

## طراحی رویتگر حالت برای سیستم‌های تکه‌ای خطی زمان گسسته: رویکرد نامساوی‌های ماتریسی خطی

سعید بشیری<sup>۱</sup>، صالح مبین<sup>۲</sup>، فرهاد بیات<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، saeed.bashiri@znu.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، mobayen@znu.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه زنجان، bayat.farhad@znu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۴/۳۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۴/۲۵)

**چکیده:** در این مقاله، مسئله طراحی رویتگر حالت همراه با پسخور حالت، جهت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای خطی زمان گسسته ارائه شده است. در این مقاله، ما دو سیستم زمان گسسته داریم که یکی از سیستم‌ها اغتشاش یافته و سیستم دیگری فاقد اغتشاش است. برای طراحی رویتگر حالت، از روش نامساوی‌های ماتریسی خطی، توابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و لم فینسلر استفاده شده است. علاوه بر روش‌های ذکر شده فوق، روش کنترل  $H_\infty$  نیز جهت طراحی رویتگر حالت برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی استفاده شده است. روش کنترل  $H_\infty$  سیگنال اغتشاش را تضعیف کرده و تخمین خوب و مناسبی از حالت‌های سیستم ارائه می‌دهد. در این مقاله با استفاده از لم فینسلر، مجموعه‌ای از متغیرهای کمکی برای کاهش طراحی محافظه‌کارانه معرفی شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده کارایی بالای روش پیشنهاد شده جهت پایدارسازی سیستم حلقه بسته و دستیابی به تخمینی خوب و قابل قبول از متغیرهای حالت است.

**کلمات کلیدی:** رویتگر حالت، پسخور خروجی استاتیک، سیستم‌های زمان گسسته، نامساوی‌های ماتریسی خطی، لم فینسلر.

## Observer Designing for Discrete-Time Piecewise Linear Systems: Linear Matrix Inequalities Approach

Saeed Bashiri, Saleh Mobayen, Farhad Bayat

**Abstract:** In this paper, the state feedback and design problem of state observer are presented to stabilize the discrete-time piecewise linear systems. In this article, we have two discrete-time systems that one of them is the disturbed system and the other is the system without disturbance. The linear matrix inequalities approach, piecewise quadratic Lyapunov functions and the Finsler's lemma are used to design the state observer. In addition to the above mentioned methods, the  $H_\infty$  control approach used to design the state observer for the system with external disturbance. The  $H_\infty$  control approach undermines the disturbance signal and provides an appropriate estimation of the system states. In this paper, by using the Finsler's lemma, a set of slack variables are introduced to reduce the design conservatism. The Simulation results show the high performance of the proposed method for stabilize the closed-loop system and achieve to the acceptable estimation of state variables.

**Keywords:** State observer, Static output feedback, Discrete-time systems, Linear matrix inequalities, Finsler's lemma.

## ۱- مقدمه

در مباحث کنترلی، قسمت اعظمی از سیستم‌های غیرخطی مانند سیستم‌های همراه با تأخیر، اشباع و ناحیه مرده را می‌توان به صورت سیستم‌های تکه‌ای خطی تبدیل کرد. همچنین اجزای مدارهای الکترونیکی مانند ترانزیستورها، دیودها و کلیدهای قدرت نیز به صورت تکه‌ای خطی مدل می‌شوند. از این رو سیستم‌های تکه‌ای خطی اخیراً توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند [۱]. بیشتر کنترل‌کننده‌های پیشرفته مانند سیستم‌های کنترل پرواز نیز نشأت گرفته از همین سیستم‌های تکه‌ای خطی هستند. در سیستم‌های تکه‌ای خطی، عمل کلیدزنی بین حالت‌های مختلف سیستم صورت می‌گیرد که این امر نشأت گرفته از محدودیت‌های فیزیکی سیستم در حالت‌های مختلف است.

به دلیل اهمیت فراوان سیستم‌های تکه‌ای خطی، تاکنون روش‌های مختلفی برای تحلیل و پایداری این کلاس از سیستم‌ها معرفی شده است. به طور مثال در مرجع [۲]، روش کنترل تطبیقی مدل مرجع را برای پایداری سیستم‌های تکه‌ای خطی زمان گسسته به کار برده است. روش کنترل تطبیقی مدل مرجع (MRAC)، روش قدرتمند و ساده‌ای است که می‌تواند مقاوم بودن سیستم در برابر تغییرات پارامتری، دینامیک‌های غیرمدل شده و نویز را تضمین کند. مقاله [۲]، روش MRAC کلیدزنی شده جدیدی را برای سیستم‌های تکه‌ای خطی (PWL) زمان گسسته ارائه کرده است. کنترل‌کننده مرجع [۲]، پایداری مجانبی کلی سیستم خطا را تضمین کرده و کارایی قابل قبولی را هنگامی که تغییرات ناگهانی در پارامترهای سیستم رخ می‌دهد، ارائه می‌کند.

یکی از این روش‌های پرکاربرد جهت تحلیل و کنترل سیستم‌های تکه‌ای خطی، روش نامساوی‌های ماتریسی خطی است. نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMIs) به عنوان یک ابزار طراحی و روش قدرتمند محاسباتی در مباحث کنترلی پدید آمده‌اند. مزیت و کارآمدی این روش به میزان اثرگذاری محاسباتی و انعطاف‌پذیری‌اش در برخورد با مشکلات طراحی سیستم‌های مختلف بازمی‌گردد [۳،۴]. از روش نامساوی‌های ماتریسی خطی می‌توان برای حل مسائل مختلف کمینه‌سازی محدب، مانند کنترل هزینه تضمین‌شده، کنترل  $H_\infty$  و کنترل  $H_2$  استفاده کرد. از جمله کاربردهای LMI می‌توان به مرجع [۵] اشاره کرد که پایداری پسخور حالت را با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، برای سیستم‌های غیرخطی نامعین با عوامل لپ‌شیتز<sup>۲</sup> طراحی می‌کند. کنترل‌کننده مرجع [۵] باعث بهبود کارایی حالت گذرا و ماندگار سیستم می‌شود. در مقاله [۵] برای بهبود کارایی پایداری، تابع غیرخطی در قانون کنترل در نظر گرفته شده و با استفاده از الگوریتم جستجوی دلخواه اصلاح شده<sup>۴</sup>، تنظیم می‌شود. در مسائل پایداری، پاسخ سریع با بالا

زدگی کم مطلوب است. کنترل‌کننده پیشنهادی مقاله [۵]، پایداری سیستم را در حضور اغتشاش و نامعینی‌های پارامتری تضمین می‌کند، به طوری که پاسخ حاصل شده، پاسخی سریع و با بالازدگی کم خواهد بود. در مرجع [۶] روشی محاسباتی جهت مطالعه و بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های آفین چندگانه تکه‌ای (PMA)<sup>۵</sup> ارائه شده است. در مرجع [۶] بر اساس توابع لیاپانوف تکه‌ای که انتخاب می‌شوند، شرایط پایداری سیستم PMA به صورت ترم‌هایی از نامساوی‌های ماتریسی بیان می‌شوند. با وجود اینکه نامساوی‌های ماتریسی خطی روشی کارآمد و انعطاف‌پذیر در حل مسائل مختلف کنترلی هستند، گاهی به تنهایی قادر نیستند کارایی مطلوب مورد نظر را برآورده سازند. لذا، استفاده از روش‌های کنترلی ترکیبی می‌تواند مفید باشد. به طور مثال، زمانی که سیستم مورد مطالعه ما دارای نویز و اغتشاشات خارجی است، استفاده از روش LMI همراه با کنترل  $H_\infty$  می‌تواند رویکرد مناسبی برای دستیابی به عملکرد مناسب سیستم باشد.

کنترل  $H_\infty$  از معروف‌ترین روش‌های شناسایی مدل و پالایش داده‌های مخدوش است. فیلتر  $H_\infty$  مستقل از اطلاعات نویزهای فرآیند، تخمینی ارائه می‌دهد که در مقابل اغتشاشات مدل مقاوم است [۷]. مرجع [۸]، کنترل مقاوم را برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی نامعین بررسی می‌کند. در ابتدا، معیاری برای پایداری کلی سیستم غیرخطی بدون نامعینی پیشنهاد شده است؛ سپس معیاری برای سیستم غیرخطی همراه با نامعینی‌های پارامتری پیشنهاد شده است. در این معیار، از روش نامساوی‌های ماتریسی برای کنترل پسخور حالت  $H_\infty$  مقاوم استفاده شده است. در مرجع [۹]، کنترل  $H_\infty$  برای سیستم زمان گسسته نامعین همراه با تأخیرهای زمانی، با استفاده از کنترل‌کننده‌های پسخور خروجی، مورد بررسی قرار گرفته است. نامعینی‌های مرجع [۹] به صورت نامعینی‌های پارامتری هستند. در [۹]، با استفاده از شرایط LMI، کنترل‌کننده پسخور خروجی دینامیکی به گونه‌ای محاسبه می‌گردد تا پایداری نامایی سیستم حلقه بسته تضمین شده و تأثیر ورودی اغتشاش روی خروجی کنترل‌شده را کاهش دهد. در مرجع [۱۰] نیز از روش کنترل  $H_\infty$  استفاده شده است. در [۱۰] طراحی روتینگر  $H_\infty$  برای مدل فازی (T-S)<sup>۱</sup> زمان پیوسته صورت گرفته است. در مرجع [۱۰] روش جدیدی برای محدود کردن و اعمال کران روی مشتقات زمانی توابع عضویت ارائه شده و با معرفی تابع لیاپانوف غیرمربعی، بهره‌های کنترل‌کننده و روتینگر با استفاده از روش LMI به نحوی محاسبه می‌شوند تا پایداری مجانبی سیستم تضمین گردد.

