

رهیافتی نو برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکسبرداری

عبدالحمید بهجت پناه^۱، جعفر حیرانی نوباری^۲، مهدیه حسینقلی زاده آلاشتی^۳

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق-کنترل، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، 8700396@ee.kntu.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eed.kntu.ac.ir

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق-کنترل، گروه مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، mah.gholizadeh@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۸/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۱۲/۲۹)

چکیده: در این مقاله روشی جدید برای تعیین موقعیت و وضعیت شیء نسبت به دستگاه دوربین با استفاده از تصویر آن ارائه شده است. تصویر واقعی که از دوربین در اختیار است از نگاشتی غیرخطی بین جهان سه بعدی و تصویر دوبعدی حاصل می شود. برخی محققان با خطی فرض کردن این نگاشت تخمین موقعیت و وضعیت را ساده تر کردند ولی از کلیت مسأله کاسته و محدودیت هایی بر ابعاد شیء مورد نظر اعمال نمودند. استفاده از نگاشت غیرخطی و دستیابی به روابط هندسی برقرار بین شیء و تصویر آن اگر چه کاری چالش برانگیز و دشوار است ولی دقت کار را بالا برده و محدودیتی بر ابعاد شیء وارد نمی کند. حالتی که یک شیء در برابر دوربین قرار می گیرد بسته به نوع دوران و فاصله اش از محور اصلی دوربین تغییر می کند. در این مقاله برای تعیین شش مولفه موقعیت و وضعیت یک شیء با عکس برداری، دستگاه معادلات غیرخطی با ده معادله و پنج مجهول استخراج شده است. در حل دستگاه معادلات غیرخطی، انتخاب الگوریتمی مناسب که علاوه بر کمینه کردن خطا، زمان کمی نیاز داشته باشد، حائز اهمیت است. با توجه به اینکه در آزمایش عملی مقادیر دقیق نیستند الگوریتمی از نوع بهینه سازی پیشنهاد شده و راهکاری برای انتخاب حدس اولیه پیشنهاد می شود که هم همواره به پاسخ برسد و هم زمان حل مسأله را کاهش دهد. درستی معادلات استخراج شده با بدست آوردن شش مولفه ی موقعیت و وضعیت یک تئودولیت از روی تصاویر نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: تعیین موقعیت و وضعیت، مولفه های شیء، روابط حاکم بر دوربین، تعیین ماتریس دوران.

New Approach to Determine 6-DOF Position and Orientation of an Object Using its Image

Abdolhamid Bahjat Panah, Jafar Heyrani Nobari,
Mahdiah Hosseingholizadeh Alashti

Abstract: In this paper, a new method for determining the position and orientation of the object in respect to the camera coordinate using the image is presented. True picture of the camera is obtained by a nonlinear mapping between the three-dimensional world and two-dimensional image. Some researchers assumed linear mapping to make approximation of position and orientation easier, but restrictions were imposed on the object size. Also the use of nonlinear mapping and geometric relationships between object and its image is so challenging and difficult task, but increase the accuracy and do not raises the limit on the size of the object. The case in which an object is placed in front of the camera can become different according to the orientation type and its distance from the main axis of the camera. In this paper, to determine 6DOF position and orientation of an object using its image, a system of nonlinear equations with ten equations and 5 unknowns is extracted. In solving nonlinear equations, it is important to choose an appropriate algorithm to minimize the error and needs little time. With regard to the non-exact values in practical test, the kind of optimization algorithm is proposed and. Then a way for selecting initial guess is proposed to always have a solution and reduce the run time. Accuracy of extracted equations is shown by determining 6 DOF position and orientation of one theodolite.

Keywords: Position and orientation determining, object coordinates, camera mathematical and geometrical equation, determining orientation matrix.

فهرست علائم

f	فاصله ی کانونی عدسی یا دوربین	p	فاصله ی شیء تا عدسی دوربین
q	فاصله ی تصویر تا عدسی دوربین	$\vec{r}_{AB}$	مولفه های دوبعدی شیء AB نسبت به مرجع
$\vec{r}_{A'B'}$	مولفه های دوبعدی تصویر شیء AB نسبت به مرجع	x_{AB}	مولفه ی اول شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
y_{AB}	مولفه ی دوم شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص	z_{AB}	مولفه ی سوم شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
$x_{A'B'}$	مولفه ی اول تصویر شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص	$y_{A'B'}$	مولفه ی دوم تصویر شیء AB بیان شده در دستگاه مشخص
α	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور Z	β	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور Y
γ	زاویه دوران گذار راستگرد حول محور X	f_x	فاصله ی کانونی در راستای X
f_y	فاصله ی کانونی در راستای Y	l	طول شیء
l'	طول تصویر شیء قرار گرفته روی حساسه دوربین	c'	بردار واصل نقطه انتهایی تصویر شیء به عدسی دوربین
l''	طول شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین	d	فاصله ی صفحه ی موازی حساسه دوربین تا عدسی دوربین
x'	مولفه ی اول تصویر شیء ای با مولفه ی اول X	y'	مولفه ی دوم تصویر شیء ای با مولفه ی دوم Y
x''	مولفه ی اول شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین	y''	مولفه ی دوم شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین و به فاصله ی d از عدسی دوربین
Δx	فاصله ی نقطه ی ابتدایی شیء در راستای X تا نقطه ای به فاصله ی d از عدسی در راستای محور اصلی دوربین	Δy	فاصله ی نقطه ی ابتدایی شیء در راستای Y تا نقطه ای به فاصله ی d از عدسی در راستای محور اصلی دوربین
$\Delta x'$	فاصله ی نقطه ی ابتدایی تصویر در راستای X تا نقطه ای به فاصله ی f از عدسی در راستای محور اصلی دوربین	$\Delta y'$	فاصله ی نقطه ی ابتدایی تصویر در راستای Y تا نقطه ای به فاصله ی f از عدسی در راستای محور اصلی دوربین
$c-m$	بردار واصل نقطه انتهایی شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین به عدسی آن	c	بردار واصل نقطه انتهایی شیء به عدسی دوربین
x_e	اختلاف مولفه ی اول شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین	y_e	اختلاف مولفه ی دوم شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین
l_e	اختلاف طول شیء و شیء تصویر شده روی صفحه ای به موازات حساسه دوربین	Ψ	زاویه ی تصویر شیء با راستای X و همچنین زاویه شیء تصویر شده روی صفحه ی موازی حساسه با راستای X
C	ماتریس تبدیل بین دستگاه چسبیده به حساسه و دستگاه چسبیده به شیء	$\mathcal{E}_{1,2,3,4}$	چهارگان ها

با استفاده از این اطلاعات می توان شیء مشخصی را در Pose

مشخصی نمایش داد یا به عبارتی دیگر اشیاء مجازی را در دنیای واقعی نمایش داد. این همان معنای واقعیت افزوده است. همچنین در برخی موارد تنها اطلاعاتی که از یک شیء ثابت یا در حال حرکت در دسترس است عکس یا فیلم مربوط به آن است، به عنوان مثال پرنده ی در حال حرکت یا موشک در زمان های اولیه پس از پرتاب. تعیین موقعیت و وضعیت یک پرنده ی در حال حرکت به منظور شکار آن و تعیین موقعیت و وضعیت یک موشک برای تحلیل حرکت آن و مقایسه ی حرکت آن با آن چه از شبیه سازی انتظار می رفت، تنها از طریق عکس برداری و یا فیلم برداری امکان پذیر است. موضوعاتی از این دست اهمیت و کاربرد تعیین موقعیت و وضعیت با استفاده از عکس برداری را نشان می دهند.

۱- مقدمه

محاسبه ی موقعیت و وضعیت یک شیء^۱ (pose شیء) با استفاده از نقاط مشخصه ی روی آن، با دانستن وضعیت هندسی این نقاط یا دانستن مدل شیء و همچنین در دسترس بودن نقاط متناظر این نقاط مشخصه در تصویر گرفته شده از شیء یکی از موضوعات چالش برانگیز است که تا کنون برای محاسبه ی آن، روش های مختلفی که هر یک مزایا و معایب خاص خود را دارند ارائه شده است.

تعیین Pose فرآیند استخراج اطلاعات مربوط به موقعیت و وضعیت با استفاده از نقاط متناظر مدل یک شیء و تصویر بدست آمده با حسگر اپتیکی مانند دوربین است. Pose برای یک شیء موقعیت و وضعیت آن شیء می باشد که شش درجه آزادی (6DOF) دارد [۹].

¹ Computation of the Position and Orientation of an Object

کوچک تر از فاصله ی شیء تا دوربین باشد یا عمق شیء باید مقدار جزئی در اطراف یک صفحه تغییر کند.

در سال ۱۹۹۹ الگوریتمی با نام خانواده الگوریتم های جبری خطی، توسط کوآن^{۱۲} و لان^{۱۳} ارائه شد. این الگوریتم راهی جبری برای تخمین pose است. این روش یک دستگاه خطی تشکیل داده و سپس تجزیه مقادیر ویژه را به این معادلات اعمال می کند [۶].

