مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۶۸-۵۵

طراحی فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری تصادفی غیرخطی همراه با نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی

سید حامد ترابی[۱]، ناصر پریز[۲]، علی کریم‌پور[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، hamed.torabi@yahoo.com

[۲] استاد، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

[۳] دانشیار، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، Karimpor@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۹/۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۱۰)

چکیده: در این مقاله یک فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی زمانیکه نویز اندازه‌گیری دارای توزیع استیودنت تی[۱] ارائه می‌گردد. مدلسازی نویز سیستم و اندازه‌گیری، برای مسائل ردیابی اهداف[۲]، غالبا بصورت نویز گوسی جمع شونده انجام شده است. اما مدلسازی نویز با توزیع گوسی نسبت به داده‌های با مقادیر دورافتاده[۳] مقاوم نمی‌باشد. به عبارت دیگر مدلسازی نویز سیستم با توزیع گوسی در مقایسه با توزیع استیودنت تی نسبت به نویزهایی با مقادیر دورافتاده‌ی زیاد، دارای قوام[۴] کمتری می‌باشد. یعنی اگر سیستم ردیابی، تحت تاثیر نویزهایی که دارای مقادیر دورافتاده‌ی زیادی هستند قرار گیرد، مدلسازی این نوع نویزها با توزیع گوسی ممکن است منجر به خطای ردیابی بزرگ و یا واگرایی فیلتر در مسایل تخمین و ردیابی حالت گردد. در این مقاله در ابتدا، سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی[۵] تعریف می‌گردد. پس از آن با مقایسه عملکرد دو توزیع گوسی و استیودنت تی در مدلسازی نویزهای دارای مقادیر دورافتاده، به طراحی فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری استیودنت تی با استفاده از روش حل استنباط بیزین تغییراتی[۶] پرداخته می‌شود. نهایتاً با ارائه‌ی دو مثال و نتایج شبیه‌سازی آنها، عملکرد فیلتر طراحی شده در این مقاله با یک فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری در حضور نویزهای گوسی و استیودنت تی مقایسه گردیده که نتایج شبیه‌سازی، عملکرد مناسب فیلتر طراحی شده را در تخمین متغیرهای حالت سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی، توزیع استیودنت تی، تخمینگر حالت، استنباط بیزین تغییراتی.

Nonlinear Kalman Filter Design for the Fractional Order Nonlinear Stochastic Systems with Student's t measurement Noise

Hamed Torabi, Naser Pariz, Ali Karimpour

Abstract: This paper presents a fractional order Kalman filter for the stochastic nonlinear fractional order systems where the measurement noise is assumed to have Student's t distribution. Modeling of the system and measurement noises in the state space representation, for target tracking problems, often carried out by additive Gaussian noise, but Gaussian distribution is not enough robust to the outliers, in the other words, Gaussian distribution has much less robustness against

[1] Student's t
[2] Target tracking
[3] Outliers
[4] Robustness
[5] Fractional order systems
[6] Variational Bayesian inference

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

outliers than Student's t distribution, so if the tracking system affected by noises that have outliers, modeling of theses noises by the Gaussian distribution, may cause large estimation error or divergence of filter in the filtering and estimation problems. In this paper, after defining the stochastic fractional order systems, by comparing the performance of two Student's t and Gaussian distributions in the modeling of noises that have outliers, try to design a nonlinear Kalman filter for fractional order systems using variational Bayesian inference method. Finally by comparing the simulation results of proposed filter in this paper and a fractional extended Kalman filer in the presence of Gaussian and Student's t noises, the effectiveness of the proposed filter in estimation of states of the fractional order systems is demonestrated.

Keywords: Fractional order nonlinear systems, Student's t distribution, State estimation and Kalman filtering, Variational Bayesian inference

.

۱- مقدمه

امروزه از امکانات نهفته‌ی موجود در حسابان کسری[1] به منظور مدلسازی دقیق‌تر پدیده‌های فیزیکی، ارائه مدلهای شبه فضای حالتی مرتبه کسری، بهبود کارایی تخمینگرهای حالت و همچنین طراحی کنترل کننده‌های مرتبه کسری استفاده‌ی فراوان برده می‌شود. موارد ذکر شده، نمونه‌هایی از دلایل توجه روزافزون محققین به این مبحث ریاضیاتی می‌باشد. سیستم‌های مرتبه کسری[2] به دلیل آنکه پارامترهای بیشتری نسبت به سیستم‌های مرتبه صحیح (سیستمهای معمولی) دارند از تنوع رفتاری و دینامیکی بالاتری برخوردار هستند، در واقع محاسبات مرتبه کسری حالت تعمیم یافته محاسبات مرتبه صحیح می‌باشد که در دهه‌ی گذشته توجه روز افزونی یافته است. امروزه بسیاری از سیستمهای فیزیکی موجود به خوبی با معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری مدلسازی و یا کنترل شده‌اند. به طور خاص سیستمهایی که دارای حافظه دراز مدت می‌باشند، یعنی سیستمهایی که حالت فعلی آن به مقادیر حالت در چندین لحظه‌ی قبل وابسته است، با سیستمهای مرتبه کسری، بهتر از مرتبه صحیح مدلسازی می‌شوند [۱]، بعنوان مثال، سیستمهای انتقال حرارت و انتشار جرم [۲]، خطوط انتقال انرژی الکتریکی [۳]، پروسه‌های الکترومغناطیسی [۴] و پلاریزاسیون دی‌الکتریک توسط سیستمهای مرتبه کسری با دقت بالاتری مدلسازی شده‌اند. سیستمهای دینامیکی به دو دسته مرتبه صحیح[3] (سیستمهای متداول مرتبه معمولی) و سیستمهای مرتبه کسری قابل تقسیم‌بندی می‌باشند، از طرفی سیستمهای مرتبه کسری نیز خود به دو دسته‌ی سیستمهای مرتبه کسری تناسبی[4] و غیر تناسبی افراز می‌گردند. می‌دانیم معادله یک سیستم مرتبه کسری به صورت زیر ارائه می شود.

$$\begin{aligned} & a_n y^{\alpha_n} + a_{n-1} y^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_0 y^{\alpha_0} \\ & = b_m u^{\beta_m} + b_{m-1} u^{\beta_{m-1}} + \ldots + b_0 u^{\beta_0} \end{aligned} \quad (۱)$$

که u سیگنال ورودی به سیستم و y سیگنال خروجی سیستم است. همچنین α و β مرتبه کسری که می‌تواند هر عدد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. اگر مرتبه سیستم بصورت $\alpha_k, \beta_k = k\sigma$ باشد (k عدد صحیح) سیستم را مرتبه کسری تناسبی می‌نامند و چنانچه $\sigma \in \mathbb{R}$ باشد سیستم را مرتبه کسری تناسبی گویا[5] می‌نامند در غیر اینصورت سیستم مرتبه کسری تناسبی غیرگویا[6] می‌نامند.

۱-۱ تعریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری

اپراتور ${}_aD_t^{\alpha}$ نمایشگر اپراتور دیفرانسیلی- انتگرالی[7] مرتبه کسری می‌باشد اگر $\alpha > 0$ اپراتور مرتبه کسری مشتقی (تفاضلی) بوده و چنانچه $\alpha < 0$ نشان دهنده‌ی اپراتور مرتبه کسری انتگرالی می‌باشد [۵]. بنابراین می‌توان نوشت:

$${}_aD_t^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & ,\alpha > 0 \\ 1 & ,\alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & ,\alpha < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

[1] Fractional calculus
[2] Fractional order
[3] Integer order
[4] Commensurate
[5] Rational
[6] Irrational
[7] Integro-differential operator

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری در مراجع مختلف سه تعریف متفاوت ارائه شده است [۶] که عبارتند از:

الف- تعریف ریمان- لیوویل[۱]

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (۳) $$
$$ n-1 \le \alpha < n $$

که n یک عدد صحیح و α مرتبه مشتق مرتبه کسری است و تابع گاما برابر است با:

$$ \Gamma(m) = \int_{0}^{\infty} t^{m-1}e^{-t}dt $$

چنانچه m یک عدد صحیح باشد آنگاه تابع گاما برابر است با $\Gamma(m) = (m-1)!$ که همان تابع فاکتوریل خواهد بود.