برای بررسی پایداری یک سیستم و متغیرهای حالت مربوط به آن، باید متغیرهای حالت در دسترس باشند. در بسیاری از موارد عملی تنها تعداد اندکی از متغیرهای حالت سیستم داده شده قابل سنجش هستند.

<sup>۱</sup> - Model Reference Adaptive Controllers

<sup>۲</sup> - Piecewise Linear

<sup>۳</sup> - Lipschitz

<sup>۴</sup> - Modified Random Search Algorithm

<sup>۵</sup> - Piecewise Multi-Affine

<sup>۶</sup> - Takagi-Sugeno

ماتریسی، کنترل‌کننده‌ای جهت رفع مشکل پایدارسازی سیستم با ماتریس‌های رتبه غیر کامل ارائه شده است. در این پژوهش، کنترل پسخور حالت با ساختاری جدید، جهت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای خطی ارائه شده است. همچنین کنترل‌کننده پیشنهادی شامل رویتگر حالت نیز بوده که تخمینی از متغیرهای حالت سیستم را در اختیار ما قرار می‌دهد. با توجه به شبیه‌سازی‌های صورت گرفته، با مقایسه روش پیشنهادی این پژوهش و مرجع [۱۶]، مشاهده خواهد شد که روش پیشنهادی، علاوه بر حل مشکل پایداری برای سیستم‌های تکه‌ای خطی با ماتریس‌های رتبه غیر کامل، از سرعت پایدارسازی و عملکرد بهتری نیز نسبت به کنترل‌کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

در بخش دوم این مقاله، به تعریف مسئله و معرفی سیستم می‌پردازیم. در بخش سوم، طراحی رویتگر حالت برای سیستم تکه‌ای فاقد اغتشاش خارجی مطرح شده است. بخش چهارم به طراحی رویتگر حالت برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی پرداخته است. در بخش چهارم، نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی، نشان داده شده است و در بخش پنجم نتیجه‌گیری پژوهش ارائه شده است.

**نمادها :** ما در این مقاله از نمادهای استاندارد استفاده

کرده‌ایم.  $M^T$  بیانگر ترانپوز  $M$  و  $M^{-T}$  به معنی  $(M^{-1})^T$  است. عبارت  $M > 0$  به معنی مثبت معین و  $M < 0$  به معنی منفی معین است. نماد "\*" در برخی از ماتریس‌ها برای بیان ساختار متقارن بکار رفته است. نماد  $L^2$  معرف فضای لیسگو است که شامل تمام توابع برداری زمان گسسته است که روی  $[0, 1, 2, \dots, \infty)$  بصورت مربعی جمع‌پذیر هستند.

## ۱- توصیف سیستم

سیستم زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) \end{cases} \quad (1)$$

for  $x \in X_i, i \in I_l$

که  $x(k) \in R^n$  حالت سیستم (۱)،  $u(k) \in R^m$  ورودی کنترل و  $y(k) \in R^p$  خروجی اندازه‌گیری شده هستند.  $\{X_i\}_{i \in I_l} \subseteq R^n$  بیانگر تقسیم فضای حالت  $X$  به تعدادی شبه فضای چندوجهی بسته است. به طور مثال  $I_l = \{1, 2, \dots, l\}$  شاخص مجموعه شبه فضاها است. ما به هر  $X_i$  به عنوان یک سلول رجوع می‌کنیم.  $S$  را مجموعه زوج‌های مرتب  $(i, j)$  شاخص‌ها در نظر می‌گیریم که اشاره به کلید زنی‌های ممکن از سلول  $i$  به سلول  $j$  دارد.

$$S = \{(i, j) : i, j \in I_l \text{ such that } x(k) \in X_i \text{ and } x(k+1) \in X_j\} \quad (2)$$

لازم است تا متغیرهای غیرقابل سنجش تخمین زده شوند. رویتگر حالت، زیر سیستمی از سیستم کنترل است که بر اساس سنجش‌هایی از متغیرهای خروجی و کنترل، تخمین متغیرهای حالت را فراهم می‌سازد [۱۱]. رویتگر حالت کاربرد فراوانی در مباحث کنترلی داشته و در تحقیقات پیشین بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. به طور مثال در مرجع [۱۲]، طراحی رویتگر حالت مبتنی بر کنترل پسخور خروجی استاتیک برای سیستم‌های زمان گسسته، تحت قوانین کلیدزنی دلخواه ارائه شده است. شرایط پایداری محافظه کارانه برای سیستم مورد مطالعه، با استفاده از روش‌های LMI، تابع لیاپانوف سوئیچ شده (SLF) و لم فینسلر مطرح شده است. مرجع [۱۳] طراحی رویتگر برای سیستم‌های کلیدزنی زمان گسسته را پیشنهاد می‌کند که توسط مدل‌های فازی (T-S) ارائه می‌شوند. مرجع [۱۳] جهت طراحی رویتگر، از تابع لیاپانوف کلیدزنی استفاده می‌کند. ترتیب کلیدزنی‌ها از پیش شناخته شده نیستند و جهت بهبود پایداری دینامیک‌های خطا، تابع لیاپانوف قابلیت تغییر در طول کلیدزنی‌ها را دارا است. در مرجع [۱۴] مسئله تخمین خطا و کنترل تحمل‌پذیر خطا برای کلاسی از سیستم‌های تکه‌ای خطی زمان گسسته بررسی شده است. در ابتدا رویتگر تخمین خطا برای سیستم طراحی شده است. سپس با توجه به تخمین خطای صورت گرفته، کنترل‌کننده تحمل‌پذیر خطای پسخور خروجی استاتیک تکه‌ای، طراحی شده تا پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تضمین گشته و اثر اغتشاش تضعیف شود. شرایط کافی برای وجود رویتگر تخمین خطا و کنترل تحمل‌پذیر خطا به صورت ترم‌های LMI به دست آمده‌اند.

با توجه به مطالعاتی که روی کارهای پیشین انجام داده‌ایم، دریافتیم که لم فینسلر رابطی بین نامساوی‌های ماتریسی خطی و شرط پایداری لیاپانوف است. در اکثر مواقع (معمولاً برای سیستم‌های پیوسته) از شرط پایداری لیاپانوف می‌توان مستقیماً نامساوی‌های ماتریسی خطی را به دست آورده و پارامترهای مجهول را محاسبه کرد. ولی در برخی موارد (معمولاً برای سیستم‌های گسسته) نمی‌توان مستقیماً از شرط پایداری لیاپانوف، نامساوی ماتریسی خطی را به دست آورد. لذا در این حالت از لم فینسلر کمک گرفته می‌شود تا شرط پایداری لیاپانوف را به فرم نامساوی‌های ماتریسی افاین<sup>۲</sup> تبدیل کرد. در مقالات محدودی از لم فینسلر به همراه روش LMI جهت کنترل سیستم‌های تکه‌ای خطی استفاده شده است. به عنوان مثال، در مقالات [۱۶، ۱۵]، لم فینسلر به همراه روش LMI جهت کنترل پسخور خروجی استاتیک به کار برده شده‌اند. کنترل‌کننده‌های استفاده شده در [۱۶، ۱۵] قابلیت پایدارسازی مجانبی سیستم را دارا بوده و از کارایی خوبی برخوردار هستند، ولی نقطه ضعف‌هایی را نیز دارند. کنترل‌کننده‌های مراجع [۱۶، ۱۵] تنها در صورتی قادر به پایدارسازی سیستم خواهند بود که ماتریس‌های سیستم، رتبه کامل باشند. در این پژوهش با استفاده از ساختار جدید نامساوی‌های

<sup>۱</sup> - Switched Lyapunov Function

<sup>۲</sup> - Affine

در ادامه، سه لم معرفی می‌شوند که برای اثبات پایداری مجانبی سیستم (۱۲) مورد استفاده قرار می‌گیرند:

**لم ۱** (لم فینسلر [۱۵]): شرایط  $\xi \in R^n$ ،  $P = P^T \in R^{n \times n}$  و  $H \in R^{m \times n}$  که در آن شرط  $rank(H) = r < n$  را داریم، در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان جملات زیر را نتیجه گرفت:

- ۱- برای تمام  $\xi \neq 0$  و  $\xi^T H \xi = 0$  خواهیم داشت:  $\xi^T P \xi < 0$
- ۲-  $\exists X \in R^{m \times m}$  به طوری که  $P + XH + H^T X^T < 0$ .

**لم ۲** [۱۸]- (قضیه پایداری لیاپانوف): اگر ماتریسی به صورت  $\hat{P}_i = \hat{P}_i^T > 0, \forall i \in I_l$  وجود داشته باشد و تابع مثبت معین  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$  عبارت  $V(x) = x^T \hat{P}_i x, \forall x \in X_i$  را برقرار سازد، در این صورت سیستم (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود. تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای می‌تواند به صورت رابطه زیر محاسبه گردد:

$$A_{cli}^T \hat{P}_j A_{cli} - \hat{P}_i < 0, \forall (i, j) \in S \quad (13)$$

$$\hat{P}_i = \hat{P}_i^T > 0, \forall i \in I_l \quad (14)$$

**لم ۳** (لم مکمل شور) اگر ماتریس‌های  $R$  و  $Q$  ماتریس‌های متقارن بوده، تعداد سطرهای  $S$  برابر با تعداد سطرهای  $Q$  و تعداد ستون‌های  $S$  برابر با تعداد ستون‌های  $R$  باشند، در این صورت شرط ماتریسی معادل خواهد بود با عبارات  $R < 0$  و  $Q - SR^{-1}S^T < 0$ .