با مطرح شدن مسائل تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با استفاده از تعداد نقاط مشخصی از شیء و نقاط متناظر آن در تصویر، محققان بسیاری در جهت یافتن بهترین پاسخ برای این مسائل تحت شرایط مختلف پرداختند. به عنوان مثال در سال ۲۰۰۱ هو^{۱۴} و همکارانش حلی برای مسأله ی چهارنقطه ای (P4P) و در همان سال وو^{۱۵} و هو حلی برای مسأله ی P5P ارائه کردند. در سال ۲۰۱۰ بوجانک^{۱۶} و همکارانش پاسخی کلی برای مسأله P4P برای دوربینی با فاصله ی کانونی نامشخص مطرح کردند [۱۳]. کار آن ها در حقیقت حل مقاوم دستگاهی از معادلات جبری است و از متغیرها و روش های خاصی برای حل این دستگاه استفاده نمودند. تفاوت کار آن ها با کسانی همچون ابیدی^{۱۷} و چندرا^{۱۸} [۱۴] در این است که نقاط فضایی انتخابی در روش آن ها دلخواه بوده و هیچ محدودیتی ندارد. پاسخ آن ها اگرچه پیچیده است ولی کاملاً کلی است.

در سال ۲۰۱۲ پانگ گو^{۱۹} روشی جدید برای مسأله P4P برای دوربینی که کالیبره نشده است ارائه کرد [۱۵]. در حقیقت این روش برای زمانی که از تنظیمات خودکار دوربین استفاده می کنیم و در هر فریم از فیلم این تنظیمات بسته به شرایط تغییر می کند مفید است. روشی که آن ها بکار بردند روش خاصی نبوده و روش جبری ساده است که با نگاه هندسی به مسأله و ایجاد مجدد برخی پارامترها توانسته است به پاسخ دست پیدا کند.

این مقاله در دسته ی مسائل P4P قرار می گیرد. شاید بتوان گفت تفاوت بسیار اساسی کار این مقاله با کارهایی که تاکنون ارائه شده است این می باشد که در اکثر آن ها روابطی که برای دوربین در نظر گرفته شده با استفاده از پارامترهای آن و به صورت روابطی ماتریسی است، ولی در این مقاله کلیه ی مراحل از ابتدا تا انتها هندسی بوده و روابط ماتریسی وجود ندارد. همچنین این روابط هندسی ارتقا پیدا کرده و برای کلیه ی خطوطی که از شیء می توان مشاهده کرد برقرار است. حل دستگاه معادلات غیرخطی که همان سینماتیک مسأله را شرح می دهد با روش های بهینه سازی انجام شده و با انتخاب درست شرایط اولیه و متغیرهای چهارگانه رسیدن به پاسخی درست تضمین شده است.

۲- تشکیل تصویر در دوربین روزنه دار

تصویر مسأله ی سه نقطه ای^۱ که همان تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با استفاده از سه نقطه ی مشخصه است، ابتدا توسط لاکروایکس^۲ در سال ۱۷۹۵ ارائه شد [۱]. ریاضی دان آلمانی، گرانرث^۳ برای نخستین بار در سال ۱۸۴۱ این مسأله را به صورت جبری حل کرد [۴]. برای نخستین بار در سال ۱۹۸۱ فیچر^۴ و بولز^۵ اصطلاح مسأله ی تصویر n نقطه ای را برای یافتن موقعیت و وضعیت یک شیء با n نقطه ی مشخصه ساختند [۳].

راحت ترین روش، برای نخستین بار در سال ۱۹۶۵ توسط رابرتز^۶ ارائه شد که شامل پیدا کردن درایه های ماتریس تصویر پرسپکتیو با حل دستگاه معادلات خطی است که این ماتریس در واقع نگاشتی بین نقاط مشخصه و تصاویرشان در دستگاه همگن است. یازده درایه ی مجهول با داشتن حداقل شش نقطه مشخصه از شیء و نقاط متناظرشان در تصویر بدست می آیند [۵]. روش مورد توجهی دیگر از میان روش های ارائه شده برای تعیین pose، روش ارائه شده توسط تی سائی^۷ در سال ۱۹۸۷، لوئه^۸ در سال ۱۹۸۵ و یوآن^۹ در سال ۱۹۸۹ است. روش ارائه شده توسط تی-سائی وقتی فاصله ی کانونی دوربین و مرکز تصویر نامشخص هستند بسیار مفید است. همچنین این روش برای زمانی که هفت تناظر داده شده است تخمین خوبی از pose می باشد [۷]. هنگامی که فاصله ی کانونی دوربین و مرکز تصویر از قبل کالیبره شده اند روش ارائه شده توسط یوآن و لوئه مفید خواهند بود [۸ و ۱۰]. با این وجود هر دو روش به روش نیوتن-رافسون وابسته اند که دو ایراد مهم را بر آن وارد می کند. نخستین ایراد این است که یک pose تخمینی باید برای شروع روند تکراری تخمین pose وجود داشته باشد و دومین ایراد این است که در هر تکرار شبه-معکوس ماتریس ژاکوبین با ابعاد $2N \times 6$ (N تعداد نقاط مشخصه) در روش Lowe یا $N \times 6$ در روش Yuan باید پیدا شود که از لحاظ محاسباتی بسیار هزینه بر است.

در سال ۱۹۹۲ الگوریتم POSIT توسط دنیل دمتون^{۱۰} و لاری دیویس^{۱۱} ارائه شد [۲]. عنوان مقاله ی آن ها که بسیار جسورانه بود "تعیین Pose شیء بر مبنای مدل در ۲۵ خط برنامه ی Mathematica" بود. POSIT یک روش ترکیبی برای پیدا کردن pose است. این روش بر پایه ی روش های خطی جبری بنا شده است و مانند روش های لوئه و یوآن تکرار شونده است ولی به تخمین pose اولیه و معکوس ماتریس در تکرارهایش نیاز ندارد. POSIT برای هشت نقطه مشخصه و چهار تکرار، بسیار سریع است. این روش در مقایسه با روش لوئه و یوآن به محاسبات کمتری نیاز دارد. تنها نکته ای که در بکارگیری این روش وجود دارد این است که اندازه ی شیء ای که تخمین pose آن مدنظر است باید بسیار

¹Perspective three-point Problem

²Lacroix

³Grunert

⁴Fischer

⁵Bolles

⁶Roberts

⁷Tsai

⁸Lowe

⁹Yuan

¹⁰Daniel F.DeMenthon

¹¹LaryS.Davis

¹²Quan

¹³Lan

¹⁴Hu

¹⁵Wu

¹⁶Bujnak

¹⁷Abidi

¹⁸Chandrra

¹⁹Yang Guo

$$\frac{\vec{r}_{A'B'}}{\vec{r}_{AB}} = \frac{f}{p} \quad (۲)$$

در رابطه (۲)، f فاصله کانونی دوربین، p فاصله شیء تا دوربین، $\vec{r}_{AB}$ مولفه‌های دوبعدی شیء بیان شده در دستگاه مشخص و $\vec{r}_{A'B'}$ مولفه‌های دوبعدی تصویر بیان شده در دستگاه مشخص می‌باشند. در صورتی که شیء مولفه سوم هم داشته باشد این رابطه به صورت رابطه (۳) می‌باشد.

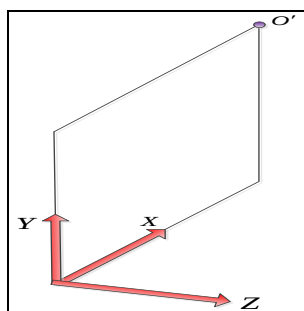
$$\frac{\begin{pmatrix} x_{A'B'} \\ y_{A'B'} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}} = \frac{f}{p + z_{AB}} \quad (۳)$$

در معادله بالا x و y مولفه‌های اول و دوم و z مولفه سوم شیء بر حسب میلی‌متر بوده و تمامی مولفه‌ها در دستگاه مرجع مشخصی بیان شده‌اند.

۳- معرفی دستگاه‌های مرجع و نحوه دوران با استفاده از زوایای اولیه

برای بیان درست روابط بین نقاط متناظر سه بعدی شیء و دوبعدی تصویر، لازم است همانند شکل ۲ سه راستا و یک نقطه را به عنوان مرجع قرار دهیم که در کل دستگاه مرجع خوانده می‌شوند. از آنجایی که این سه راستا چسبیده به حساسه دوربین یا همان CCD هستند، این دستگاه را دستگاه چسبیده به CCD یا دوربین می‌نامیم. نقطه مرجعی که برای دستگاه CCD در نظر می‌گیریم نقطه‌ای O' است که کمترین مقدار پیکسل را در هر دو راستا داراست.

دستگاه چسبیده به شیء نیز دستگاهی است متعامد که دو راستای اول آن دو راستای هم‌صفحه‌ای متعامداند و راستای سوم هم راستایی متعامد بر دو راستای اول در جهت راستگرد می‌باشد. همچنین نقطه‌ای دلخواه روی شیء به عنوان نقطه‌ای مرجع روی شیء در نظر گرفته می‌شود.