ب- تعریف گرانوالد- لیتنیکوف[۲]

$$ {}_{a}^{GL}D_{t}^{\alpha}f(t) = \lim\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}f(t-jh) \qquad (۴) $$
$$ h \to 0\ ,\ \left[\frac{t-a}{h}\right] \to \text{integer} $$

$$ \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} $$

که α یک عدد حقیقی مثبت است.

ج- تعریف کاپوتو[۳]

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (۵) $$
$$ n-1 \le \alpha < n $$

در مشتق ریمان لیوویل، بلوک اول انتگرالگیر و بلوک دوم مشتقگیر است، اما در تعریف کاپوتو، ابتدا مشتق گیری با مرتبه صحیح انجام گرفته و سپس انتگرال کسری بین صفر و یک گرفته می‌شود. در این مقاله از تعریف گرانوالد- لیتنیکوف استفاده می‌شود. مساله تخمین حالت و طراحی فیلتر برای سیستمهای مرتبه کسری اولین بار در مرجع [۷] ارائه گردید. در این مرجع به طراحی فیلتر کالمن مرتبه کسری برای سیستمهای خطی و غیرخطی مرتبه کسری پرداخته شده است. سپس در [۸] با استفاده از روش بردار الحاقی[۴] به مساله فیلترینگ و هموارسازی حالت برای این سیستمها در حضور نویز سفید پرداخته شده است و نتایج تخمین حالت را بهبود بخشیده است، در [9] تخمین حالت در حضور نویز رنگی مرتبه کسری ارائه شده است. در مرجع [۱۰] به مساله طراحی تخمینگر زمانیکه نویز سیستم و نویز اندازه‌گیری وابسته بهم می‌باشند پرداخته شده است. در [۱۱] مساله طراحی تخمینگر در سیستمهای مرتبه کسری گسسته در حضور نویز گوسی به روش تصویرسازی متعامد انجام شده است. در مرجع [۱۲] طراحی فیلتر کالمن مرتبه کسری برای سیستمهای مرتبه کسری با سیگنال اندازه‌گیری دارای تاخیر ارائه شده است در این مساله d گام تاخیر در مساله فیلترینگ را به مساله پیش‌بینی d گام به جلو تبدیل شده و مساله پیش‌بینی حالت برای سیستم مرتبه کسری حل شده است. در [۲۲] به صورت جامع به بررسی تخمینگرها و فیلترهای مختلف در دینامیکهای خطی، غیرخطی و آشوبی و همچنین پروسه‌های صنعتی پرداخته شده است. از طرفی کارهای اولیه در خصوص نویزهای غیرگوسی با استفاده از روش جمع گوسی و یا ترکیب گوسی تابع چگالی پسین غیرگوسی بوده است اشکال این روشهای تقریب که بسیار هم متداول است آن است که فقط در مسایل یک بعدی قابل استفاده است [۱۳]. هایکین در [۱۴] با استفاده از روشهای حل عددی، فیلتری برای مدلهای غیرخطی و نویز گوسی ارائه کرده است هرچند فیلتر طراحی شده برای سایر توزیعها کاربردی هست اما مستقیما راه حلی برای توزیع تی ارائه نشده است، در [۱۵] با استفاده از ترکیب چندین توزیع تی شکل، به تقریب تابع چگالی اصلی با توزیع تی پرداخته شده است که روش حل، یک روش تقریبی است. طراحی فیلتر حالت برای سیستمهای مرتبه صحیح خطی در حضور داده‌های نویزی دورافتاده در [۱۶] با استفاده از یک روش بهینه‌سازی یعنی تنظیم l_1 انجام شده است در این مرجع نویز پروسه خوش رفتار[۵] فرض شده است که این فرض در پروژه‌های نظامی مانند ردیابی اهداف[۶] با مانور بالا[۷] به راحتی نقض می‌گردد. در [۱۷] با استفاده از یک روش محاسباتی ابتکاری به حل انتگرالهای بیزین با توزیع تی پرداخته شده است. در این مقاله با استفاده از روش حل استنباط بیزین تغییراتی[۸] [۱۸] به حل مساله تخمین حالت و طراحی تخمینگر مقاوم برای سیستمهای غیرخطی مرتبه کسری تصادفی در حضور نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی پرداخته شده است. برای این منظور ابتدا در بخش دوم مقاله، مدل فضای حالت سیستمهای غیرخطی مرتبه کسری تصادفی ارائه می‌گردد. سپس توزیع گوسی را با توزیع تی مقایسه کرده، کارایی و قدرت توزیع تی برای

[1] Riemann–Liouville
[2] Grunwald-Letnikov
[3] Caputo
[4] Augmented vector
[5] Well behaved
[6] Target tracking
[7] High maneuver
[8] Variational Bayesian inference

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

مدل کردن نویزهای دنباله‌دار[1] (نویزهایی با مقادیر دورافتاده‌ی زیاد) را نمایش می‌دهیم، پس از آن الگوریتم استنباط بیزین تغییراتی توضیح داده می‌شود و کاربرد آن در تخمین پارامترهای توزیع از روی یک سری داده‌های نویزدار تشریح می‌گردد. در بخش چهارم مقاله، تخمینگر مقاوم مرتبه کسری برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی در حضور نویزهای دنباله‌دار ارائه می‌گردد. نهایتاً با ارائه‌ی دو مثال، کارایی و قدرت فیلتر طراحی شده با فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری مقایسه و نتایج شبیه‌سازی نشان داده می‌شود.

۲- مدلسازی سیستم‌های مرتبه کسری

مدل فضای حالت گسسته زمان غیرخطی مرتبه کسری با معادلات (۶) ارائه می‌شود [۷].

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha} x_{k+1} &= f\left(x_k, u_k\right) + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^{\alpha} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \alpha_j x_{k+1-j} \\ y_k &= h\left(x_k\right) + v_k \end{aligned} \qquad (۶)$$

که f و h توابعی غیرخطی از متغیرهای حالت و ورودی می‌باشند و مرتبه کسری α_j برابر است با:

$$\alpha_j = diag\left[\binom{\alpha_1}{j} \ldots \binom{\alpha_N}{j}\right]$$

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\alpha_1} x_{1,k+1} \\ \vdots \\ \Delta^{\alpha_N} x_{N,k+1} \end{bmatrix}$$

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha - j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha - j + 1)}$$

که $\alpha \in R$ مرتبه کسری برابر است با $[\alpha_1, \ldots, \alpha_N]$ ، N تعداد معادلات سیستم، x_k بردار حالت، y_k بردار خروجی، u_k بردار ورودی، ω_k نویز سیستم و v_k نویز اندازه گیری می‌باشد که مستقل از یکدیگر هستند.

دو شرط (۷) و (۸) برای تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری در نظر گرفته می‌شود.

$$E\left[x_{k-j+1} \mid Z_k\right] \cong E\left[x_{k-j+1} \mid Z_{k-j+1}\right] \qquad (۷)$$
$$j = 1 \ldots (k+1)$$

که $Z_k = \{y_0, y_1, \ldots, y_k, u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ همان داده‌های اندازه‌گیری شده تا لحظه k می‌باشد. $E\left[x_{k-j+1} \mid Z_k\right]$ به معنای تخمین حالت در لحظه k-j+1 زمانی‌که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k فراهم باشد که اصطلاحا به آن هموارسازی[2] گفته می‌شود. در حالی که $E\left[x_{k-j+1} \mid Z_{k-j+1}\right]$ به معنای تخمین حالت در لحظه k-j+1 زمانی که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k-j+1 فراهم باشد که اصطلاحا فیلترینگ[3] نامیده می‌شود. در واقع این شرط می‌گوید تخمین حالت در لحظه‌ی k-j+1 ، وقتی که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k فراهم باشد با تخمین در همین لحظه وقتی داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه‌ی k-j+1 فراهم است تقریبا برابر می‌باشد. به عبارت دیگر، از مقداری از داده‌ها از لحظه‌ی k-j+1 تا لحظه k در تخمین صرف نظر شده است.

$$E\left[\left(x_k - \hat{x}_k\right)\left(x_j - \hat{x}_j\right)^T\right] = 0 \qquad (۸)$$
$$k \neq j$$

این شرط یعنی وابستگی[4] بین لحظات فعلی و گذشته وجود ندارد.

