

طراحی کنترل کننده زمان محدود برای سیستم های لپ شیتز یک طرفه تأخیری

هادی غلامی^۱، طاهره بینازاده^۲

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، h.gholami@sutech.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh@sutech.ac.ir

دریافت: 1395/10/28 ویرایش اول: 1396/4/28 ویرایش دوم: 1396/6/22 پذیرش: 1396/8/5

چکیده: در این مقاله سیستم های دینامیکی با توابع غیرخطی لپ شیتز یک طرفه در حضور تأخیر زمانی و ترم های نامعلوم ناشی از عدم قطعیت های مدل و اغتشاشات خارجی مورد مطالعه قرار می گیرند. شرط لپ شیتز یک طرفه نسبت به شرط متداول و مرسوم لپ شیتز محافظه کاری کمتری داشته و دسته وسیع تری از توابع غیرخطی را شامل می شود. هدف از این مقاله، طراحی کنترل کننده فیدبک حالت برای سیستم مذکور است به نحوی که پایداری مقاوم و زمان محدود متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته تضمین شود. برای این منظور، براساس رویکرد لیاپانوفی در آنالیز پایداری سیستم های تأخیری، تابعک لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب برای سیستم تأخیری مذکور، انتخاب گردیده و شرایط کافی جهت پایدارسازی زمان محدود مقاوم بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی بیان شده است. همچنین از حل نامساوی های ماتریسی استخراج شده، بهره فیدبک حالت محاسبه گردیده است. در پایان نیز مثالهای عددی و شبیه سازی هایی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است که قضیه ارائه شده در این مقاله دارای محافظه کاری کمتری بوده و محدوده عملکردی و سیعتری را شامل می شود.

کلمات کلیدی: پایداری زمان محدود، سیستم های تأخیری، سیستم های لپ شیتز یک طرفه، کنترل کننده مقاوم.

Finite time Controller Design for Time-Delay One-sided Lipschitz Systems

Hadi Gholami, Tahereh Binazadeh

Abstract: This article studies dynamical systems with one-sided Lipschitz nonlinear functions in the presence of time-delay and unknown terms due to model uncertainties and external disturbances. The one-sided Lipschitz condition is less conservatism with respect to well-known Lipschitz condition and includes a wider class of nonlinear functions. The goal of this paper is design of state feedback controller for the considered system which guarantees the robust and finite time stability of the state variables of the closed-loop system. For this purpose, based on the Lyapunov approach in stability analysis of time-delay systems; the appropriate Lyapunov-Krasovskii functional is selected and the sufficient conditions for robust finite-time stabilization are given based on linear matrix inequalities. The feedback gain is also calculated by solving the obtained matrix inequalities. Finally, numerical examples and simulations are given to show the performance of the proposed method. Additionally, it is shown that the proposed theorem has been less conservative and its functional range is wider.

Keywords: Finite-time stability, time-delay systems, one-sided Lipschitz systems, robust controller.

۱- مقدمه

دسته ی مهمی از سیستم های غیر خطی، سیستم هایی هستند که توابع غیرخطی آن در شرطی موسوم به شرط لپ شیتز به ازای یک ثابت مثبت صدق می کند. تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای چنین سیستم هایی موضوع بحث مراجع بسیاری بوده است [۱-۴]. از طرف دیگر در طراحی روتگرهای غیرخطی برای چنین سیستم هایی، شروط تضمین همگرایی عمدتاً برای سیستم های غیر خطی با ثوابت لپ شیتز کوچک برقرار می شود. برای رفع این محدودیت ها، اخیراً تعاریف جدیدی نظیر لپ شیتز یک طرفه^۱ و شبه لپ شیتز یک طرفه^۲ در مقالات معرفی شده اند [۵-۹].

قضایای لیاپانوف به الگوی مجانبی سیستم ها در یک فاصله ی زمانی نامحدود توجه می کند، در حالی که در بسیاری از سیستم های عملی، بازه عملکرد و مطالعه سیستم محدود است و این ضرورت طرح مباحث پایداری و زمان ناگزیری سیستم در یک بازه زمانی محدود را می طلبد [۱۰-۱۳]. از سوی دیگر در مدل سازی سیستم های دینامیکی، ترم های نامعلومی ناشی از اغتشاشات خارجی و یا عدم قطبیت های مدل (شامل عدم قطعیت های پارامتری و یا ترم های نایقینی ناشی از ساده سازی مدل) ظاهر می شود که اگر در روند طراحی کنترل کننده لحاظ نشوند، کنترل کننده حاصل از کارایی مناسبی در عمل برخوردار نبوده و کارایی مقاومی را دارا نیست [۱۴، ۱۵]. پایداری زمان محدود مقاوم سیستم های غیر خطی لپ شیتز مورد توجه محققان بسیاری بوده است [۱۶-۲۱]. اخیراً طراحی کنترل کننده زمان محدود مقاوم برای سیستم های لپ شیتز یک طرفه نیز مورد مطالعه محققان قرار گرفته است [۲۲، ۲۳].

یکی دیگر از عوامل مهمی که می تواند در سیستم های دینامیکی وجود داشته باشد و باعث عملکرد نامطلوب سیستم ها شود، تأخیر است. تأخیر در سیستم های عملی مختلفی مانند فرآیندهای شیمیایی، بیولوژیکی، اقتصادی، مکانیکی و غیره مشاهده می شود [۲۴-۲۷]. همانند سیستم های بدون تأخیر، طراحی کنترل کننده زمان محدود برای سیستم های تأخیری نیز مورد توجه محققان واقع شده است [۲۸-۳۱]. در مورد سیستم های غیرخطی لپ شیتز یک طرفه تأخیری، مراجع [۳۲-۳۴] به طراحی روتگرهای زمان محدود برای این سیستم ها پرداخته اند. براساس آخرین تحقیقات نویسندگان این مقاله، طراحی کنترل کننده زمان محدود برای سیستم های تأخیری لپ شیتز یک طرفه هنوز صورت پذیرفته است. مقاله حاضر به مطالعه این موضوع می پردازد.

در این مقاله، پایداری سازی زمان محدود مقاوم سیستم های غیرخطی لپ شیتز یک طرفه تأخیری مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور، کنترل کننده فیدبک حالت به نحوی طراحی می گردد که سیستم حلقه بسته علاوه بر پایداری زمان محدود، عملکرد مقاومی در برابر

عدم قطعیت های مدل و اغتشاشات خارجی داشته باشد. اغتشاشات خارجی، سیگنالهای متغیر با زمان نامعلوم ولی با انرژی محدود فرض شده اند. جهت طراحی بهره فیدبک حالت، قضایای ارائه گردیده است. در این قضایا شروط کافی جهت پایداری سازی زمان محدود مقاوم در قالب نامساوی های ماتریسی ارائه شده است. سپس این شروط بر اساس LMI بیان شده اند که در صورت حل پذیری آنها، بهره فیدبک حالت محاسبه می گردد. در روند اثبات ارائه شده، تابع لیاپانوف- کراسوفسکی مناسب انتخاب و بر اساس آن نامساوی های ماتریسی استخراج شده که برقراری آنها منجر به تحقق هدف کنترلی مساله می گردد. همچنین شبیه سازی هایی ارائه گردیده و با مقایسه ای که صورت پذیرفته کارایی مناسب و محافظه کاری کمتری که رویکرد ارائه شده در این مقاله دارد، نشان داده شده است.

