

کنترل تطبیقی ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک بر پایه رهیافت تقریب توابع متعامد

ابولفتح نیکرنجبر^۱، نیما ولدبیدی^۲

^۱ استادیار مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، a.nikranjbar@kiau.ac.ir

^۲ کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، nimavb22@hotmail.com

دریافت: 1396/2/22 پذیرش: 1396/1/16

چکیده: رویکرد کنترل مبتنی بر رگرسور، از رویکردهای رایج حوزه کنترل سیستم‌های غیرخطی است که به حوزه کنترل ربات‌های سیار نیز توسعه یافته است. بازنویسی مدل فرآیند در قالب ماتریس رگرسور با نایقینی‌ها جهت برپایی قاعده کنترل در این رویکرد، نیازمند آگاهی از ساختار دینامیکی سیستم است. بدیهی است پارامتری سازی فرآیند از مشکلات اصلی این رویکرد کنترلی محسوب می‌شود که موجب توسعه راهبردهای فاقد رگرسور شده است. اصول طراحی کنترل کننده در رویکرد تقریب توابع، بر پایه تخمین مناسب دینامیک ناشناخته فرآیند با استفاده از تقریب فوریه توابع متعامد استوار است. در این پژوهش کنترل ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک بر اساس رهیافت فاقد رگرسور بصورت روشمند ارائه شده است. دینامیک ربات با استفاده از تقریب سری فوریه و بهره‌گیری از مجموعه متنوعی از توابع متعامد نمونه از جمله بسل، لگوانژ، چیشف و لژاندر به عنوان توابع پایه، تخمین زده شده است. دینامیک سیستم تقریبی با رعایت الزامات پایداری، بطور مستقیم در طراحی کنترل کننده تطبیقی ردیاب مسیر ربات سیار مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل، با سه رویکرد کنترل دینامیک معکوس، کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال مقایسه و کیفیت عملکرد مطلوب و قابل توجه آن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: کنترل تطبیقی، کنترل تقریب توابع، ربات سیار غیرهولونومیک، فاقد رگرسور.

Adaptive Trajectory Tracking Control of Dynamics of Nonholonomic Mobile Robot based on Orthogonal Function Approximation Technique

Abolfath Nikranjbar, Nima Valadbeyghi

Abstract: Control methods based on regressor matrix and vector of uncertain variables, are the common approaches in control of nonlinear systems that are successfully extended to mobile robot control applications. To establish the controller in regressor based approaches, rewriting the process model in the parameterized form of regressor with uncertainties is essential. Evidently, this main drawback became a motivation for development of the regressor free control strategies. Controller design principle of the regressor free approaches are based on good estimation of the unknown dynamics by function approximation techniques (FAT). In this study, the systematic trajectory-tracking dynamic control design of nonholonomic mobile robot using (FAT) approach is illustrated. The robot dynamics is estimated using Fourier series approximation using variety of orthogonal basis functions such as Bessel, Laguerre, Chebyshev, and Legendre orthogonal basis functions. The function approximated dynamic of the system compliance with stability requirements is directly used in trajectory tracking control design of nonholonomic mobile robot. The results of the proposed method is compared with the inverse dynamic control method, two main regressor based adaptive inverse dynamics, and passivity based adaptive control approaches. The impressive quality of the performance of FAT based control algorithm is presented.

Keywords: Adaptive control, Function approximation control, Nonholonomic mobile robot, Regressor-free.

۱- مقدمه

راهبردهای رایج کنترلی مبتنی بر در اختیار داشتن مقادیر و محدوده قابل اتکای تغییرات نایقینی‌های دینامیک ربات نظیر جرم و ممان اینرسی است. وجود نایقینی‌ها و دینامیک مدل نشده فرآیند نیز ضرورت انتخاب راهبرد مناسب در کنترل ربات‌های سیار به عنوان سیستم‌های غیرخطی چندمتغیره مقید در ردیابی دقیق مسیر را اجتناب ناپذیر می‌کند. از جمله رویکردهای متداول در کنترل سیستم‌های غیرخطی همراه با نایقینی، تجمیع این مقادیر در بردار نایقینی‌ها و پارامتری‌سازی معادله دینامیکی حاکم بر ربات در قالب ماتریس رگرسیون ضربدر بردار نایقینی‌ها است. گفتنی است روش مذکور به عنوان روشی شناخته شده و موفق به کنترل ربات‌های متحرک نیز توسعه یافته است. نکته حائز اهمیت در استفاده از رویکرد برپایی قاعده کنترل بر اساس ماتریس رگرسیون، نیاز به آگاهی از ساختار دینامیکی سیستم و تنظیم آن در قالب مورد نظر است. بدیهی است تنظیم قالب مذکور از مشکلات اصلی این رویکرد کنترلی محسوب می‌شود که اجتناب از آن موجب توسعه راهبردهای فاقد رگرسیون^۱ شده است. مطالعات میدانی نشان از گرایش محققین به رویکرد فاقد رگرسیون در دهه اخیر است. در راستا به عنوان نمونه اولیه‌ای از پژوهش‌های منتشر شده با رویکرد فاقد رگرسیون می‌توان به مرجه اشاره نمود. در پژوهش مذکور، کنترل کننده مد لغزش مرتبه دوم مقاوم پیوسته عاری از نوسانات^۲ بی‌نیاز از مدل^۳ با ساختار شبه تناسبی - مشتق‌گیر - انتگرال‌گیر برای کنترل بازوی ماهر با رویکرد فاقد رگرسیون پیشنهاد شده است [۱]. مطابق روش پیشنهادی، تنظیم دقیق بهره پسخور کنترل کننده مد لغزش مرتبه دو، بدون نیاز به آگاهی از دینامیک سامانه با هدف همگرایی موضعی نمایی خطای موقعیت و نیرو صورت گرفت. نکته قابل توجه در این رویکرد، ساختار ساده کنترلی در مقایسه با کنترل کننده بر پایه رگرسیون است.

شیوه «تقریب توابع» به عنوان روشی کارآمد در رهیافت فاقد رگرسیون مطرح گردیده است. در این راستا بخش قابل ملاحظه از پژوهش‌های منتشر شده مبتنی بر تقریب دینامیک ناشناخته سیستم از «روش تقریب توابع متعامد»^۴ است. از جمله کاربردهای این روش جهت کنترل بازوی ماهر چند رابطه با مفاصل انعطاف‌پذیر در [۲] ارائه شده است. دست یابی به اهداف کنترلی بی‌نیاز از محاسبه ماتریس رگرسیون و پسخور شتاب از ویژگی‌های شاخص این روش است. در پژوهش دیگری از شیوه مذکور در کنترل آمپدانس ربات با رویکرد تقریب توابع فاقد ماتریس رگرسیون در [۳] منتشر شده است. از ویژگی‌های قابل توجه در این رویکرد بی‌نیازی کنترل کننده از مشتق زمانی نیروی تماسی و پسخور شتاب مفاصل است. در [۴] به عنوان یکی از منابع پایه، مدل سازی بازوی ماهر در قالب مجموعه معادلات مرتبه دو غیرخطی و قابلیت استفاده از شیوه تقریب تابع

تشریح شده است. در ادامه نتایج حاصل از رویکرد مورد اشاره با استفاده از یازده جمله سری فوریه در دست یابی به اهداف ردیابی مسیر با کیفیت مطلوب و بی‌نیاز از ماتریس رگرسیون و دینامیک ربات گزارش شده است. در ادامه ترکیبی از مولفین مرجع [۴] و همکاران، نتیجه تئوری تقریب توابع در مسئله کنترل ردیاب بازوی ماهر دو رابطه را در قالب مراجع [۵] منتشر نمودند. در مرجع [۵] نویسندگان حاصل نتایج طراحی کنترل کننده-ی تطبیقی فاقد رگرسیون برای ربات خودتنظیم بر اساس شیوه تقریب توابع با هدف بهبود عملکرد سیستم با بازخورد دیداری را ارائه نمودند. مرجع [۶] را می‌توان به عنوان نخستین پژوهش مبتنی بر رهیافت فاقد رگرسیون با تمرکز بر کنترل آمپدانس تطبیقی ربات با در نظر گرفتن انعطاف پذیری مفاصل و دینامیک سیستم محسوب نمود. مرجع [۷] نیز به نوعی توسعه پژوهش [۵] است که در آن مولفین رویکرد کنترل ردیاب دینامیک بازوی ماهر همراه با نایقینی‌های زمانی از روش تقریب توابع دینامیک سیستم را منتشر کرده‌اند. در مرجع [۸] نیز نتایج حاصل از رهیافت تقریب توابع در کنترل ردیاب بازوی ماهر با مفاصل انعطاف‌پذیر ارائه شده است. در ادامه مولفین مراجع اشاره شده، حاصل پژوهش‌های منتشر شده خود در مجلات پژوهشی را در قالب کتاب حاوی تئوری رویکرد فاقد رگرسیون با رویکرد تقریب تابع ارائه نمودند [۹]. توسعه روش تقریب توابع به کنترل بازوی ماهر با مفاصل انعطاف‌پذیر همراه با عملگرهای الکتریکی توسط پژوهشگران قبل، در [۱۰] ارائه شده است که این رویکرد توسط مولفین با انتشار مقالات [۱۱] و [۱۲] با کلیدواژه مقایسه عملکرد رویکرد تقریب توابع با روش «اسلاتین و لی»^۵ یا کنترل تطبیقی «مد لغزش»^۶ یا «غیرفعال»^۷ تا سال ۲۰۱۵ میلادی ادامه یافته است. بعد از این ایام عرصه کنترل تطبیقی فاقد رگرسیون با استفاده از توابع متعامد، شاهد حضور پر رنگ سایر محققین است. مرجع [۱۳] به عنوان نمونه مناسبی با زمینه پژوهشی کنترل ردیاب بازوی ماهر همراه با نایقینی از روش تقریب توابع مبتنی بر سطح لغزش، قابل ذکر است. مراجع [۱۴، ۱۵] نیز به ترتیب نمونه‌هایی از مقالات منتشر شده در این حوزه با هدف کنترل بازوی ماهر ۶ درجه آزادی پوما^۸ ۵۶۰ می‌باشند که نشان از روزآمدی و کارآمدی رویکرد تقریب توابع بوده و مورد اقبال محققین این عرصه قرار گرفته است.

پیشینه پژوهش بیانگر اقبال محققین به رویکرد فاقد رگرسیون مبتنی بر تقریب توابع متعامد بی‌نیاز از دینامیک سیستم در طراحی کنترل کننده کارآمد می‌باشد. این روش با پیشنهاد ساختار ساده و موثر کنترل کننده، قابلیت استفاده در کنترل سیستم‌های غیرخطی چند ورودی - چند خروجی با دینامیک نامعلوم، به عنوان رویکرد مناسبی در کاربردهای متنوع مطرح شده است. علیرغم توسعه نسبتاً گسترده این روش در کاربردهای کنترل بازوی ماهر با رابط‌های صلب و انعطاف‌پذیر، مطابق مطالعات میدانی نمونه‌ای از کاربردهای آن در کنترل ربات سیار مشاهده نگردید. با

⁵ Slotin – Li⁶ Sliding mode⁷ Passive⁸ PUMA manipulator¹ Regressor-free² Chatter free³ Model free⁴ Function Approximation Technique (FAT)

در کاربرد رابطه (۱) برای ربات سیار، مطابق شکل (۱) ربات سیار بصورت ربات سه چرخ با دو چرخ با ورودی مستقل و یک چرخ تمام جهت برای حفظ تعادل، مورد نظر است. دو چرخ محرک با فرض عدم لغزش جانبی محدودیت سینماتیکی در قالب قید غیرهولونومیک ایجاد می کنند.