۳- مفاهیم اولیه معیار کولبک- لیبلر[5] ، الگوریتم استنباط بیزین تغییراتی و توزیع استیودنت تی

در این بخش از مقاله به توضیح کامل معیار کولبک-لیبلر و دلیل استفاده از آن، توضیح تفسیری استنباط بیزین تغییراتی و توزیع تی و همچنین مقایسه توزیع تی با توزیع گوسی پرداخته می‌شود.

۳-۱ معیار واگرایی کولبک- لیبلر KL

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چگالی با توزیع مختلف باشند، اصل کولبک- لیبلر به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$KL(p \| q) = -\int p(x) \ln\left\{\frac{q(x)}{p(x)}\right\} dx \qquad (۹)$$

این معیار دارای دو خاصیت زیر است:

۱- $KL(p \| q) \neq KL(q \| p)$ یعنی خاصیت تقارنی ندارد.

[1] Heavy tailed

[2] Smoothing
[3] Filtering
[4] Correlation
[5] Kullback-Leibler divergence

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

۲- $KL(p\|q)\geq 0$ و تساوی فقط به ازای $p(x)=q(x)$ روی می‌دهد.

اگر داده‌های x_n از تابع چگالی نامشخص $p(x)$ تولید شده باشند چنانچه بخواهیم این توزیع را با استفاده از یک توزیع پارامتریک $q(x\mid\theta)$ و داده‌های x_n تقریب بزنیم، یک راه حل برای تخمین θ و در نتیجه بدست آوردن تابع چگالی $q(x\mid\theta)$، می‌نیمم‌سازی اصل واگرایی کولبک-لیبلر بین دو توزیع $p(x)$ و $q(x\mid\theta)$ با توجه به پارامتر θ می‌باشد. (به عنوان مثال پارامتر θ برای توزیع گوسی پارامترهای متوسط و واریانس توزیع می باشد) اگر یک مجموعه متناهی نقاط داده از تابع چگالی $p(x)$ به صورت x_n و به ازای $n=1,...,N$ به صورت تصادفی تولید شده باشند، امید ریاضی تابع غیرخطی $f(x)$ به صورت رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$E[f(x)]\approx\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n) \qquad (۱۰)$$

با توجه به رابطه فوق و همچنین اصل واگرایی کولبک-لیبلر خواهیم داشت:

$$KL(p\|q)\approx \sum_{n=1}^{N}\{-\ln q(x_n\mid\theta)+\ln p(x_n)\} \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱) ترم دوم مستقل از θ است و ترم اول منفی تابع لگاریتمی درست‌نمایی می‌باشد بنابراین می‌توان گفت مینیمم‌سازی اصل واگرایی کولبک-لیبلر معادل ماگزیمم سازی تابع درست‌نمایی می‌باشد.

۳-۲ حساب تغییرات[1] و استنباط بیزین تغییراتی

در روش بیزین تغییراتی، می‌توان تابع چگالی پسین را مستقیما بوسیله انتگرال‌گیری به جای نمونه‌برداری و حل عددی، تخمین زد و برای مسایل چند بعدی هم قابل استفاده است. اگر داده‌های تصادفی x_n از یک توزیع نامشخص $p(x)$ در دسترس باشد، الگوریتم بیزین تغییراتی با استفاده از اصل کولبک-لیبلر، تابع چگالی پارامتریک $p(x\mid\theta)$ را اینگونه محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned}\ln p(x)&=\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}\\&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}d\theta\\&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}\frac{q(\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=\int q(\theta)\left(\ln\frac{q(\theta)}{p(\theta\mid x)}+\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}\right)d\theta\\&=\int q(\theta)\ln\frac{q(\theta)}{p(\theta\mid x)}d\theta\\&\quad+\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=KL(q\|p)+F(q,x)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که ترم اول واگرایی کالبک- لیبلر بین $q(x)$ و $p(x)$ و ترم دوم یعنی $F(q,x)$ انرژی آزاد[2] نامیده می‌شود. مینیم‌سازی $KL(q\|p)$ معادل ماگزیمم‌سازی $F(q,x)$ می‌باشد، ترم $F(q,x)$ را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}F(q,x)&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=\int q(\theta)\ln p(x,\theta)d\theta-\int q(\theta)\ln q(\theta)d\theta\\&=\langle\ln p(x,\theta)\rangle_q+H[q]\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که ترم $\langle\ln p(x,\theta)\rangle_q$ امید ریاضی تابع لگاریتم چگالی توام و $q(\theta)$ تابع چگالی پارامتر θ است. اگر پارامتر $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ باشد با فرض مستقل بودن پارامترها، می‌توان داشت:

$$q(\theta)=\prod_{i=1}^{n}q_i(\theta_i) \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۱۳) خواهیم داشت:

[1] Variational calculus

[2] Free energy

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

$$
\begin{aligned}
F(q,x) &= \int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta \\
&= \int\prod_{i=1}^{n} q_i(\theta_i)\times\left(\ln p(x,\theta)-\sum_{i=1}^{n}\ln q_i\right)d\theta \\
&= \int q_j\prod_{\setminus j} q_i\times\left(\ln p(x,\theta)-\ln q_j\right)d\theta \\
&\quad -\int q_j\prod_{\setminus j} q_i\sum_{\setminus j}\ln q_i d\theta \\
&= \int q_j\left(\int\prod_{\setminus j} q_i\ln p(x,\theta)d\theta_{\setminus j}-\ln q_j\right)d\theta_j \\
&\quad -\int q_j\int\prod_{\setminus j} q_i\ln\prod_{\setminus j} q_i d\theta_{\setminus j}d\theta_j \\
&= \int q_j\left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}-\ln q_j\right)d\theta_j+c \\
&= \int q_j\ln\frac{\exp\left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)}{\ln q_j}d\theta_j+c \\
&= -KL\left[q_j\,\|\exp\left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)\right]+c
\end{aligned}
$$

که $\prod_{\setminus j} q_i$ به معنی حاصلضرب همه عوامل تابع چگالی به جز عامل j ام است و c پارامتر ثابت است. مطابق محاسبات فوق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&F(q,x) = \\
&-KL\left[q_j\,\|\exp\left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)\right]+c
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

اگر تابع چگالی $q_{\setminus j}=q(\theta_{\setminus j})$ مشخص در نظر گرفته شود تقریب پسین $q_j=q(\theta_j)$ که $F(x,\theta)$ را ماگزیمم می‌سازد توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
q_j^* &= \arg\max_{q_j} F(x,\theta) \\
&= \frac{1}{c}\left(\exp\left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)\right)
\end{aligned}
\qquad (۱۶)
$$

در نتیجه لگاریتم پاسخ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\ln q_j^* &= \left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)-\ln c \\
&= \left(\langle\ln p(x,\theta)\rangle_{q\setminus j}\right)+C
\end{aligned}
$$

که جمله اول در سمت راست رابطه تابعی از θ_j یعنی $I(\theta_j)$ می‌باشد. بنابراین استنباط بیزین تغییراتی بصورت زیر انجام می‌شود.

الف- همه تابع چگالی‌های $q(\theta_i)$ را با مقادیر اولیه[1] مقداردهی کنید.

ب- با ایجاد یک حلقه تکراری، بعد از محاسبه هر یک از عاملهای $q(\theta_i)$ و با جایگذاری آن عامل در (۱۶) عامل دیگری را بدست آورده و حلقه را تا رسیدن همگرایی ادامه دهید.

ج- همگرایی تضمین شده است زیرا $F(x,\theta)$ نسبت به هریک از عوامل $q(\theta_i)$ محدب[2] است.