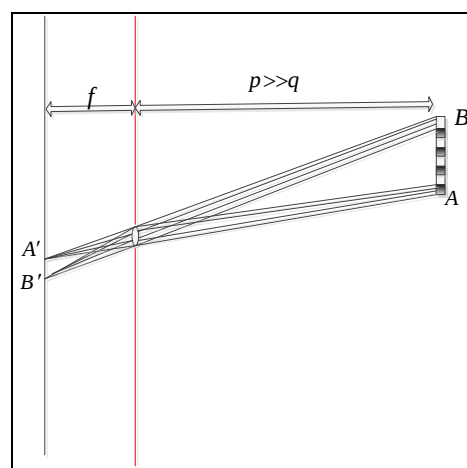
شکل ۲. دستگاه مرجع چسبیده به CCD

حال برای محاسبه‌ی میزان دوران دستگاه چسبیده به شیء نسبت به دستگاه CCD، دورانی با استفاده از زوایای اولیه به صورتی که در ادامه

همانطور که می‌دانید در ابتدا برای تشکیل تصویر روی پرده از روزنه استفاده می‌شد. دلیل جایگزینی عدسی در دوربین به جای روزنه این است که در صورت بزرگ اختیار کردن قطر روزنه، یک نقطه از تصویر تشکیل شده، می‌تواند تصویر بیش از یک نقطه از شیء باشد و با کوچک اختیار کردن آن پرتوهای کافی برای تشکیل تصویری قابل رویت برای چشم ممکن نیست. بنابراین تصویری که با عدسی، که وظیفه همگرا کردن پرتوهای زیادی را به عهده دارد، تشکیل می‌شود این مشکلات را نخواهد داشت. تنها محدودیتی که استفاده از عدسی به جای روزنه بر ما تحمیل می‌کند این است که تصویر با استفاده از روزنه در هر فاصله‌ای از روزنه تشکیل می‌شود، اما تصویر تشکیل شده با عدسی تنها در فاصله‌ی q از عدسی است. رابطه‌ی معروف (۱) برای دوربین عدسی‌دار برقرار است.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (۱)$$

در این رابطه فاصله‌ی شیء تا عدسی دوربین p ، فاصله‌ی صفحه‌ی تصویر تا عدسی دوربین q و فاصله‌ی کانونی دوربین f می‌باشد. به منظور ساده‌سازی، برای حالتی که $p \gg q$ است فرض می‌شود تصویر در فاصله‌ی کانونی از عدسی دوربین تشکیل می‌شود (یعنی $q=f$). از آنجایی که معمولاً فاصله‌ی کانونی در حد میلی‌متر است، فرض می‌شود همواره شیء در بی‌نهایت قرار گرفته و همواره صفحه‌ی تصویر در فاصله‌ی f از عدسی دوربین قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان اینطور فرض نمود که روزنه‌ای بجای عدسی قرار گرفته و برای هر شیء‌ای که در فاصله‌ی p از صفحه‌ی روزنه‌دار قرار داشته باشد تصویری در فاصله‌ی f از این صفحه تشکیل خواهد شد. این همان دوربین روزنه‌دار است (شکل ۱).



شکل ۱. تشکیل تصویر با استفاده از عدسی
که معادل تشکیل تصویر با روزنه در نظر می‌گیرند.

رابطه‌ای که با استفاده از قضیه تالس برای دوربین روزنه‌دار برقرار می‌باشد، به صورت رابطه (۲) است.

حکم: با استفاده از قضیه ی تالس و برقراری فرضیات فاصله کانونی دوربین بدست می آید.
اثبات: برای تصویر این شیء صفحه مانند، رابطه ی (۴) براساس قضیه تالس برقرار است.

$$\frac{\begin{pmatrix} X_{AB'} \\ Y_{AB'} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \end{pmatrix}} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

در این رابطه f_x و f_y فاصله ی کانونی در دو راستای x و y هستند که به دلیل متفاوت بودن اندازه ی پیکسل ها (S_x, S_y) بر حسب میلی متر در دو راستای x و y وجود می آید. در حقیقت به این دلیل که مولفه های تصویر با واحد پیکسل در اختیارمان قرار دارند، با وارد نمودن این فاکتورهای اندازه ی پیکسل ها در رابطه ی (۴) واحد تمام عناصر به میلی متر تبدیل شده می شود. همچنین رابطه ی (۵) برای فاصله ی کانونی در راستاهای x و y برقرار می باشد.

$$f_x = \frac{f}{S_x}, \quad f_y = \frac{f}{S_y} \quad (5)$$

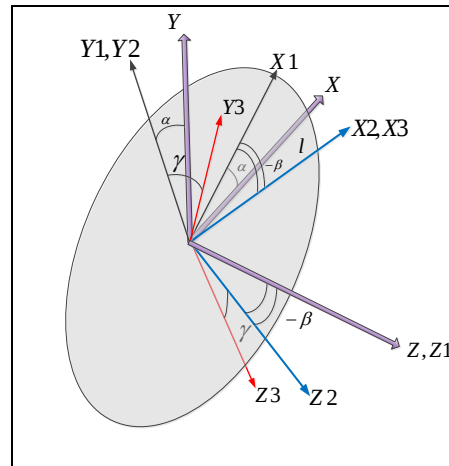
با جایگذاری مقادیر معلوم در رابطه ی (۴) مقدار فاصله ی کانونی بر حسب میلی متر بدست می آید. با این کار دوربین کالیبره شده و به دلیل اینکه از این مقدار فاصله ی کانونی در روابط محاسبه ی موقعیت و وضعیت استفاده می کنیم، تصاویر دیگری که با دوربین تهیه می کنیم باید با همان تنظیماتی باشد که این تصویر، گرفته شده است. بنابراین در ادامه فاصله ی کانونی جزء معلومات می باشد.

۵- تعیین موقعیت و وضعیت یک قلم

برای ساده سازی مسأله ی تعیین موقعیت و وضعیت، شیء مورد نظر را ساده ترین نوع، یعنی یک قلم انتخاب می کنیم. دوران قلم می تواند تک بعدی به معنای تک زاویه ای بودن آن (α شامل β) یا دوبعدی به معنای دوزاویه ای بودن آن (شامل هر دو زاویه ی α و β) باشد. نقطه ی ابتدایی قلم نیز می تواند روی محور اصلی دوربین (محوری که از مرکز CCD و روزنه عبور کرده و عمود بر CCD است) باشد، یا نسبت به این محور به اندازه Δy در راستای y اختلاف داشته باشد (نقطه ی ابتدایی روی صفحه YZ قرار داشته باشد) یا می تواند نسبت به محور اصلی به اندازه Δx در راستای x و به اندازه Δy در راستای y اختلاف داشته باشد (نقطه ی ابتدایی دلخواه باشد). البته دوران روی صفحه XZ مشابه دوران روی صفحه YZ می باشد. همچنین فرض می شود مولفه ی سوم نقطه ی ابتدایی قلم همواره به اندازه d است و مقدار d را می دانیم. به این ترتیب قلم می تواند در نه حالت مختلف در مقابل دوربین قرار بگیرد. برای طولانی نشدن بحث، حالت نه، یعنی پیچیده ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین (شکل ۴)، بررسی می شود.

بیان می شود درنظر گرفته می شود که در حقیقت برای رسیدن به موقعیت شیء با دانستن وضعیت آن و بالعکس، این نمایش مورد استفاده قرار می گیرد.

همانطور که در شکل ۳ ملاحظه می شود ابتدا دستگاه حول محور z آن به صورت راستگرد به اندازه ی α دوران داده شده تا به دستگاه شماره ی یک برسد، سپس حول محور y دستگاه شماره ی یک به اندازه ی β دوران داده می شود تا به دستگاه شماره ی دو برسد و در نهایت حول محور x دستگاه شماره ی دو به اندازه ی γ دوران داده می شود تا به دستگاه شماره ی سه برسد. [۱۶]



شکل ۳. دوران سه بعدی با استفاده از زوایای اوایلر

۴- تعیین فاصله ی کانونی دوربین با استفاده از

تصویر یک شیء مشخص

برای تعیین موقعیت و وضعیت یک شیء با مدل مشخص، معلومات، مولفه های سه بعدی شیء بیان شده در دستگاه شیء، مولفه های دوبعدی تصویر بیان شده در دستگاه CCD می باشند و مجهولات موردنظر مولفه های سه بعدی شیء بیان شده در دستگاه CCD و اندازه ی برداری است که ابتدای آن مرکز تصویر و انتهای آن نقطه ی دلخواه مشخص شده روی شیء است. طبق رابطه ی (۳) که بر اساس قضیه تالس نوشته شده است فاصله ی کانونی نیز نامشخص می باشد. بنابراین قبل از تعیین موقعیت و وضعیت باید f را محاسبه نمود تا در ادامه ی کار f معلوم باشد. به عبارت دیگر یک بار دوربین کالیبره می شود و در ادامه کار این تنظیمات تغییری نمی کنند.