مطابق شکل (۱)، وضعیت ربات با توصیف موقعیت و جهت گیری مختصات الصاق شده بر آن یعنی $Px_c y_c$ نسبت به مختصات اینرسی Oxy صورت می گیرد. بردار موقعیت و جهت گیری ربات در مختصات اینرسی با بردار $q = [x \ y \ \theta]^T$ بیان می شود که در آن زوج متغیر (x, y) و θ به ترتیب بیانگر موقعیت مبدأ و جهت گیری ربات نسبت به مختصات اینرسی هستند. حرکت ربات سیار مورد نظر مقید با قید عدم لغزش جانبی فرض می شود. مطابق این فرض، ربات محدود به حرکت در جهت عمود بر محور چرخ های عقب خواهد بود. بیان ریاضی قید فوق در قالب قید غیرهولونومیک مطابق رابطه (۲) است:

$$\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta) = 0 \quad (2)$$

از طرفی رابطه ژاکوبین در توصیف رابطه سرعت ربات در دو مختصات مورد نظر بصورت رابطه (۳) می باشد

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = S(q)v(t) \quad (3)$$

که در آن $S(q)$ ماتریس ژاکوبین، $v (= [v \ \omega]^T)$ بردار سرعت ربات شامل سرعت خطی v و سرعت زاویه ای $\omega (= \dot{\theta})$ در مختصات متحرک و \dot{q} بردار سرعت در مختصات مرجع است.

در توسعه رابطه (۱) برای ربات مورد نظر این پژوهش، ضرائب معادله برای ربات سیار مطابق رویکرد دینامیک تحلیلی، بصورت (۴) حاصل می شوند [۱۶]:

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & md \sin(\theta) \\ 0 & m & -md \cos(\theta) \\ md \sin(\theta) & -md \cos(\theta) & I_G + md^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\bar{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & md\omega \cos(\theta) \\ 0 & 0 & md\omega \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(q) = [-\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad -d]$$

$$\bar{B}(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -L & L \end{bmatrix}$$

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_r \\ \bar{\tau}_l \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -m[\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)]\dot{\theta}$$

در ضرائب فوق عبارت های $\bar{\tau}_l$ و $\bar{\tau}_r$ به ترتیب بیانگر گشتاور وارد بر چرخ های راست و چپ بوده و همچنین برای کاربرد مورد نظر این پژوهش عبارت های $\bar{F}(q)$ و $\bar{G}(q)$ برابر صفر فرض می شوند. وجود نیروهای

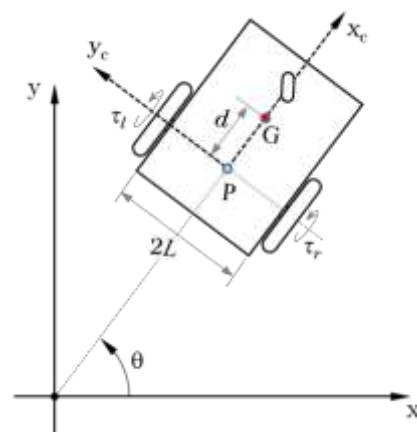
عنايت به پیچیدگی کنترل ردیابی ربات سیار با ساختار غیرخطی چندمتغیره همراه با قیود غیرهولونومیک^۱ که موجب افزایش پیچیدگی طراحی کنترل کننده ردیاب می شود، در این پژوهش هدف توسعه رهیافت طراحی کنترل کننده دینامیک فاقد رگر سور با تقریب فوریه توابع متعامد در کنترل ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک و مقایسه عملکرد آن علاوه بر رویکرد دینامیک معکوس فرآیند، با دو رویکرد متداول تطبیقی مبتنی بر رگر سور است. در رویکرد فاقد رگر سور، تقریب دینامیک نامعلوم سیستم با استفاده از توابع متعامد چیسف به عنوان توابع پایه، بطور مستقیم در طراحی کنترل کننده تطبیقی ردیاب مسیر ربات سیار غیرهولونومیک با رعایت الزامات پایداری مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از روش با رویکرد کنترل تطبیقی همراه رگر سور مقایسه و کیفیت عملکرد مطلوب و قابل توجه آن در مقایسه با رویکردهای رگر سور محور ارائه شده است.

۲- دینامیک ربات سیار

معادله عمومی دینامیک ربات با n متغیر تعمیم یافته $q \in R^{n \times 1}$ و m قید مطابق (۱) تعریف می شود [۱۶]

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{F}(q) + \bar{G}(q) + \bar{\tau}_d = \bar{B}(q)\bar{\tau} + A^T(q)\lambda \quad (1)$$

که در آن $\bar{M}(q) \in R^{n \times n}$ ماتریس جرم یا اینرسی مثبت معین متقارن، $\bar{C}(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ ماتریس جانب مرکز و کوریولیس، $\bar{F}(q) \in R^{n \times 1}$ بردار اصطکاک سطح، $\bar{G}(q) \in R^{n \times 1}$ بردار نیروی جاذبه، $\tau_d \in R^{n \times 1}$ اختلالات ناشناخته محدود شده شامل دینامیک مدل نشده، $\bar{B}(q) \in R^{n \times r}$ ماتریس تبدیل ورودی، $\bar{\tau} \in R^{r \times 1}$ بردار ورودی، $A(q) \in R^{m \times n}$ ماتریس وابسته به قیود و $\lambda \in R^{m \times 1}$ نیروهای قید است.



شکل ۱: ربات سه چرخ با مشخصات هندسی و مختصات ثابت و بدنی

¹ Nonholonomic

۳-۱- کنترل کننده خطی سازی پسخور^۱

در صورت در دسترس بودن کلیه متغیرها، با انتخاب کنترل کننده

تناسبی-انتگرال گیر مطابق (۸)

$$\tau = M \left[\dot{v}_d - K_p \tilde{v} - K_i \int \tilde{v} dt \right] + C v \quad (8)$$

که در آن v_d بردار سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای مطلوب، $K_i \in R^{2 \times 2}$ و $K_p \in R^{2 \times 2}$ بردار خطا و ماتریس‌های بهره کنترل مناسب هستند.

با جایگذاری از (۸) در (۶) و مرتب کردن رابطه، مطابق ضمیمه ۱

می‌توان نشان داد که دینامیک خطای سیستم مدار بسته مطابق (۹)

$$\dot{\tilde{v}} + K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt = 0 \quad (9)$$

و یا

$$\ddot{\tilde{v}} + K_p \dot{\tilde{v}} + K_i \tilde{v} = 0 \quad (10)$$

حاصل شده و بنابراین سیستم بصورت مجانبی پایدار خواهد شد. برپایی کنترل کننده (۸) نیازمند اطلاعات دقیق از دینامیک فرآیند با ضرائب قطعی است که از معایب روش محسوب می‌شود.

۳-۲- کنترل تطبیقی ردیاب دینامیک ربات سیار

عملکرد کنترل تطبیقی تقریب توابع دینامیک نامعلوم ربات سیار، با دو رویکرد کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال مورد مقایسه قرار گرفته است. در ادامه رویکردهای مذکور با کاربرد در کنترل سیستم‌های غیرخطی عمومی، برای کنترل دینامیک ربات سیار در ردیابی سرعت مرجع بطور اجمال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

۳-۲-۱- کنترل دینامیک معکوس تطبیقی ربات سیار

در صورت معلوم نبودن کلیه متغیرهای فرآیند، پارامتری سازی سمت چپ رابطه (۶) در قالب ماتریس رگر سور معلوم ضرب در بردار متغیر مجهول p و استفاده از رویکرد کنترل تطبیقی در تنظیم درایه‌های p از رویکردهای متداول است. در این رویکرد برای برپایی کنترل کننده، مدل فرآیند مطابق رابطه (۶)، بصورت ضرب ماتریس رگر سور در بردار نایقینی‌ها، پارامتری سازی می‌شود:

$$M \dot{v} + C v = Y(v, \dot{v}) p \quad (11)$$

که در آن ماتریس رگر سور Y و بردار نایقینی‌های p مطابق (۱۲) تعریف می‌شوند:

$$Y(v, \dot{v}) = \begin{bmatrix} \dot{v} & -\omega^2 & 0 \\ 0 & v\omega & \dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$p = [m \quad md \quad I_G + md^2]^T$$

کنترل کننده مستقیمی بر اساس (۶) بصورت (۱۳) پیشنهاد می‌شود [۹]

$$\tau = \hat{M} \left[\dot{v}_d - K_p \tilde{v} - K_i \int \tilde{v} dt \right] + \hat{C} v \quad (13)$$

قیدی در قالب عبارت $\lambda A^T(q)$ با بردار نامعلوم نیروهای قید λ موجب پیچیدگی مدل دینامیکی می‌شود. رویکرد غالب در مواجهه با این مشکل حذف عبارت فوق با انتقال رابطه به فضای مناسب است که این امر در مورد ربات سیار با انتقال مدل دینامیکی به چارچوب متحرک با استفاده از ماتریس ژاکوبین صورت می‌گیرد. بنابراین با ضرب طرفین رابطه (۱) در $S^T(q)$ و جایگذاری از رابطه (۳)، معادله حرکت کامل سطحی ربات سیار غیرهولونومیک مطابق رابطه (۵) حاصل می‌شود [۱۶]:

$$S^T \bar{M} S \dot{v} + S^T (\bar{M} \dot{S} + \bar{C} S) v = S^T \bar{B} \tau \quad (5)$$

با انتخاب $M (= S^T \bar{M} S)$ ، $C (= S^T (\bar{M} \dot{S} + \bar{C} S))$ و $v (= S^T \bar{B} \tau)$ برای ساده‌سازی، رابطه (۵) بر حسب بردار سرعت $v (= [v \quad \omega]^T)$ با مولفه‌های سرعت خطی v و سرعت زاویه‌ای ω ، مطابق رابطه (۶) بازنویسی می‌شود:

$$M \dot{v} + C v = \tau \quad (6)$$

که در آن:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G + md^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & md\omega \\ -md\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -L & L \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

۳-۳- کنترل ربات سیار

مسئله کنترل دینامیک ردیاب ربات سیار غیرهولونومیک عبارت از محاسبه گشتاورهای تعمیم یافته در رابطه (۶) با ضرائب (۷) برای ردیابی مسیر مرجع یا ورودی $v_d (= [v_d \quad \omega_d]^T)$ است. همانگونه که مشاهده می‌شود مسئله کنترل منجر به ردیابی بردار سرعت ورودی شده و در صورت نیاز به تعیین سرعت و موقعیت در مختصات اینرسی، می‌توان از رابطه (۳) استفاده کرد.

در این پژوهش با هدف تبیین عملکرد روش کنترل تطبیقی فاقد رگر سور، رویکرد مقایسه‌ای با دو روش شناخته شده تطبیقی دیگر دنبال شده است. در ابتدا روش کنترل متداول خطی سازی پسخور در پایدارسازی دینامیک سیستم ارائه شده و متعاقباً به دو روش پیشرفته کنترل تطبیقی «دینامیک معکوس» و «غیر فعال» ربات متحرک اشاره شده است. روش کنترل تطبیقی «فاقد رگر سور مبتنی بر توابع متعامد» نیز با ذکر جزئیات و بطور روشمند ارائه شده است. لازم به ذکر است که به علت کاهش درجه مشتق در رابطه عمومی دینامیک ربات سیار (۶)، در انتخاب عبارت‌های متناظر خطا در کنترل کننده‌ها، رعایت یک درجه کاهش در مرتبه مشتق برای دست‌یابی به ساختار کنترل کننده‌های قابل پیاده‌سازی توصیه می‌شود.