۳-۳ توزیع استیودنت تی

متغیر تصادفی x دارای توزیع گاما به صورت $Gam(\alpha,\beta)$ می‌باشد. این توزیع دارای دو پارامتر α و β می‌باشد که α پارامتر قالب و β پارامتر نرخ نامیده شده که دارای تابع چگالی به صورت زیر می‌باشد:

$$
Gam(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x),\ x>0\\ 0, \qquad otherwise\end{cases}
$$

که در رابطه فوق توزیع فوق تابع گاما به صورت $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$ می‌باشد. متوسط و واریانس متغیر x با توزیع $Gam(\alpha,\beta)$ برابر با $E[x]=\frac{\alpha}{\beta}$ و $\mathrm{var}[x]=\frac{\alpha}{\beta^2}$ می‌باشد. حال اگر $y\in R^d$ یک بردار با توزیع گوسی با متوسط صفر و کواریانس Σ بصورت $N(0,\Sigma)$ و $Gam(\frac{\vartheta}{2},\frac{\vartheta}{2})$ یک متغیر تصادفی با توزیع گاما بصورت $\omega>0$ باشد آنگاه متغیر تصادفی x که با رابطه $x=\mu+\omega^{\frac{-1}{2}}y$ توصیف می‌شود، دارای توزیع تی به صورت $St(\mu,\Sigma,\vartheta)$ می‌باشد که μ متوسط توزیع و ماتریس دقت Σ و درجه آزادی ϑ می‌باشد [۱۹].

$$
\begin{aligned}
&St(x;\mu,\Sigma,\vartheta) = \\
&\int_0^{\infty}N(x;\mu,(\eta\Sigma)^{-1})Gam(\eta;\frac{\vartheta}{2},\frac{\vartheta}{2})d\eta
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

[1] Prior distribution
[2] Convex

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

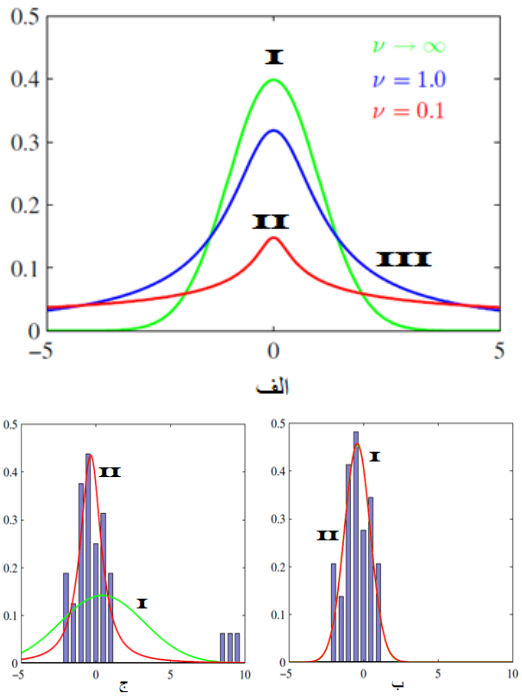
بنابراین $p(x)$ با توزیع تی دارای تابع چگالی به صورت زیر می‌باشد.

$$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{\vartheta+d}{2})}{\Gamma(\frac{\vartheta}{2})}\frac{1}{(\vartheta\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}(1+\frac{\Delta^2}{\vartheta})^{-\frac{\vartheta+d}{2}} \quad (۱۸)$$

که $\Delta^2=(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)$ می باشد. متوسط و واریانس متغیر X با توزیع تی عبارت است از:

$$E[x]=\mu, \mathrm{var}[x]=\Sigma\frac{\vartheta}{\vartheta-2}$$

اگر درجه آزادی[1] ϑ به سمت بینهایت میل کند توزیع $st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ به توزیع گوسی بصورت $N(\mu,\Sigma^{-1})$ میل می‌کند. به ازای $\vartheta=1$ توزیع $st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ به توزیع کشی تبدیل می‌گردد، در واقع توزیع تی با جمع بینهایت تعداد توزیع گوسی که دارای میانگین یکسان اما با واریانس های مختلف می‌باشند تولید می‌شود. این موضوع بصورت ترکیب بینهایت توزیع گوسی بیان می‌گردد که نتیجه توزیعی است مشابه توزیع گوسی ولی با دنباله‌ای کشیده‌تر[2] از گوسی مطابق شکل ۱ می‌باشد. این خاصیت منجر به افزودن خاصیت مقاوم بودن[3] به توزیع می‌شود که به معنی آن است که توزیع تی نسبت به توزیع گوسی به مقادیر و یا داده‌های دور افتاده[4] حساسیت کمتری دارد. در شکل ۱-الف نمودار I نشان دهنده توزیع تی به ازای درجه آزادی بی نهایت بوده که همان توزیع گوسی را نشان می‌دهد که دارای بیشترین ارتفاع و کمترین عرض می‌باشد. نمودارهای II و III (در شکل ۱- الف) توزیع تی را به ازای درجات آزادی ۱ و ۰/۱ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است نمودارهای II و III نسبت به I (یعنی توزیع تی نسبت به توزیع گوسی) کشیده‌تر یا دارای دنباله بزرگتری می‌باشند. به عبارت دیگر توزیع تی دارای دنباله بزرگتر و برای مدلسازی نویزهای دنباله‌دار مناسبتر است. در شکل ۱- ب با استفاده از تعداد محدودی داده (نمودارهای میله ای III) و بکارگیری روش ماگزیمم درستنمایی[5] به مقایسه قدرت دو توزیع گوسی و تی در مدلسازی این داده‌ها پرداخته شده است. در شکل ۱- ب داده‌ها در بازه‌ی [-2,1] قرار داشته و داده‌ی دورافتاده هم وجود ندارد. همانطور که از شکل ۱- ب مشخص است هر دو توزیع یعنی توزیع گوسی و توزیع تی (نمودار I و II) به خوبی و با دقت بالا داده‌ها را مدل می‌کنند و خطایی وجود ندارد. اما در شکل ۱- ج که داده‌های دورافتاده نیز وجود دارند توزیع گوسی (نمودار I) نتوانسته برخلاف توزیع تی (نمودار II) داده‌های اصلی را مدل کند. این نشان می‌دهد توزیع تی در برابر داده‌های دورافتاده مقاوم‌تر از توزیع گوسی می‌باشد. بنابراین در مسائل تخمین و فیلترینگ حالت و برای سیستم هایی که مواجه با نویزهایی با پراکندگی بالا و مقادیر دورافتاده می‌باشند به نظر می‌رسد مدلسازی نویز با توزیع تی به‌جای توزیع گوسی مناسب‌تر بوده زیرا که حساسیت توزیع تی نسبت به نویزهای دورافتاده نسبت به توزیع گوسی کمتر است نتیجتا عمل ردیابی و تخمین بهتر و واگرایی فیلتر طراحی شده کمتر اتفاق می‌افتد. بنابراین یکی از کاربردهای مهم مدلسازی عدم قطعیت‌ها و نویز سیستم با توزیع تی به جای توزیع گوسی در مبحث ردیابی اهداف در پروژه‌های نظامی و تعقیب و ردیابی اهداف با مانور بالا زمانیکه محیط دارای کلاتر زیادی است می‌باشد که به عنوان مثال می‌توان از مساله ردیابی زیردریایی دشمن، زمانیکه دسته‌های ماهی به عنوان کلاتر و یا داده‌های دور افتاده قلمداد می‌گردند نام برد. طبعا مدلسازی نویز این محیط همراه با کلاتر بالا (دسته های متحرک ماهی) با توزیع تی به جای توزیع گوسی به ردیابی بهتر هدف و عدم واگرایی فیلتر کمک شایانی می‌کند.