قضیه: اگر مولفه های شیء ای مشخص و تصویر آن در یک دستگاه و فاصله ی شیء تا دوربین مشخص باشند، آن گاه فاصله ی کانونی دوربین بدست می آید.

فرضیات: تصویری از شیء ای صفحه مانند که در راستاهای x و y مولفه داشته ولی مولفه ی سومی ندارد موجود است. فاصله ی شیء تا دوربین اندازه گیری شده و در اختیارمان قرار دارد. مولفه های اول و دوم شیء (X_{AB}, Y_{AB}) و مولفه های اول و دوم تصویر ($X_{AB'}, Y_{AB'}$) مشخص می باشند.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(x''+\Delta x)^2+(y''+\Delta y)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}} &= \frac{d}{d+z} \\ \frac{a=\sqrt{(x''+\Delta x)^2+(y''+\Delta y)^2}}{(x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))}} &= \frac{1}{1+\frac{z}{d}} \\ \rightarrow a + \frac{a}{d}z &= (x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))} \\ \frac{z=\sqrt{l^2-x^2-y^2}}{d} \rightarrow a + \frac{a}{d}\sqrt{l^2-x^2-y^2} &= (x+\Delta x)\sqrt{(1+\tan^2(\phi))} \\ \frac{k=\sqrt{(1+\tan^2(\phi))}}{d} \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{d(x+\Delta x)k}{a} - d \\ \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{dkx}{a} + \frac{d\Delta x k}{a} - d \\ \frac{q=\frac{d\Delta x k}{a}-d}{d} \rightarrow \sqrt{l^2-x^2-y^2} &= \frac{dkx}{a} + q \quad \text{A)} \\ \rightarrow l^2-x^2-y^2 &= \left(\frac{dkx}{a}+q\right)^2 \\ \rightarrow l^2-x^2-y^2 &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \frac{y=c_1x+d_1}{d} \rightarrow l^2-x^2-(c_1x+d_1)^2 &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \rightarrow l^2-x^2-c_1^2x^2-d_1^2-2c_1d_1x &= \frac{d^2k^2x^2}{a^2} + q^2 + 2q\frac{dkx}{a} \\ \rightarrow x^2\left(\frac{d^2k^2}{a^2}+1+c_1^2\right) + x\left(\frac{2qdk}{a}+2c_1d_1\right) &+ q^2-l^2-d_1^2=0 \end{aligned}$$

حال با جایگذاری x ها در رابطه‌ی (۹) دو مقدار هم برای y و z بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} y &= c_1x + d_1 \quad (9) \\ z &= \frac{dk}{a}(x+\Delta x) - d \end{aligned}$$

اگر قلمی با طول مشخص را به اندازه‌ی α و β ، به صورتی که بیان شد، دوران دهیم مولفه‌های شیء در دستگاه مرجع به صورت زیر خواهند بود که با استفاده از این روابط با دانستن وضعیت شیء (یعنی همان زوایای دوران) می‌توان به مولفه‌های آن در دستگاه مرجع رسید.

$$\begin{aligned} x &= l \cos \beta \cos \alpha \\ y &= l \cos \beta \sin \alpha \\ z &= -l \sin \beta \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰) زوایای دوران اوایل نیز با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \beta &= \sin^{-1}\left(\frac{-z}{l}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

در این حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین، تعیین موقعیت قلم به معنی تعیین موقعیت نقطه‌ی ابتدایی آن یا بدست آوردن Δx و Δy و همچنین

قضیه: اگر فاصله‌ی کانونی دوربین مشخص باشد، با استفاده از تصویر یک قلم می‌توان به موقعیت و وضعیت آن رسید.

فرضیات: شیء مورد نظر قلم بوده و دوران آن دوبعدی است و نقطه‌ی ابتدایی آن به اندازه‌ی Δx در راستای X و به اندازه‌ی Δy در راستای Y نسبت به محور اصلی اختلاف دارد و طول قلم معلوم است. فاصله‌ی قلم تا دوربین یا d مشخص است.

حکم: با استفاده از قضیه‌ی تالس و برقراری فرضیات، موقعیت و وضعیت یک قلم تعیین می‌گردد.

اثبات: روابط هندسی حاکم بر این حالت به صورت رابطه‌ی (۶) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x'' &= \frac{d}{f} x' \\ y'' &= \frac{d}{f} y' \end{aligned} \right\} l'' &= \frac{d}{f} l' \\ \Delta x &= \frac{d}{f} \Delta x', \Delta y = \frac{d}{f} \Delta y' \\ \tan(\Psi) &= \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} \rightarrow x'' = \frac{l''}{\sqrt{1+\tan^2(\Psi)}} \quad (6) \end{aligned}$$

همچنین با تعریف زاویه ϕ خواهیم داشت:

$$\tan(\phi) = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = \frac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'} = \frac{y''+\Delta y''}{x''+\Delta x''} \rightarrow (y+\Delta y) = (x+\Delta x) \tan(\phi)$$

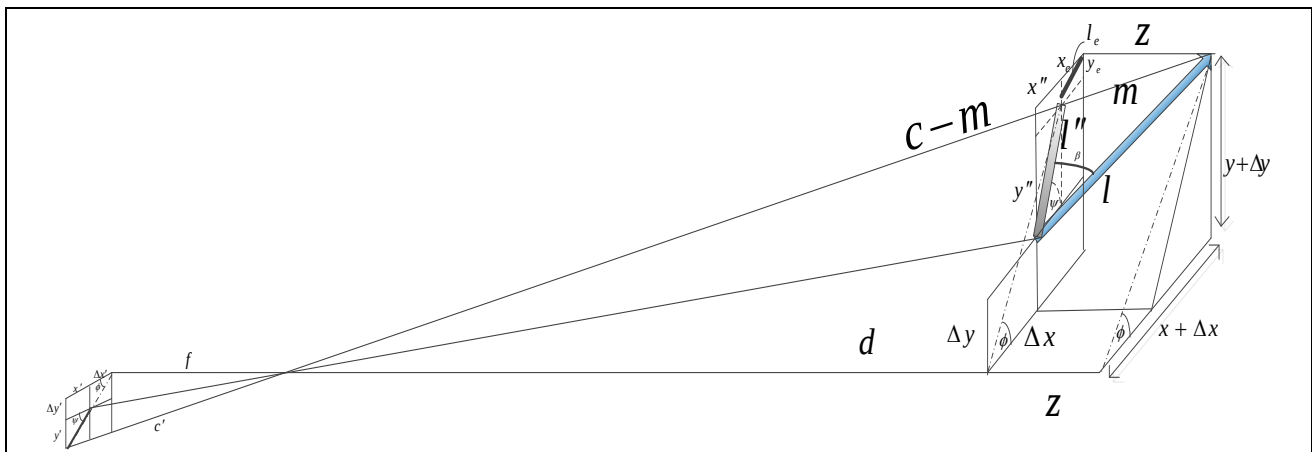
بنابراین:

$$y = x \tan(\phi) + \Delta x \tan(\phi) - \Delta y \rightarrow y = c_1x + d_1 \quad (7)$$

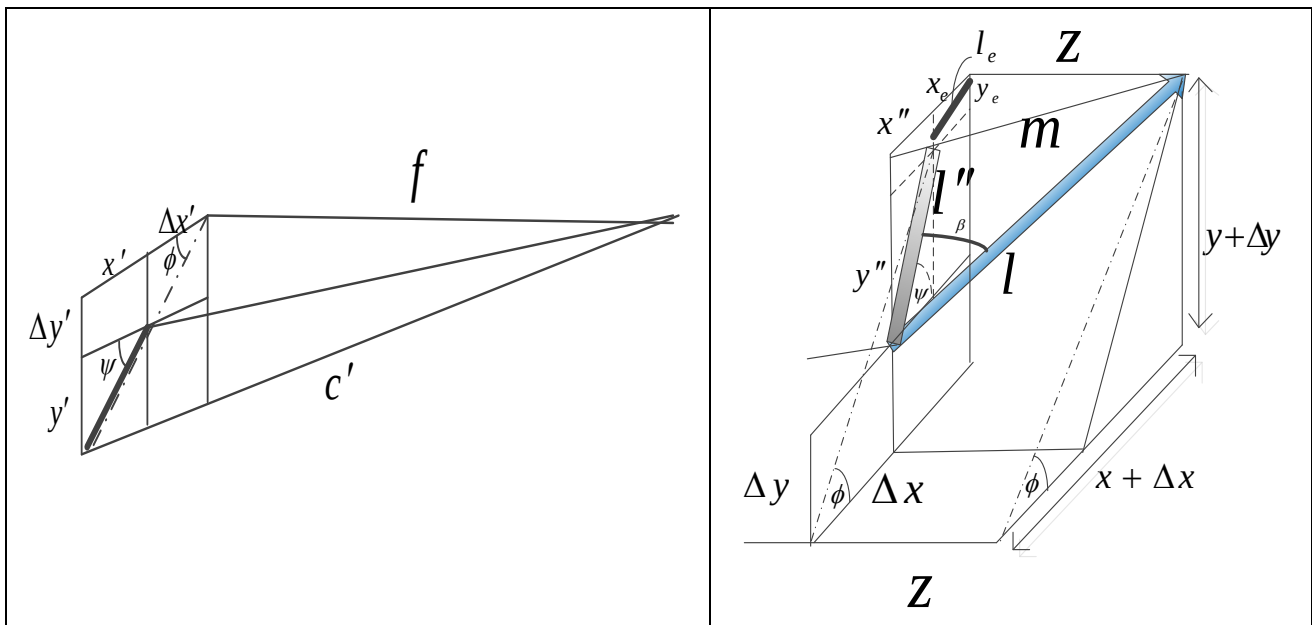
نمای بزرگتر بخش‌هایی از شکل ۴ و نمای دوبعدی آن مطابق شکل‌های ۵ و ۶ خواهند بود که برای درک بهتر روابط نشان داده شده است. مطابق شکل ۴ رابطه‌ی (۸) را خواهیم داشت.