^۱ Feedback Linearization

باید توجه نمود که پیاده‌سازی کنترل کننده (۱۳) با استفاده از (۲۰) مستلزم استفاده از فیدبک شتاب \ddot{v} است که از معایب این رویکرد محسوب می‌شود.

۳-۲-۲- کنترل تطبیقی غیرفعال ربات سیار

برای اجتناب از پس‌خور شتاب، رویکرد استفاده از بردار سطح لغزش پیشنهاد شده است [۹، ۱۱]. در این رویکرد با تعریف بردار سطح لغزش خطا بصورت

$$s = \ddot{v} + \Lambda \int \ddot{v} dt \quad (22)$$

که در آن $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ با $\lambda_i > 0$ برای $i = 1, \dots, n$ است. بدیهی است همگرایی s ، همگرایی خطای خروجی e را در پی دارد.

با جایگذاری از (۲۲) در (۶) و بازنویسی رابطه، مدل مدار بسته ربات مطابق ذیل خواهد شد:

$$M\dot{s} + Cs + M\dot{v}_r + Cv_r = \tau \quad (23)$$

که در آن $v_d (= v_d - \Lambda \int \ddot{v} dt)$ است.

با انتخاب کنترل کننده (۲۴)

$$\tau = M\dot{v}_r + Cv_r - K_d s \quad (24)$$

که در آن K_d ماتریس مثبت معین است و جایگذاری (۲۴) در (۶) با فرض معلوم بودن ساختار ربات مطابق ضمیمه ۳ می‌توان نشان داد:

$$M\dot{s} + Cs + K_d s = 0 \quad (25)$$

که پایداری مجانبی سیستم مدار بسته حاصل می‌شود. در اثبات پایداری (۶) توسط کنترل کننده (۲۴)، تابع لیاپانف (۲۶) پیشنهاد شده است [۹، ۱۱]:

$$V = \frac{1}{2} s^T M s \quad (26)$$

که مشتق زمانی آن در طول مسیر مطابق ذیل خواهد بود:

$$\dot{V} = s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s \quad (27)$$

با محاسبه \dot{S} از (۲۵) و جایگذاری آن در (۲۷) و مرتب کردن رابطه، رابطه (۲۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = -s^T K_d s - \frac{1}{2} s^T (\dot{M} - 2C) s \quad (28)$$

از آنجا که می‌توان ثابت کرد $\dot{M} - 2C$ پاد متقارن است، رابطه فوق به شکل رابطه (۲۹) ساده می‌شود:

$$\dot{V} = -s^T K_d s \leq 0 \quad (29)$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که S به صورت یکپارچه محدود بوده و قابل انتگرال‌گیری است و \dot{S} نیز محدود است. از آنجایی که با $t \rightarrow \infty$ ، $s \rightarrow 0$ می‌توان همگرایی مجانبی خطای ردیابی را نتیجه گرفت. خاطر نشان می‌سازد که طراحی بالا در صورت معلوم بودن تمام متغیرهای ربات، معتبر است. چنانچه مقادیر نامی M و C در (۶) در دسترس نباشند، کنترل کننده (۲۴) تحقق‌پذیر نیست. در این صورت کنترل کننده‌ی (۳۰) با مقادیر تخمینی \hat{M} و \hat{C} تعریف می‌شود:

$$\tau = \hat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_d s \quad (30)$$

که در آن \hat{M} و \hat{C} مقادیر تخمینی ضرائب M و C هستند. مطابق ضمیمه می‌توان نشان داد که سیستم مدار بسته حاصل از کاربرد کنترل کننده (۱۳) در (۶)، مطابق (۱۴) است:

$$\dot{v} + K_p \tilde{v} + K_i \int e dt = -\hat{M}^{-1}(\hat{M}\dot{v} + \hat{C}v) \quad (14)$$

که در آن $\hat{C} = C - \hat{C}$ و $\hat{M} = M - \hat{M}$ خطای تخمین پارامترهای فرآیند هستند. با تعریف متغیر $\tilde{p} (= p - \hat{p})$ که در آن $\hat{p} \in R^3$ تخمین p بوده و با فرض معکوس‌پذیری \hat{M} در $t \geq 0$ سمت راست رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت (۱۵) پارامتری‌سازی نمود.

$$\dot{v} + K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt = -\hat{M}^{-1} Y(v, \dot{v}) \tilde{p} \quad (15)$$

مطابق دینامیک خطای سیستم مدار بسته (۱۵) چنانچه بتوان قاعده‌ی تنظیمی برای \hat{p} فراهم نمود که همگرایی مناسب $\hat{p} \rightarrow p$ در صورت $t \rightarrow \infty$ تحقق یابد، در اینصورت همگرایی سمت چپ (۱۵) به شکل معادله (۹) فراهم شده و پایداری مطلوب مجانبی سیستم مدار بسته حاصل می‌شود.

در برپایی قاعده تطبیق پارامترهای نایقینی، مطابق ضمیمه با تعریف بردار $x = \left[\left(\int \tilde{v} dt \right)^T \tilde{v}^T \right]^T \in R^4$ فضای حالت (۱۶) بازنویسی نمود:

$$\dot{x} = Ax - B\hat{M}^{-1}Y(v, \dot{v})\tilde{p} \quad (16)$$

که در آن ماتریس‌های ضرائب $A \in R^{4 \times 4}$ ، $B \in R^{4 \times 2}$ مطابق ذیل تعریف و $I_2 \in R^{2 \times 2}$ ماتریس همانی است.

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_i & -K_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

جهت طراحی قاعده تطبیقی بروزرسانی بردار نایقینی‌ها یعنی \hat{p} ضمن رعایت الزامات پایداری سیستم مدار بسته، از روش لیاپانف استفاده می‌شود. بدین منظور تابع لیاپانف به شکل زیر انتخاب می‌شود [۱۱]

$$V(x, \tilde{p}) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma \tilde{p} \quad (17)$$

که در آن $\Gamma = \Gamma^T \in R^{3 \times 3}$ ماتریس وزن مثبت معین و $P = P^T \in R^{4 \times 4}$ ماتریس مثبت معین پاسخ معادله لیاپانف است.

$$A^T P + P A = -Q \quad (18)$$

با توجه به اینکه ماتریس A هورویتز است، مطابق (۱۸) برای ماتریس مثبت معین معلوم $Q = Q^T \in R^{4 \times 4}$ ، ماتریس مثبت معین متقارن $P = P^T \in R^{4 \times 4}$ می‌توان یافت که شرط پایداری لیاپانف را اجابت نماید. بنابراین مطابق ضمیمه ۲، با محاسبه مشتق زمانی V در امتداد مسیر (۱۶):

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x - \tilde{p}^T \left[(B\hat{M}^{-1}Y)^T P x + \Gamma \tilde{p} \right] \quad (19)$$

و انتخاب قاعده به روز رسانی \hat{p} بصورت:

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^{-1} [B\hat{M}^{-1}Y(v, \dot{v})]^T P x \quad (20)$$

معادله (۱۹) به شکل (۲۱) حاصل می‌گردد [۱۱].

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x \leq 0 \quad (21)$$

جز در مواردی که امکان پارامتری سازی مدل فرآیند به صورت خطی وجود داشته باشد، قابل کاربرد نیستند. در این بخش شیوه استفاده از رویکرد تقریب توابع نامعلوم با استفاده از ترکیب خطی محدودی از توابع متعامد پایه با ضرائب وزن نامعلوم برای تقریب دینامیک نامعلوم فرآیند، همراه با قواعد تطبیق وزن ها و طراحی کنترل کننده ارائه می شود. با استفاده از شیوه تقریب توابع مطابق ضمیمه ۵، نایقینی های دینامیک ربات مطابق روابط ذیل بیان می شوند [۹، ۱۱]:

$$M = W_M^T Z_M + \varepsilon_M \quad (38)$$

$$C = W_C^T Z_C + \varepsilon_C$$

در روابط فوق W_M و W_C ماتریس های وزن، Z_M و Z_C ماتریس های توابع پایه و ε_M و ε_C خطای تخمین ماتریس های M و C هستند. با فرض استفاده از توابع پایه یکسان برای تقریب دینامیک ناشناخته، تقریب نایقینی-های فرآیند به صورت زیر بیان می شود:

$$\hat{M} = \hat{W}_M^T Z_M \quad (39)$$

$$\hat{C} = \hat{W}_C^T Z_C$$

همچنین کنترل کننده با ساختار مشابه (۳۰) و بصورت ذیل انتخاب می شود [۹، ۱۱]:

$$\tau = \hat{W}_M^T Z_M \dot{v}_r + \hat{W}_C^T Z_C v_r - K_d s \quad (40)$$

خطای دینامیک سیستم مدار بسته از جایگذاری (۴۰) در (۶) و مرتب کردن رابطه حاصل در تشابه با (۳۱) مطابق (۴۱) می گردد:

$$M \dot{s} + Cs + K_d s = -\hat{W}_M^T Z_M \dot{v}_r - \hat{W}_C^T Z_C v_r + \varepsilon \quad (41)$$

که در آن $\tilde{W}_{(.)} = W_{(.)} - \hat{W}_{(.)}$ ماتریس خطای وزن و $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_M, \varepsilon_C, s, \dot{v}_d)$ بردار خطای تقریب یکپارچه^۱ است. برای تعیین قواعد تطبیق، تابع لیاپانف بصورت ذیل تعریف می شود [۹، ۱۱]:

$$V(s, \tilde{W}_M, \tilde{W}_C) = \frac{1}{2} s^T M s + \frac{1}{2} Tr(\tilde{W}_M^T Q_M \tilde{W}_M + \tilde{W}_C^T Q_C \tilde{W}_C) \quad (42)$$

که Q_M و Q_C ماتریس های وزنی مثبت معین هستند. با مشتق گیری زمانی از (۴۲) در امتداد (۴۱):

$$\dot{V} = s^T [-Cs - K_d s - \tilde{W}_M^T Z_M \dot{v}_r - \tilde{W}_C^T Z_C v_r] + \frac{1}{2} s^T \dot{D} s - Tr(\tilde{W}_M^T Q_M \dot{\tilde{W}}_M + \tilde{W}_C^T Q_C \dot{\tilde{W}}_C) + s^T \varepsilon \quad (43)$$

و استفاده از ویژگی پادمتقارن ماتریس $\dot{M} - 2C$ ، عبارت (۴۳) بصورت زیر بازنویسی می شود:

طبق جزئیات ارائه شده در ضمیمه ۴، با جایگذاری از (۳۰) در (۶)، رابطه سیستم مدار بسته مطابق ذیل خواهد شد:

$$M \dot{s} + Cs + K_d s = \tilde{M} \dot{v}_r + \tilde{C} v_r \quad (31)$$

جهت برپایی قاعده تطبیق، سمت راست رابطه (۳۱) با پارامتری سازی به صورت خطی (۳۲) بازنویسی می شود:

$$M \dot{s} + Cs + K_d s = Y(v_r, \dot{v}_r) \tilde{p} \quad (32)$$

که در آن ماتریس رگرسور $Y(v_r, \dot{v}_r)$ مطابق (۳۳) تعریف می شود:

$$Y(v_r, \dot{v}_r) = \begin{bmatrix} \dot{v}_d - \lambda_v(v - v_d) \\ 0 \\ -\omega[\omega_d - \lambda_\omega \int (\omega - \omega_d) dt] \\ 0 \\ \omega[v_d - \lambda_v \int (v - v_d) dt] \\ \omega_d - \lambda_\omega(\omega - \omega_d) \end{bmatrix} \quad (33)$$

شایان ذکر است که بر خلاف ماتریس رگرسور $Y(v, \dot{v})$ ، ماتریس رگرسور $Y(v_r, \dot{v}_r)$ در (۳۳) مستقل از شتاب ربات سیار است. بدیهی است در صورت طراحی قاعده به روزرسانی مناسب \tilde{p} به نحوی که $\tilde{p} \rightarrow 0$ با $t \rightarrow \infty$ ، معادله (۳۲) به صورت مجانبی به معادله (۲۵) هم گرا شده و پایداری سیستم مدار بسته تضمین می شود. برای تعیین قاعده به روزرسانی بردار خطای نایقینی های \tilde{p} ، تابع لیاپانف به شکل زیر تعریف می شود:

$$V(s, \tilde{p}) = \frac{1}{2} s^T M s + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma \tilde{p} \quad (34)$$

که مشتق زمانی آن در طول مسیر عبارتست از:

$$\dot{V} = -s^T K_d s - \tilde{p}^T (\Gamma \dot{\tilde{p}} + Y^T s) \quad (35)$$

بنابراین قاعده تطبیق به صورت (۳۶) انتخاب:

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma^{-1} Y^T(v_r, \dot{v}_r) s \quad (36)$$

و معادله (۳۵) مطابق (۳۷) خواهد شد:

$$\dot{V} = -s^T K_d s \leq 0 \quad (37)$$

که پایداری فرآیند همراه با ردیابی ورودی توسط کنترل کننده (۲۴) تضمین می شود.