در ادامه مقاله، تعاریف اولیه و توصیف سیستم در بخش ۲ ارائه می شود. در بخش ۳ روند طراحی کنترل کننده فیدبک حالت زمان محدود با جزئیات مورد بحث و بررسی قرار می گیرد و قضایای مربوطه ارائه می شود. در بخش ۴ نتایج بدست آمده از بخش ۲ جهت پردازش کامپیوتری بازنویسی می گردد. به منظور نشان دادن کارایی روش مطرح شده، مثال ها و شبیه سازی هایی در بخش ۵ ارائه گردیده است. در پایان نتیجه گیری مقاله در بخش ۶ آورده شده است.

۲- تعاریف اولیه و توصیف سیستم

در این بخش ابتدا تعاریف پایه ذکر می گردد. سپس به توصیف سیستم و تبیین هدف کنترلی مقاله پرداخته می شود.

۲-۱- تعاریف اولیه

تعریف ۱ [۳۵]: تابع غیرخطی $f(x)$ را لپ شیتز بر روی ناحیه D (ناحیه D شامل مبدا بوده و $D \subseteq R^n$ است) گویند اگر ثابت $l > 0$ (ثابت لپ شیتز) وجود داشته باشد به نحوی که به ازای $\forall x_1, x_2 \in D$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq l \|x_1 - x_2\| \quad (1)$$

تعریف ۲ [۳۶]: تابع غیرخطی $f(x)$ را لپ شیتز یک طرفه گویند اگر برای $\forall x_1, x_2 \in D$ ، ثابت حقیقی $\rho \in R$ (ناشانگر مجموعه اعداد حقیقی) وجود داشته باشد به نحوی که:

$$(f(x_1) - f(x_2))^T (x_1 - x_2) \leq \rho (x_1 - x_2)^T (x_1 - x_2) \quad (2)$$

که در آن ρ ثابت لپ شیتز یک طرفه بوده و می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

تعریف ۳ [۳۶]: تابع غیرخطی $f(x)$ را دارای حد داخلی مربعی^۳ بر روی D گویند اگر برای $\forall x_1, x_2 \in D$ ثوابت $\sigma, \varphi \in R$ وجود داشته باشد به نحوی که:

^۱ One-sided Lipschitz^۲ Quasi one-sided Lipschitz^۳ Quadratically inner-bounded

۲-۲- تعریف مساله و فرضیات

سیستم غیرخطی دارای ترم های نایقینی و تأخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + Bu(t) \\ \quad + [G + \Delta G(t)]w(t) + f(x) \\ \quad + [A_\tau + \Delta A_\tau(t)]x(t - \tau) \\ x(t) = \sigma(t), \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (۶)$$

که در این سیستم $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $x(t - \tau) \in R^n$ بردار حالت با تأخیر زمانی، $u(t) \in R^p$ بردار ورودی، $w(t) \in L_2^q$ عوامل اغتشاشی خارجی با انرژی محدود، $\sigma(t) \in L_2[-\tau, 0]$ بردار توابع اولیه، $f: R^n \times R^p \rightarrow R^n$ تابع برداری غیر خطی است ($f(0) = 0$). همچنین ماتریس های A, B, G, C و A_τ ماتریس های حقیقی و ثابت با ابعاد مناسب هستند. $\Delta A(t), \Delta G(t)$ و $\Delta A_\tau(t)$ ماتریس های ناشناخته و متغیر با زمان هستند. τ تأخیر زمانی و ثابت است. همچنین فرض شده است که تمام متغیرهای حالت بدون اختلال در دسترس می باشند. هدف طراحی قانون کنترل فیدبک حالت $u(t) = Kx(t)$ به نحوی است که سیستم حلقه بسته زیر در حضور عوامل اغتشاشی $w(t)$ و ترم های نایقینی سیستم، پایداری حدی زمان محدود (FTB) باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A(t) + BK]x + [G + \Delta G(t)]w(t) \\ \quad + f(x) + [A_\tau + \Delta A_\tau(t)]x(t - \tau) \\ x(t) = \sigma(t), \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (۷)$$

فرض ۱ [۳۹]: ماتریس های نایقینی $\Delta A(t), \Delta G(t)$ و $\Delta A_\tau(t)$ را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} \Delta A(t) = M_1 S(t) H_1 \\ \Delta G(t) = M_1 S(t) H_2 \\ \Delta A_\tau(t) = M_1 S(t) H_3 \end{cases} \quad (۸)$$

که در آن ماتریس های M_1, H_1, H_2, H_3 ماتریس های ثابت حقیقی و معلوم هستند و $S(t)$ یک تابع ماتریسی ناشناخته و متغیر با زمان است که در رابطه ی زیر صادق است:

$$S^T(t)S(t) \leq I, \quad \forall t \geq 0 \quad (۹)$$

فرض ۲: تابع غیر خطی $f(x)$ دارای شروط لپ شیتز یک طرفه و حداخلی مربعی می باشد و سیستم (۷) شروط یکتایی پاسخ را دارد [۳۸].

۳- تعاریف اولیه و توصیف سیستم

در این قسمت به طراحی کنترل کننده فیدبک حالت زمان محدود مقاوم برای سیستم های غیر خطی لپ شیتز یک طرفه همراه با عامل تأخیر پرداخته می شود. قضیه ای در این بخش ارائه و اثبات می گردند که مهمترین نوآوری های این مقاله محسوب می شوند. قضیه ی زیر شرایط

$$\begin{aligned} (f(x_1) - f(x_2))^T (f(x_1) - f(x_2)) &\leq \sigma (x_1 - x_2)^T (x_1 - x_2) \\ &+ \varphi (x_1 - x_2)^T (f(x_1) - f(x_2)) \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن σ, φ می تواند یک ثابت مثبت، منفی و یا صفر باشد. براساس تعریف فوق توابع دارای حد داخلی مربعی به ازای $\varphi = 0$ و ثابت $\sigma > 0$ ، لپ شیتز هستند لذا توابع غیرخطی لپ شیتز دارای حد داخلی مربعی نیز هستند ولی عکس آن صادق نیست. شکل (۱) وضعیت توابع غیرخطی لپ شیتز، لپ شیتز یک طرفه و توابع دارای حداخلی مربعی را نسبت به یکدیگر نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود، سیستم های غیرخطی لپ شیتز، دسته ای خاصی از کلاس وسیع تر سیستم های غیرخطی لپ شیتز یک طرفه می باشد. ثابت لپ شیتز یک طرفه می تواند هر عدد حقیقی باشد در حالی که ثابت لپ شیتز مثبت می باشد. از مزایای لپ شیتز یک طرفه این است که معمولاً ثابت لپ شیتز یک طرفه نسبت به ثابت لپ شیتز کوچکتر است که این امر باعث می شود که اثرات توابع غیر خطی را نسبت به شرط لپ شیتز بیشتر کاهش دهد [۳۷]. لازم به ذکر است که شرط لپ شیتز صرفاً شرط کافی جهت یکتایی پاسخ است و شروط یکتایی پاسخ در غیاب شرط لپ شیتز نیز در مراجع بررسی قرار گرفته است [۳۸]. لذا سیستم دینامیکی با توابع غیرخطی لپ شیتز یک طرفه نیز می تواند در شروط یکتایی پاسخ صدق نمایند.