شکل ۱: الف- توزیع تی به ازای مقادیر مختلف درجه آزادی
ب- مدلسازی با توزیع تی و گوسی داده‌های بدون مقادیر دورافتاده
ج- مدلسازی توزیع تی و گوسی داده‌های با مقادیر دورافتاده

۳-۴ تابع لگاریتمی توزیع های نرمال و گاما

[1] Degree of freedom
[2] Heavy Tail
[3] Robustness
[4] Outlier
[5] Maximum likelihood

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

لگاریتم توزیعهای گوسی تک بعدی و چند بعدی و همچنین توزیع گاما بصورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\ln N(x \mid \mu,\lambda) \\
&= \frac{1}{2}\ln\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{\lambda^{-1}}{2}(x-\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\lambda^{-1}x^2 + \lambda^{-1}\mu x + c \\
&\ln N(x \mid \mu,\Sigma) \\
&= -\frac{1}{2}\ln|\Sigma^{-1}| - \frac{d}{2}\ln 2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) \\
&= -\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x + x^T\Sigma^{-1}\mu + c \\
&\ln Ga(x \mid a,b) \\
&= a\ln - \ln\Gamma(a) + (a-1)\ln x - bx \\
&= (a-1)\ln x - bx + c
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۴- بیان مساله و طراحی فیلتر

مدل فضای حالت غیرخطی گسسته زمان مرتبه کسری را همراه با نویز گوسی سیستم و نویز اندازه‌گیری تی بصورت معادلات زیر در نظر بگیرید.

$$\Delta^{\alpha}x_{k+1} = f(x_k, u_k) + \omega_k$$

$$y_k = h(x_k) + v_k$$

که نویز سیستم گوسی با $\omega_k \sim N(\mu,\Sigma)$ و نویز اندازه‌گیری دارای توزیع تی با $v_k \sim st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ می‌باشد. می‌خواهیم با طراحی یک فیلتر جدید بر مبنای روش کالمن متغیرهای حالت سیستم مرتبه کسری غیرخطی را از روی داده‌های نویزی زمانیکه نویز اندازه‌گیری دارای توزیع تی است را با استفاده از روش حل بیزین تغییراتی تخمین بزنیم. در واقع در فیلترینگ هدف بدست آوردن تخمین توزیع حالت $p(x_k \mid y_{1:k})$ در گامهای زمانی $k = 1,\ldots,T$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \Delta^{\alpha}x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k+1-j} \\
&= f(x_k, u_k) + \omega_k - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k+1-j}
\end{aligned}$$

بدون کاستن از عمومیت مساله، ورودی را $u_k = 0$ در نظر می‌گیریم. در سیکل پیش بینی[1] طراحی فیلتر کالمن ، متوسط و کواریانس پیش‌بینی به ترتیب با روابط (۲۲) و (۲۳) محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= m_{k|k-1} = E[x_k \mid y_{k-1}] \\
&= E[f(x_{k-1}) \mid y_{k-1}] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j E[x_{k-j} \mid y_{k-1}] \\
&\quad + E[w_{k-1} \mid y_{k-1}]
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}
&P_{k|k-1} = \\
&E[f(\hat{x}_{k-1})\delta x_{k-1}^T]P_{k-1}^{-1}E[f(\hat{x}_{k-1})\delta x_{k-1}^T]^T \\
&+ Q_{k-1} + \sum_{j=1}^{k}\Psi_j \Psi_j^T P_{k-j|k-j}
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از شروط (۷) و (۸) روابط فوق بدست آمده‌اند. ترم $E[f(x_{k-1}) \mid y_{k-1}]$ به روشهای مختلفی قابل محاسبه است اگر از روش بسط سری تیلور استفاده کنیم فیلتر کالمن توسعه یافته[2] مرتبه کسری بدست می‌آید و اگر به روش عددی مانند تبدیل بی‌بو[3] و یا مکعبی[4] استفاده شود فیلتر کالمن بی‌بو و یا کالمن مکعبی بدست می آید. در این مقاله از روش توسعه یافته یعنی بسط سری تیلور کوتاه شده به صورت (۲۲) بهره گرفته شده است. از طرفی ترم $E[x_{k-j} \mid y_{k-1}]$ با استفاده از (۷) بدست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= m_{k|k-1} = E[x_k \mid y_{k-1}] \\
&= f(\hat{x}_{k-1}) - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j \hat{x}_{k-j}
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

خطای پیش بینی حالت مرتبه کسری با رابطه (۲۳) و ماتریس کواریانس خطای پیش بینی برای سیستم مرتبه کسری با توجه به (۸) با رابطه (۲۴) مشخص می‌گردد.

[1] Prediction cycle
[2] Extended
[3] Unscented
[4] Cubature

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

$$e_k = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$$
$$= f(x_{k-1}) + \omega_{k-1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k-j}$$
$$-f(\hat{x}_{k-1}) - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j \hat{x}_{k-j}$$
$$= f(\hat{x}_{k-1}) + F_x(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})$$
$$+\omega_{k-1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k-j}$$
$$-f(\hat{x}_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j \hat{x}_{k-j}$$
$$= F_x(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \omega_{k-1}$$
$$-\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j (x_{k-j} - \hat{x}_{k-j}) \quad (۲۳)$$

$$P_{k|k-1} = E[e_k . e_k^T]$$
$$= F_x P_{k-1} F_x^T + Q_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{k-j|k-j} \lambda_j^T \quad (۲۴)$$

برای سیکل به روز رسانی[1] از روش استنباط بیزین تغییراتی استفاده می‌شود. اگر چگالی پسین گام قبلی یعنی $k-1$ بصورت $p(x_k \mid y_{1:k-1}) \approx N(x_k \mid m_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ تقریب زده شود و تابع چگالی اندازه‌گیری‌های نویزی با توزیع تی را براساس ترکیب گوسی می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$p(y_k \mid x_k) = \int p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(\beta_k) d\beta_k \quad (۲۵)$$

که β_k متغیر کمکی تصادفی با توزیع گاما بصورت $\beta_k \sim Gam(\frac{\vartheta}{2}, \frac{\vartheta}{2}) \propto \beta_k^{\frac{\vartheta}{2}-1} e^{-\frac{\vartheta}{2}\beta_k}$ می‌باشد و $p(y_k \mid x_k, \beta_k)$ توزیع گوسی با تابع چگالی (۲۶) می‌باشد.

$$p(y_k \mid x_k, \beta_k) = N(h(x_k), \frac{1}{\beta_k} R_k) \quad (۲۶)$$

تابع چگالی توام x_k و β_k با استفاده از قانون بیز بصورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) = p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1}, y_k)$$
$$= \frac{p(y_k \mid x_k, \beta_k, y_{1:k-1}) p(x_k, \beta_k, y_{1:k-1})}{p(y_{1:k})}$$
$$= \frac{p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1}) p(y_{1:k-1})}{p(y_{1:k})}$$
$$\propto p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1}) \quad (۲۷)$$

با توجه به $p(y_k \mid x_k, \beta_k)$ در رابطه (۲۶)، تابع چگالی گاما β_k و همچنین تابع چگالی $p(x_k \mid y_{1:k-1})$ که در گام پیش‌بینی فیلتر محاسبه شده است یعنی رابطه (۲۲) و مقداری محاسبات، چگالی توام پسین $p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})$ توسط رابطه (۲۸) بدست می‌آید.

$$p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \propto$$
$$\beta_k^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\beta_k}{2}(y_k - h(x_k))^T R_k^{-1}(y_k - h(x_k))}$$
$$. e^{-\frac{1}{2}(x_k - m_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k - m_{k|k-1})}$$
$$. \beta_k^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-\frac{\vartheta\beta_k}{2}} \quad (۲۸)$$

برای بدست آوردن تابع چگالی پسین $p(x_k \mid y_{1:k})$ از تقریبی به صورت زیر می‌توان بهره برد:

$$p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \approx p(x_k) p(\beta_k) \quad (۲۹)$$

همانطور که در بخش ۳-۲ مقاله توضیح داده شد با استفاده از الگوریتم بیزین تغییراتی و با مینیم‌سازی اصل واگرایی کولبک- لیبلر میان تقریب حاصلضرب توزیعها (۲۹) و تابع چگالی توزیع پسین $p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})$، می‌توان محاسبات زیر را طبق آنچه در بخش ۳-۲ آورده شد، انجام داد:

$$KL(p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \parallel p(x_k) p(\beta_k)) =$$
$$\int p(x_k) p(\beta_k) \log(\frac{p(x_k) p(\beta_k)}{p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})}) dx_k d\beta_k \quad (۳۰)$$

برای حداقل‌سازی واگرایی کالبک- لیبلر فوق با ثابت نگه داشتن $p(x_k)$، تابع چگالی $p(\beta_k)$ را مطابق توضیحات و روابط بخش ۳-۲ به صورت زیر بدست آورد.