۳-۲-۳- کنترل تطبیقی ربات سیار برپایه تقریب توابع

رویکردهای کنترل تطبیقی بیان شده در ۳-۲-۳ و ۲-۲-۳، رویکردهای مرسوم کنترل تطبیقی در مواجهه مستقیم با سیستم های غیر خطی همراه با عدم قطعیت پارامتری است. مطابق تئوری بیان شده، هر دو روش برپایه پارامتری سازی (یا خطی سازی) رگرسور - نایقینی ها، استوارند. اگر چه در رویکرد کنترل تطبیقی غیرفعال، وابستگی کنترل کننده به شتاب حذف شده است که مزیت روش محسوب می شود، ولی کماکان استفاده از رویکرد مذکور نیازمند استخراج ماتریس رگرسور با دشواری های مربوطه همراه است. به بیانی، کنترل کننده های تطبیقی رایج در ارائه قواعد به روزرسانی مناسب برای همگرایی $\hat{M} \rightarrow M$ و $\hat{C} \rightarrow C$ با $t \rightarrow \infty$

¹ Lumped approximation error vector

به منظور نمایش اثربخشی رویکرد مورد استفاده در مسئله چالش- برانگیز کنترل دینامیک ربات سیار هولونومیک، در برنامه شبیه سازی، امکان تولید رشته توابع متعامد با طول دلخواه با استفاده از روابط بازگشتی فراهم شده است. در جدول ۱ فهرست برخی از توابع متعامد با روابط بازگشتی ارائه شده است.

جدول ۱: برخی از توابع متعامد با روابط بازگشتی [۹]

رابطه بازگشتی	بازه تعامد	سری
$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!}$ $xJ_n(x) = 2nJ_{n-1}(x) - xJ_{n-2}(x)$	[0, b]	بسل
$T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$	[-1, 1]	چبیشف نوع اول
$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = 1 - x$ $(n+1)L_n(x) = (2n+1-x)L_{n-1}(x) - nL_{n-2}(x)$	[0, ∞]	لگوانر
$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = x$ $(n+1)L_n(x) = (2n+1)xL_{n-1}(x) - nL_{n-2}(x)$	[-1, 1]	لژاندر

همچنین قابلیت استفاده از توابع داخلی نرم افزاری متلب در تولید رشته توابع متعامد نیز در برنامه پیش بینی شده است که از هر دو رویکرد، نتایج یکسانی حاصل می شوند.

۴- شبیه سازی

در این قسمت، اثر بخشی راهبرد پیشنهادی با استفاده از شبیه سازی رایانه ای ارائه شده است. داده های فیزیکی ربات سیار شامل مقادیر نامی جرم m ، ممان اینرسی حول مرکز جرم I_G ، فاصله مرکز ثقل d ، فاصله عرضی L و شعاع چرخ ها r مطابق جدول زیر در نظر گرفته شده اند:

جدول ۲: مقادیر پارامترهای نامی ربات سیار

m (kg)	I_G (kg - m ²)	d (m)	L (m)	r (m)
۲	۲/۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۰۳

با توجه به طراحی ردیابی دینامیک سرعت ربات سیار، مسیر مرجع انتخابی در مختصات بدنی بصورت $[v \ \omega]^T = [\sin \pi t \ \sin \pi t]^T$ و شرایط اولیه نمونه $[v_0 \ \omega_0]^T = [0.5(m/s) \ 0.2(rad/s)]^T$ به منظور یکسان سازی مقایسه عملکرد رویکردهای مختلف فرض شده است. به علاوه در انتخاب چندجمله ای های درایه ماتریس Z ، یعنی $Z_{ij} \in R^{\beta \times 1}$ از تعداد $\beta = 5$ جمله اول چندجمله ای ها استفاده شده است. نتایج آزمون نشان دهنده کسب نتایج مناسب قابل مقایسه با روش کنترل تطبیقی غیرفعال بوده و لذا از افزایش جملات پرهیز شده است. همچنین جهت مطابقت با شرایط واقعی، گشتاور چرخ های محرک در محدوده $-5 \leq T_{l,r} \leq 5$

$$\dot{V} = -s^T K_d s - s^T [\hat{W}_M^T Z_M \dot{v}_r + \hat{W}_C^T Z_C v_r] - Tr(\hat{W}_M^T Q_M \hat{W}_M + \hat{W}_C^T Q_C \hat{W}_C) + s^T \varepsilon \quad (44)$$

با مرتب کردن رابطه فوق بصورت:

$$\dot{V} = -s^T K_d s - Tr[\hat{W}_M^T (Z_M \dot{v}_r s^T + Q_M \hat{W}_M) - Tr[\hat{W}_C^T (Z_C v_r s^T + Q_C \hat{W}_C)] + s^T \varepsilon \quad (45)$$

و انتخاب قواعد به روزرسانی با اصلاح σ مطابق ضمیمه ۶ بصورت رابطه زیر:

$$\dot{\hat{W}}_M = -Q_M^{-1} (Z_M \dot{v}_r s^T + \sigma_M \hat{W}_M) \quad (46)$$

$$\dot{\hat{W}}_C = -Q_C^{-1} (Z_C v_r s^T + \sigma_C \hat{W}_C)$$

و جایگذاری آن در (۴۵):

$$\dot{V} = -s^T K_d s - \sigma_M Tr(\hat{W}_M^T \hat{W}_M) - \sigma_C Tr(\hat{W}_C^T \hat{W}_C) + s^T \varepsilon \quad (47)$$

بدیهی است در صورت تقریب مناسب نایقینی های فرآیند با انتخاب تعداد مناسبی از توابع پایه، خطای تقریب ε قابل اغماض بوده و در رابطه (۴۷) نیازی به استفاده از اصلاح σ نیست و رابطه (۴۷) به رابطه (۲۹) همگرا می گردد. در صورتی که خطای تقریب قابل اغماض نباشد، عدد $\delta > 0$ می توان یافت به نحوی که $\|\varepsilon\| \leq \delta$ ، در اینصورت قاعده کنترلی (۴۰) با افزودن عبارت مقاوم τ_{robust} بصورت زیر تعریف می شود:

$$\tau = \hat{W}_M^T Z_M \dot{v}_r + \hat{W}_C^T Z_C v_r - K_d s + \tau_{robust} \quad (48)$$

به این ترتیب، در مطالعه پایداری سیستم مدار بسته، مجدداً با شروع از رابطه (۴۲) برای تابع لیاپانف و استفاده از قواعد تطبیق (۴۶) با اصلاح σ و با مشتق گیری زمانی از (۴۲) در امتداد (۴۸)، می توان نشان داد [۹، ۱۱]:

$$\dot{V} = -s^T K_d s + \delta \|s\| + s^T \tau_{robust} \quad (49)$$

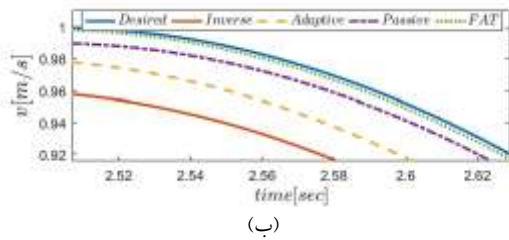
با انتخاب τ_{robust} بصورت:

$$\tau_{robust} = -\delta [\text{sgn}(s_1) \ \text{sgn}(s_2) \ \dots \ \text{sgn}(s_n)]^T \quad (50)$$

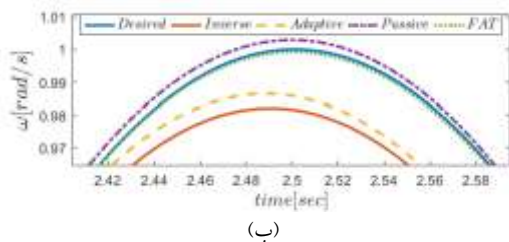
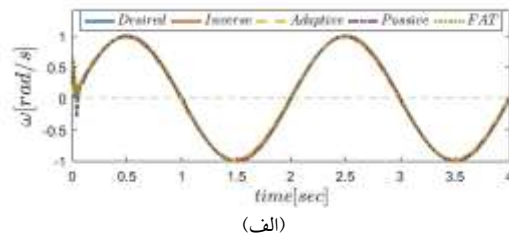
که در آن $s_i, i = 1, \dots, n$ ، مولفه های بردار لغزش s می باشند، رابطه (۴۹) به رابطه (۲۹) همگرا شده و شرط پایداری لیاپانف محقق می گردد.

۳-۴- توابع متعامد مورد استفاده در رویکرد فاقد رگرسیون

¹ Sigma modification



شکل ۲: ردیابی سرعت خطی مرجع با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگر سور با استفاده از توابع متعامد چیبیشف کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت زاویه‌ای با استفاده از کلیه روش -



شکل ۳: ردیابی سرعت زاویه‌ای مرجع با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگر سور با استفاده از توابع متعامد چیبیشف بطور مشابه، رویکرد کنترلی (FAT) با غلبه بر نایقینی‌ها و اثرات

گشتاور مزاحم، با دقت بسیار مناسب ورودی مرجع را ردیابی نموده و و رویکرد کنترلی (Passive) در درجه دوم دقت، پس از آن قرار دارد. تصدیق این امر از منحنی بزرگنمایی (۳ب) واضح است. گفتنی است این دقت در فاصله زمانی شبیه‌سازی کاملاً مشاهده شده و مختص یک محدوده زمانی کوچک نیست.

گشتاور مورد نیاز در چرخ‌های ربات برای اجابت خواسته کنترلی در ردیابی سرعت‌های مرجع از کلیه روش‌ها در شکل‌های (۴) و (۵) ترسیم شده‌اند. به استثنای رویکرد (Adaptive) که در اجابت خواسته‌ی کنترلی، سطح کنترل کمتر از سایر روش‌ها است، در هر سه روش، تلاش کنترلی یکسانی پیش‌بینی می‌شود. کاهش سطح تقاضای تلاش کنترلی در روش (Adaptive) البته در کیفیت ردیابی ورودی مرجع مطابق شکل-های (۲) و (۳) مشاهده می‌شود که نسبت به سایر روش‌های کنترلی تطبیقی، از کیفیت نازلتری برخوردار است. لازم به ذکر است که محدوده تغییرات گشتاورهای ورودی در محدوده تنظیم شده در کلیه رویکردها حفظ شده است. در مواضع بروز اثرات نایقینی در ثانیه یکم و یا ورودی مزاحم در ثانیه دوم، تغییرات شدیدتر در گشتاورهای ورودی با استفاده از رویکرد دینامیک معکوس مشاهده می‌شود.