شکل ۱: توابع لپ شیتز، لپ شیتز یک طرفه و حد داخلی مربعی

تعریف ۴ [۳۹]: نرم وزن یافته بردار $x(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|x(t)\|_{\bar{R}} = x(t)^T \bar{R} x(t) \quad (۴)$$

که در آن \bar{R} یک ماتریس مثبت معین است. اگر $\bar{R} = I$ باشد آنگاه $\|x(t)\|_{\bar{R}} = \|x(t)\|_2^2 = x(t)^T x(t)$ است. تعریف فوق برای نرم تمامی خصوصیات اپراتور نرم را داراست.

تعریف ۵ [۴۰]: سیستم غیر خطی $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), w(t), t)$ که در آن $x(t)$ بردار حالت، $x(t - \tau)$ بردار حالت با تأخیر زمانی و $w(t)$ سیگنال اغتشاش خارجی نامعلوم ولی با انرژی محدود ($\delta > 0$ حد بالای انرژی سیگنال اغتشاشی و یک عدد معلوم است $\int_0^t w(t)^T w(t) dt \leq \delta, \delta > 0$ را در نظر بگیرید، سیستم فوق نسبت به پارامترهای $(c_1, c_2, t_f, \delta, \bar{R})$ دارای حد زمانی محدود (FTB) است اگر $0 < c_1 < c_2$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\begin{aligned} x(t_0)^T \bar{R} x(t_0) \leq c_1 &\Rightarrow x^T(t) \bar{R} x(t) < c_2, \\ \forall t_0 \in [-\tau, 0], \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن $\tau > 0$ تأخیر زمانی و مقداری ثابت است.

کافی را برای اینکه سیستم حلقه بسته ی (۷) دارای ویژگی *FTB* باشد را ارائه می دهد:

تابع J_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J_1 = \dot{V}[x(t)] - \alpha V[x(t)] - \alpha w^T(t)w(t) + \alpha \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \quad (14)$$

با جایگذاری $V[x(t)]$ و $\dot{V}[x(t)]$ در J_1 ، عبارت زیر حاصل می گردد:

$$\begin{aligned} J_1 = & x^T(t)[A + \Delta A(t) + BK]^T Px(t) \\ & + w^T(t)[G + \Delta G(t)]^T Px(t) + f^T(x)Px(t) \\ & + x^T(t-\tau)[A_\tau + \Delta A_\tau(t)]^T Px(t) \\ & + x^T(t)P[A + \Delta A(t) + BK]x(t) \\ & + x^T(t)P[G + \Delta G(t)]w(t) + x^T(t)Pf(x) \\ & + x^T(t)P[A_\tau + \Delta A_\tau(t)]x(t-\tau) + x^T(t)Qx(t) \\ & - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) - \alpha x^T(t)Px(t) \\ & - \alpha \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta - \alpha w^T(t)w(t) \\ & + \alpha \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \end{aligned}$$

عبارت فوق را می توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$J_1 = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_{55} & P & \Sigma_{33} & \Sigma_{44} \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} \begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$= \xi^T(t)\Gamma_1\xi$$

که در آن

$$\Sigma_{55} = [A + \Delta A(t) + BK]^T P + P[A + \Delta A(t) + BK] + Q - \alpha P \quad (16)$$

از آنجایی که تابع $f(x)$ دارای شروط لیب شیتز یک طرفه و حد داخلی مربعی است لذا با در نظر گرفتن تعریف (۲) به ازای $x_1(t) = x(t)$ و $x_2(t) = 0$ ضرب طرفین رابطه ی (۲) در $\varepsilon_1 > 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 f^T(x)x(t) - \varepsilon_1 \rho x^T(t)x(t) & \leq 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_1 \rho x^T(t)x(t) - \frac{\varepsilon_1}{2} f^T(x)x(t) - \frac{\varepsilon_1}{2} x^T(t)f(x) & \geq 0 \end{aligned}$$

نامساوی فوق به صورت نامساوی ماتریسی زیر نیز قابل نمایش است:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \rho & -\frac{\varepsilon_1}{2} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma_2} \begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$= \xi^T(t)\Gamma_2\xi(t) \geq 0$$

به طریق مشابه برای اعمال شرط حد داخلی مربعی بر روی تابع $f(x)$ با در نظر گرفتن تعریف (۳) به ازای $x_1(t) = x(t)$ و $x_2(t) = 0$ و ضرب طرفین رابطه ی (۳) در $\varepsilon_2 > 0$ داریم:

قضیه ۱: سیستم حلقه بسته ی (۷) با در نظر گرفتن پارامترهای $(c_1, c_2, t_f, \delta, \bar{R})$ است اگر زوج (A, B) کنترل پذیر باشند و ثوابت مثبت $(\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ و ماتریس های مقارن و مثبت معین P و Q وجود داشته باشند به نحوی که شروط زیر برقرار باشد:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} & \Sigma_{33} & \Sigma_{44} \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} = & [A + \Delta A(t) + BK]^T P + P[A + \Delta A(t) + BK] \\ & + Q - \alpha P + \varepsilon_1 \rho I + \varepsilon_2 \sigma I \\ \Sigma_{22} = & P - \frac{\varepsilon_1}{2} I + \frac{\varepsilon_2}{2} \phi I, \\ \Sigma_{33} = & P[G + \Delta G(t)], \\ \Sigma_{44} = & P[A_\tau + \Delta A_\tau(t)] \end{aligned}$$

و همچنین

$$\beta_2 c_1 + \beta_3 \tau c_1 + \delta \alpha \leq c_2 \beta_1 e^{-\alpha t_f} \quad (11)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \beta_1 = & \lambda_{\min}(\bar{P}), \beta_2 = \lambda_{\max}(\bar{P}), \beta_3 = \lambda_{\max}(\bar{Q}) \\ \bar{P} = & \bar{R}^{-\frac{1}{2}} P \bar{R}^{-\frac{1}{2}}, \\ \bar{Q} = & \bar{R}^{-\frac{1}{2}} Q \bar{R}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

اثبات:

تابع لیاپانوف - کراسوفسکی زیر را در نظر بگیرید:

$$V[x(t)] = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \quad (13)$$

با مشتق گیری از تابع فوق در راستای سیستم حلقه بسته ی (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}[x(t)] = & \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) \\ & - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \\ = & x^T(t)[A + \Delta A(t) + BK]^T Px(t) \\ & + w^T(t)[G + \Delta G(t)]^T Px(t) + f^T(x)Px(t) \\ & + x^T(t-\tau)[A_\tau + \Delta A_\tau(t)]^T Px(t) \\ & + x^T(t)P[A + \Delta A(t) + BK]x(t) \\ & + x^T(t)P[G + \Delta G(t)]w(t) \\ & + x^T(t)Pf(x) + x^T(t)P[A_\tau + \Delta A_\tau(t)]x(t-\tau) \\ & + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \end{aligned}$$

با تعریف $\tilde{P} = \bar{R}^{-\frac{1}{2}} P \bar{R}^{-\frac{1}{2}}, \tilde{Q} = \bar{R}^{-\frac{1}{2}} Q \bar{R}^{-\frac{1}{2}}$ و جایگذاری در رابطه ی (۲۳) خواهیم داشت:

$$V[x(t)] \leq e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{P}) x^T(0) \bar{R} x(0) + e^{\alpha t} \int_{-\tau}^0 \lambda_{\max}(\tilde{Q}) x^T(\theta) \bar{R} x(\theta) d\theta + \alpha e^{\alpha t} \delta \quad (24)$$

$$\leq e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{P}) c_1 + e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{Q}) \tau c_1 + \alpha e^{\alpha t} \delta$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۱۳) داریم:

$$V[x(t)] = x^T(t) P x(t) + \int_{-\tau}^t x^T(\theta) Q x(\theta) d\theta \geq x^T(t) P x(t) \geq \lambda_{\min}(\tilde{P}) x^T(t) \bar{R} x(t) \quad (25)$$

از نامساوی های (۲۴) و (۲۵) نتیجه می شود:

$$\lambda_{\min}(\tilde{P}) x^T(t) \bar{R} x(t) \leq V[x(t)] \leq e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{P}) c_1 + e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{Q}) \tau c_1 + \delta e^{\alpha t} \alpha \quad (26)$$

چون در شرط زمان محدود $x^T(t) \bar{R} x(t) < c_2$ است بنابراین از نامساوی (۲۶) می توان نتیجه گرفت که:

$$x^T(t) \bar{R} x(t) \leq \frac{e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{P}) c_1 + e^{\alpha t} \lambda_{\max}(\tilde{Q}) \tau c_1 + \delta e^{\alpha t} \alpha}{\lambda_{\min}(\tilde{P})} \leq c_2 \quad (27)$$

از طرفی با فرض اینکه $0 < \tilde{Q} < \beta_3 I, \beta_1 I < \tilde{P} < \beta_2 I$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\beta_2 c_1 + \beta_3 \tau c_1 + \delta \alpha \leq c_2 \beta_1 e^{-\alpha t} \quad (28)$$

لذا شرط (۱۱) حاصل شد.

۴- تبدیل شروط قضیه ی (۱) به LMI:

شروط قضیه ی (۱) به صورت استاندارد LMI نیستند چون ترم های غیر خطی و متغیر با زمان در آن ها وجود دارد و حل آن ها دشوار است. برای تبدیل نامساوی های قضیه ی (۱) به LMI از دو لم زیر کمک گرفته می شود.

لم ۱ [۴۰]: برای دو ماتریس حقیقی M, N با ابعاد مناسب و هر ماتریس $S(t)$ که رابطه ی $S^T(t) S(t) \leq I$ را برآورده کند، اسکالر $\mu > 0$ وجود دارد به نحوی که:

$$MS(t)N + [MS(t)N]^T \leq \mu^{-1} M M^T + \mu N^T N$$

لم ۲ [۴۰]: برای ماتریس $W = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix}$ که در آن Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} ماتریس هایی با ابعاد مناسب باشند، شروط زیر با هم معادل اند:

- (i) $W < 0$
- (ii) $Z_{11} < 0, Z_{22} - Z_{12}^T Z_{11}^{-1} Z_{12} < 0$
- (iii) $Z_{22} < 0, Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{12}^T < 0$

$$f^T(x) f(x) \leq \sigma x^T(t) x(t) + \varphi x^T(t) f(x) \Rightarrow \varepsilon_2 \sigma x^T(t) x(t) + \frac{\varepsilon_2}{2} \varphi x^T(t) f(x) + \frac{\varepsilon_2}{2} \varphi f^T(x) x(t) - \varepsilon_2 f^T(x) f(x) \geq 0$$

نامساوی فوق به صورت نامساوی ماتریسی زیر نیز قابل نمایش است:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \sigma & \frac{\varepsilon_2}{2} \varphi & 0 & 0 \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \leq \xi^T(t) \Gamma_3 \xi(t) \geq 0 \quad (18)$$

از نامساوی های ماتریسی (۱۵)، (۱۷) و (۱۸) نتیجه زیر حاصل می گردد:

$$J_1 = \xi^T(t) \Gamma_1 \xi(t) \leq \xi^T(t) \Gamma_1 \xi(t) + \xi^T(t) \Gamma_2 \xi(t) + \xi^T(t) \Gamma_3 \xi(t) = \xi^T(t) (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) \xi(t)$$

در ادامه نشان داده می شود که منفی بودن J_1 منجر به تحقق شرط پایداری زمان محدود برای سیستم حلقه بسته (۷) می گردد. برای اینکه $J_1 < 0$ باشد باید ماتریس $(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)$ منفی معین گردد.

$$\Lambda = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} & \Sigma_{33} & \Sigma_{44} \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

لذا شرط (۱۰) حاصل شد. از طرفی با در نظر گرفتن عبارت (۱۴) و مثبت بودن عبارت انتگرالی $\alpha \int_{-\tau}^t x^T(\theta) Q x(\theta) d\theta$ و همچنین منفی شدن J_1 نتیجه می شود که باید عبارت $\dot{V}[x(t)] - \alpha V[x(t)] - \alpha w^T(t) w(t)$ منفی باشد پس:

$$J_2 = \dot{V}[x(t)] - \alpha V[x(t)] - \alpha w^T(t) w(t) < 0 \quad (19)$$

با ضرب طرفین نامساوی (۱۹) در $e^{-\alpha t}$ داریم:

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} V[x(t)]) < \alpha e^{-\alpha t} w^T(t) w(t) \quad (20)$$

با انتگرال گیری از عبارت فوق در بازه زمانی 0 تا t خواهیم داشت:

$$e^{-\alpha t} V[x(t)] - V[x(0)] < \alpha \int_0^t e^{-\alpha s} w^T(s) w(s) ds \Rightarrow V[x(t)] < e^{\alpha t} V[x(0)] + \alpha e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} w^T(s) w(s) ds \quad (21)$$