**تعریف ۱:** شرط محدود کردن رشد تابع لیاپانوف در سیستم‌های کلیدزنی بدین صورت تعریف می‌شود که برای هر کلیدزنی لحظه‌ای باید شرط  $\hat{P}_j \leq \mu \hat{P}_i$  یا  $V_j(x) \leq \mu V_i(x)$  برقرار باشد. اگر نامساوی  $\hat{P}_j \leq \mu \hat{P}_i$  برای همه مقادیر  $\mu > 1$  برقرار نباشد، در این صورت به‌جای پایداری مجانبی فقط پایداری محلی سیستم را می‌توان نتیجه گرفت.

**تعریف ۲:** در مرجع [۱۶] با فرض اینکه ماتریس‌های  $B_{i1}$  و  $C_{i2}$  به ترتیب رتبه کامل ستونی و سطری هستند، ماتریس‌های تبدیل غیرتکین  $T_{bi}$  و  $T_{ci}$  به فرم (۱۵) تعریف می‌شوند:

$$T_{bi} = \begin{bmatrix} (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T \\ B_i^T \perp T \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$T_{ci} = \begin{bmatrix} C_i^T (C_i C_i^T)^{-1} & C_i^\perp \end{bmatrix}$$

با توجه به شرط ذکر شده مرجع [۱۶]، مشاهده می‌شود که ماتریس‌های تبدیل رابطه (۱۵)، تنها در صورتی برقرار هستند که ماتریس‌های  $B_{i1}$  و

معادله رویتگر برای سیستم (۱)، به صورت عبارت (۳) تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = C_i \hat{x}(k) \end{cases} \quad (3)$$

معادله خطا را به صورت رابطه (۴) معرفی می‌کنیم:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (4)$$

مشق رابطه خطا، به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (5)$$

با جایگذاری معادله (۱) و (۳) در رابطه (۵)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} e(k+1) &= [A_i x(k) + B_i u(k)] \\ &\quad - [A_i \hat{x}(k) + B_i u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k))] \end{aligned} \quad (6)$$

و با جایگذاری  $y(k)$  و  $\hat{y}(k)$  از روابط (۱) و (۳) در عبارت فوق، رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$e(k+1) = (A_i - L_i C_i) e(k) \quad (7)$$

قانون کنترل پسخور حالت به صورت (۸) تعریف می‌گردد:

$$u(k) = K_i \hat{x}(k), i \in I_l \quad (8)$$

که  $K_i$  بهره پسخور حالت است. با جایگذاری قانون کنترل (۸) در رابطه (۳)، عبارت (۹) را نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{x}(k+1) = (A_i + B_i K_i) \hat{x}(k) + L_i C_i e(k) \quad (9)$$

با توجه به عبارت  $x(k) = \hat{x}(k) + e(k)$ ، خروجی اندازه‌گیری شده را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y(k) = C_i (\hat{x}(k) + e(k)) \quad (10)$$

با توجه به روابط به دست آمده در (۷)، (۹) و (۱۰)، می‌توان معادله جدید سیستم که شامل رویتگر حالت همراه با پسخور حالت است را به صورت رابطه (۱۱) نوشت:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & L_i C_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \\ y(k) = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

معادله (۱۱) را به فرم ساده‌تر (۱۲) بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli} h(k) \\ y(k) = C_{cli} h(k) \end{cases} \quad (12)$$

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & L_i C_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix}$$

$$C_{cli} = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix}$$

پس چون شروط  $\xi \neq 0$  و  $H\xi = 0$  وجود دارند، عبارت  $\xi^T P \xi < 0$  را می‌توان با توجه به لم ۱، می‌توان ماتریس  $X$  را چنان یافت تا عبارت  $P + XH + H^T X < 0$  برقرار شود. ماتریس  $X$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X = \begin{bmatrix} \hat{G}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

عبارت  $P + XH + H^T X < 0$  با جایگذاری مقادیر  $X, P$  و  $H$  به فرم (۲۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_j - \hat{G}_i - \hat{G}_i^T & \hat{G}_i A_{cli} \\ * & -\hat{P}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

ماتریس‌های  $\hat{P}_j, \hat{P}_i, \hat{G}_i$  به کاررفته در عبارت (۲۲) به صورت (۲۳) تعریف می‌شوند:

$$\hat{P}_j = \begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix}, \hat{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\hat{G}_i = \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های  $P_j, P_i, Q_j, Q_i, G_i$ ، ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند. با جایگذاری ماتریس‌های رابطه (۲۳) و  $A_{cli}$  رابطه (۱۲) در (۲۲)، عبارت (۲۴) را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} P_j - G_i - G_i^T & 0 & G_i A_i + G_i B_i K_i & G_i L_i C_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

با ضرب رابطه (۲۴) از چپ و راست به ترتیب در  $diag(G_i^{-1}, I, I, I)$  و ترانهاده‌اش، رابطه (۲۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} G_i^{-1} P_j G_i^{-T} - G_i^{-T} - G_i^{-1} & 0 & A_i + B_i K_i & L_i C_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

با اعمال تغییر متغیر  $F_i = G_i^{-1}$ ، رابطه (۲۵) را به صورت عبارت (۲۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} F_i P_j F_i^T - F_i^T - F_i & 0 & A_i + B_i K_i & L_i C_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -Q_i \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

با اعمال لم شور و تغییر متغیر  $E_j = P_j^{-1}$  در رابطه (۲۶)، رابطه (۲۷) حاصل می‌شود:

$C_{i2}$  رتبه کامل باشند. کنترل‌کننده پیشنهادشده در [۱۶]، قابلیت پایدارسازی سیستم دارای ماتریس‌های  $B_{i1}$  و یا  $C_{i2}$  با رتبه ناقص را ندارد. در این مقاله از ساختار جدید نامساوی ماتریسی خطی و ماتریس کمکی استفاده شده است تا پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته در شرایطی که ماتریس‌های  $B_{i1}$  و یا  $C_{i2}$  رتبه کامل نیستند نیز تضمین شود.

## ۲- طراحی روینگر حالت سیستم

در این بخش بر اساس تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و لم فینسلر، شرایط جدید نامساوی ماتریسی خطی تعریف شده است تا بهره‌پسخور حالت به نحوی محاسبه شود که سیستم حلقه بسته (۱۲) پایدار مجانبی شود.

**قضیه ۱:** اگر ماتریس‌های متقارن و مثبت معین  $E_i, Q_i, E_j, Q_j$  و ماتریس متقارن  $F_i$  وجود داشته باشند به طوری که نامساوی ماتریسی (۱۶) برقرار شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_i E_i^T + B_i W_i & L_i C_i & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i & 0 \\ * & * & -E_i^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

در این صورت سیستم حلقه بسته (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود.

**اثبات قضیه ۱:** برای بررسی و اثبات پایداری مجانبی سیستم (۱۲)، از لم ۲ استفاده می‌کنیم. با ضرب عبارت (۱۳) از چپ و راست به ترتیب در  $h^T(k)$  و  $h(k)$ ، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$h^T(k) A_{cli}^T \hat{P}_j A_{cli} h(k) - h^T(k) \hat{P}_i h(k) < 0 \quad (17)$$

با توجه به عبارت  $h(k+1) = A_{cli} h(k)$ ، رابطه (۱۷) به فرم (۱۸) نوشته می‌شود:

$$h^T(k+1) \hat{P}_j h(k+1) - h^T(k) \hat{P}_i h(k) < 0 \quad (18)$$

رابطه (۱۸) را می‌توان به فرم ماتریسی (۱۹) نوشت:

$$\begin{bmatrix} h^T(k+1) & h^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & -\hat{P}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k+1) \\ h(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

با توجه به رابطه فوق، اگر پارامتر  $\xi$  را به صورت

$$\xi = \begin{bmatrix} h(k+1) \\ h(k) \end{bmatrix}$$

و پارامتر  $P$  را به صورت  $P = \begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & -\hat{P}_i \end{bmatrix}$  در نظر

بگیریم، در این صورت ماتریس  $H$  را می‌توان طوری یافت که رابطه  $H\xi = 0$  برقرار شود. ماتریس  $H$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = \begin{bmatrix} -I & A_{cli} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$e(k+1) = [A_i x(k) + B_{i1} u(k) + B_{i2} w(k) - [A_i \hat{x}(k) + B_{i1} u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k))]] \quad (34)$$

با جایگذاری  $y(k)$  و  $\hat{y}(k)$  روابط (۳۰) و (۳۱) در عبارت فوق، رابطه (۳۵) به دست می‌آید:

$$e(k+1) = (A_i - L_i C_{i2}) e(k) + (B_{i2} - L_i D_{i21}) w(k) \quad (35)$$

قانون کنترل پسخور حالت به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u(k) = K_i \hat{x}(k), \quad i \in I_l \quad (36)$$

که بهره  $K_i$  بهره پسخور حالت است. با جایگذاری قانون کنترل (۳۶) در رابطه (۳۱)، عبارت (۳۷) را نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{x}(k+1) = (A_i + B_{i1} K_i) \hat{x}(k) + L_i C_{i2} e(k) + L_i D_{i21} w(k) \quad (37)$$

با توجه به عبارت (۳۶) و  $x(k) = \hat{x}(k) + e(k)$ ، خروجی کنترل شده را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$z(k) = C_{i1} (\hat{x}(k) + e(k)) + D_{i11} K_i \hat{x}(k) + D_{i12} w(k) \quad (38)$$

با توجه به روابط به دست آمده در (۳۵)، (۳۷) و (۳۸)، می‌توان معادله جدید سیستم را که همان رویتگر حالت همراه با پسخور حالت است را به صورت رابطه (۳۹) نوشت:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_{i1} K_i & L_i C_{i2} \\ 0 & A_i - L_i C_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_i D_{i21} \\ B_{i2} - L_i D_{i21} \end{bmatrix} w(k) \quad (39)$$

$$z(k) = [C_{i1} + D_{i11} K_i \quad C_{i1}] \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + D_{i12} w(k)$$