[1] Updating cycle

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

$$\begin{aligned}&\ln p(\beta_k)\\&=\langle \ln p(x_k,\beta_k \mid y_{1:k})\rangle_{p(x_k)}+c\\&=-\frac{1}{2}\beta_k\bar{\chi}_k+(\frac{\vartheta+d}{2}-1)\ln\beta_k-\frac{\vartheta\beta_k}{2}+c\end{aligned} \quad (۳۱)$$

که $\bar{\chi}_k$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_k&=\left\langle (y_k-h(x_k))^T R_k^{-1}(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}\\&=tr\left(\left\langle (y_k-h(x_k))^T(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}.\Sigma_k^{-1}\right)\end{aligned}$$

و ترم $\left\langle (y_k-h(x_k))^T(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}$ امید ریاضی تابع غیرخطی با تابع چگالی $p(x_k)=N(x_k,\hat{x}_k,P_k)$ می‌باشد. β_k دارای توزیع گاما بصورت $\beta_k \sim Gam(\frac{\vartheta+d}{2},\frac{\bar{\chi}_k+\vartheta}{2})$ با متوسط $\bar{\beta}_k$ بوده که مقدار متوسط آن برابرست با:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_k&=E[\beta_k]\\&=\int\beta_k p(\beta_k)d\beta_k=\frac{\vartheta+d}{\vartheta+\bar{\chi}_k}\end{aligned} \quad (۳۲)$$

بصورت مشابه روند بالا و با مینیم‌سازی واگرایی کولبک-لیبلر ولی این بار با ثابت نگه داشتن $p(\beta_k)$ ، تابع چگالی $p(x_k)$ را به صورت (۳۳) می‌توان محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}&\ln p(x_k)\\&=\langle \ln p(x_k,\beta_k \mid y_{1:k})\rangle_{p(\beta_k)}+c\\&=-\frac{1}{2}\bar{\beta}_k(y_k-h(x_k))^T\Sigma_k^{-1}(y_k-h(x_k))\\&\quad-\frac{1}{2}(x_k-m_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k-m_{k|k-1})+c\end{aligned} \quad (۳۳)$$

رابطه (۳۳) معادل مساله تخمین حالت در گام به روز رسانی برای فیلتر کالمن غیرخطی و با ماتریس کواریانس اندازه‌گیری $\frac{1}{\bar{\beta}_k}\Sigma_k$ می‌باشد، بنابراین روش بیزی تغییراتی با ایجاد یک حلقه تکراری با تعداد تکرار ثابت N ، توزیع نهایی حالت x_k و β_k را بدین صورت تقریب می‌زند:

با ثابت فرض کردن تابع چگالی $p(x_k)$، تابع چگالی $p(b_k)$ را از رابطه (۳۱) بدست آورده سپس با دانستن این تابع چگالی، تابع چگالی $p(x_k)$ را طبق رابطه (۳۳) بدست آورده این حلقه N بار تکرار می‌شود.

۵- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۱- سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۳۶) با مشخصات نویز (۳۷) در نظر بگیرید. فیلترکالمن توسعه یافته مرتبه کسری طراحی شده در مرجع [۸] نیز جهت مقایسه با فیلتر طراحی شده ما پیاده‌سازی و اجرا شده است. در اجرای فیلتر کالمن توسعه یافته مرجع [۸] تمام اطلاعات نویز یعنی نویز اصلی با واریانس R و نویزهای دورافتاده با واریانس 100R از ابتدا مشخص می‌باشند..

$$\begin{cases}\Delta^{\alpha}x(t+1)=\\0.5x(t)+\dfrac{25x(t)}{1+x(t)}+8\cos(1.2t)+w(t)\\y(t)=\dfrac{1}{20}x(t)^2+v(t)\end{cases} \quad (۳۴)$$

$$w_k \sim N(0,Q)$$
$$v_k \sim \begin{cases}N(0,R), & \text{w.p. } 0.9\\ N(0,100R), & \text{w.p. } 0.1\end{cases} \quad (۳۵)$$

که α مرتبه کسری مدل فضای حالت سیستم مرتبه کسری غیرخطی تصافی می‌باشد که دارای بازه‌ی مقادیر حقیقی بین صفر الی دو می‌باشد. که در اینجا ۰/۵ در نظر گرفته شده است. نویز سیستم w_k دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس Q بوده $N(0,Q)$، اما ۹۰ درصد نویز اندازه‌گیری $v(t)$ از توزیع $N(0,R)$ تولید می‌شود و ۱۰ درصد از توزیع با کواریانس بشدت افزایش یافته 100R یعنی $N(0,100R)$ تولید می‌گردد، این ده درصد نویز، مدل کننده‌ی داده‌های دورافتاده می‌باشد. مطابق بخش ۳-۳ نویز گوسی $N(0,Q)$ با نویز $St(0,Q,3)$ قابل تقریب است. با انتخاب این نوع ساختار برای نویز اندازه‌گیری، قابلیت فیلتر طراحی شده در ردیابی حالت در حضور عدم قطعیت داده‌های دورافتاده آشکار می‌گردد. جهت مقایسه نتایج، فیلتر کالمن توسعه یافته ارائه شده در [۸] با همین مقادیر نویز سیستم و اندازه‌گیری اجرا می‌شود و نتایج این فیلتر توسعه یافته با فیلتر طراحی شده در این مقاله، مقایسه شده که نتایج شبیه‌سازی در شکلهای ۲ و ۳ نشان داده شده است. همچنین با استفاده از رابطه (۳۶) ریشه متوسط مربع خطا[1] را به ازای ۱۰۰ اجرای مونت کارلو[2]

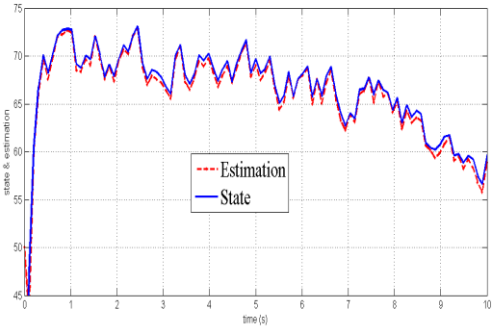
[1] Root mean square error (RMSE)
[2] Monte-Carlo runs

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

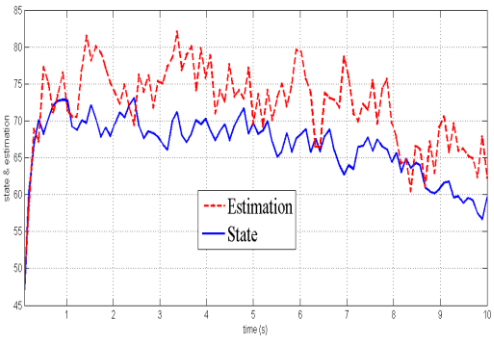
(N=100) برای دو فیلتر طراحی شده و کالمن توسعه یافته محاسبه شده، که نتیجه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

$$RMSE(k)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_k^i-\hat{x}_k^i\right)^2} \qquad (۳۶)$$

شکل ۲ عملکرد فیلتر طراحی شده را برای سیستم مرتبه کسری با مرتبه ۰/۵ در حضور نویزهایی با مقادیر دورافتاده نشان می‌دهد. همانطوری که در این شکل قابل مشاهده است فیلتر ارائه شده به خوبی و با دقت بسیار بالایی متغیر حالت را تخمین زده و تاثیر حضور مقادیر دورافتاده را حذف نموده است. اما شکل ۳ پاسخ فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری ارائه شده در مرجع [۸] را نشان می‌دهد که در برابر داده‌های اندازه‌گیری دورافتاده دارای خطای تخمین بزرگتری می‌باشد.