$[N.m]$ 5 محدود شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در قالب دو آزمون و مجموعه منحنی‌ها ارائه شده است. همچنین به منظور نمایش میزان مقاومت کنترل‌کننده‌ها، ربات سیار در هر دو آزمون در معرض نایقینی‌های پارامتری بصورت فرض شده‌اند

$$m' = \begin{cases} m (kg), & 1 \leq t \leq 2 (sec) \\ 2m(kg), & 2 \leq t \leq 3 (sec) \end{cases} \quad (51)$$

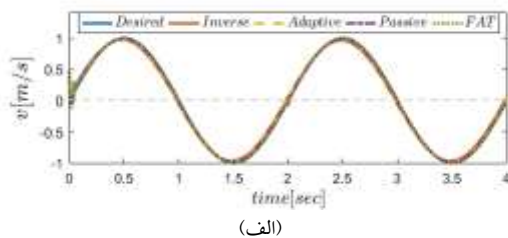
$$I'_G = \begin{cases} I_G (kg - m^2), & 1 \leq t \leq 2 (kg - m^2) \\ 3I_G (kg - m^2), & 2 \leq t \leq 3 (kg - m^2) \end{cases}$$

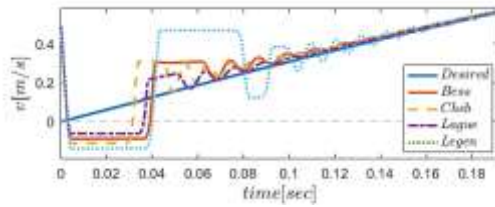
که m' و I'_G پارامترهای جرم و ممان اینرسی نایقینی بوده و نیز ورودی گشتاور مزاحم $T_{l,r}^{load} = -1 [N.m]$ در بازه زمانی $2 \leq t \leq 4 [sec]$ قرار گرفته است. در منحنی‌های حاصل از آزمون شبیه‌سازی‌ها، به منظور تفکیک نتایج، از عبارت‌های (Desired) به عنوان ورودی مرجع یا مطلوب، (Inverse) دینامیک معکوس، (Adaptive) کنترل تطبیقی، (Passive) روش کنترل تطبیقی غیرفعال و (FAT) روش تقریب توابع استفاده شده است. همچنین از میان مجموعه متنوع توابع متعامد، توابع چیبیشف نوع اول به عنوان توابع نمونه در رویکرد مبتنی بر تقریب توابع یا (FAT) استفاده شده است.

۴-۱- آزمون اول: مقایسه عملکرد روش کنترل غیرفعال تقریب توابع با روش‌های کنترل دینامیک معکوس، دینامیک معکوس تطبیقی و کنترل تطبیقی غیرفعال

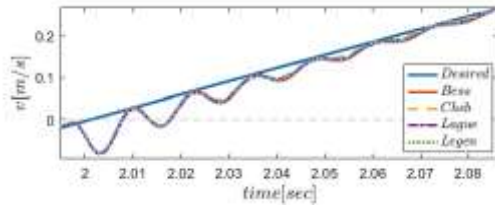
در این آزمون عملکرد رویکرد تقریب توابع متعامد در مقایسه با سه روش اشاره شده، در منحنی‌های (۲) تا (۵) ترسیم شده است.

کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت خطی از کلیه روش‌ها در شکل (۲الف) ترسیم شده است. مطابق نتایج حاصل، رویکرد کنترلی (FAT) با دقت قابل ملاحظه، ورودی مرجع را ردیابی می‌کند که این امر در منحنی بزرگنمایی شده شکل (۲ب) در فاصله زمانی نمونه $2.5 \leq t \leq 2.65 [sec]$ نیز بوضوح مشهود است. مطابق شکل، رویکرد (Passive) نتیجه بسیار نزدیکی با روش (FAT) داشته و دو روش دیگر با دقت قابل قبول ورودی مرجع را ردیابی می‌نمایند. لازم به ذکر است که حداکثر تلاش ممکن در تنظیم پارامترهای در دسترس کنترل‌کننده‌ها برای دستیابی به دقت حداکثری به عمل آمده است. قابل توجه آنکه مجموعه توابع متعامد چهارگانه، در این آزمون نتایج کاملاً یکسانی نشان می‌دهند که از گزینه توابع چیبیشف نوع اول استفاده شده است.



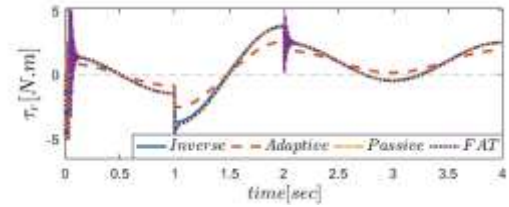


(ب)

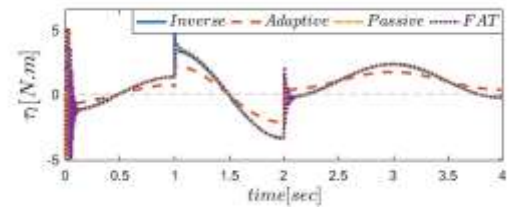


(ج)

شکل ۴: گشتاور ورودی چرخ راست ربات با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگر سور با استفاده از توابع متعامد چیبیشف



شکل ۵: گشتاور ورودی چرخ چپ ربات با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگر سور با استفاده از توابع متعامد بسل

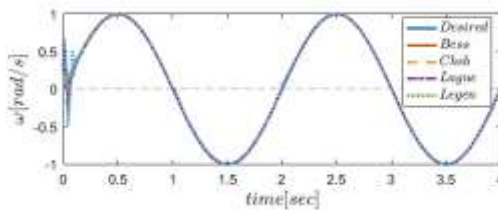


شکل ۶: الف) ردیابی سرعت خطی رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چیبیشف، لگنوئر و لژاندر، ب) بزرگنمایی رفتار گذرا در لحظه ابتدایی، ج) رفتار گذرا در ثانیه دوم

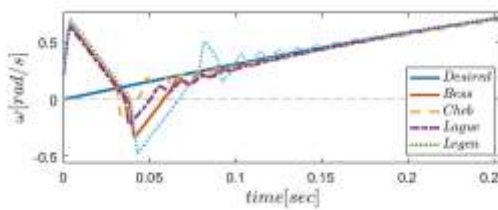
۴-۲-۴ آزمون دوم: مقایسه عملکرد روش کنترل غیرفعال

تقریب توابع با بهره گیری از مجموعه توابع متفاوت

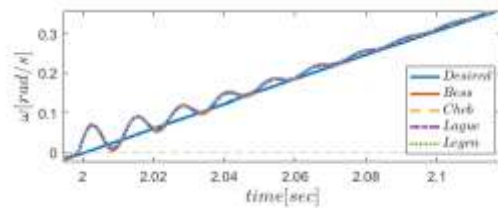
کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت زاویه‌ای با استفاده از چهار مجموعه توابع متعامد در شکل (الف) ارائه شده است. بطور مشابه، کلیه روش‌ها با کیفیت مطلوب ورودی مرجع را ردیابی می‌کنند. اگر چه اثرات گذرا در ابتدای حرکت و زمان‌های تغییر پارامترها و یا ورودی مزاحم خارجی در عملکرد هر چهار مجموعه مطابق شکل‌های بزرگنمایی شده (ب و ج) مشهود است که بهترین عملکرد در شروع متعلق به توابع چیبیشف است.



(الف)



(ب)



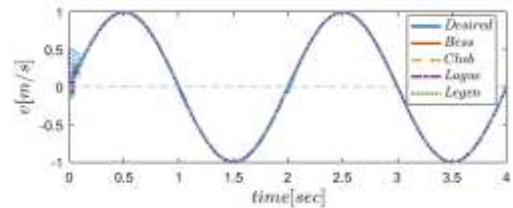
(ج)

شکل ۷: الف) ردیابی سرعت زاویه‌ای رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چیبیشف، لگنوئر و لژاندر، ب) بزرگنمایی رفتار گذرا در لحظه ابتدایی، ج) رفتار گذرا در ثانیه دوم

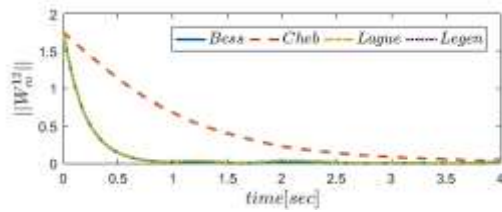
در این آزمون کیفیت عملکرد رویکرد تقریب توابع متعامد (FAT)

با استفاده از چهار دسته توابع متعامد بسل نوع اول (Bess)، جیبیشف نوع اول (Cheb)، لگنوئر (Lague) و لژاندر (Legen) در ردیابی ورودی مرجع (Desired) در منحنی‌های (۶) تا (۱۱) ترسیم شده است.

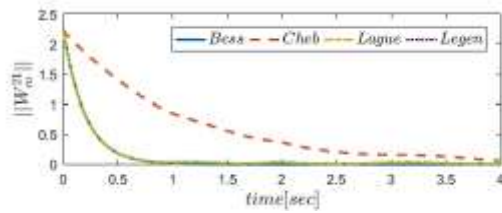
کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت خطی توسط کلیه روش‌های تقریب توابع در شکل (الف) ترسیم شده است. گفتنی است به منظور یکسان‌سازی شرایط مقایسه، مقادیر اولیه بردار سرعت خطی و زاویه‌ای برای کلیه روش‌ها یکسان بوده و مقادیر اولیه یکسانی برای بردارهای وزن شده است. مطابق نتایج حاصل، کلیه مجموعه توابع متعامد نتایج کاملاً یکسانی نشان می‌دهند. اگر چه مطابق منحنی‌های بزرگنمایی شده شکل (ب و ج) در زمان‌های بروز تغییرات پارامترها و یا ورودی مزاحم خارجی، قدری تفاوت در عملکرد رویکردها مشاهده می‌شود. بیشترین تفاوت در لحظه شروع حرکت بوده و بهترین عملکرد، مربوط به مجموعه توابع متعامد لگنوئر است.