معادله (۳۹) را به فرم ساده‌تر (۴۰) می‌نویسیم:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli} h(k) + B_{cli} w(k) \\ z(k) = C_{cli} h(k) + D_{cli} w(k) \end{cases} \quad (40)$$

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, \quad h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_{i1} K_i & L_i C_{i2} \\ 0 & A_i - L_i C_{i2} \end{bmatrix}$$

$$B_{cli} = \begin{bmatrix} L_i D_{i21} \\ B_{i2} - L_i D_{i21} \end{bmatrix}, \quad D_{cli} = D_{i12}$$

$$C_{cli} = [C_{i1} + D_{i11} K_i \quad C_{i1}]$$

در ادامه کار، چهارچوب  $H_\infty$  را برای رویتگر (۴۰) به صورت زیر بیان می‌کنیم. اگر شرایط اولیه را برای هر عدد صحیح  $N > 0$  و برای هر  $x(0) = 0$  در نظر بگیریم، آنگاه سیگنال اغتشاش  $w$  تضعیف می‌شود. در نتیجه، رابطه (۴۱) را خواهیم داشت [۱۶]:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_i + B_i K_i & L_i C_i & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i & 0 \\ * & * & -P_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

رابطه (۲۷) را به ترتیب از چپ و راست در  $diag(I, I, P_i^{-1}, I, I)$  ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_i P_i^{-T} + B_i K_i P_i^{-T} & L_i C_i & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i & 0 \\ * & * & -P_i^{-T} & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

با اعمال تغییر متغیر  $E_i = P_i^{-1}$  و سپس  $W_i = K_i E_i^T$  در رابطه (۲۸)، نامساوی (۲۹) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i - F_i^T & 0 & A_i E_i^T + B_i W_i & L_i C_i & F_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & A_i - L_i C_i & 0 \\ * & * & -E_i^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_i & 0 \\ * & * & * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

پس در صورتی که LMI رابطه (۲۹) برقرار باشد، سیستم (۱۲) پایدار مجانبی خواهد بود.

### ۳- طراحی رویتگر حالت سیستم همراه با اغتشاش

سیستم تکه‌ای خطی همراه با اغتشاش خارجی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_{i1} u(k) + B_{i2} w(k) \\ z(k) = C_{i1} x(k) + D_{i11} u(k) + D_{i12} w(k) \\ y(k) = C_{i2} x(k) + D_{i21} w(k) \end{cases} \quad (30)$$

که  $x(k) \in R^n$ ، حالت سیستم،  $u(k) \in R^m$  ورودی کنترل،  $y(k) \in R^p$  خروجی اندازه‌گیری شده،  $w(k) \in R^r$  ورودی اغتشاش و  $z(k) \in R^q$  خروجی کنترل شده می‌باشند. معادله رویتگر برای سیستم (۳۰)، به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_i \hat{x}(k) + B_{i1} u(k) + L_i (y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = C_{i2} \hat{x}(k) \end{cases} \quad (31)$$

معادله خطا را نیز به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (32)$$

مشتق خطا، به فرم (۳۳) حاصل می‌شود:

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (33)$$

با جایگذاری معادله (۳۰) و (۳۱) در رابطه (۳۳)، عبارت (۳۴) را نتیجه می‌گیریم:

با توجه به رابطه فوق، اگر پارامتر  $\xi$  را به صورت  $P \xi = \begin{bmatrix} h(k+1)^T & z(k)^T & h(k)^T & w(k)^T \end{bmatrix}^T$  و پارامتر  $P = \begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{P}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$  را به صورت

صورت ماتریس  $H$  را می‌توان طوری یافت که رابطه  $H \xi = 0$  برقرار شود. ماتریس  $H$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = \begin{bmatrix} -I & 0 & A_{cli} & B_{cli} \\ 0 & -I & C_{cli} & D_{cli} \end{bmatrix} \quad (46)$$

پس چون شروط  $\xi \neq 0$  و  $H \xi = 0$  وجود دارند، عبارت  $\xi^T P \xi < 0$  رابطه (۴۵) برقرار است. با توجه به لم ۱، می‌توان ماتریس  $X$  را چنان یافت تا عبارت  $P + XH + H^T X < 0$  برقرار شود. ماتریس  $X$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X = \begin{bmatrix} \hat{G}_i & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

عبارت  $P + XH + H^T X < 0$  با جایگذاری مقادیر  $X, P$  و  $H$  به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_j - \hat{G}_i - \hat{G}_i^T & 0 & \hat{G}_i A_{cli} & \hat{G}_i B_{cli} \\ * & -I & C_{cli} & D_{cli} \\ * & * & -\hat{P}_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

ماتریس‌های  $\hat{P}_i, \hat{P}_j, \hat{G}_i$  و بکار رفته در عبارت (۴۸) به فرم (۴۹) تعریف می‌شوند:

$$\hat{P}_j = \begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix}, \hat{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\hat{G}_i = \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های  $P_i, P_j, Q_i, Q_j, G_i$  و ماتریس‌های متقارن و مثبت معین هستند. با جایگذاری ماتریس‌های رابطه (۴۹) و  $A_{cli}, B_{cli}, C_{cli}, D_{cli}$  رابطه (۴۰) در (۴۸)، عبارت (۵۰) را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{k=0}^N \|z(k)\|^2 < \gamma^2 \sum_{k=0}^N \|w(k)\|^2 \quad (41)$$

که  $\gamma$  یک عدد اسکالر مثبت است.

**لم ۴** (قضیه پایداری لیاپانوف [۱۶]): سیستم (۴۰) را با شرایط اولیه  $x(0) = 0$  در نظر بگیرید. اگر تابع  $V(x) = x^T \hat{P}_i x, \forall x \in X_i$  با  $\hat{P}_i = \hat{P}_i^T > 0, \forall i \in I_1$  وجود داشته باشد که نامساوی زیر را تصدیق کند:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < \gamma^2 \|w(k)\|^2 - \|z(k)\|^2, \forall k \quad (42)$$

در این صورت، شرط کارایی  $H_\infty$  (۴۱) برقرار شده و سیستم (۴۰) پایدار مجانبی می‌گردد. تابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h^T(k+1) \hat{P}_j h(k+1) - h^T(k) \hat{P}_i h(k) < \gamma^2 w^T(k) w(k) - z^T(k) z(k), \forall (i, j) \in S \quad (43)$$

**قضیه ۲**: اگر ماتریس‌های متقارن و مثبت معین  $Q_i, E_i, Q_j, E_j$  و ماتریس متقارن  $F_i$  وجود داشته باشند به طوری که نامساوی ماتریسی (۴۴) برقرار شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i E_i^T + B_{i1} W_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} E_i^T + D_{i11} W_i \\ * & * & * & -E_i^T \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} & F_i \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} & 0 \\ C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_i & 0 & 0 \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0$$

در این صورت سیستم حلقه بسته (۴۰) پایدار مجانبی خواهد بود.

**اثبات قضیه ۲**: برای بررسی و اثبات پایداری مجانبی سیستم (۴۰)، از لم ۴ استفاده می‌کنیم. عبارت (۴۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} h(k+1) \\ z(k) \\ h(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{P}_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{P}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(k+1) \\ z(k) \\ h(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i + B_{i1}K_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11}K_i \\ * & * & * & -P_i \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j - G_i - G_i^T & 0 & 0 & G_i A_i + G_i B_{i1} K_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11} K_i \\ * & * & * & -P_i \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} & F_i \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} & 0 \\ C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_i & 0 & 0 \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} G_i L_i C_{i2} & G_i L_i D_{i21} \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} \\ C_{i1} & D_{i12} \\ 0 & 0 \\ -Q_i & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

با ضرب رابطه (۵۰) از چپ و راست به ترتیب در  $diag(G_i^{-1}, I, I, I, I, I)$  و ترانهاده‌اش، رابطه (۵۱) حاصل می‌شود:

رابطه (۵۳) را به ترتیب از چپ و راست در

$diag(I, I, I, P_i^{-1}, I, I, I)$  و ترانهاده‌اش ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i P_i^{-T} + B_{i1} K_i P_i^{-T} \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} P_i^{-T} + D_{i11} K_i P_i^{-T} \\ * & * & * & -P_i^{-T} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i^{-1} P_j G_i^{-T} - G_i^{-T} - G_i^{-1} & 0 & 0 & A_i + B_{i1} K_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11} K_i \\ * & * & * & -P_i \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} & F_i \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} & 0 \\ C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_i & 0 & 0 \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} \\ C_{i1} & D_{i12} \\ 0 & 0 \\ -Q_i & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

با اعمال تغییر متغیر  $F_i = G_i^{-1}$ ، رابطه (۵۱) را به صورت عبارت (۵۲) می‌توان نوشت:

با اعمال تغییر متغیرهای  $\beta = \gamma^2$ ،  $E_i = P_i^{-1}$  و سپس

$W_i = K_i E_i^T$ ، رابطه (۵۴) به فرم نامساوی (۵۵) تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i E_i^T + B_{i1} W_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} E_i^T + D_{i11} W_i \\ * & * & * & -E_i^T \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i P_j F_i^T - F_i^T - F_i & 0 & 0 & A_i + B_{i1} K_i \\ * & Q_j - 2I & 0 & 0 \\ * & * & -I & C_{i1} + D_{i11} K_i \\ * & * & * & -P_i \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} \\ C_{i1} & D_{i12} \\ 0 & 0 \\ -Q_i & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (55)$$