با حل رابطه‌ی (۸) مقدار x یا مولفه‌ی اول قلم بدست می‌آید. ولی همانطور که مشاهده می‌کنید معادله‌ی بدست آمده از درجه دوم است، در حالی که انتظار داشتیم تنها یک پاسخ برای x داشته باشیم. دلیل این موضوع با توجه به شکل ۷ مشخص می‌شود.

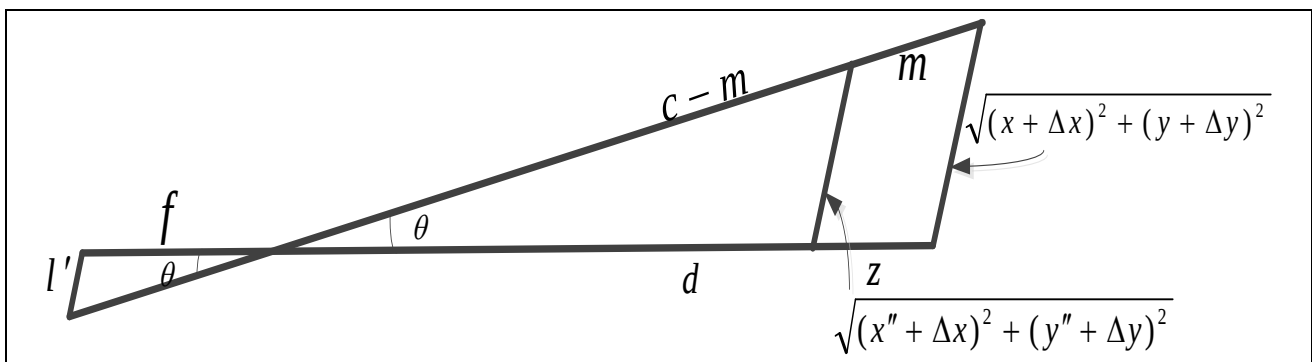
در شکل ۵، دایره‌ای به شعاع طول قلم رسم شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی ابتدایی قلم یا همان مرکز دایره از روزنه‌ی دوربین d است. همانطور که از روی شکل مشخص است دو مقدار برای مولفه‌ی سوم و در نتیجه دو مقدار برای تمام مولفه‌های قلم بدست می‌آید. بنابراین با تصویر قلمی که در مقابل دوربین قرار گرفته دو پاسخ مختلف بدست خواهد آمد.



شکل ۴. پیچیده‌ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین.



شکل ۵. نماهای بزرگ‌شده‌ی ابتدا و انتهای شکل ۴.



شکل ۶. نمای دوبعدی شکل ۴.

$$C = [C_1 \ C_2 \ C_3]$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \beta \cos \alpha \\ l_1 \cos \beta \sin \alpha \\ -l_1 \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} l_2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - l_2 \sin \alpha \cos \gamma \\ l_2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + l_2 \cos \alpha \cos \gamma \\ l_2 \cos \beta \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} l_3 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + l_3 \sin \alpha \sin \gamma \\ l_3 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - l_3 \cos \alpha \sin \gamma \\ l_3 \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

همچنین با استفاده از بخش قبل، برای قلمی که دورانی دوبعدی پیدا کند و نقطه‌ای ابتدایی‌اش دلخواه باشد به مقادیر سه مولفه‌ی این قلم در راستاهای x ، y و z می‌توان رسید. ماتریس دوران در حقیقت همین مولفه‌های سه بعدی قلم در موقعیت و وضعیت نهایی هستند به عبارتی داریم:

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

که زیرنویس‌های یک و دو و سه به ترتیب برای یال‌های اول و دوم و سوم هستند. بنابراین اگر با استفاده از نتایج بخش قبل، مولفه‌های هر کدام از سه راستای دستگاه را پیدا شود، در حقیقت ماتریس دوران بین دو دستگاه CCD و دستگاه چسبیده به مکعب بدست خواهد آمد و با استفاده از روابطی که مولفه‌های این ماتریس دوران با زوایای دوران دارند، زوایای دوران محاسبه می‌شوند.

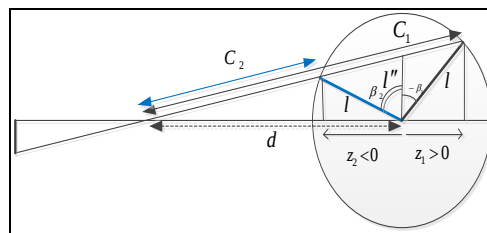
نکته‌ای که پس از انجام این کار بوجود آمد و قابل پیش‌بینی نیز بود، این است که به دلیل وارد شدن $\sin$ و $\cos$ در روابط، در محاسبه‌ی زوایای خطایی بوجود می‌آید که منشأ آن خطای عددی است و برای جلوگیری از این خطاها می‌توان از چهارگان‌ها استفاده نمود.

با استفاده از چهارگان‌ها ماتریس دوران به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

همچنین رابطه‌ی (۱۵) همواره باید برای چهارگان‌ها برقرار باشد و همین محدودیت است که از بوجود آمدن خطای عددی جلوگیری می‌کند.

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1 \quad (15)$$



شکل ۷. وجود دو پاسخ مختلف برای قلمی که در مقابل دوربین قرار گرفته.

دانستن d بوده و تعیین وضعیت قلم بدست آوردن زوایای دوران آن می‌باشد. که با استفاده از روابط (۶)، (۸)، (۹) و (۱۱) موقعیت و وضعیت قلم تعیین می‌گردند.

۶- تعیین موقعیت و وضعیت یک مکعب

قضیه: اگر فاصله‌ی کانونی دوربین مشخص باشد، با استفاده از تصویر یک مکعب، موقعیت نقطه‌ی مشخصی از این مکعب و وضعیت دستگاه متعامد چسبیده به آن یا به عبارتی زوایای دوران سه بعدی آن بدست خواهند آمد.

فرضیات: شیء به جای قلم، سه قلم متعامد یا یک مکعب است. طول این سه قلم یا یال‌های مکعب نیز مشخص هستند. فاصله‌ی مکعب تا دوربین نامشخص است.

حکم: با استفاده از روابط بدست آمده در قضیه قبل و برقراری فرضیات، موقعیت و وضعیت یک مکعب تعیین می‌گردد.

اثبات: این حالت، مجهولات و معلوماتی به حالت قبل که تنها یک قلم بود، اضافه نمود. در حالتی که شیء یک قلم بود تنها دو زاویه دوران مطرح بود ولی در این حالت سه زاویه دوران حول سه قلم یا سه یال مکعب (همان زوایای اوپلر) مطرح می‌باشد ولی از طرفی ویژگی متعامد بودن یال‌ها و طول یال‌ها به ویژگی‌هایمان اضافه شده است و این بار سه تصویر به جای یک تصویر در اختیار قرار دارد. انتظارمان این است که اگرچه در حالت قبل علاوه بر دانستن فاصله‌ی کانونی دوربین و تصویر، به دانستن فاصله‌ی شیء تا دوربین یا d هم نیاز بود، در این حالت نیابستی نیازی به دانستن فاصله‌ی شیء تا دوربین وجود داشته باشد.

بنابراین در این حالت که شیء به جای یک قلم، سه یال متعامد است، به دنبال موقعیت و وضعیت شیء و همچنین فاصله‌ی آن تا دوربین هستیم. همچنین باید بتوان ابتدا و انتهای این سه یال متعامد را در تصویر مشاهده کرد یا حداقل چهار نقطه از مکعب را در اختیار داشت که غیر هم صفحه بوده و بیانشان را در دستگاه شیء بدانیم.

همانطور که می‌دانیم اگر دستگاهی به صورتی که در شکل ۳ نشان داده شد دوران پیدا کند، ماتریس دوران آن به صورت زیر می‌باشد [۱۳].