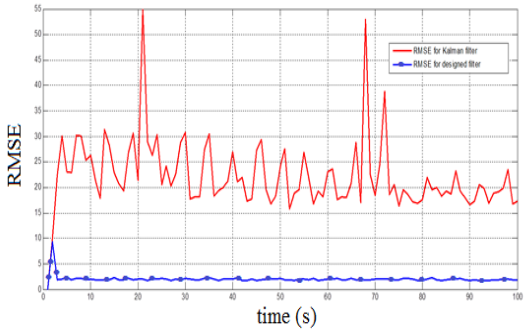


شکل ۲: تخمین حالت با فیلتر ارائه شده



شکل ۳: تخمین حالت با فیلتر کالمن توسعه یافته

در شکل ۴ ریشه متوسط مربع خطا RMSE برای دو فیلتر به ازای ۱۰۰ اجرای مستقل مونت کارلو مطابق رابطه (۳۶) نمایش داده شده است. نوسانات زیاد همراه با دامنه‌ی بزرگ برای فیلتر کالمن مرتبه کسری نمایشگر خطای تخمین زیاد در ردیابی اهداف می‌باشد. که چنانچه واریانس و احتمال حضور این داده‌های دورافتاده بیشتر گردد منجر به واگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته شده است. با توجه به شکل ۴ عملکرد فیلتر طراحی شده برای داده‌های دورافتاده بسیار مناسب بوده که نشان دهنده‌ی مقاوم بودن این فیلتر در برابر داده‌های دورافتاده است.



شکل ۴: مقایسه ریشه متوسط مربع خطا

مثال ۲- در این مثال قدرت و توانایی فیلتر طراحی شده برای ردیابی اهداف مانوردار بررسی می گردد. در مسایل کنترل ترافیک هوایی، هدف دارای دو نوع حرکت مستقیم یکنواخت و حرکت مانوردار است [۲۰, ۲۱]. دینامیک هدف با مدل دور مرتبه کسری (۳۷) مدلسازی شده است. بردار حالت برابر با $X=\left(x,y,v_x,v_y,\omega\right)$ بوده که موقعیت مکانی دو بعدی هدف با (x,y) و سرعت آن با (v_x,v_y) مشخص می‌گردد و ω نرخ چرخش هدف است. مدل دینامیکی هدف عبارت است از:

$$\Delta^{\alpha}X(k)=\begin{pmatrix}1 & \frac{\sin(w\Delta t)}{w} & 0 & \frac{-1+\cos(w\Delta t)}{w} & 0\\ 0 & \cos(w\Delta t) & 0 & -\sin(w\Delta t) & 0\\ 0 & \frac{1-\cos(w\Delta t)}{w} & 1 & \frac{\sin(w\Delta t)}{w} & 0\\ 0 & \sin(w\Delta t) & 0 & \cos(w\Delta t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X(k)+e_k \qquad (۳۷)$$

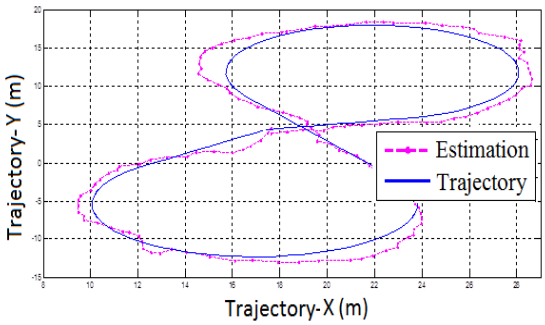
به منظور تخمین موقعیت و سرعت هدف، راداری در مرکز صفحه قرارگرفته که موقعیت و سمت هدف را با معادله اندازه‌گیری (۳۸)، اندازه‌گیری می کند:

$$Z_k=\begin{bmatrix}r_k\\ \theta_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)\end{bmatrix}+v_k \qquad (۳۸)$$

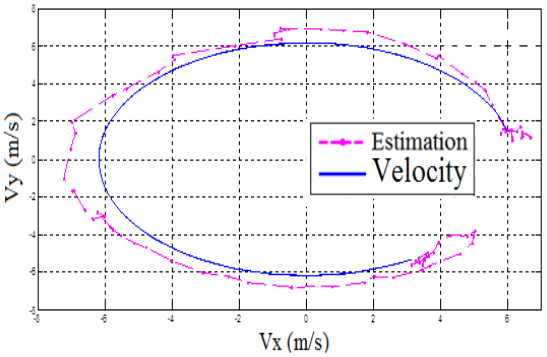
که e_k نویز پروسه دارای توزیع گوسی $N(0,Q_k)$ به صورت $Q_k=\begin{bmatrix}e_1M & 0 & 0\\ 0 & e_1M & 0\\ 0 & 0 & e_2\end{bmatrix}$ که و $M=\begin{bmatrix}\Delta t^3/3 & \Delta t^2/2\\ \Delta t^2 & \Delta t\end{bmatrix}$ و $e_1=1, e_2=0.1$ می‌باشد که $\Delta t=0.1$ ، α مرتبه کسری مدل فضای حالت که در این مثال برابر ۰/۹۵ در نظر گرفته شده است. از طرفی v_k نویز اندازه‌گیری

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

می‌باشد که دارای دو توزیع طبق رابطه (۳۵) می‌باشد. بخش اول توزیع یعنی $N(0,R)$ که یک توزیع گوسی با متوسط صفر و ماتریس کواریانس R می‌باشد که نقش توزیع اصلی را بازی می‌کند. بخش دوم نویز یعنی $N(0,100R)$ که یک توزیع گوسی با متوسط صفر و ماتریس کواریانس 100R می‌باشد که نقش داده‌های دورافتاده را بازی می‌کند. با پیاده‌سازی فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری مرجع [۸] در حضور این نویز اندازه‌گیری همراه با داده‌های دورافتاده، مشاهده گردید این فیلتر نمی‌تواند هدف مانوردار را ردیابی کند. یعنی با اجرای چندین باره فیلتر توسعه یافته بدلیل حضور نویزهایی با واریانس بالا، یا منجر به واگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته گشته و یا خطای تخمین بسیار بزرگی پدید می‌آید که در نتیجه عدم رهگیری هدف مخصوصا زمانیکه هدف در حال مانور است اتفاق می‌افتد. لیکن اگر نویز اندازه‌گیری را با تابع چگالی تی به صورت $St(0,Q,3)$ تقریب بزنیم (یعنی نویز اندازه‌گیری با توزیع تی در نظر گرفته شود) و فیلتر طراحی شده در این مقاله را به منظور تخمین هدف پیاده‌سازی کنیم، مشاهده می‌شود فیلتر طراحی شده به خوبی هدف مانوردار را ردیابی نموده و موقعیت و سرعت هدف را مطابق با شکلهای ۵ و۶ با دقت بالایی تخمین می‌زند. چرا که این مدلسازی با توزیع تی به خوبی نسبت به داده‌های دورافتاده مقاوم بوده و فیلتر تحت تاثیر نویزهای دورافتاده قرار نمی‌گیرد. نتایج عملکردی فیلتر طراحی شده برای تخمین هدف مانوردار در شکلهای ۵، ۶ و ۷ نشان داده شده است. نقطه شروع حرکت هدف مانوردار نقطه $[16.5,4,1,0.25,1]$ می‌باشد. هدف دارای سه نوع حرکت مختلف چپگرد، راست گرد، حرکت مستقیم الخط به ترتیب با مقادیر $w=1$ ، $w=-1$ و $w=0$ می‌باشد. مطابق شکل ۵ هدف دارای مانور چپ، حرکت مستقیم و نهایتا مانور راست می‌باشد که این حرکت بیانگر حرکت هدف با مانور بالاست. همانگونه که در این شکل قابل مشاهده است موقعیت هدف به خوبی ردیابی شده و در قسمتهایی که هدف در حال مانور است، خطای ردیابی زیاد شده اما فیلتر در گامهای بعدی جبران و خطای تخمین کاهش یافته است این پاسخ به ازای واریانس داده‌های دورافتاده 100R و با احتمال حضور ۱۰ درصد می‌باشد. شکل ۶ سرعت هدف و تخمین سرعت آن را با استفاده از فیلتر طراحی شده نشان می‌دهد که بیانگر تخمین سرعت هدف با خطای کوچک می‌باشد. در شکل ۷ مجددا به تخمین موقعیت ومسیر حرکت هدف پرداخته شده اما واریانس داده‌های دورافتاده دو برابر یعنی 200R منظور شده است. همانگونه که در این شکل قابل مشاهده است هدف ردیابی شده اما میزان خطای تخمین موقعیت هدف افزایش یافته است. جدولهای ۲،۱ و ۳ نتایج شبیه‌سازی برای دو فیلتر کالمن توسعه یافته و تی را به ازای سه حالت مختلف نویز اندازه‌گیری با مقادیر داده‌های دورافتاده، یعنی با مقادیر 100R، 200R و بدون داده‌های دورافتاده (یعنی حالتی که نویز اندازه‌گیری فقط دارای جمله اصلی بصورت $N(0,R)$ بوده و فاقد داده‌های دورافتاده است) به ازای ۱۰۰ بار تکرار آزمایش و با متوسط‌گیری خطای تخمین موقعیت هدف و خطای تخمین سرعت هدف را نشان می‌دهد. همانگونه که در جدولهای ۱ و ۲ قابل مشاهده است فیلتر طراحی شده در این مقاله با خطای کم، موقعیت و سرعت هدف را تخمین زده که با افزایش واریانس داده‌های دورافتاده اندکی متوسط خطای تخمین افزایش می‌یابد. اما فیلتر کالمن توسعه یافته در مقابل این نویز اندازه‌گیری و داده‌های دورافتاده واگرا شده و قادر به ردیابی هدف نمی‌باشد. جدول ۳ یعنی حالتی که نویز اندازه‌گیری فاقد داده‌های دورافتاده است نشان می‌دهد که فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری، اندکی دارای پاسخ و دقت بهتری در تخمین حالت نسبت به فیلتر تی می‌باشد که دلیل آن به استفاده از تقریبهای استفاده شده در طراحی فیلتر تی ارائه شده باز می‌گردد. از طرفی از آنجا که فیلتر تی ارائه شده یک فیلتر کالمن با تقریبهای بکار رفته جهت ارائه فرم بسته برای این فیلتر می‌باشد (در واقع با استفاده از تقریبهای بکار رفته در استنباط بیزین، ما یک فیلتر کالمن گوسی با مقادیر میانگین و واریانس تغییر یافته در هرگام داریم) زمان، سرعت و حجم فضای حافظه اشغالی پردازنده جهت اجرای این فیلتر تقریبا مانند فیلتر کالمن توسعه یافته بوده و طبعا این فیلتر می‌تواند در همه‌ی پروسه‌های صنعتی برخط با دقت بسیار بالا بکار گرفته شود.