با اعمال لم شور و تغییر متغیر  $E_j = P_j^{-1}$  در رابطه (۵۲)، رابطه (۵۳) حاصل می‌گردد:



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7786 & 0.9908 & 0.1270 \\ 0.1616 & 0.8443 & 0.8144 \\ 0.9214 & -1.7747 & 0.7825 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0.3894 & 0.3263 & 0.7746 \\ 0.7806 & 0.9886 & 0.1297 \\ 0.8814 & 0.4718 & 0.3110 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0.3049 & 0.4247 & 0.8979 \\ 0.8448 & 0.2485 & 0.6921 \\ 0.7558 & -0.9160 & 0.3636 \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0.1194 & 0.3964 & 0.2454 \\ 0.1034 & 0.2515 & 0.4983 \\ 0.6981 & 0.8655 & 0.2403 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0.2458 & 0.7409 \\ 0.2501 & 0.5257 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.2722 & 0.6055 \\ 0.1576 & 0.1580 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} 0.4945 & 0.3020 \\ 0.9237 & 0.9118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0.9894 & 0.7205 \\ 0.1709 & 0.1519 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_1 &= [0.3815 \quad 0.6916 \quad 0.7183] \\
 C_2 &= [0.0591 \quad 0.8258 \quad 0.4354] \\
 C_3 &= [0.5204 \quad 0.8010 \quad 0.9708] \\
 C_4 &= [0.6995 \quad 0.3081 \quad 0.8767]
 \end{aligned}$$

با استفاده از ماتریس‌های رابطه (۵۷)، شکل ۱ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم (۵۶) و همچنین متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته بدون اغتشاش مرجع [۱۶] است. شکل ۲ نشان‌دهنده مدهای کلیدزنی سیستم (۵۶) می‌باشد. در صورتی که قانون کنترل را به صورت

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

کنترل  $u(k)$  برای روش کنترلی پیشنهاد شده و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۴ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم (۵۶) است.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_i C_{i2} & L_i D_{i21} & F_i \\ A_i - L_i C_{i2} & B_{i2} - L_i D_{i21} & 0 \\ C_{i1} & D_{i12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Q_i & 0 & 0 \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -E_j \end{bmatrix} < 0 \\
 & \text{لذا در صورتی که LMI رابطه (۵۵) برقرار باشد، سیستم (۴۰) پایدار} \\
 & \text{مجانبی خواهد بود.}
 \end{aligned}$$

#### ۴- شبیه‌سازی

بخش شبیه‌سازی شامل سه قسمت است. در بخش اول، نتایج شبیه‌سازی حاصل از طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با روینگر، برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی ارائه می‌شود و مقایسه‌ای بین روش ارائه‌شده جدید و روش کنترلی مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد. در بخش دوم، نتایج طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با روینگر، برای سیستم همراه با اغتشاش خارجی نشان داده‌شده و مشابه حالت قبل مقایسه‌ای بین روش ارائه‌شده جدید و روش کنترلی مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد. در بخش سوم، روش کنترلی این پژوهش روی یک سیستم پاندول معکوس اعمال شده و نتایج پایداری سیستم، نشان داده شده است. شرایط اولیه به صورت  $e(0) = [3 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$  در نظر گرفته شده است.

#### ۵- شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت همراه با روینگر برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با روینگر، برای سیستم فاقد اغتشاش خارجی، ارائه شده و مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش پسخور خروجی استاتیک مرجع [۱۴] صورت گرفته است.

**مثال ۱:** سیستم (۵۶) با ماتریس‌های کلیدزنی (۵۷) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli} h(k) \\ y(k) = C_{cli} h(k) \end{cases}$$

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, \quad h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \quad (56)$$

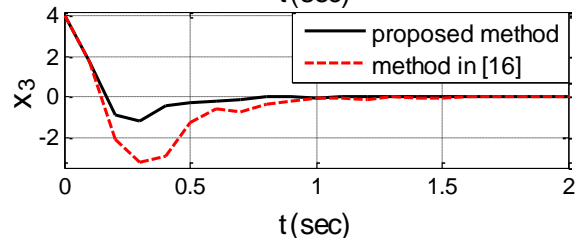
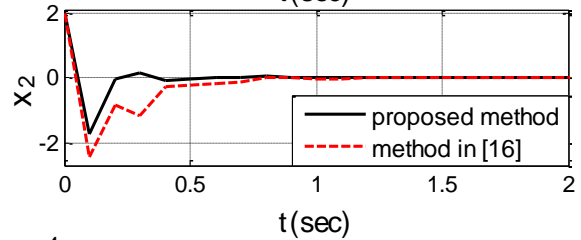
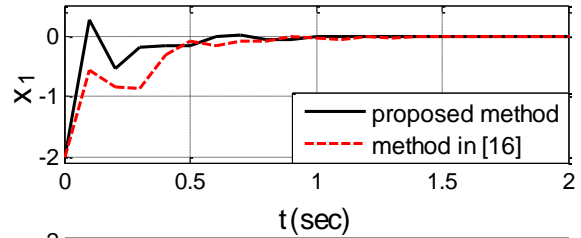
$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & L_i C_i \\ 0 & A_i - L_i C_i \end{bmatrix}$$

$$C_{cli} = \begin{bmatrix} C_i & C_i \end{bmatrix}$$

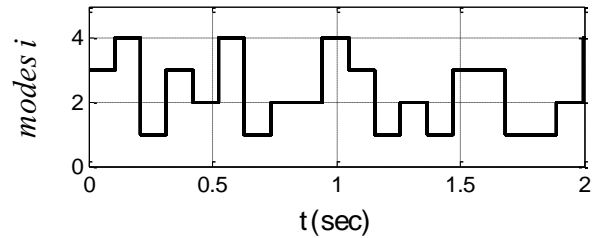
با استفاده از روش پیشنهادی، بهره پسخور حالت و بهره رولتگر حالت به گونه‌ای محاسبه شده‌اند تا سیستم (۵۶) پایدار مجانبی شده و خطا به صفر میل کند. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رولتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها، برای هر یک از مدهای کلیدزنی به صورت جدول ۱ محاسبه می‌شود:

جدول ۱ - پارامترهای کنترل کننده پیشنهادی برای سیستم (۵۶)

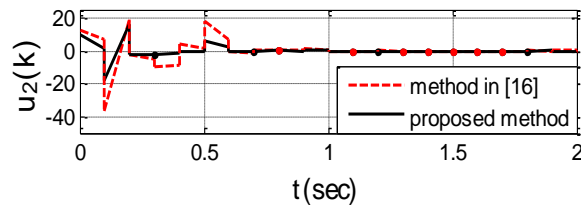
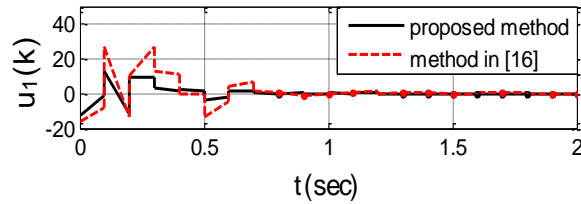
Mode 1	
$K_i = \begin{bmatrix} 3.0518 & -4.0769 & -11.2791 \\ -2.5178 & -0.4613 & 3.1996 \end{bmatrix}$	
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.4286 & 0.1950 & -0.1337 \\ 0.1950 & 1.2127 & 0.0927 \\ -0.13337 & 0.0927 & 1.0934 \end{bmatrix}$	
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.2250 & 0.2385 & 0.1308 \\ 0.2385 & 1.2081 & 0.1251 \\ 0.1308 & 0.1251 & 0.9274 \end{bmatrix}$	
$G_i = \begin{bmatrix} 0.8158 & 0.0980 & 0.0605 \\ 0.0980 & 0.8058 & 0.0578 \\ 0.0605 & 0.0578 & 0.6763 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.6702 \\ 0.8352 \\ 0.7784 \end{bmatrix}$	
$eig = [0.1596, -0.1317, 0, 0.2236 \pm 0.4726i, 0.5658]$	
Mode 2	
$K_i = \begin{bmatrix} -10.3648 & -11.7352 & -0.0588 \\ 3.6366 & 4.5404 & -1.3876 \end{bmatrix}$	
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.6357 & 0.0360 & -0.0600 \\ 0.0360 & 1.4383 & -0.1293 \\ -0.0600 & -0.1293 & 1.2357 \end{bmatrix}$	
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.2829 & -0.1095 & -0.0211 \\ -0.1095 & 1.0381 & -0.0304 \\ -0.0211 & -0.0304 & 0.9794 \end{bmatrix}$	
$G_i = \begin{bmatrix} 1.1107 & -0.0880 & -0.0133 \\ -0.0880 & 0.9196 & -0.0215 \\ -0.0133 & -0.0215 & 0.8812 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.7570 \\ 0.9341 \\ 0.5767 \end{bmatrix}$	
$eig = [0.7047, 0, -0.0312 \pm 0.0366i, -0.0415 \pm 0.0611i]$	
Mode 3	
$K_i = \begin{bmatrix} -1.1333 & -3.0496 & -4.0202 \\ -0.0355 & 2.5007 & 3.1915 \end{bmatrix}$	
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.5669 & 0.0909 & 0.1398 \\ 0.0909 & 1.4081 & 0.0262 \\ 0.1398 & 0.0262 & 1.3477 \end{bmatrix}$	
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.1152 & 0.1038 & -0.0430 \\ 0.1038 & 1.3564 & -0.0454 \\ -0.0430 & -0.0454 & 0.9016 \end{bmatrix}$	
$G_i = \begin{bmatrix} 0.9152 & 0.0639 & -0.0283 \\ 0.0639 & 1.0724 & -0.0286 \\ -0.0283 & -0.0286 & 0.7690 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.5761 \\ 0.5045 \\ 0.5176 \end{bmatrix}$	
$eig = [-0.2118, 0.0208, 0, 0.5368, -0.4131 \pm 0.2196i]$	
Mode 4	