بنابراین:

$$\frac{a}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} = \frac{1}{d+z}$$

$$\rightarrow (ad+az)^2 = l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right) \quad (20)$$

$$\rightarrow a^2 d^2 + a^2 z^2 + 2a^2 dz - l^2 + z^2 - \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 - 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) - 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right) = 0$$

$$\rightarrow z^2 (a^2 + 1) + d^2 \left(a^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \right) + dz (2a^2) + dx \left(\frac{-2\Delta x'}{f} \right) + dy \left(\frac{-2\Delta y'}{f} \right) - l^2 = 0$$

با توجه به رابطه (۲۰)، می توان ثابت های رابطه (۲۱) را تعریف نمود:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= (a^2 + 1) \\ m_2 &= a^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \\ m_3 &= 2a^2 \\ m_4 &= \frac{-2\Delta x'}{f} \\ m_5 &= \frac{-2\Delta y'}{f} \\ m_6 &= -l^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow m_1 z^2 + m_2 d^2 + m_3 dz + m_4 dx + m_5 dy + m_6 = 0 \quad (21)$$

بنابراین برای هر یک از این یال ها رابطه ای به صورت (۲۱) وجود دارد که به جای X و Y و Z مقادیر چهارگانی آن ها را می توان جایگذاری نمود. چهارگان ها و d مجهولات هستند و تا به اینجا سه رابطه بدست آمد که با جایگذاری به صورت روابط (۲۲) بیان می شود.

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{(x'_1 + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y'_1 + \Delta y')}{f}\right)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= (a_1^2 + 1) \\ m_{21} &= a_1^2 - \left(\frac{\Delta x'}{f}\right)^2 - \left(\frac{\Delta y'}{f}\right)^2 \\ m_{31} &= 2a_1^2 \\ m_{41} &= \frac{-2\Delta x'}{f} \\ m_{51} &= \frac{-2\Delta y'}{f} \\ m_{61} &= -l_1^2 \\ x_1 &= 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2 \\ y_1 &= 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) \\ z_1 &= 2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_4) \\ \varepsilon_5 &= d \\ m_{11} z^2 + m_{21} d^2 + m_{31} dz + m_{41} dx + m_{51} dy + m_{61} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

برای دو یال دیگر نیز دو رابطه دیگر بر حسب پنج مجهول (چهارگان ها و d) بدست می آید. بنابراین رابطه (۲۳) با استفاده از سه یال استخراج می شود.

بنابراین به جای بدست آوردن مستقیم زوایای دوران، ابتدا چهار چهارگان و فاصله ی شیء تا دوربین را بدست می آورده، سپس با توجه به رابطه ای که این چهارگان ها با عناصر ماتریس دورانی که شامل زوایای دوران است دارند به مقدار زوایای دوران می رسمیم.

با توجه به حالت نه قلم رابطه ی (۱۶) برای هر قلمی که در مقابل دوربین قرار داشته باشد برقرار است.

$$\frac{\sqrt{(x'' + \Delta x)^2 + (y'' + \Delta y)^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}} = \frac{d}{d+z} \quad (16)$$

این رابطه یک رابطه ی بسیار کلیدی است. آنچه که داریم تنها تصویری از قلم است. بنابراین باید سعی کنیم تا جایی که می توانیم در رابطه ی فوق مولفه های تصویر را وارد نماییم. بر اساس بخش قبل رابطه ی (۱۷) برقرار است.

$$\begin{aligned} (y'' + \Delta y'') &= \frac{d}{f} (y' + \Delta y') \\ (x'' + \Delta x'') &= \frac{d}{f} (x' + \Delta x') \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین رابطه ی (۱۸) استخراج خواهد شد.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(x'' + \Delta x)^2 + (y'' + \Delta y)^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2}} &= \frac{d}{d+z} \\ \rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{f}(x' + \Delta x')\right)^2 + \left(\frac{d}{f}(y' + \Delta y')\right)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y}} &= \frac{d}{d+z} \\ \rightarrow \frac{d \sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2}}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} &= \frac{d}{d+z} \\ \rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2}}{\sqrt{l^2 - z^2 + \left(\frac{d\Delta x'}{f}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)^2 + 2x\left(\frac{d\Delta x'}{f}\right) + 2y\left(\frac{d\Delta y'}{f}\right)}} &= \frac{1}{d+z} \end{aligned} \quad (18)$$

برای ساده تر شدن روابط، پارامتر a به صورت رابطه ی (۱۹) تعریف می شود.

$$a = \sqrt{\left(\frac{(x' + \Delta x')}{f}\right)^2 + \left(\frac{(y' + \Delta y')}{f}\right)^2} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 - 1 &= 0 \\
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (28)$$

راهکار پیشنهادی، استفاده از روابط مربوط به متعامد بودن سطرها و ستون هاست. بنابراین سه رابطه‌ی دیگر به صورت (۲۹) وجود دارد.

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 &= 0 \rightarrow h_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \\
 x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - l_2^2 &= 0 \rightarrow h_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0 \\
 x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - l_3^2 &= 0 \rightarrow h_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0
 \end{aligned} \quad (29)$$

معادلاتی که موجود هستند به صورت (۳۰) می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 - 1 &= 0 \\
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 h_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (30)$$

در شبیه‌سازی با استفاده از ده معادله و پنج مجهول رابطه‌ی (۳۰) توانستیم به مقادیر چهارگان‌ها و فاصله‌ی شیء تا دوربین دست یابیم. با استفاده از مقادیر چهارگان‌ها و روابط موجود برای ماتریس دوران می‌توان مولفه‌های یکتایی برای هر سه یال استخراج کرد. به عبارتی ماتریس دوران رابطه‌ی ۱۳ بدست آمد.

تنها گام باقی‌مانده این است که با استفاده از عناصر ماتریس دوران، زوایای دوران را محاسبه نمود. با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ مجهولات یعنی زوایای دوران و فاصله‌ی شیء تا دوربین با رابطه‌ی ۳۱ بدست می‌آیند. حال باید با استفاده از ابزار ریاضیاتی به حل این ده معادله به منظور بدست آوردن پنج مجهول پرداخت.

$$\begin{aligned}
 d &= \varepsilon_5 \\
 \tan \alpha &= \frac{l_1 \cos \beta \sin \alpha}{l_1 \cos \beta \cos \alpha} = \frac{y_1}{x_1} \rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \\
 \sin \beta &= \frac{z_1}{-l_1} \rightarrow \beta = \sin^{-1} \left(\frac{z_1}{-l_1} \right) \\
 \tan \gamma &= \frac{l_2 \cos \beta \sin \gamma}{l_3 \cos \beta \cos \gamma} = \frac{z_2}{z_3} \rightarrow \gamma = \tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_3} \right)
 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 f_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (23)$$

رابطه‌ی مهم دیگری که در پیچیده‌ترین حالت قلم بدست آمد به صورت رابطه‌ی (۲۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 \tan(\phi) &= \frac{y' + \Delta y'}{x' + \Delta x'} = \frac{(y + \Delta y)}{(x + \Delta x)} \rightarrow y = x \tan(\phi) + \Delta x \tan(\phi) - \Delta y \\
 \rightarrow y - x \tan(\phi) - \left(\frac{d \Delta x'}{f} \right) \tan(\phi) + \left(\frac{d \Delta y'}{f} \right) &= 0 \\
 \rightarrow y - x \tan(\phi) - \left(\frac{\Delta x' \tan(\phi) + \Delta y'}{f} \right) d &= 0 \\
 \frac{t_1 = \tan(\phi); t_2 = \frac{\Delta x' \tan(\phi) + \Delta y'}{f}}{\rightarrow y - t_1 x - t_2 d} &= 0
 \end{aligned} \quad (24)$$

برای ساده‌تر نمودن روابط، پارامترهایی به صورت (۲۵) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \tan(\phi_1) &= \frac{y'_1 + \Delta y'}{x'_1 + \Delta x'}; t_{11} = \tan(\phi_1); t_{21} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_1) + \Delta y'}{f} \\
 \tan(\phi_2) &= \frac{y'_2 + \Delta y'}{x'_2 + \Delta x'}; t_{12} = \tan(\phi_2); t_{22} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_2) + \Delta y'}{f} \\
 \tan(\phi_3) &= \frac{y'_3 + \Delta y'}{x'_3 + \Delta x'}; t_{13} = \tan(\phi_3); t_{23} = \frac{\Delta x' \tan(\phi_3) + \Delta y'}{f}
 \end{aligned} \quad (25)$$

سه رابطه‌ی دیگر برای سه یال به این صورت رابطه‌ی (۲۶) خواهد شد.

$$\begin{aligned}
 y_1 - t_{11} x_1 - t_{21} d &= 0 \\
 y_2 - t_{12} x_2 - t_{22} d &= 0 \\
 y_3 - t_{13} x_3 - t_{23} d &= 0
 \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری سه مولفه بر حسب چهارگان‌ها و d خواهیم داشت رابطه‌ی (۲۷) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned}
 g_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0 \\
 g_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= 0
 \end{aligned} \quad (27)$$

معادلاتی که تا به اینجا بر حسب چهارگان و d بدست آمدند به صورت رابطه‌ی (۲۸) هستند.

هفت معادله و پنج مجهول موجود است. ولی نتوانستیم در شبیه‌سازی، با این معادلات هم به پنج مجهولمان دست یابیم.