از طرف دیگر از رابطه ی (۱۳) به ازای $t=0$ عبارت زیر نتیجه می شود:

$$V[x(0)] = x^T(0) P x(0) + \int_{-\tau}^0 x^T(\theta) Q x(\theta) d\theta \quad (22)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه ی (۲۲) در نامساوی (۲۱) می توان نوشت:

$$V[x(t)] < e^{\alpha t} x^T(0) P x(0) + e^{\alpha t} \int_{-\tau}^0 x^T(\theta) Q x(\theta) d\theta + \alpha e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} w^T(s) w(s) ds \quad (23)$$

$$\Lambda < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau & \Psi_3 & PM_1 \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Psi_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\mu_1 I \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \mu_1 H_1^T & PM_1 & 0 & PM_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 H_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 H_3^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu_3 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu_3 I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= [A+BK]^T P + P[A+BK] + Q - \alpha P \\ &= A^T P + PA + L + L^T + Q - \alpha P, \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $L = PBK$ و معلوم بودن پارامتر α ، نامساوی ماتریسی (۳۷) به LMI (۲۹) تبدیل می شود. از طرف دیگر نامساوی های (۳۰) و (۳۱) نیز به ازای ماتریس معلوم و مثبت معین \bar{R} ، LMI هستند. با استفاده از لم (۲) نامساوی (۳۲) را نیز می توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned} \beta_2 c_1 + \beta_3 \tau c_1 + \delta \alpha &\leq c_2 \beta_1 e^{-\alpha \tau} \\ \Rightarrow \delta \alpha - c_2 \beta_1 e^{-\alpha \tau} + \beta_2^T \beta_2 \beta_2^{-1} c_1 + \beta_3^T \beta_3 \beta_3^{-1} \tau c_1 &\leq 0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta \alpha - c_2 \beta_1 e^{-\alpha \tau} & \sqrt{c_1} \beta_2 & \sqrt{c_1 \tau} \beta_3 \\ * & -\beta_2 & 0 \\ * & * & -\beta_3 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (38)$$

لذا شرط (۳۲) بر روی نامساوی مذکور حاصل شد.

۵- مثال و شبیه سازی

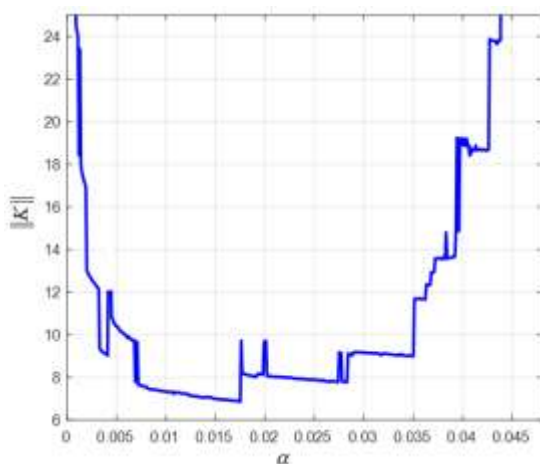
مثال ۱: فرض کنید سیستم دینامیکی (۶) دارای مقادیر زیر است:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &+ \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix}^T < 0 \end{aligned}$$

با استفاده از لم (۱) نامساوی ماتریسی فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} \\ &+ \mu_1^{-1} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \frac{\mu_1 [H_1 \ 0 \ 0 \ 0]^T [H_1 \ 0 \ 0 \ 0]}{\mu_1^{-1} [\mu_1 H_1 \ 0 \ 0 \ 0]^T [\mu_1 H_1 \ 0 \ 0 \ 0]} \\ &+ \mu_2^{-1} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \frac{\mu_2 [0 \ 0 \ H_2 \ 0]^T [0 \ 0 \ H_2 \ 0]}{\mu_2^{-1} [0 \ 0 \ \mu_2 H_2 \ 0]^T [0 \ 0 \ \mu_2 H_2 \ 0]} \\ &+ \mu_3^{-1} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \frac{\mu_3 [0 \ 0 \ 0 \ H_3]^T [0 \ 0 \ 0 \ H_3]}{\mu_3^{-1} [0 \ 0 \ 0 \ \mu_3 H_3]^T [0 \ 0 \ 0 \ \mu_3 H_3]} < 0 \end{aligned} \quad (36)$$

با اعمال لم (۲) بر روی نامساوی ماتریسی (۳۶) خواهیم داشت:

شکل ۳: نمودار نرم K بر حسب α برای تعیین بهترین

با در نظر گرفتن $\alpha = 0.0153$ و حل LMI های (۲۹)–(۳۲) نتایج زیر بدست می آید:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4129 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.4130 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1236 & 0.0017 \\ 0.0017 & 0.1231 \end{bmatrix},$$

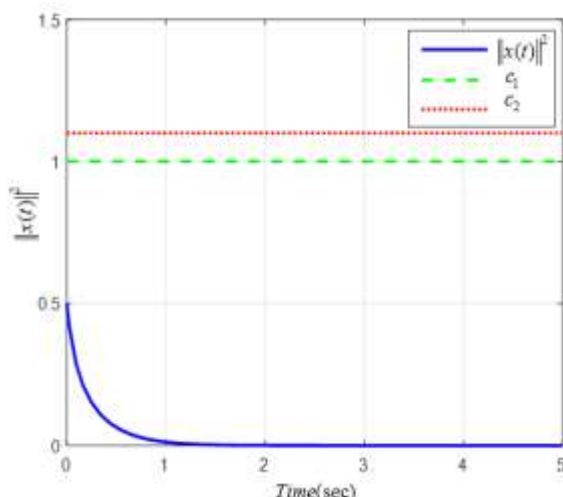
$$L = \begin{bmatrix} -3.4775 & -1.5904 \\ -1.5904 & -1.8300 \end{bmatrix}, \mu_1 = 0.3895,$$

$$\mu_2 = 0.0733, \mu_3 = 0.5243, \beta_1 = 0.4099,$$

$$\beta_2 = 0.4162, \beta_3 = 0.1908, \varepsilon_1 = 0.8376,$$

$$\varepsilon_2 = 0.0118, K = \begin{bmatrix} -5.4496 & -4.1524 \end{bmatrix}$$

شکل ۴ پاسخ مربع نرم بردار حالت را در سیستم حلقه بسته نشان می دهد. همانطور که مشاهده می گردد سیستم حلقه بسته ویژگی پایداری FTB نسبت به پارامترهای ذکر شده را دارا می باشد.

شکل ۴: پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه بسته

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\tau = 0.04, f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) - 2x_1 \\ -10x_2 + \sin(x_2) \end{bmatrix}$$

(۳۹)

$$w(t) = 0.5 \cos(3t) e^{-5t}, \Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.084 \\ 0.06 & 0.036 \end{bmatrix} \sin(t)$$

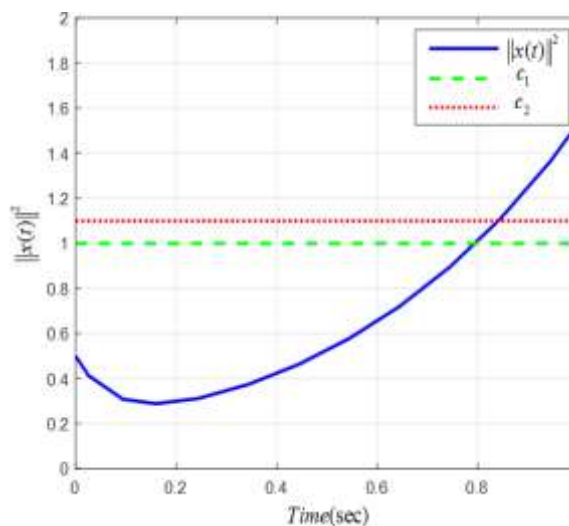
$$\Delta G(t) = \begin{bmatrix} 0.042 \\ 0.018 \end{bmatrix} \sin(t), \Delta A_\tau(t) = \begin{bmatrix} 0.014 & 0.014 \\ 0.006 & 0.006 \end{bmatrix} \sin(t)$$