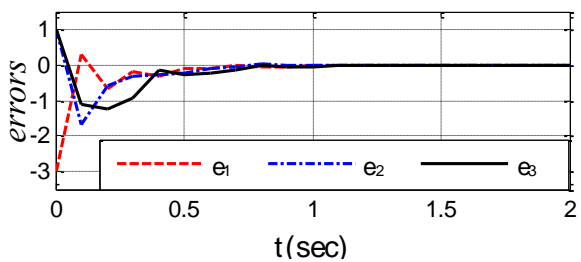
شکل ۱- متغیرهای حالت سیستم (۵۶) و سیستم مرجع [۱۶]



شکل ۲- مدهای کلیدزنی سیستم (۵۶)



شکل ۳- قانون کنترل u(k) روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۴- سیگنال‌های خطای سیستم (۵۶)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۶)	۰,۲۰۶۰	۰,۲۱۱۶	۱,۰۱۸۵
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۲۸۱۲	۰,۳۳۰۱	۱,۴۷۰۱
<b>ITSS</b>			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۶)	۰,۰۰۱۶	۰,۰۰۳۸	۰,۰۳۴۳
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۰۱۰۱	۰,۰۱۵۹	۰,۱۲۸۷

همان‌طور که مشاهده می‌شود کنترل‌کننده پیشنهاد شده این پژوهش، شاخص‌های عملکرد را بهبود بخشیده و از عملکرد و سرعت پایداری بهتری نسبت به کنترل‌کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

## ۵-۲ شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت همراه با روینگر

برای سیستم دارای اغتشاش خارجی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده پسخور حالت همراه با روینگر، برای سیستم دارای اغتشاش خارجی، ارائه شده و مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی پژوهش و روش پسخور خروجی استاتیک مرجع [۱۶] صورت می‌گیرد.

**مثال ۲:** سیستم (۵۹) با ماتریس‌های کلیدزنی (۶۰) را در نظر

بگیرید:

$$\begin{cases} h(k+1) = A_{cli}h(k) + B_{cli}w(k) \\ y(k) = C_{cli}h(k) + D_{cli}w(k) \end{cases}$$

$$h(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix}, \quad h(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_i + B_{i1}K_i & L_i C_{i2} \\ 0 & A_i - L_i C_{i2} \end{bmatrix} \quad (۵۹)$$

$$B_{cli} = \begin{bmatrix} L_i D_{i21} \\ B_{i2} - L_i D_{i21} \end{bmatrix}, \quad D_{cli} = D_{i12}$$

$$C_{cli} = [C_{i1} + D_{i11}K_i \quad -C_{i1}]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5871 & -0.8441 & -0.0092 \\ -0.6865 & -0.5090 & -0.8561 \\ 0.0974 & 0.4523 & -0.2280 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1089 & 0.2458 & -0.9035 \\ 0.3998 & -0.9213 & -0.4161 \\ 0.6745 & -0.5750 & 0.7138 \end{bmatrix} \quad (۶۰)$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.1930 & -0.4204 \\ -0.7359 & 0.0346 \\ 0.5073 & -0.9077 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -0.4164 & 0.0244 \\ 0.8297 & -0.4366 \\ -0.0900 & -0.8416 \end{bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 4.8088 & 7.8391 & 12.7408 \\ -6.8921 & -11.4670 & -17.4865 \end{bmatrix}$$

$$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.3715 & 0.0795 & -0.0749 \\ 0.0795 & 1.4717 & 0.0066 \\ -0.0749 & 0.0066 & 0.9518 \end{bmatrix}$$

$$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 1.5283 & 0.3174 & 0.0495 \\ 0.3174 & 1.6560 & 0.0597 \\ 0.0495 & 0.0597 & 1.1495 \end{bmatrix}$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 1.5974 & 0.3018 & 0.0467 \\ 0.3018 & 1.7144 & 0.0565 \\ 0.0467 & 0.0565 & 1.1543 \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} 0.1968 \\ 0.2786 \\ 0.2234 \end{bmatrix}$$

$$eig = [0.0548, -0.0536, 0, -0.2165 \pm 0.1266i, 0.6248]$$

برای توصیف بهتری از کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی، شاخص‌های عملکردی را به صورت (۵۸) معرفی می‌کنیم:

$$IAS = \min \int_0^{t_{ss}} |x(t)| dt$$

$$ITAS = \min \int_0^{t_{ss}} t |x(t)| dt \quad (۵۸)$$

$$ISS = \min \int_0^{t_{ss}} x^2(t) dt \quad (۵۹)$$

$$ITSS = \min \int_0^{t_{ss}} t x^2(t) dt$$

که  $IAS$  <sup>۱</sup> بیانگر انتگرال قدر مطلق تابع حالت،  $ITAS$  <sup>۲</sup> انتگرال زمان در قدر مطلق تابع حالت،  $ISS$  <sup>۳</sup> انتگرال مجذور تابع حالت و  $ITSS$  <sup>۴</sup> انتگرال زمان در مجذور تابع حالت هستند. با استفاده از شاخص‌های عملکرد تعریف شده، می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۲ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۶) و شاخص‌های عملکرد سیستم معرفی شده مرجع [۱۶] است.

جدول ۲ - شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۶) و سیستم مرجع [۱۶]

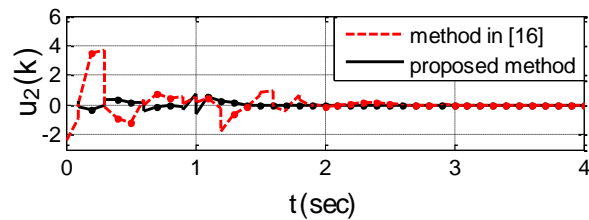
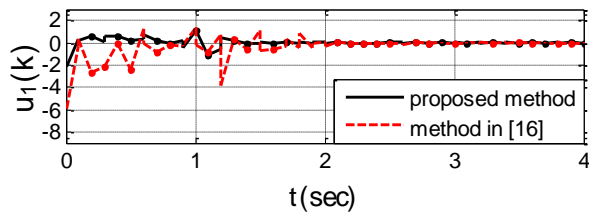
	IAS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۶)	۰,۱۴۸۰	۰,۱۷۰۱	۰,۴۸۰۲
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۲۴۴۰	۰,۲۷۳۲	۰,۷۰۰۴
	ITAS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۶)	۰,۰۱۷۵	۰,۰۲۶۸	۰,۰۷۴۰
سیستم مرجع [۱۶]	۰,۰۳۴۸	۰,۰۴۱۹	۰,۱۳۴۸
ISS			

<sup>۱</sup> - Integral of Absolute State

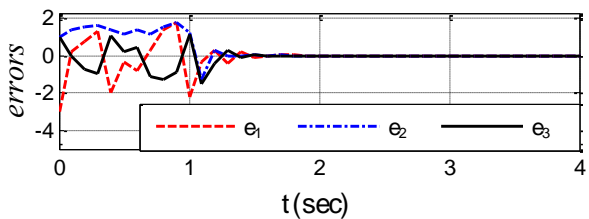
<sup>۲</sup> - Integral of Time Multiplied Absolute State

<sup>۳</sup> - Integral of Square State

<sup>۴</sup> - Integral of Time Multiplied Square State



شکل ۷- کنترل  $u(k)$  روش پیشنهادی و روش کنترلی [۱۶]



شکل ۸- سیگنال‌های خطای سیستم (۵۹)

با استفاده از روش پیشنهادی این پژوهش، بهره پسخور حالت و بهره رولتگر حالت به گونه‌ای محاسبه شده‌اند که پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته (۵۹) تضمین شود. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رولتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها برای هر یک از مدهای کلیدزنی به صورت جدول ۳ محاسبه می‌شود:

جدول ۳- پارامترهای کنترل کننده پیشنهادی برای سیستم (۵۹)

Mode 1		
$K_i = \begin{bmatrix} -1.9677 & -1.5422 & -0.8203 \\ -0.5798 & -0.8935 & -0.2860 \end{bmatrix}$		
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.3078 & -0.0742 & 0.4355 \\ -0.0742 & 1.9199 & 0.0149 \\ 0.4355 & 0.0149 & 1.7320 \end{bmatrix}$		
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 3.5149 & 1.1139 & -0.7322 \\ 1.1139 & 2.2472 & -1.2178 \\ -0.7322 & -1.2178 & 2.2698 \end{bmatrix}$		
$G_i = \begin{bmatrix} 1.5753 & 0.2847 & -0.1422 \\ 0.2847 & 1.1429 & -0.3977 \\ -0.1422 & -0.3977 & 1.1907 \end{bmatrix}$		
$L_i = \begin{bmatrix} -0.3635 \\ -0.6713 \\ 0.0107 \end{bmatrix}, \gamma = [6.3193]$		
$eig = [0.0669 \pm 0.6144i, -0.6464, -0.0583, -0.4565 \pm 0.2591i]$		
Mode 2		

$$B_{12} = B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{11} = C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = [1 \ 0 \ 1], \quad C_{22} = [0 \ 1 \ 1]$$