۷- نکات مربوط به شبیه سازی و حل معادلات

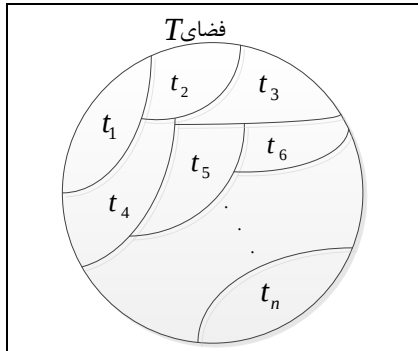
در شبیه سازی ای که انجام شد سعی شد با استفاده از تابع $fsolve$ در نرم افزار MATLAB که برای حل معادلات غیرخطی مفید است، با استفاده از روش گاوس- نیوتن، با دادن ده معادله به پنج مجهول مورد نظرم دست یابیم.

یکی از ایرادات الگوریتم های بهینه سازی وابستگی شدید آن ها به حدس اولیه ای درست است و حتی ممکن است با نادرست بودن این حدس، الگوریتم به پاسخی همگرا نشود.

با توجه به بازه ای که هر یک از زوایای دوران می توانند تغییر کنند حالت های مختلفی برای دسته زوایای دوران بوجود می آید. فرض کنید فضای T فضایی باشد که تمام این حالت های مختلف را می پوشاند (شکل ۸). از آن جایی که رسیدن به تمام حالت های فضای T تنها با یک شرط اولیه امکان پذیر نیست، چندین شرایط اولیه لازم داریم که هر کدام از آن ها زیرفضایی از T را می پوشانند. فرض کنید با شروع از شرایط اولیه شماره یک می توان به ده حالت مختلف در فضای T رسید ولی به حالت یازدهم در فضای T نمی توان رسید. این ده حالت زیر فضایی از T هستند که با شرایط اولیه شماره یک قابل دست یابی هستند (t_1). حالت یازدهم و چند حالت دیگر فرضاً زیرفضای دومی را تشکیل می دهند که برای رسیدن به آن ها شرایط اولیه شماره دو لازم است (t_2). به این ترتیب اگر فضای T شامل n زیرفضا (t_1 تا t_n) باشد که برای دست یابی به هر کدام از زیرفضاها شرایط اولیه Q_n لازم باشد، با در اختیار داشتن شرایط اولیه های Q_1 تا Q_n کل فضای T پوشانده شده و دست یابی به تمام حالت ها امکان پذیر است. تنها نکته ای که باقی می ماند این است که مقدار n چند است یا چند زیرفضا در فضای T وجود دارد و مقدار Q های متناظر این n زیرفضا چه مقداری هستند.

در برنامه ی شبیه سازی مستقیم (برنامه ای که در آن با استفاده از ماتریس دوران مقادیر چهارگان ها بدست می آیند)، اگر زوایای دوران را بدانیم مقدار چهارگان ها بدست می آیند. اما در برنامه ی شبیه سازی معکوس با دانستن چهارگان ها به عنوان شرایط اولیه، باید به زوایای دوران برسیم. هدف ما در این مقاله اجرای برنامه ی شبیه سازی معکوس می باشد، ولی به دلیل ندانستن چهارگان ها نیاز داریم تا برنامه ی شبیه سازی مستقیم را اجرا نموده و از نتیجه ی آن به عنوان ورودی برنامه ی شبیه سازی معکوس استفاده کنیم. به این منظور با یک شرط اولیه برنامه شبیه سازی معکوس را اجرا نمودیم. سپس برای حالتی که برنامه معکوس به جواب نرسید (که همان رسیدن به زیر فضای دیگر می باشد) برنامه مستقیم را اجرا نموده تا شرایط اولیه ی مربوط به زیرفضای جدید را پیدا کنیم. با افزودن این شرایط اولیه به برنامه ی معکوس برنامه را اجرا نموده و مجدداً به رسیدن به حالتی که به جواب نرسید کار قبلی را تکرار می کنیم. اگر چه اجرای کامل برنامه ها برای رسیدن به n تا شرایط اولیه کار زمان بری است ولی زمانی که از این برنامه در عمل استفاده کنیم، حالتی که در عمل وجود دارد حتماً در یکی از زیر فضاهای فضای T قرار

گرفته و شرایط اولیه ی مربوط به آن وجود دارد و حتماً در زمانی بسیار کم به پاسخ درست منتهی می شود. همچنین شرط استفاده از شرط اولیه ی دیگر را این قرار داریم که مجموع قدر مطلق سطرها ی تابعی که شامل ده معادله بود بزرگتر از 10^{-3} شود.



شکل ۸. فضای دربرگیرنده ی تمام حالت های ممکن
زوایای دوران

در انتخاب مقدار اولیه به این نکته توجه کردیم که چون چهار مجهول اول چهارگان ها هستند باید جمع مجذورشان یک باشد و مجهول پنجم هم که فاصله شیء تا دوربین است باید عدد مثبتی باشد. برای انتخاب بهتر مقدار اولیه فاصله ی شیء تا دوربین با این فرض که یال ها کاملاً در صفحه ی موازی CCD قرار دارد مقدار فاصله را برای هر کدام از یال ها بدست آوردیم. سپس با میانگین گیری از هر دو فاصله ای که نزدیکتر به هم بودند مقدار اولیه ی فاصله ی شیء تا دوربین را تخمین زدیم.

نکته ی قابل توجه دیگری که در شبیه سازی باید به آن توجه شود، این است که باید مقادیر درستی از α ، β و γ انتخاب شوند از آنجایی که مقادیر این زوایا با توابع $\arcsin$ و $\arctan$ بدست آمدند، دانستن بازه ی این توابع مفید است. زوایای که با $\arctan$ بدست می آیند در بازه ی صفر تا 180° درجه جواب یکتایی خواهند داشت. زوایایی که با $\arcsin$ بدست می آیند در بازه ی 90° تا 90° درجه جواب یکتایی خواهند داشت. لذا باید زوایای α و γ که برای بررسی صحت برنامه استفاده می شوند، در بازه ی صفر تا 180° درجه باشند و زاویه β ای که برای بررسی صحت برنامه استفاده می شوند، در بازه ی 90° تا 90° درجه باشد.

۸- آزمایش عملی

در آزمایش عملی به جای قسمتی از برنامه ی شبیه سازی که شبیه ساز دوربین بود، از خود دوربین استفاده می شود و چهار نقطه ی تصویر که قبلاً نتیجه ی برنامه ی شبیه ساز بود این بار از روی تصویر انتخاب خواهد شد. انتخاب دستی این نقاط خطایی را بر فرآیند اعمال می کند. این نقاط روی قسمت هایی از تصویر انتخاب می شوند که اندازه ی واقعی آن ها را روی شیء بدانیم و روی سه راستای عمود بر هم قرار داشته باشند.

تئودولیت گرفته و با این عکس مقدار فاصله‌ی کانونی را در این حالت با استفاده از روابط موجود بدست آورده و دیگر تنظیمات لنز را تغییر نمی-دهیم (شکل ۹).

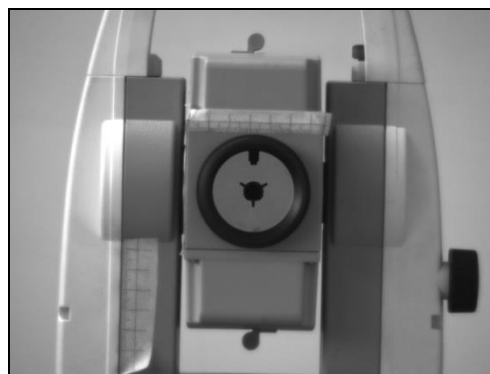
سپس تئودولیت را به اندازه‌ی دلخواه دوران داده، عکسی را در این حالت ذخیره نموده و مقدار زوایای افقی و عمودی را روی تئودولیت خوانده و یادداشت می‌کنیم. سپس این عکس را در نرم‌افزار MATLAB خوانده و سعی می‌کنیم سه یال مربوط به شیء را طوری انتخاب کنیم که طول آن‌ها روی تصویر با استفاده از برجسب‌های مدرج در اختیار باشد. در این حالت شش مولفه‌ی پیکسلی دوبعدی از یال‌ها در اختیار داریم. نقطه‌ی ابتدایی یکی از یال‌ها را به عنوان نقطه‌ی موردنظر روی شیء انتخاب می‌کنیم و با تفاضل نقطه‌ی انتهایی از نقطه‌ی ابتدایی دو یال دیگر دو مولفه‌ی پیکسلی دوبعدی برای دو یال دیگر بدست می‌آوریم که در حقیقت با این کار به جای سه نقطه و سه راستا از شیء، یک نقطه از شیء و سه راستا در اختیار داریم. به عبارت دیگر حداقل چهار نقطه‌ی مشخصه از شیء انتخاب می‌شوند (شکل ۱۰).

