارآیی بالاتری در مقایسه با حالت  $PPD$  داریم. اگرچه هر دو طراحی با دقت یکسانی قطار را به موقعیت و سرعت مطلوب می‌رسانند، ولی در حالت  $DD$  انرژی کم‌تری مورد نیاز بوده، سیگنال کنترلی نرم‌تر است و جابجایی نسبی واگن‌ها نزدیک به صفر است که به لحاظ صرفه‌جویی در مصرف انرژی و راحتی سرنشینان حائز اهمیت است. با این حال، قطارهای  $PPD$  هنوز یک مزیت بارز دارند و آن، استفاده از تعداد موتورهای کمتر و هزینه‌های نگهداری پایین‌تر است.



شکل ۳: موقعیت قطار و موقعیت مطلوب برای حالت  $DD$



شکل ۴: سرعت قطار و سرعت مطلوب برای حالت  $DD$



شکل ۲: نمودار نیرو-جابجایی فنرهای خطی، نرم‌شونده و سخت‌شونده

است. همان‌طور که مشاهده می‌نماییم به ازای جابجایی‌های کم می‌توان عملکرد فنر را خطی در نظر گرفت ولی با افزایش تغییر طول، تغییرات ضریب سختی چشم‌گیر است. کمترین میزان سختی برابر است با  $k' = 40 \times 10^3 \text{ N/m}$ . در واقع در این حالت، فنر کمترین میزان سختی را داشته و با توجه به زیربخش ۳-۱، سیستم تحت کنترل تمایل بیشتری به نوسان دارد. در نتیجه، کنترل سیستم دشوارتر خواهد بود. بنابراین، در شبیه‌سازی  $k = k'$  قرار می‌دهیم تا کنترل‌کننده را در بدترین حالت بررسی کنیم.

برای حالت  $PPD$  معادلات مربوط به واگن‌های اول و پنجم تشکیل دهنده دینامیک خارجی بوده و معادلات مربوط به دیگر واگن‌ها دینامیک داخلی و نهایتاً دینامیک صفر را شکل می‌دهند. برای بررسی پایداری دینامیک صفر سیستم، معادله (۴۲) را تشکیل می‌دهیم که توصیف‌کننده دینامیک صفر، بدون هرگونه نامعینی و اغتشاش است.

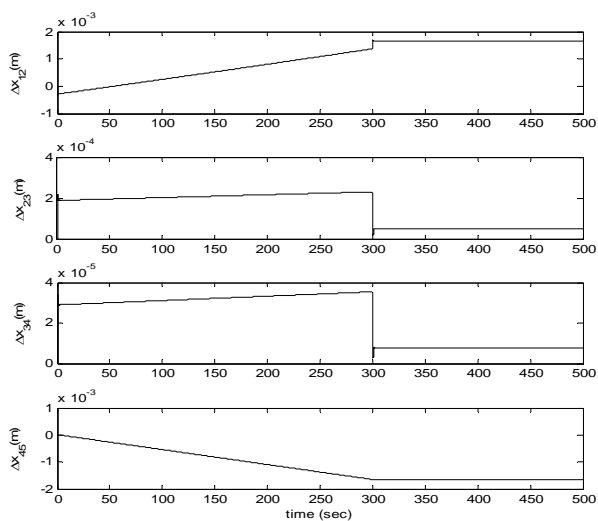
مقادیر ویژه ماتریس این سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\Gamma = -0.0004 \pm j1.8478, -0.0004 \pm j1.4142, -0.0004 \pm j0.7654$$

بنابراین، سیستم نامی پایدار مجانبی است و در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات، دینامیک صفر سیستم پایدار لیاپانوف خواهد بود.