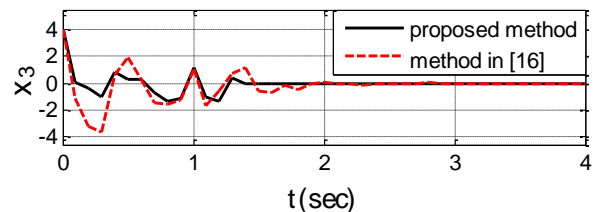
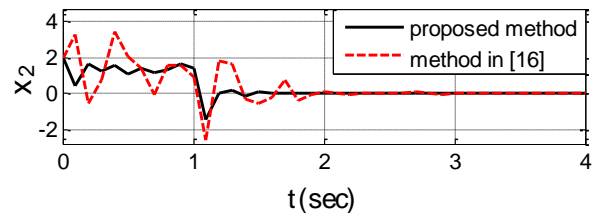
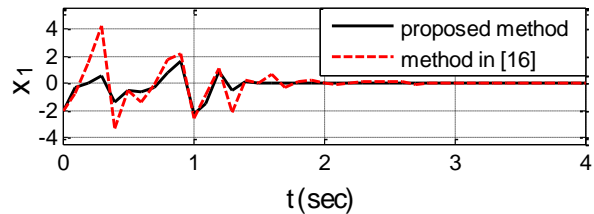
$$D_{111} = D_{211} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{112} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{212} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$D_{121}, D_{221}$  ماتریس‌های پوچی هستند. برای این مثال، سیگنال

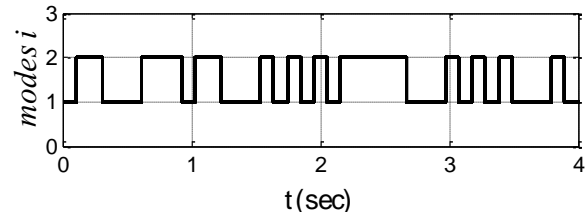
اغتشاش به صورت  $w = \begin{cases} 2, & k < 10 \\ 0, & k \geq 10 \end{cases}$  در نظر گرفته شده است. با

استفاده از ماتریس‌های رابطه (۶۰) شکل ۵ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم (۵۹) و همچنین متغیرهای حالت سیستم اغتشاش یافته مرجع [۱۶] است. شکل ۶ نشان‌دهنده مدهای کلیدزنی سیستم (۵۹) می‌باشد.

در صورتی که قانون کنترل را به صورت  $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$  در نظر بگیریم، شکل ۷ نمایش‌دهنده کنترل  $u(k)$  روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۸ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم (۵۹) است.



شکل ۵- متغیرهای حالت سیستم (۵۹) و سیستم مرجع [۱۶]



شکل ۶- مدهای کلیدزنی سیستم (۵۹)

## ۳-۵ شبیه‌سازی کنترل پسخور حالت پاندول معکوس

در این بخش، پایداری سیستم پاندول معکوس را توسط روش پیشنهادی این پژوهش و روش کنترلی مرجع [۱۶] بررسی می‌کنیم.

**مثال ۳:** مدل پاندول معکوس را به صورت رابطه (۶۱) در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-g \sin(x_1) - \frac{2b}{lm} x_2 - \frac{amlx_2^2 \sin(2x_1)}{2} - \frac{a \cos(x_1)u}{2}}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(x_1)} \end{cases} \quad (61)$$

که  $x_1$  بیانگر زاویه پاندول از محور عمودی و  $x_2$  معرفی کننده سرعت زاویه‌ای هستند.  $g=9.8m/s^2$  ثابت گرانش،  $m$  جرم پاندول،  $a=1/(M+m)$ ،  $M$  جرم اراجه،  $2l$  طول پاندول،  $b$  ضریب میرایی پاندول حول محور و  $u$  نیروی اعمال شده به اراجه هستند. در این شبیه‌سازی، پارامترهای پاندول به صورت  $m=2kg$ ،  $M=8kg$ ،  $2l=1m$  و  $b=0.5Nm/sec$  در نظر گرفته شده‌اند.

سیستم (۶۱) را حول مبدأ و  $x = \left(\pm \frac{\pi}{4}, 0\right)$  خطی سازی کرده و با زمان نمونه برداری  $T=0.01$ ، گسسته سازی می‌کنیم. لذا سیستم تکه‌ای خطی زمان گسسته پاندول معکوس به صورت رابطه (۶۲) به دست می‌آید [۱۹]:

$$x(k+1) = \begin{cases} A_1 x(k) + B_1 u(k) & \text{if } |x_1(k)| < \frac{\pi}{4} \\ A_2 x(k) + B_2 u(k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (62)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

که داریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.99914 & 0.0099473 \\ -0.17219 & 0.98919 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.99929 & 0.0099478 \\ -0.14245 & 0.98934 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.001756 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1141 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = C = [1 \quad 0]$$

شرایط اولیه را برای مثال فوق به صورت  $x(0) = \left[\frac{\pi}{3} \quad 0\right]^T$  و

$\hat{x}(0) = [0 \quad 0]^T$  در نظر می‌گیریم. با استفاده از ماتریس‌های رابطه (۶۳)، شکل ۹ نشان‌دهنده متغیرهای حالت سیستم پاندول معکوس با استفاده از روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است.

در صورتی که قانون کنترل را به صورت  $u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$  در نظر

$$K_i = \begin{bmatrix} 0.0072 & 0.5595 & 0.6345 \\ 0.2398 & -0.3879 & -0.9961 \end{bmatrix}$$

$$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.4108 & -0.1706 & 0.3283 \\ -0.1706 & 1.7083 & -0.4096 \\ 0.3283 & -0.4096 & 1.4349 \end{bmatrix}$$

$$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 3.4062 & -1.0004 & 1.2157 \\ -1.0004 & 1.8871 & -1.7348 \\ 1.2157 & -1.7348 & 5.3120 \end{bmatrix}$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 1.5911 & -0.2565 & 0.1747 \\ -0.2565 & 0.9976 & -0.4222 \\ 0.1747 & -0.4222 & 1.9163 \end{bmatrix}$$

$$L_i = \begin{bmatrix} -0.2540 \\ -0.4992 \\ 0.0627 \end{bmatrix}, \gamma = [6.3764]$$

$$eig = [0.7274 \pm 0.3127i, -0.1357, -0.4135, 0.3757 \pm 0.4592i]$$

با استفاده از شاخص‌های عملکرد (۵۸) می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۴ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۹) و شاخص‌های عملکرد سیستم مرجع [۱۶] است:

جدول ۴ - شاخص‌های عملکرد سیستم (۵۹) و سیستم مرجع [۱۶]

	IAS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۹)	۱,۲۰۰۳	۱,۳۵۸۳	۱,۱۰۱۵
سیستم مرجع [۱۶]	۱,۴۵۸۹	۱,۸۷۳۹	۱,۴۹۳۷
	ITAS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۹)	۰,۷۹۸۲	۰,۷۸۵۱	۰,۶۳۳۴
سیستم مرجع [۱۶]	۱,۰۴۴۲	۱,۱۴۵۸	۰,۹۰۶۲
	ISS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۹)	۱,۳۲۱۸	۱,۷۳۹۳	۱,۷۸۸۴
سیستم مرجع [۱۶]	۲,۰۸۶۷	۳,۳۰۹۴	۲,۲۹۳۰
	ITSS		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
سیستم (۵۹)	۰,۷۴۰۴	۰,۸۹۳۶	۰,۶۵۰۲
سیستم مرجع [۱۶]	۱,۲۶۹۱	۱,۵۰۱۷	۰,۷۸۳۰

مشاهده می‌شود که شاخص‌های عملکرد کنترل کننده این مقاله، مقدار کمتری را نسبت به شاخص‌های عملکرد کنترل کننده SOF مرجع [۱۶] دارا است. لذا کنترل کننده پیشنهادی، از سرعت پایداری و عملکرد بهتری نسبت به کنترل کننده مرجع [۱۶] برخوردار است.

جدول ۵ - پارامترهای روش کنترلی پیشنهادشده

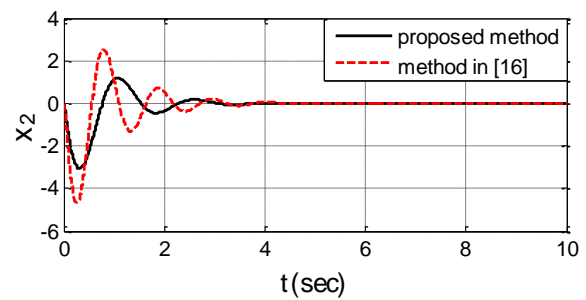
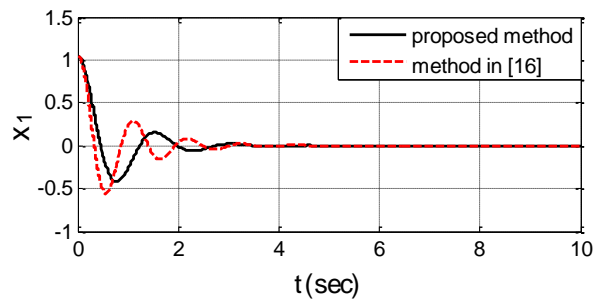
Mode 1	
$K_i = [4.8917 \quad 8.4818]$	
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.2615 & 0.0154 \\ 0.0154 & 1.0640 \end{bmatrix}$	
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 4.6418 & -1.8715 \\ -1.8715 & 2.5622 \end{bmatrix}$	
$G_i = \begin{bmatrix} 3.6066 & -1.4350 \\ -1.4350 & 1.9762 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.1765 \\ -0.1357 \end{bmatrix}$	
$eig = [0.8248, 0.9870, 0.9867 \pm 0.0405i]$	
Mode 2	
$K_i = [3.4636 \quad 7.8124]$	
$Q_j = Q_i = \begin{bmatrix} 1.1789 & -0.0079 \\ -0.0079 & 1.0536 \end{bmatrix}$	
$P_j = P_i = \begin{bmatrix} 4.2974 & -1.6575 \\ -1.6575 & 2.1032 \end{bmatrix}$	
$G_i = \begin{bmatrix} 3.3423 & -1.2861 \\ -1.2861 & 1.7481 \end{bmatrix}, L_i = \begin{bmatrix} 0.1409 \\ -0.1867 \end{bmatrix}$	
$eig = [0.8571, 0.9903, 0.9873 \pm 0.0404i]$	