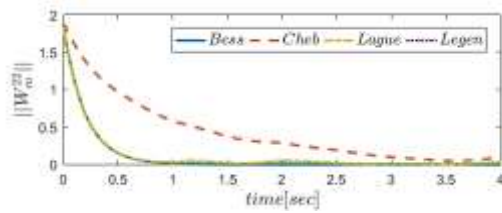
(الف)



(ب)



(ج)



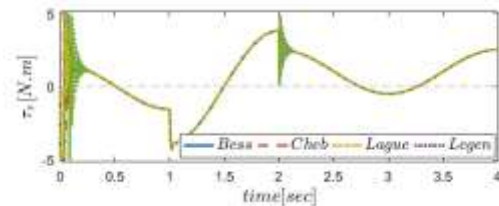
(د)

شکل ۱۰: ردیابی سرعت خطی رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چیبیشف، لگوئر و لژاندر

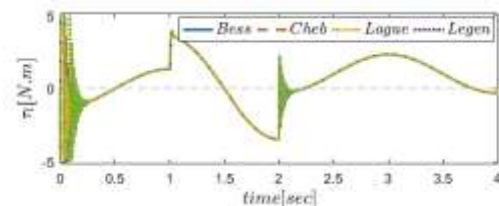
۵- جمع بندی

در این پژوهش طراحی روشمند کنترل کننده‌ی تطبیقی بر اساس رهیافت فاقد رگرسیون برای کنترل ردیاب سرعت ربات سیار ارائه گردید. این کنترل کننده بی‌نیاز از ماتریس‌های دینامیک ربات بوده و بطور همزمان ضمن برخورداری از مزیت و قابلیت‌های رویکرد کنترل تطبیقی غیرفعال، فارغ از پیچیدگی‌های مرسوم پارامتری‌سازی یا برپایی مدل رگرسیون فرآیند است. در این رویکرد، ماتریس‌های دینامیک فرآیند با تکیه بر تئوری تقریب توابع متعامد و در طی فرآیند محاسباتی تطبیقی، بازسازی و در کنترل کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این رویکرد، با توجه به امکان استفاده از تعداد دلخواه توابع متعامد در تقریب هر یک از درایه‌های ماتریس‌های دینامیک فرآیند، امکان بازتولید دقیق فرآیند ضمن حفظ پایداری سیستم مدار بسته با تکیه بر تئوری پایداری لیاپانف فراهم می‌شود. به منظور نمایش کیفیت عملکرد کنترل کننده پیشنهادی، نتایج حاصل از شبیه‌سازی کنترل ردیابی سرعت ربات سیار غیرهولونومیک با روش کنترل دینامیک معکوس و دو روش کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال، مقایسه گردید. مطابق نتایج حاصل، عملکرد قابل توجه روش فاقد رگرسیون در دستیابی به دقت مناسب ضمن حفظ پایداری در شرایط محدودیت‌های تلاش کنترلی، نشان از قابلیت توسعه روش برای کاربردهای کنترلی پیچیده‌تر را دارد. بعلاوه به منظور آزمون مجموعه توابع متعامد در کیفیت کنترل کننده پیشنهادی، شبیه‌سازی مقایسه‌ای برای چهار مجموعه توابع متعامد معمول گردید که نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان دهنده عملکرد کاملاً یکسان رویکرد در استفاده از مجموعه توابع متعامد دارد که از جمله دست آوردهای پژوهش محسوب می‌شود.

گشتاور مورد نیاز در چرخ‌های ربات برای ردیابی سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مرجع با استفاده از توابع متعامد چهارگانه در شکل‌های (۸) و (۹) ترسیم شده‌اند. مطابق این شکل‌ها کلیه نتایج به جز در شروع حرکت، کاملاً شبیه یکدیگر بوده و اختلاف مشهودی در شروع حرکت بین عملکرد توابع لژاندر با سایر توابع مشاهده می‌شود.

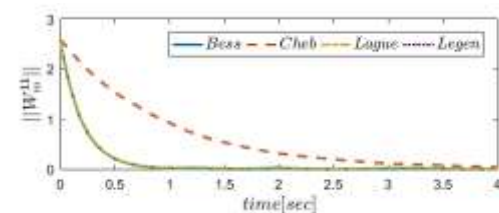


شکل ۸: گشتاور ورودی چرخ راست ربات از رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چیبیشف، لگوئر و لژاندر



شکل ۹: گشتاور ورودی چرخ چپ ربات از رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چیبیشف، لگوئر و لژاندر

به منظور نمایش کیفیت همگرایی روش کنترل تطبیقی تقریب توابع یا فاقد رگرسیون، تاریخچه تغییرات زمانی اندازه بردارهای وزن متعامد بسل، چیبیشف، لگوئر و لژاندر در شکل‌های (۱۰ الف، ب، ج و د) و (۱۱ الف، ب، ج و د) ترسیم شده‌اند. لازم به ذکر است که مقادیر متغیرهای قابل تنظیم کنترل کننده اثر قابل توجهی در نرخ همگرایی منحنی‌ها دارند. برای آزمون حاضر، مقادیر این متغیرها مطابق روابط (۲۳)، (۴۷) و (۴۹) برابر $\Lambda = \text{diag}([20; 20])$ ، $\sigma_C = \sigma_M = 5$ ، $Q_M = Q_C = I_{5 \times 5}$ و $K_d = \text{diag}([60; 60])$ انتخاب شده‌اند. مطابق شکل روند کاهش اندازه بردارهای مذکور که معیاری از همگرایی رویکرد فاقد رگرسیون می‌باشد، در کلیه شکل‌ها مشاهده می‌شود. با یکسان‌سازی مقدار اولیه شروع بردارهای وزن مذکور، کلیه منحنی‌های مرتبط در شکل‌ها از یک نقطه آغاز شده‌اند که امر مقایسه را ساده‌تر می‌کند. نکته حائز اهمیت آنکه رویکرد فاقد رگرسیون در استفاده از توابع متعامد به جز مجموعه توابع چیبیشف، عملکرد کاملاً یکسانی داشته و تغییر محسوسی در نتیجه عملکرد کنترل کننده با تغییر مجموعه توابع متعامد حاصل نمی‌شود.



(الف)

مراجع

[15] Izadbakhsh, A., FAT-based robust adaptive control of electrically driven robots without velocity measurements. *Nonlinear Dynamics*, 2017: p. 1-16.
[16] Fierro, R. and F.L. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. in *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*. 1995. IEEE.

ضمائم

ضمیمه ۱: تحلیل پایداری کنترل دینامیک معکوس ربات

سیار

با جایگذاری رابطه (۹) در (۷)

$$M\dot{v} + Cv = M \left[\dot{v}_d - K_p \tilde{v} - K_i \int \tilde{v} dt \right] + Cv \quad (ض ۱-۱)$$

و مرتب نمودن آن:

$$M\dot{v} + Cv - M\dot{v}_d + M \left[K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt \right] - Cv = 0 \quad (ض ۱-۲)$$

یا

$$\dot{\tilde{v}} + K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt = 0 \quad (ض ۱-۳)$$

با مشتق گیری مجدد:

$$\ddot{\tilde{v}} + K_p \dot{\tilde{v}} + K_i \tilde{v} = 0 \quad (ض ۱-۴)$$

با توجه به اینکه $K_p > 0$ و $K_i > 0$ ، پایداری مجانبی

حاصل می‌شود.

ضمیمه ۲: تحلیل پایداری کنترل تطبیقی پارامتریک

دینامیک ربات سیار

با جایگذاری از رابطه (۱۴) در (۷):

$$M\dot{v} + Cv = \hat{M} \left[\dot{v}_d - K_p \tilde{v} - K_i \int \tilde{v} dt \right] + \hat{C} \quad (ض ۲-۱)$$

با افزایش و کاهش $\hat{M}\dot{v}$ به سمت چپ رابطه (ض ۲-۱) و مرتب

نمودن آن:

$$\begin{aligned} \hat{M}(\dot{v} - \dot{v}_d) + \hat{M} \left[K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt \right] \\ = -(M - \hat{M})\dot{v} \\ - (C - \hat{C})v \end{aligned} \quad (ض ۲-۲)$$

و تعریف متغیرهای خطاهای نایقینی $\tilde{C} (= C - \hat{C})$ و $\tilde{M} (= M - \hat{M})$

$C - \hat{C}$

$$\dot{\tilde{v}} + K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt = -\tilde{M}^{-1}(\tilde{M}\dot{v} + \tilde{C}v) \quad (ض ۲-۳)$$

با بررسی عبارت $\tilde{M}\dot{v} + \tilde{C}v$ در سمت راست (ض ۲-۳) واضح

است که این عبارت برابر اختلاف دینامیک نامی (رابطه ۷) و دینامیک

تقریب ربات سیار بر اساس مقادیر تخمینی نایقینی های مدل است. با توجه

به انتخاب بردار نایقینی‌ها و تعریف ماتریس رگرسور مطابق رابطه (۱۳) و

جایگذاری در رابطه (ض ۲-۳)، رابطه (ض ۲-۴) حاصل می‌شود.

$$\dot{\tilde{v}} + K_p \tilde{v} + K_i \int \tilde{v} dt = -\tilde{M}^{-1}Y(v, \tilde{v})\tilde{p} \quad (ض ۲-۴)$$

در اثبات برپایی قاعده تطبیق پارامترهای نایقینی، بردار حالت x

بصورت $x = \left\{ \left[\int \tilde{v} dt \right]^T \tilde{v}^T \right\} \in R^4$ در

[1] Parra-Vega, V., A. Castillo-Tapia, and M. Arteaga-Prez. Regressor-free second order sliding mode control for exponential tracking of constrained robot manipulators. in *Robot Motion and Control, 2002. RoMoCo'02. Proceedings of the Third International Workshop on*. 2002. IEEE.
[2] Chien, M. C. and A. C. Huang. FAT-based adaptive control for flexible-joint robots without computation of the regressor matrix. in *Systems, Man and Cybernetics, 2006. SMC'06. IEEE International Conference on*. 2006. IEEE.
[3] Chien, M. C. and A. C. Huang. Regressor-free adaptive impedance control of flexible-joint robots using FAT. in *American Control Conference, 2006. 2006. IEEE*.
[4] Huang, A.mC., S. C. Wu, and W. F. Ting, A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments. *Robotica*, 2006. 24(02): p. 205-210.
[5] Chien, M. C. and A. C. Huang. FAT-based Adaptive Visual Servoing for Robots with Varying Uncertainties. in *Robotics and Automation*. 2009.
[6] Huang, A. C. and M. C. Chien. Design of a regressor-free adaptive impedance controller for flexible-joint electrically-driven robots. in *Industrial Electronics and Applications, 2009. ICIEA 2009. 4th IEEE Conference on*. 2009. IEEE.
[7] Chien, M.-C. and A. C. Huang, Design of a fat-based adaptive visual servoing for robots with time varying uncertainties. *International Journal of Optomechatronics*, 2010. 4(2): p. 93-114.
[8] Chien, M.-C. and A. C. Huang, A regressor-free adaptive control for flexible-joint robots based on function approximation technique. 2010: INTECH Open Access Publisher.
[9] Huang, A. C. and M. C. Chien, Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach. 2010: World Scientific.
[10] Chien, M. C. and A. C. Huang, Adaptive impedance controller design for flexible-joint electrically-driven robots without computation of the regressor matrix. *Robotica*, 2012. 30(01): p. 133-144.
[11] Kai, C. Y. and A. C. Huang, A regressor-free adaptive controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification. *Robotica*, 2013. 31(07): p. 1051-1058.
[12] Kai, C. Y. and A.-C. Huang, A regressor-free adaptive impedance controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification: theory and experiments. *Robotica*, 2015. 33(03): p. 638-648.
[13] Shanta, M. N. T. and N. Z. Azlan, Function approximation technique based sliding mode controller adaptive control of robotic arm with time-varying uncertainties. *Procedia Computer Science*, 2015. 76: p. 87-94.
[14] Ebeigbe, D., T. Nguyen, H. Richter, and D. Simon, Stable Passivity-Based Regressor-Free Adaptive Robot Control. 2017.

که با توجه به اینکه $Q > 0$ است، شرط پایداری لیپانف حاصل می شود.