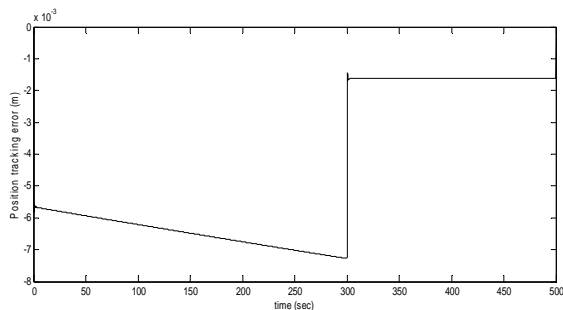
نمودار سرعت و موقعیت واگن اول برای قطار  $DD$  در شکل‌های ۳ و ۴، و نمودار خطای ردیابی سرعت و موقعیت در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌نماییم ردیابی بسیار دقیقی انجام گرفته است. در این حالت پنج ورودی کنترلی داریم که نمودار آن‌ها در شکل ۷ آمده است. واضح است که مشکل زیگزاگ در ورودی کنترلی وجود ندارد و اندازه آن‌ها مطابق [۵] در رنج چند ده کیلو نیوتن است که تأمین این نیروی کششی توسط موتورهای قابل استفاده امکان‌پذیر است. نمودار جابجایی نسبی واگن‌ها هم در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌نماییم که مقدار جابجایی ناچیز و تقریباً صفر است. برای قطار  $PPD$ ، از همان ورودی مرجع استفاده شده در بالا استفاده می‌نماییم. نمودار خطای ردیابی در این حالت در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است که مشابه با طراحی  $DD$  است. اما تفاوت این دو طراحی، زمانی مشخص