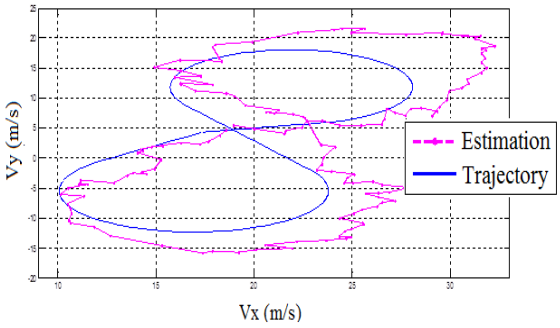


شکل ۵: مسیر حرکت هدف و تخمین مسیر با فیلتر ارائه شده



شکل ۶ : سرعت هدف و تخمین سرعت با فیلتر ارائه شده

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]



شکل ۷: مسیر حرکت هدف و تخمین مسیر با فیلتر ارائه شده به ازای ۲۰۰R

جدول ۱: خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 100R

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 100R
واگرا	1.7	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف [m]
واگرا	0.8	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

جدول ۲: خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 200R

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 200R
واگرا	3.1	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف [m]
واگرا	1.2	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

جدول ۳: خطای متوسط تخمین بدون داده های دورافتاده

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین بدون داده‌های دورافتاده
0.9	1	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف[m]
0.44	0.5	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تخمینگر حالت برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی در حضور نویز سیستم با توزیع گوسی و نویز اندازه‌گیری با توزیع تی طراحی شده است. کاربرد اصلی این فیلتر برای مسایل ردیابی اهداف زمانیکه در محیط نویزهایی با پراکندگی بالا موجود است، می‌باشد. در این مقاله با طراحی فیلتر حالت برای سیستمهای مرتبه کسری با استفاده از روش استنباط بیزین تغییراتی نشان دادیم، زمانیکه اندازه‌گیریها تحت تاثیر نویزهایی با مقادیر دورافتاده زیادی باشند، مدلسازی این داده‌های نویزی در معادله خروجی مدل فضای حالت با توزیع تی به جای توزیع گوسی و طراحی فیلتر حالت برای این مدل، دقت ردیابی و همچنین مقام بودن فیلتر طراحی شده را افزایش می‌دهد.

مراجع

[1] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu-Batlle, Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications: Springer Science & Business Media, 2010.

[2] Y. Luchko, "Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 351, pp. 218-223, 2009.

[3] Z. Yanzhu and X. Dingyu, "Modeling and simulating transmission lines using fractional calculus," in Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2007. WiCom 2007. International Conference on, 2007, pp. 3115-3118.

[4] N. Engheia, "On the role of fractional calculus in electromagnetic theory," Antennas and Propagation Magazine, IEEE, vol. 39, pp. 35-46, 1997.

[5] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "A note on the stability of fractional order systems," Mathematics and Computers in Simulation, vol. 79, pp. 1566-1576, 2009.

[6] D. Baleanu, J. A. T. Machado, and A. C. Luo, Fractional dynamics and control: Springer Science & Business Media, 2011.

[7] D. Sierociuk and A. Dzielinski, "Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation," International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 16, p. 129, 2006.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]

[8] D. Sierociuk, I. Tejado, and B. M. Vinagre, "Improved fractional Kalman filter and its application to estimation over lossy networks," Signal Processing, vol. 91, pp. 542-552, 2011.

[9] D. Sierociuk and P. Ziubinski, "Fractional order estimation schemes for fractional and integer order systems with constant and variable fractional order colored noise," Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 33, pp. 3861-3882, 2014.

[10] D. Sierociuk, "Fractional Kalman Filter algorithms for correlated system and measurement noises," Control and Cybernetics, vol. 42, 2013.

[11] H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty, and A. Meghdari, "On the general Kalman filter for discrete time stochastic fractional systems," Mechatronics, vol. 23, pp. 764-771, 2013.

[12] H. Torabi, N. Pariz, and A. Karimpour, "Kalman filters for fractional discrete-time stochastic systems along with time-delay in the observation signal," The European Physical Journal Special Topics, vol. 225, pp. 107-118, 2016.

[13] H. W. Sorenson and D. L. Alspach, "Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums," Automatica, vol. 7, pp. 465-479, 1971.

[14] I. Arasaratnam and S. Haykin, "Cubature kalman filters," IEEE Transactions on automatic control, vol. 54, pp. 1254-1269, 2009.

[15] R. J. Meinhold and N. D. Singpurwalla, "Robustification of Kalman filter models," Journal of the American Statistical Association, vol. 84, pp. 479-486, 1989.

[16] J. Mattingley and S. Boyd, "Real-time convex optimization in signal processing," IEEE Signal processing magazine, vol. 27, pp. 50-61, 2010.

[17] M. Roth, E. Özkan, and F. Gustafsson, "A Student's t filter for heavy tailed process and measurement noise," in 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2013, pp. 5770-5774.

[18] N. D. Lawrence, "Variational inference in probabilistic models," University of Cambridge, 2001.

[19] C. M. Bishop, "Pattern recognition," Machine Learning, vol. 128, 2006.

[20] Y. Bar-Shalom, P. K. Willett, and X. Tian, Tracking and data fusion: YBS publishing, 2011.

[21] T. Yuan, Y. Bar-Shalom, P. Willett, R. Ben-Dov, and S. Pollak, "A comparison of multiple-IMM estimation approaches using EKF, UKF, and PF for impact point prediction," in SPIE Defense+ Security, 2014, pp. 90920D-90920D-15.

[۲۲] حمید خالوزاده، عطیه کشاورز محمدیان، "مروری برکاربردهای نظریه تخمین، شناسایی و کنترل تصادفی در سیستم‌های صنعتی"، مجله کنترل، جلد ۸، شماره ۳، پاییز۱۳۹۳ ، صفحه ۱۴۱-۱۱۹

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-09-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.4.4.0]