شماره آزمایش	متغیر	α (درجه)	β (درجه)	γ (درجه)	d (میلیمتر)
۱	مقدار واقعی	۰	۱۹/۹۲	۰/۲۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	۱/۷۱	۲۰/۴۷	۰	۳۵۰۲
۲	مقدار واقعی	۰	۰/۵	۲۰	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۰/۳	-۱/۱۹	۲۲/۸	۳۴۸۲
۳	مقدار واقعی	۰	۳۰/۰۶	۲۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۳	۳۰/۹۹	۲۵/۶۷	۳۴۸۳
۴	مقدار واقعی	۰	۰/۰۳	۳۰/۰۱	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۱/۴۸	۲/۰۰۶	۳۳/۳	۳۵۱۳
۵	مقدار واقعی	۰	۴۴/۹۹	۴۱/۸۵	۳۴۸۴
	نتیجه برنامه	-۳/۴۶	۴۷/۵۱	۴۱/۴۶	۳۵۰۳

تجهیزات مورد نیاز برای آزمایش عملی، دوربین و پایه آن، تئودولیت و پایه آن و خط کش می‌باشد.

دوربین مورد استفاده مدل DMK 41BU02 است. پیکسل‌های این دوربین مربعی و به ضلع 4.65×10^{-3} میلی‌متر هستند. پایه دوربین را می‌توان با استفاده از تراز حبابی نصب شده روی این پایه تراز نمود. سپس باید شیء‌ای که سه راستای عمود بر هم دارد را در محل مناسب، روبروی دوربین قرار داد. اما باید بدانیم این سه راستا به چه اندازه دوران یافته‌اند. همچنین فاصله‌ی شیء تا دوربین را باید بطور دقیق اندازه گرفت تا خروجی‌های مورد انتظار از برنامه مشخص باشند.

تئودولیت دوربینی است شامل سه تراز، که می‌توان با استفاده از آن‌ها تئودولیت را به خوبی روی افق تراز کرد. همچنین با انتخاب نقطه‌ی مشخصی می‌تواند فاصله مرکز خودش را تا آن نقطه بدهد. همچنین می‌توان زاویه افقی‌ای را برایش به عنوان زاویه‌ی صفر تنظیم نمود و هر دورانی که از این صفر تنظیم شده پیدا کند، را در دو راستای افقی و عمودی نمایش دهد. همچنین سه راستای عمود بر هم می‌توان روی گوشه‌های این دوربین مشخص نمود. با توجه به این موارد، تئودولیت گزینه‌ی مناسبی برای جسم موردنظرمان می‌باشد.



شکل ۹. هم‌راستا نمودن خط دید لنز و تئودولیت برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی.

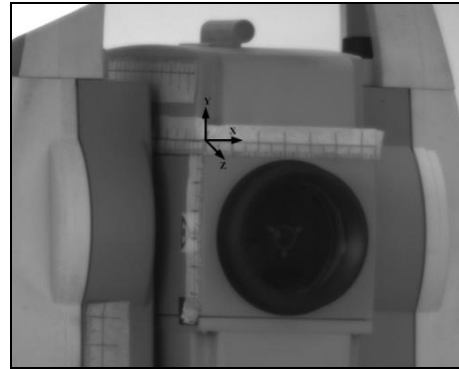
تئودولیت را روی پایه‌ی آن در راستای دوربین قرار می‌دهیم و سپس آن را به دقت تراز می‌کنیم. روی قسمت‌های مختلف تئودولیت و از جمله روی سه راستای عمود بر هم آن، برجسب‌های مدرج با دقت یک میلی-متر چسبانده تا بتوان از روی تصویر فاصله‌ی بین نقاط انتخابی را دانست. تنظیمات لنز دوربین را به گونه‌ای تغییر داده که تصویر واضحی از تئودولیت روی کامپیوتر مشاهده شود.

سپس خط دید لنز دوربین و تئودولیت که به عنوان جسم موردنظر است را هم‌راستا می‌نماییم. سپس با استفاده از گزینه موجود روی تئودولیت مقدار فاصله‌ی مرکز تئودولیت تا مرکز لنز را پیدا کرده و سپس این فاصله را با طول لنز که با خط کش اندازه‌گیری شده، جمع نموده تا فاصله مرکز تئودولیت تا CCD دوربین بدست آید. در این حالت عکسی از

- [2] Daniel F. DeMenthon and Larry S. Davis. "Model-based object pose in 25 lines of code". International Journal of Computer Vision, 15:123–141. 1995.
- [3] Fischer and Bolles. "Random sample consensus: A paradigm for model fitting with Applications to image analysis and automated cartography". Graphics and Image Processing, 24(6):381–395. 1981.
- [4] Haralick. "Analysis and solutions of the three point perspective pose estimation problem". Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, pages 592–598. 1991.
- [5] Lowe. "Fitting parameterized three-dimensional models to images". IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(5):129–142. May 1991.
- [6] Quan and Lan. "Linear n-point camera pose determination". IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21(7). 1999.
- [7] R. Y. Tsai. "Versatile camera calibration technique for high accuracy 3-d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses". IEEE Journal of Robotics and Automation, 3:323–344. 1987.
- [8] Roberts, L.G. "Machine Perception of Three-Dimensional Solids". In Optical and Electro optical Information Processing, J. Tippet et al, eds, MIT Press. 1965.
- [9] Sebastian Grembowietz. Technical University at Munchen. "3D Pose Estimation". 2005.
- [10] Yuan. "A general photogrammetric solution for the determining object position and orientation". IEEE Trans. Robotics and Automation, 5(2):129–142. 1989.
- [11] Thomas Petersen. "A Comparison of 2D-3D Pose Estimation Methods". Aalborg University - Institute for Media Technology Computer vision and graphics. Aalborg University. 2008.
- [12] M.L. Liu, K.H. Wong. "Pose estimation using four corresponding points". Pattern Recognition Letters 20 (1999) 69±74. 1999.
- [13] Bujnak, M., Kukeleva, Z., Pajdla, T. "New efficient solution to the absolute pose problem for camera with unknown focal length and radial distortion". In: The Tenth Asian Conference on Computer Vision, Queenstown, New Zealand, pp. 11–24. 2010.
- [14] Abidi, M.A., Chandra, T. "A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: algorithm and evaluation". IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 17(5), 534–538. 1995.
- [15] Yang Guo, "A Novel Solution to the P4P Problem for an Uncalibrated Camera", Springer Science+Business Media, LLC. 2012.

[۱۶] جعفر حیرانی نویری. جزوه درس ناوبری. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. دانشکده برق و کامپیوتر. ۱۳۸۹.

[۱۷] مهدیه حسینی زاده آلاشتی. تعیین حرکت فضایی یک جسم مشخص با فیلم برداری. پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی. دانشکده برق و کامپیوتر. ۱۳۹۱.



شکل ۱۰. تنودولیت دوران داده شده و راستاهای مرجع چسبیده به آن.

شرط توقف در برنامه‌ی شبیه‌سازی به دلیل دقیق بودن داده‌ها کمتر شدن خطا از حد مشخصی بود. ولی حال که در انتخاب نقاط خطایی وجود دارد، باید بعد از اجرای کامل برنامه بهترین جواب را انتخاب نمود، که ممکن است خطای این بهترین جواب بیشتر از شرط توقف برنامه باشد. نتیجه‌ی بدست آمده در آزمایش‌های مختلف را در جدول زیر مشاهده می‌کنید که خطای آن دو تا سه درجه برای زوایای دوران و دو تا سه سانتی‌متر برای فاصله‌ی تنودولیت تا دوربین است.

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای تعیین موقعیت و وضعیت یک جسم مشخص متعامد با دانستن مدل شیء ارائه شد. در ابتدا برای بهتر پیمودن مسیر شیء را قلمی فرض نموده که فاصله‌ی آن تا دوربین معین است. با نتیجه‌ی بدست آمده از پیچیده‌ترین حالت قرارگیری قلم در مقابل دوربین، ده معادله برای شیء‌ای مکعبی بدست آمد. با شبیه‌سازی به بررسی صحت این روابط پرداختیم. برای جلوگیری از مشکلات عددی چهارگان‌ها را بکار برده و با انتخاب مجموعه‌ای از شرایط اولیه درست و کامل برای تمام زوایای دوران در کمتر از سه ثانیه به موقعیت و وضعیت یک جسم مکعب با داشتن تصویر چهار نقطه‌ی مشخص روی آن رسیدیم.

با معرفی چهارگان‌ها شرایط اولیه را به صورت مجموعه‌ای از شرایط اولیه انتخاب و از بهترین شرط اولیه برای هر حالت ممکن استفاده نمودیم. در مرحله‌ی شبیه‌سازی به دلیل دقیق بودن نقاط انتخابی خطایی وجود نداشت.

در آزمایش‌های عملی که نقاط انتخابی دقیق نبوده و با خطایی بدست می‌آیند با خطای کمتر از سه درجه برای زوایای دوران و کمتر از سه سانتی‌متر برای فاصله‌ی شیء تا دوربین به صحت روابط موجود و شبیه‌سازی پی بردیم.

۱۰- مراجع

- [1] David Eugene Smith. "History of modern mathematics", Mathematical Monographs, (1).