با توجه به روابط (۸) مقادیر $M_1, H_1, H_2, H_3, S(t)$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$S(t) = 0.2 \sin(t), M_1 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}, H_1 = [1 \ 0.6], H_2 = [0.3],$$

$$H_3 = [0.1 \ 0.1]$$

جهت انجام شبیه سازی پارامترهای $c_1 = 1, c_2 = 1.1, t_f = 2, \bar{R} = I$ و همچنین تابع اولیه $\sigma(t) = [-0.5 \ 0.5]^T, -0.4 \leq t \leq 0$ ، پاسخ زمانی مربع نرم ۲ متغیر های حالت ها برای سیستم حلقه باز نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود سیستم حلقه باز پایدار FTB نیست.

شکل ۵: پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه باز

با توجه به ساختار $f(x)$ که در رابطه (۳۹) آمده است، مقدار $\sigma = 104, \rho = -1, \varphi = 0$ بدست می آید. با در نظر گرفتن α به عنوان پارامتر ثابت و مثبت و حل LMI های قضیه ی (۲) به ازای α های مختلف، محدوده ی مجاز α که در آن LMI ها برقرار باشند با نوشتن یک برنامه ساده کامپیوتری بدست می آید. برای مثال مورد بررسی، محدوده $0 < \alpha \leq 0.047$ بدست آمده است. با رسم نمودار α های مجاز بر حسب بهره K ملاحظه خواهد شد که به ازای α های خیلی کوچک بهره K بزرگ می شود که مطلوب نمی باشد بنابراین مطابق شکل (۳) $\alpha = 0.0153$ انتخاب شود که نرم بهره K مینیمم شود.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.2 \end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1.2 & 0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 1], M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}, M_2 = 0, \tau = 0.2$$

$$H_1 = [1.2 \ 0.6], H_2 = 0, H_3 = [0.7 \ 1],$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma(t) = [0.5 \ 0.2], S(t) = 0.2 \sin(t)$$

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.333 \sin(x_1(t)) \end{bmatrix}, w(t) = \frac{0.5 \sin(20t)}{1+t^2}$$

با توجه به ساختار $f(x)$ و روابط (۲) و (۳) مقادیر $\rho = \sigma = 0.333$ و $\varphi = 0$ می باشد. هدف طراحی کنترل کننده به منظور پایداری زمان محدود نسبت به پارامترهای $(c_1, c_2, t_f, \delta, \bar{R}) = (0.5 \ 1 \ 4 \ 0.5 \ \bar{R})$ می باشد. مراحل طی شده جهت بدست آوردن مقدار مطلوب پارامتر α همانند مثال قبل انجام پذیرفته و با استفاده از قضیه ۲ به ازای $\alpha = 0.02$ نتایج زیر از حل نامساوی های ماتریسی حاصل می شود:

$$P = \begin{bmatrix} 1.0837 & -0.0146 \\ -0.0146 & 1.0944 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -13.3425 & -6.5940 \\ -6.5940 & -8.8499 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.8743 & 0.2310 \\ 0.2310 & 1.9078 \end{bmatrix},$$

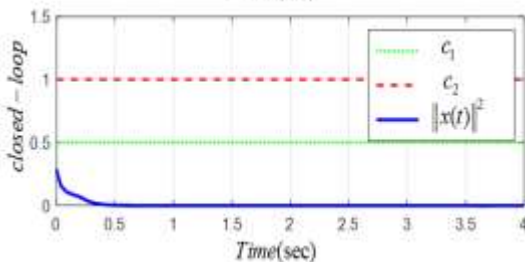
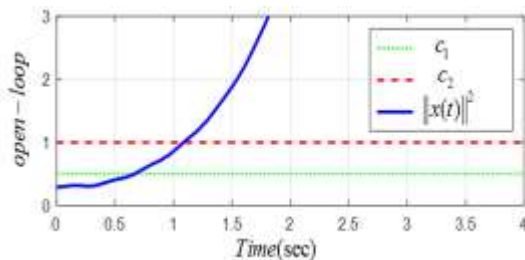
$$\mu_1 = 2.4621, \mu_2 = 3.8888, \mu_3 = 0.9338,$$

$$\beta_1 = 1.0048, \beta_2 = 1.2343, \beta_3 = 2.5685$$

$$\varepsilon_1 = 2.8506, \varepsilon_2 = 3.5197$$

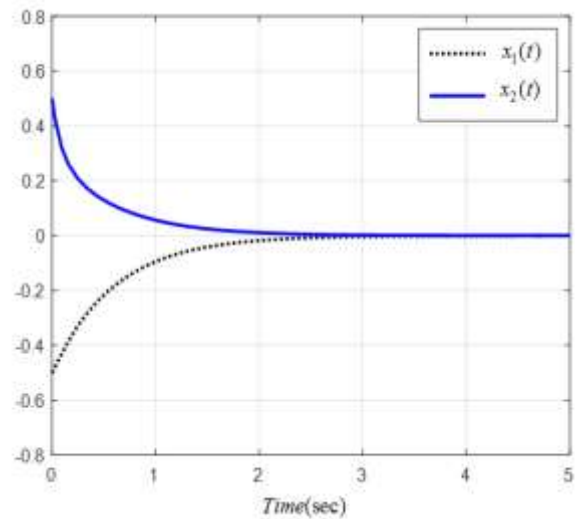
$$K = [-4.9550 \ -4.5063]$$

شکل ۷، پاسخ زمانی مربع نرم متغیرهای حالت را برای سیستم حلقه باز و حلقه بسته نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود سیستم حلقه باز ناپایدار بوده اما سیستم حلقه بسته پایدار FTB نسبت به پارامترهای ذکر شده می باشد.