<sup>1</sup> Sum of Absolute Control Effort

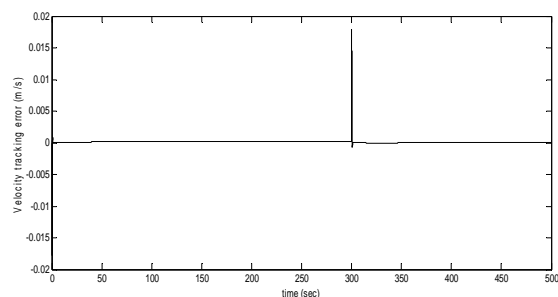


شکل ۸: نمودار تغییرات طول کوپلرها برای حالت DD

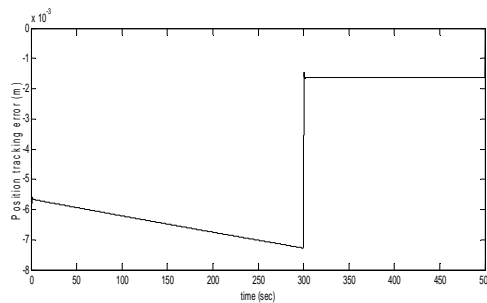
$$\Delta x_{ij} = x_i - x_j$$



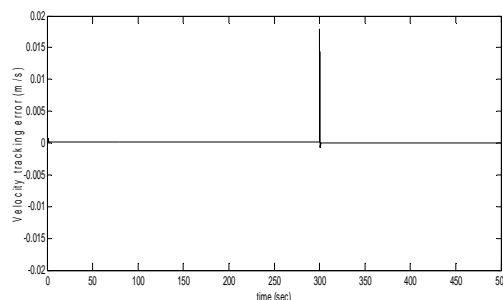
شکل ۹: خطای ردیابی موقعیت برای حالت PPD



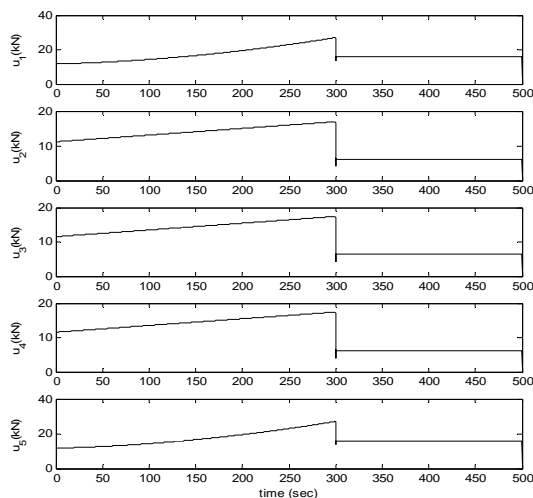
شکل ۱۰: خطای ردیابی سرعت برای حالت PPD



شکل ۵: خطای ردیابی موقعیت برای حالت DD مربوط به شکل ۳



شکل ۶: خطای ردیابی سرعت برای حالت DD مربوط به شکل ۴

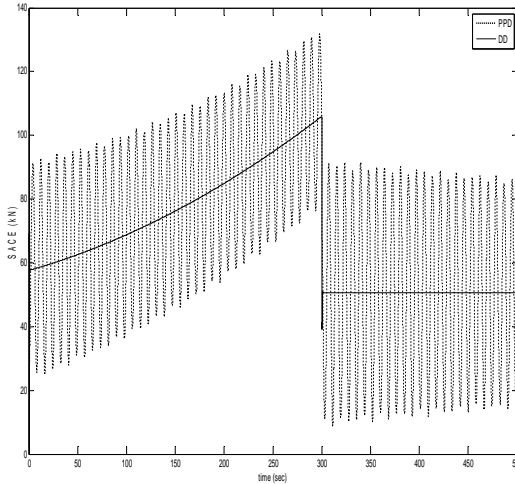


شکل ۷: نمودار سیگنال‌های کنترلی برای حالت DD

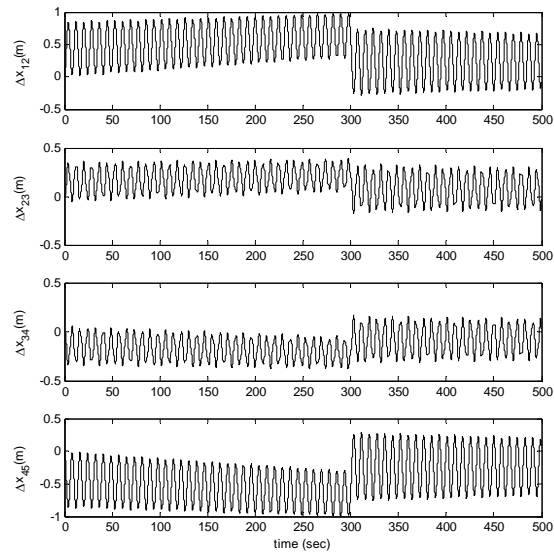
چالش‌های طراحی در حالت *PPD*، بحث پایداری دینامیک صفر سیستم است که در این مقاله، پایداری آن به اثبات رسیده است. نتایج شبیه‌سازی برای یک قطار پرسرعت ژاپنی ارائه شده و دو حالت طراحی با هم دیگر مقایسه شده‌اند. براساس نتایج شبیه‌سازی، طراحی *DD* کارآیی بالاتری را نسبت به طراحی *PPD* ارائه می‌نماید. در واقع، هر دو کنترل کننده عملکرد یکسانی در ردیابی موقعیت و سرعت دارند ولی در حالت *DD* اثرژی کمتری مورد استفاده قرار گرفته، سیگنال کنترلی نرم‌تر است و جابجایی نسبی واگن‌ها نزدیک به صفر است.

## مراجع

- [1] Q Song and YD Song, Adaptive Control and Optimal Power/Brake Distribution of High Speed Trains with Uncertain Nonlinear Couplers, In: Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, Beijing, China, pp.1966-1971, 2010.
- [2] P Howlett, Optimal strategies for the control of a train, *Automatica*, vol.32, no. 4, pp. 519-532, 1996.
- [3] SP Gorgon and DG Lehrer, Coordinated Train Control and Energy Management Control Strategies, In: *Proceedings of the 1998 ASME/IEEE Joint Railroad Conference*, Philadelphia, USA, pp.165-176, 1998.
- [4] R Liu and IM Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles, *Transportation Research*, vol.37, pp.917-932, 2003.
- [5] C Yang and Y Sun, Mixed  $H_2 / H_\infty$  cruise controller design for high speed train, *International Journal of Control*, vol.74, no.9, pp.905-920, 2001.
- [6] A Astolfi and L Menini, Input/output decoupling problem for high speed trains, In: Proceedings of American Control Conference, pp.549-554, 2002.
- [7] Q Song, YD Song, T Tang and B Ning, Computationally Inexpensive Tracking Control of High-Speed Trains With Traction/Braking Saturation, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 12, no. 4, 1116-1125, 2011.
- [8] Q Song and YD Song, Data-Based Fault-Tolerant Control of High-Speed Trains with Traction/Braking Notch Nonlinearities and Actuator Failures, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 22, no. 12, pp.2250-2261, 2011.
- [9] HK Khalil, *Nonlinear Systems*, third edition, Prentice Hall, 2002.
- [10] MR Faieghi and H Delavari, Chaos in fractional-order Genesio-Tesi system and its synchronization, *Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulations*, vol.17, no.2, pp. 731-741, 2012.