ضمیمه ۳: تحلیل پایداری کنترل غیرفعال دینامیک ربات

سیار

با جایگذاری از رابطه

$$\dot{s} = -M^{-1}(C + K_d)s \quad (\text{ض ۱-۳})$$

در رابطه (۲۸)

$$\dot{V} = s^T M[-M^{-1}(C + K_d)s] + \frac{1}{2}s^T \dot{M}s \quad (\text{ض ۲-۳})$$

$$= -s^T(C + K_d)s + \frac{1}{2}s^T \dot{M}s$$

$$= -s^T K_d s + \frac{1}{2}s^T (\dot{M} - 2C)s$$

و استفاده از خاصیت پادمتقارن بودن $\dot{M} - 2C$ و مثبت متقارن بودن

K_d :

$$\dot{V} = -s^T K_d s \leq 0 \quad (\text{ض ۳-۳})$$

ضمیمه ۴: تحلیل پایداری کنترل تطبیقی غیرفعال دینامیک

ربات سیار

با جایگذاری از رابطه (۳۱) در (۷):

$$M\dot{v} + Cv = \hat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_d s \quad (\text{ض ۱-۴})$$

با استفاد از روابط

$$s = v - v_r \quad (\text{ض ۲-۴})$$

$$\dot{s} = \dot{v} - \dot{v}_r$$

که $v_r (= v_d - \Lambda \int \tilde{v} dt)$ و جایگذاری در رابطه (ض ۱-۴) و

مرتب کردن آن:

$$M(\dot{s} + \dot{v}_r) + C(s + v_r) \quad (\text{ض ۳-۴})$$

$$= \hat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_d s$$

$$M\dot{s} + Cs + K_d s = -(M - \hat{M})\dot{v}_r - (C - \hat{C})v_r$$

$$M\dot{s} + Cs + K_d s = -(\tilde{M}\dot{v}_r + \tilde{C}v_r)$$

سمت راست رابطه آخر (ض ۳-۴) را می توان بصورت رگرسور

بازنویسی نمود. با توجه به تعریف:

$$v_r = v_d - \Lambda \int \tilde{v} dt \quad (\text{ض ۴-۴})$$

$$\dot{v}_r = \dot{v}_d - \Lambda \tilde{v} \quad (\text{ض ۵-۴})$$

و توجه به اینکه $v (= [v \ \omega]^T)$ بردار حالت سرعت و $v_d (= [v_d \ \omega_d]^T)$ بردار حالت مرجع ربات سیار هستند،

$$v_r = \begin{bmatrix} v_d - \lambda_v \int (v - v_d) dt \\ \omega_d - \lambda_\omega \int (\omega - \omega_d) dt \end{bmatrix} \quad (\text{ض ۶-۴})$$

$$\dot{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{v}_d - \lambda_v (v - v_d) \\ \dot{\omega}_d - \lambda_\omega (\omega - \omega_d) \end{bmatrix} \quad (\text{ض ۷-۴})$$

از طرفی مطابق تعریف $(\tilde{\cdot}) = (\cdot) - (\hat{\cdot})$ ، برای ماتریسی \tilde{M}

می توان نوشت:

$$\tilde{M} = M - \hat{M} \quad (\text{ض ۸-۴})$$

$$= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G + md^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & I_G + \hat{m}d^2 \end{bmatrix}$$

اینصورت رابطه (ض ۲-۴) به شکل فضای حالت (ض ۲-۵) بازنویسی نمود:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{ض ۵-۲})$$

$$\dot{x}_2 = -K_i x_1 - K_p x_2 - \hat{M}^{-1}Y(v, \dot{v})\tilde{p}$$

که مدل فضای حالت آن مطابق ذیل خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_i & -K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ض ۶-۲})$$

$$- \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \hat{M}^{-1}Y(v, \dot{v})\tilde{p}$$

یا

$$\dot{x} = Ax - B\hat{M}^{-1}Y(v, \dot{v})\tilde{p} \quad (\text{ض ۷-۲})$$

که:

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_i & -K_p \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

با تعریف دینامیک خطای سیستم مدار بسته، در تحلیل پایداری سیستم

مدار بسته و دست یابی به قواعد تطبیق پارامترهای نایقینی، تابع لیپانف

مطابق رابطه (ض ۲-۸) تعریف می شود:

$$V(x, \tilde{p}) = \frac{1}{2}x^T Px + \frac{1}{2}\tilde{p}^T \Gamma \tilde{p} \quad (\text{ض ۸-۲})$$

با مشتق گیری زمانی از (ض ۲-۸):

$$\dot{V}(x, \tilde{p}) = \frac{1}{2}\dot{x}^T Px + \frac{1}{2}x^T P \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{p}}^T \Gamma \tilde{p} + \frac{1}{2}\tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}} \quad (\text{ض ۹-۲})$$

و جایگذاری از (ض ۲-۷):

$$\dot{V}(x, \tilde{p}) = \frac{1}{2}\{[Ax - B\hat{M}^{-1}Y\tilde{p}]^T Px + x^T P[Ax - B\hat{M}^{-1}Y\tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}\} \quad (\text{ض ۱۰-۲})$$

$$+ x^T P[Ax - B\hat{M}^{-1}Y\tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

$$= \frac{1}{2}\{[x^T A^T - \tilde{p}^T (B\hat{M}^{-1}Y)^T] Px + x^T P[Ax - B\hat{M}^{-1}Y\tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}\}$$

$$+ x^T P[Ax - B\hat{M}^{-1}Y\tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

$$= \frac{1}{2}[x^T A^T Px + x^T P Ax - \tilde{p}^T (B\hat{M}^{-1}Y)^T Px - x^T P B \hat{M}^{-1} Y \tilde{p}] + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

با توجه به مثبت متقارن بودن P و استفاده از خاصیت ترانهاد، (ض ۲-۱۰)

به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{V}(x, \tilde{p}) = \frac{1}{2}[x^T (A^T Px + PA)x - 2\tilde{p}^T (B\hat{M}^{-1}Y)^T Px + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}] \quad (\text{ض ۱۱-۲})$$

$$= -\frac{1}{2}x^T Q x - \tilde{p}^T [(B\hat{M}^{-1}Y)^T Px + \Gamma \dot{\tilde{p}}]$$

با انتخاب قاعده تطبیق:

$$\dot{\tilde{p}} = \Gamma^{-1}(B\hat{M}^{-1}Y)^T Px \quad (\text{ض ۱۲-۲})$$

و با توجه به اینکه $\tilde{p} (= p - \hat{p})$ که بردار پارامترهای نامی

فرآیند و مقدار ثابتی است، رابطه تطبیق (ض ۲-۱۲) به شکل (ض ۲-۱۳)

بازنویسی شده

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma^{-1}(B\hat{M}^{-1}Y)^T Px \quad (\text{ض ۱۳-۲})$$

و با استفاده آن در رابطه (ض ۲-۱۱)،

$$\dot{V}(x, \tilde{p}) = -\frac{1}{2}x^T Q x \leq 0 \quad (\text{ض ۱۴-۲})$$

$$\dot{V} = -s^T K_d s \leq 0 \quad (\text{ض ۴-۱۸})$$

و شرط پایداری لیاپانف محقق می شود.

ضمیمه ۵: تقریب توابع

مجموعه توابع حقیقی $\{z_i(x)\}$ تعریف شده بر روی بازه $[a, b]$ متعامد است هر گاه [۹]

$$\int_a^b z_i(x) z_j(x) dx = \begin{cases} = 0 & \text{for } i \neq j \\ \neq 0 & \text{for } i = j \end{cases} \quad (\text{ض ۵-۱})$$

مجموعه $\{z_i(x)\}$ متعامد با شرط برقراری خاصیت زیر برای کلیه i ها در بازه $[a, b]$ ، یکا متعامد^۱ نامیده می شود.

$$\int_a^b z_i(x)^2 dx = 1 \quad (\text{ض ۵-۲})$$

همچنین مجموعه $\{z_i(x)\}$ در بازه $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد است اگر

$$\int_a^b p(x) z_i(x) z_j(x) dx = \begin{cases} = 0 & \text{for } i \neq j \\ \neq 0 & \text{for } i = j \end{cases} \quad (\text{ض ۵-۳})$$

تابع دلخواه $f(x)$ را می توان بر حسب هر مجموعه توابع یکا متعامد $\{z_i(x)\}$ بر روی بازه $[a, b]$ به صورت چند جمله ای زیر بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i z_i(x) \quad (\text{ض ۵-۴})$$

که به نام چند جمله ای تعمیم یافته ی فوریه تابع $f(x)$ نامیده می شود. ضرایب وزن w_i با استفاده از اصل تعامد توابع $\{z_i(x)\}$ در بازه $[a, b]$ مطابق رابطه ذیل محاسبه می شوند:

$$w_i = \frac{\int_a^b f(x) p(x) z_i(x) dx}{\int_a^b p(x) z_i^2(x) dx} \quad (\text{ض ۵-۵})$$

شایان ذکر است که اگرچه خاصیت تعامد برای استخراج تمامی ضرایب قابل استفاده است، ولی برای هم گرای سری کافی نیست. به منظور تضمین هم گرای، کامل بودن سری های تخمینی یکا متعامد لازم است. مجموعه توابع یکا متعامد $\{z_i(x)\}$ بر روی بازه $[a, b]$ مشروط به آنکه $g(x)$ مقادیر غیر صفر داشته باشد، کامل است چنانچه برای کلیه مقادیر i :

$$\int_a^b p(x) g(x) z_i(x) dx = 0 \quad (\text{ض ۵-۶})$$

تابع $g(x)$ با خاصیت فوق، تابع پوچ بر روی بازه $[a, b]$ نامیده می شود که در رابطه زیر صدق می کند.

$$\int_a^b p(x) g^2(x) dx = 0 \quad (\text{ض ۵-۷})$$

با تعریف نماد $\langle f, g \rangle$ به عنوان ضرب داخلی در فضای توابع بصورت $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$ و نرم $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ، چنانچه $\|f\|$ موجود و معین باشد، فضای توابع مورد نظر هیلبرت^۲ نامیده می شود.

$$= \begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & I_G + m d^2 \end{bmatrix}$$

بطور مشابه

$$\tilde{C} = C - \hat{C} \quad (\text{ض ۴-۹})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -m d \omega \\ m d \omega & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{m d \omega} \\ \widehat{m d \omega} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\widetilde{m d \omega} \\ \widetilde{m d \omega} & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری از روابط (ض ۴-۵) و (ض ۴-۸ و ۹) در سمت راست

عبارت رابطه (ض ۴-۳) و مرتب کردن آن

$$M \dot{s} + C s + K_d s = -(\tilde{M} \dot{v}_r + \tilde{C} v_r) \quad (\text{ض ۴-۱۰})$$

$$Y(v_r, \dot{v}_r) = \begin{bmatrix} \dot{v}_d - \lambda_v (v - v_d) \\ 0 \\ -\omega [\omega_d - \lambda_\omega \int (\omega - \omega_d) dt] \\ \omega [v_d - \lambda_v \int (v - v_d) dt] \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_d - \lambda_\omega (\omega - \omega_d) \end{bmatrix}$$

$$= -Y(v_r, \dot{v}_r) \tilde{p}$$

در صورت برقراری شرط تخمین پایدار نایقینی ها، $\tilde{p} \rightarrow 0$ سمت

راست رابطه (ض ۴-۱۰) به سمت صفر میل نموده و پایداری مجانبی سیستم

مدار بسته برقرار می گردد. برای دست یابی به تخمین پایدار بردار نایقینی ها،

تابع لیاپانف به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(s, \tilde{p}) = \frac{1}{2} s^T M s + \frac{1}{2} \tilde{p}^T \Gamma \tilde{p} \quad (\text{ض ۴-۱۱})$$