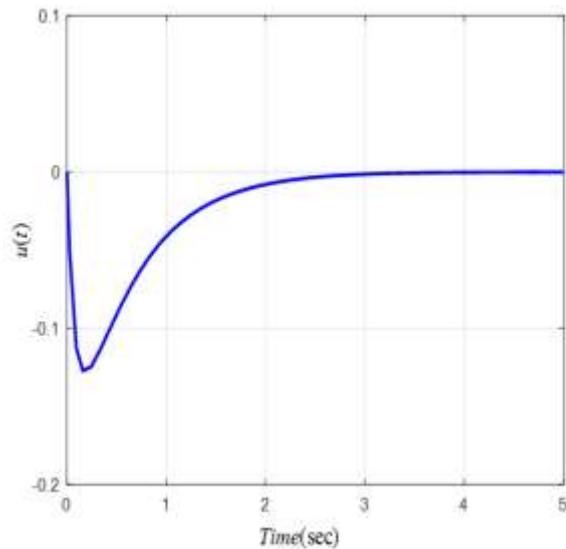


شکل ۷: پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه بسته و حلقه باز

پاسخ زمانی متغیرهای حالت در سیستم حلقه بسته و ورودی کنترلی به ترتیب در شکل های ۵ و ۶ آمده است:



شکل ۵: پاسخ زمانی متغیرهای حالت در سیستم حلقه بسته



شکل ۶: پاسخ زمانی ورودی کنترلی در سیستم حلقه بسته

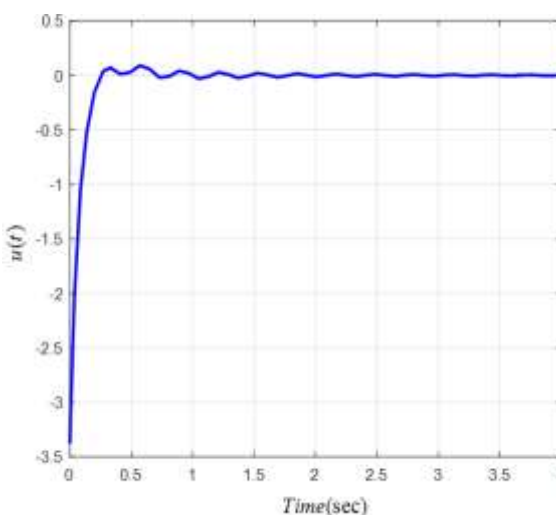
مثال ۲: در این مثال سیستم دیگری در نظر گرفته شده است تا کارایی روش مطرح شده مورد مقایسه قرار بگیرد. برای این منظور سیستم (۶) را به ازای مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر سیستم های لپ شیتز، سیستم های با توابع غیرخطی لپ شیتز یک طرفه را که کلاس وسیعتری از توابع غیرخطی را شامل می شود نیز پوشش می دهد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به مساله طراحی کنترل کننده زمان محدود مقاوم برای سیستم های غیر خطی لپ شیتز یک طرفه با تأخیر زمانی، ورودی اغتشاشی و پارامتر های ناپیینی متغیر با زمان پرداخته شد. در این مقاله با استفاده از رویکرد لیاپانوفی و با انتخاب تابع لیاپانوفی-کراسوفسکی مناسب، شرایط استخراج گردید که پایداری زمان محدود و مقاوم سیستم حلقه بسته را تضمین نماید. این شرایط به وسیله ی نامساوی های ماتریسی بیان گردید و سپس این نامساوی ها در قالب استاندارد نامساوی های ماتریسی خطی در آورده شد. از حل نامساوی های مذکور، بهره قانون کنترل فیدبک حالت جهت پایداری سازی زمان محدود و مقاوم برای سیستم تأخیری لپ شیتز یک طرفه بدست آمد. در آخر نیز شبیه سازی هایی برای نشان دادن درستی نتایج و صحت عملکرد روش پیشنهادی صورت پذیرفت

پاسخ زمانی ورودی کنترلی در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸: پاسخ زمانی ورودی کنترلی در سیستم حلقه بسته

حال به منظور مقایسه عملکرد روش پیشنهادی در این مقاله با مرجع [۲۸]، پایداری FTB نسبت به پارامترهای متفاوت ارائه شده در جدول ۱ و با ازای \bar{R} های یکسان مورد بررسی قرار گرفته است. همان طوری که از نتایج ذکر شده در جدول (۱) استنباط می گردد، قضیه مطرح شده در این مقاله بازه عملکردی وسیعتر و محافظه کاری کمتری نسبت به رویکرد ارائه شده در مرجع [۲۸] دارد. در واقع از آنجایی که بر طبق تعریف ۵ باید شرط $x^T(t)\bar{R}x(t) < c_2$ برای همه زمانهای $\forall t \in [0, t_f]$ برقرار باشد لذا هرچه مقدار t_f افزایش و مقدار c_2 کاهش یابد، شرایط دستیابی به پاسخ دشوارتر خواهد شد.

مرجع [۲۸] صرفاً به ازای t_f های کوچک و c_2 های نسبتاً بزرگ، پاسخ مناسب را خواهد داد، ولی رویکرد ارائه شده در این مقاله برای t_f های بزرگ و مقدار c_2 های کوچک نیز دارای پاسخ مناسب است و لذا محافظه کاری به مقدار چشمگیری کاهش یافته و روش مذکور ارزش عملیاتی بیشتری را دارد. از طرف دیگر رویکرد ارائه شده در مرجع [۲۸] برای سیستم های لپ شیتز مطرح شده است در صورتیکه

جدول ۱: مقایسه مرجع [۲۸] با رویکرد پیشنهادی

شماره	C_1	C_2	t_f	δ	رویکرد پیشنهادی	مرجع [۲۸]
۱	۰٫۵	۰٫۸	۱	۰٫۵	$K = [-1.9907 \quad -2.1769], \alpha = 0.02$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۲	۰٫۵	۲٫۹	۱	۰٫۵	$K = [-2.0215 \quad -2.1275], \alpha = 0.04$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۳	۰٫۵	۳	۱	۰٫۵	$K = [-2.0440 \quad -2.1496], \alpha = 0.04$	$K = [-3.7182 \quad -4.7818] \times 10^4, \alpha = 0.68$
۴	۰٫۵	۵۰	۱	۰٫۵	$K = [-1.5402 \quad -2.1775], \alpha = 0.05$	$K = [-10.2382 \quad -12.1326], \alpha = 1$
۵	۰٫۵	۸	۲	۰٫۵	$K = [-7.2741 \quad -6.2407], \alpha = 0.01$	$K = [-346.1516 \quad -424.8733], \alpha = 0.65$
۶	۰٫۵	۸	۳	۰٫۵	$K = [-7.2429 \quad -6.2176], \alpha = 0.01$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۷	۰٫۵	۸	۲۰	۰٫۵	$K = [-6.7320 \quad -5.8377], \alpha = 0.02$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۸	۰٫۵	۸	۲۷۰	۰٫۵	$K = [-9.8494 \quad -11.9445], \alpha = 0.01$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد

مراجع

- [13] F. Amato, M. Ariola, and P. Dorato, "Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances," *Automatica*, vol. 37, no. 9, pp. 1459-1463, 2001.
- [14] H. Chenarani, and T. Binazadeh, "Flexible structure control of unmatched uncertain nonlinear systems via passivity-based sliding mode technique," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, vol. 41, no. 1, pp. 1-11, 2017.
- [15] Q. Guo, J. Yin, T. Yu, and D. Jiang, "Saturated Adaptive Control of Electrohydraulic Actuator with Parametric Uncertainty and Load Disturbance," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017.
- [16] T. Binazadeh, and M. Shafiei, "A novel approach in the finite-time controller design," *Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 119-124, 2014.
- [17] A. Abooe, M. Moravej-Khorasani, and M. Haeri, "Global Finite Time Stabilization of a Class of Uncertain MIMO Nonlinear Systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 2, pp. 021007, 2016.
- [18] T. Binazadeh, "Finite-time tracker design for uncertain nonlinear fractional-order systems," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 11, no. 4, pp. 041028, 2016.
- [19] W. Xiang, and J. Xiao, " H_∞ finite-time control for switched nonlinear discrete-time systems with norm-bounded disturbance," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 2, pp. 331-352, 2011.
- [20] Y. Cao, W. Ren, D. W. Casbeer, and C. Schumacher, "Finite-time connectivity-preserving consensus of networked nonlinear agents with unknown Lipschitz terms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 6, pp. 1700-1705, 2016.
- [21] H. Gholami, and T. Binazadeh, "Design finite-time output feedback controller for nonlinear discrete-time systems with time-delay and exogenous disturbances," *Systems Science & Control Engineering*, vol. 6, no. 1, pp. 20-27, 2018.
- [22] Y. Huang, S. Fu, and Y. Shen, "Finite-time H_∞ control for one-sided Lipschitz systems with auxiliary matrices," *Neurocomputing*, vol. 194, pp. 207-217, 2016.
- [23] M. Benallouch, M. Boutayeb, and H. Trinh, " H_∞ Observer-Based Control for Discrete-Time One-Sided Lipschitz Systems with Unknown Inputs," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 52, no. 6, pp. 3751-3775, 2014.
- [24] م. ا. اسدینیا, and ط. بینازاده, "Stabilization of Time Varying Delay Singular Systems Subject to Actuator Saturation," *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*, vol. 47, no. 3, pp. 843-855, 2017.
- [25] Y. Chen, and W. X. Zheng, "Stability analysis of time-delay neural networks subject to stochastic
- [1] M. Rehan, K.-S. Hong, and S. S. Ge, "Stabilization and tracking control for a class of nonlinear systems," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 12, no. 3, pp. 1786-1796, 2011.
- [2] A. Zemouche, and M. Boutayeb, "On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 585-591, 2013.
- [3] H. K. Khalil, *Nonlinear control*: Prentice Hall, 2014.
- [4] S. Tong, B. Huo, and Y. Li, "Observer-based adaptive decentralized fuzzy fault-tolerant control of nonlinear large-scale systems with actuator failures," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 1, pp. 1-15, 2014.
- [5] W. Zhang, H.-S. Su, Y. Liang, and Z.-Z. Han, "Non-linear observer design for one-sided Lipschitz systems: an linear matrix inequality approach," *IET control theory & applications*, vol. 6, no. 9, pp. 1297-1303, 2012.
- [6] M. C. Nguyen, and H. Trinh, "Observer Design for One-Sided Lipschitz Discrete-Time Systems Subject to Delays and Unknown Inputs," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 54, no. 3, pp. 1585-1601, 2016.
- [7] J. Huang, W. Zhang, M. Shi, L. Chen, and L. Yu, " H_∞ observer design for singular one-sided Lur'e differential inclusion system," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, no. 8, pp. 3305-3321, 2017.
- [8] L. Li, Y. Yang, Y. Zhang, and S. X. Ding, "Fault estimation of one-sided Lipschitz and quasi-one-sided Lipschitz systems." pp. 2574-2579.
- [9] S. Xia, S. Ma, Z. Cai, and Z. Zhang, "Stochastic observer design for Markovian jump one-sided Lipschitz systems with partly unknown transition rates." pp. 1139-1144.
- [10] J. Wang, F. Wang, Z. Zhang, S. Li, and J. Rodríguez, "Design and Implementation of Disturbance Compensation-Based Enhanced Robust Finite Control Set Predictive Torque Control for Induction Motor Systems," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 13, no. 5, pp. 2645-2656, 2017.
- [11] Q. Meng, and Y. Shen, "Finite-time H_∞ control for linear continuous system with norm-bounded disturbance," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 4, pp. 1043-1049, 2009.
- [12] C. Martín, M. R. Arahal, F. Barrero, and M. J. Durán, "Five-phase induction motor rotor current observer for finite control set model predictive control of stator current," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 7, pp. 4527-4538, 2016.

- [33] M. C. Nguyen, and H. Trinh, "Unknown input observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems subject to time-delay," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 286, pp. 57-71, 2016.
- [34] Y. Dong, W. Liu, and S. Liang, "Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems with time-varying delay and uncertainties," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 11, pp. 1974-1998, 2017.
- [35] H. K. Khalil, "Nonlinear systems, 3rd," *New Jersey, Prentice Hall*, vol. 9, 2002.
- [36] J. Song, and S. He, "Robust finite-time H_∞ control for one-sided Lipschitz nonlinear systems via state feedback and output feedback," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 8, pp. 3250-3266, 2015.
- [37] R. Wu, W. Zhang, F. Song, Z. Wu, and W. Guo, "Observer-based stabilization of one-sided Lipschitz systems with application to flexible link manipulator," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7, no. 12, pp. 1687814015619555, 2015.
- [38] R. P. Agarwal, R. P. Agarwal, and V. Lakshmikantham, *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*: World Scientific, 1993.
- [39] M. Lacey, E. Sawyer, and I. Uriarte-Tuero, "A characterization of two weight norm inequalities for maximal singular integrals with one doubling measure," *Analysis & PDE*, vol. 5, no. 1, pp. 1-60, 2012.
- [40] J. Song, and S. He, "Finite-time H_∞ control for quasi-one-sided Lipschitz nonlinear systems," *Neurocomputing*, vol. 149, pp. 1433-1439, 2015.
- [26] Y. Chen, and W. X. Zheng, "Stability and L_2 performance analysis of stochastic delayed neural networks," *IEEE transactions on neural networks*, vol. 22, no. 10, pp. 1662-1668, 2011.
- [27] X. Wang, G. Zong, and H. Sun, "Asynchronous finite-time dynamic output feedback control for switched time-delay systems with non-linear disturbances," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 10, pp. 1142-1150, 2016.
- [28] J. Song, and S. He, "Finite-time robust passive control for a class of uncertain Lipschitz nonlinear systems with time-delays," *Neurocomputing*, vol. 159, pp. 275-281, 2015.
- [29] S. B. Stojanovic, D. L. Debeljkovic, and D. S. Antic, "Robust Finite-Time Stability and Stabilization of Linear Uncertain Time-Delay Systems," *Asian Journal of Control*, vol. 15, no. 5, pp. 1548-1554, 2013.
- [30] J. Cheng, H. Zhu, S. Zhong, Y. Zhang, and Y. Li, "Finite-time H_∞ control for a class of discrete-time Markovian jump systems with partly unknown time-varying transition probabilities subject to average dwell time switching," *International Journal of Systems Science*, vol. 46, no. 6, pp. 1080-1093, 2015.
- [31] G. Zong, R. Wang, W. Zheng, and L. Hou, "Finite-time H_∞ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 6, pp. 914-936, 2015.
- [32] M. C. Nguyen, and H. Trinh, "Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz time-delay systems subject to unknown inputs," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 10, pp. 1097-1105, 2016.