با استفاده از شاخص‌های عملکرد (۵۸) می‌توان مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] انجام داد. جدول ۶ نشان‌دهنده شاخص‌های عملکرد حاصل از روش پیشنهادی و شاخص‌های عملکرد روش کنترلی مرجع [۱۶] است:

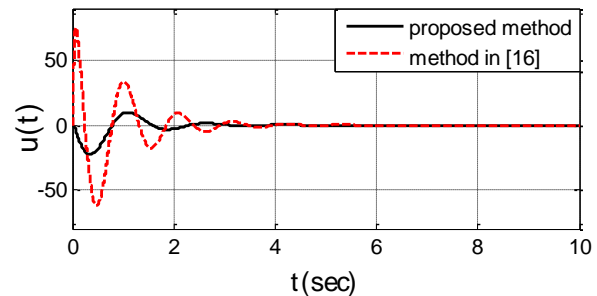
جدول ۶ - شاخص‌های عملکرد روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]

IAS		
	$x_1$	$x_2$
کنترل پیشنهادی	۰,۵۸۹۴	۲,۳۶۵۹
روش کنترلی [۱۶]	۰,۶۰۵۵	۳,۴۱۷۲
ITAS		
	$x_1$	$x_2$
کنترل پیشنهادی	۰,۴۴۹۸	۱,۹۶۰۰
روش کنترلی [۱۶]	۰,۵۰۵۴	۳,۰۲۲۹
ISS		
	$x_1$	$x_2$
کنترل پیشنهادی	۰,۲۸۸۳	۴,۰۷۲۸
روش کنترلی [۱۶]	۰,۳۷۸۳	۷,۱۵۱۶
ITSS		
	$x_1$	$x_2$
کنترل پیشنهادی	۰,۰۹۶۷	۱,۹۲۱۸
روش کنترلی [۱۶]	۰,۱۰۶۳	۳,۹۰۹۸

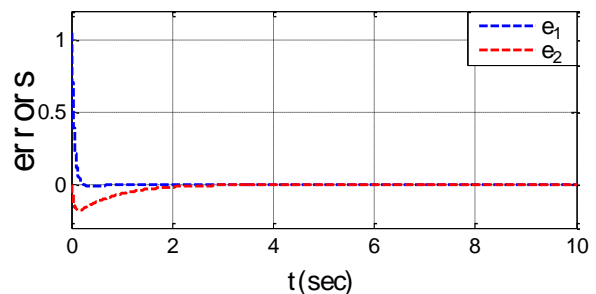
بگیریم، شکل ۱۰ نمایش‌دهنده قانون کنترلی  $u(k)$  برای روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶] است. شکل ۱۱ نیز نشان‌دهنده سیگنال‌های خطای سیستم کنترل‌شده پاندول است.



شکل ۹- متغیرهای حالت پاندول معکوس با روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۱۰- قانون کنترلی  $u(k)$  روش پیشنهادی و روش کنترلی مرجع [۱۶]



شکل ۱۱- سیگنال‌های خطای حاصل از روش پیشنهادی

با استفاده از روش پیشنهادی، بهره پسخور حالت و بهره رویتگر حالت طوری محاسبه شده‌اند که سیستم پاندول معکوس پایدار مجانبی گشته و خطا به صفر میل کند. مقدار بهره پسخور حالت، بهره رویتگر، مقادیر ویژه و سایر پارامترها، برای هر یک از مدهای کلیدزنی به صورت جدول ۵ محاسبه می‌شود:

- Computers in Simulation- Elsevier, vol.86, pp. 67-77.
- [5] S. Mobayen, 2015, "Optimal LMI-based state feedback stabilizer for uncertain nonlinear systems with time-varying uncertainties and disturbances," Complexity, vol.21, no.6.
- [6] AT. Nguyen, M. Sugeno and V. Campos, 2016, "LMI-based stability analysis for piecewise multi-affine systems," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, no.99.
- [7] D. Simon, 2006, *Optimal State Estimation, Kalman, H $\infty$ , and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, INC.
- [8] C. H. Lien , K. W. Yu , Y. F. Lin , Y. J. Chung and L. Y. Chung, 2008, "Robust reliable H $\infty$  control for uncertain nonlinear systems via LMI approach," Applied Mathematics and Computation-Elsevier, vol.198, no.1, pp.453-462.
- [9] S. Xu and T. Chen, 2004, "Robust H $\infty$  control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers," Systems & Control Letters-Elsevier, vol.51, no.4, pp.171-183.
- [10] LK. Wang, HG. Zhang and XD. Liu, 2016, "H $\infty$  Observer design for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy model with unknown premise variables via nonquadratic lyapunov function," IEEE Transactions on Cybernetics, vol.48, no.9, pp.1986-1996.
- [۱۱] مولف: ک. اوگاتا، "سیستم‌های کنترل دیجیتال"، مترجمین: ب. جبه دار مارالانی و ع، خاکی صدیق، موسسه انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۹۱، جلد ۲، چاپ ۷.
- [12] J. Li, Y. Liu, 2007, "Stabilization of a class of discrete-time switched systems via observer-based output feedback," Journal of Control Theory and Applications, Springer, vol.5, no.3, pp.307-311.
- [13] Z. Lendek, P. Raica and J. Lauber, 2014, "Observer design for switching nonlinear systems," Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on.
- [14] G. He, Y. Liu, J. Zhang, W. Yu, 2016, "Robust observer-based fault estimation and tolerant control scheme for class of discrete piecewise systems," Intelligent Control and Automation (WCICA), 2016 12th World Congress on.
- [15] X. Du and G.H. Yang, 2010, "Improved LMI conditions for H $\infty$  output feedback stabilization of linear discrete-time systems," International Journal of Control, Automation and Systems, Springer, vol.8, no.1, pp.163-168.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، کنترل‌کننده طراحی شده پیشنهادی علاوه بر پایدارسازی مجانبی سیستم پاندول معکوس، از مقادیر شاخص‌های عملکرد کمتری برخوردار بوده و لذا سرعت پایدارسازی بالاتری را نسبت به کنترل‌کننده SOF مرجع [۱۶] دارا است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، طراحی روینگر حالت و همچنین پایدارسازی پس‌خور حالت، برای دو سیستم تکه‌ای خطی زمان گسسته ارائه شد. به‌منظور طراحی روینگر حالت و کنترل‌کننده پایدارساز پس‌خور حالت، از روشی ترکیبی شامل نامساوی‌های ماتریسی خطی، توابع لیاپانوف درجه دوم تکه‌ای و روش کنترلی  $H_{\infty}$  استفاده شده است. روش پیشنهاد شده علاوه بر اینکه اثر سیگنال اغتشاش وارده به سیستم را تضعیف کرده و تخمین خوبی از متغیرهای حالت را ارائه می‌دهد، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را نیز تضمین می‌کند. در طراحی این کنترل‌کننده از ساختار جدید نامساوی ماتریسی خطی استفاده شده که باعث می‌شود تا روش کنترلی پیشنهاد شده، مزایایی نسبت به کنترل‌کننده ارائه شده در مرجع [۱۶] داشته باشد. مزیت کنترل‌کننده این پژوهش، قابلیت پایدارسازی سیستم‌های تکه‌ای خطی با ماتریس‌های رتبه غیر کامل است، در صورتی که روش کنترلی مرجع [۱۶] توانایی پایدارسازی سیستم‌هایی با ماتریس‌های رتبه غیر کامل را ندارد. همچنین روش کنترلی با ساختار جدید LMI، از شاخص‌های عملکرد و سرعت پایدارسازی بهتری نسبت به کنترل‌کننده [۱۶] برخوردار است. در پژوهش‌های آتی می‌توان روینگر حالت را برای سیستم زمان گسسته دارای تأخیرهای زمانی ثابت یا متغیر با زمان طراحی کرد.

## مراجع

- [1] J. Xu and L. Xie, 2005, "Null controllability of discrete-time planar bimodal piecewise linear systems," International Journal of Control, Taylor & Francis, pp.1486-1496.
- [2] M. Bernardo, U. Montanaro, J. M. Olm and S. Santini, 2012, "Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems," International Journal of Robust and Nonlinear Control, Wiley, vol.23, no.7, pp.709-730.
- [3] W. Assawinchaichote, S. K. Nguang, P. Shi and E. Boukas, 2008, "H $\infty$  fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D-stability constraints: an LMI approach," Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, vol.78, no.4, pp.514-531.
- [4] B. Xu, Y. Xu and L. He, 2011, "LMI-based stability analysis of impulsive high-order Hopfield-type neural networks," Mathematics and

- [16] D. Da-Wei, Y. Guang-Hong, 2009, "Static output feedback control for discrete-time piecewise linear systems: an LMI approach," *Acta Automatica Sinica*, Elsevier, vol.35, no.4, pp.337-344.
- [17] S. Ibrir and S. Dipt, 2008, "Novel LMI conditions for observer-based stabilization of lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time", *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, vol.206, no.2, pp.579-588.
- [18] X. Du and G.H. Yang, 2009," New characterizations of positive realness and static output feedback control of discrete-time systems," *International Journal of Control*, Taylor & Francis, vol.82, no.8, pp.1485-1495.
- [19] G Feng, M Chen and TJ Zhang, 2005," Observer design of piecewise discrete time linear systems," *Control and Automation, 2005. ICCA '05. International Conference on*.