شکل ۱۱: نمودار SACE برای دو حالت *PPD* و *DD*



شکل ۱۲: نمودار تغییرات طول کویلرها برای حالت *PPD*

$$\Delta x_{ij} = x_i - x_j$$

## ۷- نتیجه گیری

هدف از این مقاله، بررسی کاربرد کنترل مد لغزشی در طراحی سیستم کروز کنترل قطارهای پرسرعت است. در ابتدا مدل‌سازی قطار بررسی شده و یک مدل غیرخطی چندورودی-چند خروجی انتخاب شد. طراحی را برای هر دو حالت *PPD* و *DD* ارائه نموده‌ایم. در هر دو حالت، پس از طراحی یک منیفولد لغزش مناسب، شرایط کافی برای تضمین پایداری سیستم در حضور نامعینی‌ها و اغتشاشات بدست آمده است. سپس، با در نظر گرفتن این که انتخاب یک حد بالای مناسب برای نامعینی‌ها ممکن است در پاره‌ای از موارد دشوار باشد، از یک قانون تطبیق برای تنظیم خودکار بهره‌های کلیدزنی استفاده شده است. یکی از

- [16] T Wang, W Xie and Y Zhang, Sliding mode fault tolerant control dealing with modeling uncertainties and actuator faults, *ISA Transactions*, vol. 51, pp. 386–392, 2012.
- [17] Q Hu and B Xiao, Fault-tolerant sliding mode attitude control for flexible spacecraft under loss of actuator effectiveness, *Nonlinear Dynamics*, vol.64, pp.13–23, 2011.
- [18] D Ye and GH Yang, Adaptive Fault-Tolerant Tracking Control Against Actuator Faults With Application to Flight Control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 6, pp.,1088-1096, 2006.
- [19] J Zhao, B Jiang, FN Chowdhury and P Shi, Active fault-tolerant control for near space vehicles based on reference model adaptive sliding mode scheme, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, published online, DOI: 10.1002/acs.2354, 2012.
- [11] MR Faieghi, H Delavari and D Baleanu, Control of an Uncertain Fractional- Order Liu System via Fuzzy Fractional-Order Sliding Mode Control, *Journal of Vibration and Control*, vol.18, no.9, pp.1366-1374, 2012.
- [12] MR Faieghi and H Delavari and AA Jalali, Control of Lorenz System with a Fractional Controller: A Caputo's Differentiation Based Approach, in: *Proceedings of 2nd International Conference on Control, Instrumentation, and Automation*, Shiraz, 2011.
- [13] MR Faieghi, H Delavari and D Baleanu, A Novel Adaptive Controller for 2-DOF Polar Robot, *Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulations*, vol.17, no.2, pp. 731-741, 2012.
- [14] S Seshagiri and HK Khalil, On Introducing Integral Action in Sliding Mode Control, In: proceedings of 41st IEEE Conference on Decision and Control, Los Vegas, Nevada USA, December 2002.
- [15] M Chou, X Xia and C Kayser, Modelling and model validation of heavy-haul trains equipped with electronically controlled pneumatic brake systems, *Control Engineering Practice*, vol. 15, pp. 501-509, 2007.