با مشتق گیری زمانی از (ض ۴-۱۱):

$$\dot{V} = \frac{1}{2} [\dot{s}^T M s + s^T \dot{M} s + s^T \dot{M} s] + \frac{1}{2} [\dot{\tilde{p}}^T \Gamma \tilde{p} + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}] \quad (\text{ض ۴-۱۲})$$

$$= s^T \dot{M} s + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

با محاسبه \dot{S} از رابطه (ض ۴-۱۰)

$$\dot{s} = -M^{-1} [(C + K_d) s - Y(v_r, \dot{v}_r) \tilde{p}] \quad (\text{ض ۴-۱۳})$$

و جایگذاری در (ض ۴-۱۲):

$$\dot{V} = -s^T M M^{-1} [(C + K_d) s - Y(v_r, \dot{v}_r) \tilde{p}] + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}} \quad (\text{ض ۴-۱۴})$$

$$= -s^T K_d s + \frac{1}{2} s^T (\dot{M} - 2C) s$$

$$- s^T Y(v_r, \dot{v}_r) \tilde{p}$$

$$+ \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

با توجه به خاصیت پادمتقارن $\dot{M} - 2C$ و استفاده از خاصیت

ترانهاده، رابطه (ض ۴-۱۴) مطابق ذیل بازنویسی می شود:

$$\dot{V} = -s^T K_d s + \tilde{p}^T [-Y^T(v_r, \dot{v}_r) s + \Gamma \dot{\tilde{p}}] \quad (\text{ض ۴-۱۵})$$

با انتخاب قاعده تطبیق به صورت

$$\dot{\tilde{p}} = \Gamma^T Y^T(v_r, \dot{v}_r) s \quad (\text{ض ۴-۱۶})$$

و با توجه به تعریف $\tilde{p} (= p - \hat{p})$ که بردار پارامترهای نامی

فرآیند و مقدار ثابتی است، رابطه تطبیق (ض ۴-۱۶) به شکل (ض ۴-۱۷)

حاصل

$$\dot{\tilde{p}} = -\Gamma^T Y^T(v_r, \dot{v}_r) s \quad (\text{ض ۴-۱۷})$$

و رابطه (ض ۴-۱۵) نیز بصورت ذیل ساده شده

^۲ Hilbert space

^۱ Orthonormal

در سیستم‌های کنترل واقعی، فرآیندها همواره در معرض پارامترهای ناپیوستگی متغیر با زمان یا ناپیوستگی‌های غیرپارامتری هستند. مطابق نتایج مطالعات منتشر شده، در صورت وجود نویز اندازه‌گیری و/یا دینامیک مدل نشده فرکانس بالا، در سیستم‌های کنترل تطبیقی، قابلیت افزایش تدریجی پارامترهای تطبیق افزایش ناگهانی خروجی سیستم در یک بازه محدود و واگرایی شدید، وجود دارد [۹]. در مقابله با این مشکل، برخی رویکردهای مبتنی بر تغییر قواعد تطبیق توسعه یافته‌اند. رویکرد «ناحیه مرده»^۱ که به نام روش اصلاح σ شناخته می‌شود، از جمله روش‌های شناخته شده است. این رویکرد بر مبنای غیرفعال‌سازی قاعده بروزرسانی پارامترها در ناحیه افزایش بی‌قاعده تابع لیاپانف استوار است. اگر چه در این روش همگرایی مجانبی خطا حتی پس از حذف خطای تقریب نیز حاصل نمی‌گردد، ولی عدم نیاز به اطلاعات محدوده خطا از مزایای برجسته این روش است. این رویکرد بر اساس اصلاح قاعده تطبیق بصورت کاهش ضربی از متغیر ناپیوستگی از عبارت به روزرسانی است. تبیین روش از مدل غیرخطی عمومی آغاز می‌شود [۹]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{ض ۶-۱})$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u$$

که $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \Omega$ که مجموعه بسته‌ای بر

روی R^n است. تابع $f(x, t)$ تابع نامعلوم با محدوده تغییرات نامعین و

تابع $g(x, t)$ تابع ناپیوستگی با محدوده معلوم $0 < g_{min}(x, t) \leq$

$g_{max}(x, t) \leq g_{max}(x, t)$ که g_{min} و g_{max} توابع معلوم در $x \in \Omega$

طی $t \in [t_0, \infty)$ فرض می‌شوند. با فرض $g_{min} < g_{max}$

به عنوان تابع نامی، می‌توان تابع g را بصورت $g =$

$\Delta g(x, t) \Delta g(x, t)$ ، نشان داد که Δg ناپیوستگی ضربی با خاصیت ذیل

است:

$$0 < \delta_{min} \equiv \frac{g_{min}}{g_m} \leq \Delta g \leq \frac{g_{max}}{g_m} \equiv \delta_{max} \quad (\text{ض ۶-۲})$$

هدف طراحی کنترل کننده برای ردیابی مسیر مطلوب x_d توسط

متغیرهای حالت سیستم یعنی x است. بردار خطای ردیابی بصورت $e =$

$x - x_d = [x_1 - x_{1d}, x_2 - x_{2d}, \dots, x_n - x_{nd}]^T$ تعریف و

ورودی کنترل مطابق ذیل انتخاب می‌شود:

$$u = \frac{1}{g_m} (-\dot{f} + v - u_r) \quad (\text{ض ۶-۳})$$

که \dot{f} مقدار تخمینی f و u_r عبارت مقاوم جهت مواجهه با ناپیوستگی g

است. همچنین $v = \dot{x}_{nd} - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1}$ برای دست یابی به

دینامیک مدار بسته مطلوب است. ضرایب k_i به گونه ای انتخاب می‌شوند

که ماتریس A در (ض ۶-۴) اکیدا هورویتز گردد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n \times n} \quad (\text{ض ۶-۴})$$

با اعمال (ض ۶-۳) در آخرین عبارت (ض ۶-۱):

اگر $\{Z_i(x)\}$ پایه ی یکا متعامد و $f(x)$ با $\|f\|$ معین باشد، چندجمله‌ای (ض ۵-۴) همگراست به طوریکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^n w_i Z_i(x) \right|^2 dx = 0 \quad (\text{ض ۵-۸})$$

این به معنی امکان تقریب هر تابع $f(x)$ با دقت قابل ملاحظه توسط ترکیب خطی تعداد محدودی از توابع یکا متعامد $Z_i(x)$ به شکل زیر است:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^k w_i Z_i(x) \quad (\text{ض ۵-۹})$$

ویژگی فوق‌العاده این خاصیت، پارامتری سازی خطی تابع $f(x)$ بر حسب توابع پایه $\{Z_i(x)\}$ با بردار ضرایب وزن $W = [w_1 \dots w_k]^T$ است.

$$f(x) \approx W^T z(x) \quad (\text{ض ۵-۱۰})$$

با کمی تغییر می‌توان نوشت:

$$f(t) = W^T z(x) \quad (\text{ض ۵-۱۱})$$

مشروط بر استفاده از تعداد کافی از توابع پایه، مسئله‌ی تخمین تابع $f(x)$ به تخمین بردار مجهول W تقلیل پیدا می‌کند.

در توسعه روش به تقریب ماتریس‌ها، با فرض آنکه کلیه آرایه‌های ماتریس با تعداد β تابع مشابه متعامد تقریب زده شوند، آنگاه ماتریس $M \in N^{p \times q}$ را می‌توان به شکل متداول زیر بیان کرد:

$$M = W^T Z \quad (\text{ض ۵-۱۲})$$

که در آن $M, Z \in N^{p \times q} \times p$ مطابق روابط ذیل می‌باشند:

$$W^T = \begin{bmatrix} w_{11}^T & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & w_{21}^T & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{p1}^T & \dots & \dots \\ & & & w_{1q}^T & 0 & \dots \\ & & & 0 & w_{2q}^T & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & w_{pq}^T \end{bmatrix} \quad (\text{ض ۵-۱۳})$$

$$Z^T = \begin{bmatrix} z_{11}^T & z_{21}^T & \dots & z_{p1}^T & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & z_{1q}^T & z_{2q}^T & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & z_{1q}^T & z_{2q}^T & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & z_{1q}^T & z_{2q}^T & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{ض ۵-۱۴})$$

آرایه‌های ماتریس، w_{ij} و z_{ij} ، بردارهایی با ابعاد $1 \times \beta$ هستند. به سادگی می‌توان نشان داد:

$$M = W^T Z \quad (\text{ض ۵-۱۵})$$

که در آن $M, Z \in N^{p \times q} \times p$ مطابق روابط ذیل می‌باشند:

$$M = W^T Z = \begin{bmatrix} w_{11}^T z_{11} & w_{12}^T z_{12} & \dots & w_{1q}^T z_{1q} \\ w_{21}^T z_{21} & w_{22}^T z_{22} & \dots & w_{2q}^T z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1}^T z_{p1} & w_{p2}^T z_{p2} & \dots & w_{pq}^T z_{pq} \end{bmatrix}$$

ضمیمه ۶: اصلاح σ

^۱ dead-zone

$$= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda_{\min}(Q)} \|e\| - \frac{2\lambda_{\max}(P)|\varepsilon|}{\sqrt{\lambda_{\min}(Q)}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - \frac{4\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \varepsilon^2 \right) \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \varepsilon^2$$

و بازنویسی عبارت (b) در رابطه (ض ۶-۱۳) بصورت:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}^T w - \|\tilde{w}\|^2 \\ &= -\frac{1}{2} (\|\tilde{w}\| - \|w\|)^2 - \frac{1}{2} (\|\tilde{w}\|^2 - \|w\|^2) \\ &\leq -\frac{1}{2} (\|\tilde{w}\|^2 - \|w\|^2) \end{aligned}$$

و جایگذاری در رابطه (ض ۶-۱۳) و مرتب نمودن آن:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - \underbrace{\sigma \|\tilde{w}\|^2 + \sigma \|w\|^2}_{(c)} + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \varepsilon^2 \quad (ض ۶-۱۵)$$

با هدف ارتباط عبارت (c) با رابطه لیاپانف بصورت:

$$V = e^T P e + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w} \quad (ض ۶-۱۶)$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda_{\max}(P) \|e\|^2 + \lambda_{\max}(\Gamma) \|\tilde{w}\|^2 \\ &\text{رابطه (ض ۶-۱۵) را بصورت زیر بازنویسی می شود:} \\ &\dot{V} \leq -\alpha V + \left[\alpha \lambda_{\max}(P) - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \right] \|e\|^2 + \left[\alpha \lambda_{\max}(\Gamma) - \sigma \right] \|\tilde{w}\|^2 + \sigma \|w\|^2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

با انتخاب α با مطابق

$$\alpha \leq \min \left[\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \frac{\sigma}{\lambda_{\max}(\Gamma)} \right] \quad (ض ۶-۱۸)$$

و جایگذاری در (ض ۶-۱۷):

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \sigma \|\tilde{w}\|^2 + \sigma \|w\|^2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \varepsilon^2 \quad (ض ۶-۱۹)$$

که $\dot{V} < 0$ مادامیکه:

$$\begin{aligned} &(e, \tilde{w}) \in E \quad (ض ۶-۲۰) \\ &\equiv \left\{ (e, \tilde{w}) \mid V \right. \\ &\left. > \frac{1}{\alpha} \left[\sigma \|\tilde{w}\|^2 + \frac{2\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \sup_{\tau \geq t_0} \varepsilon^2(\tau) \right] \right\} \end{aligned}$$

بدین ترتیب، تقریب نایقینی‌ها با استفاده از توابع متعامد، منجر به کراندار شدن نهایی همزمان زوج بردار (e, \tilde{w}) فارغ از خطای تقریب ε و دستیابی به شرط پایداری لیاپانف می‌گردد. قابل ذکر است که اندازه مجموعه E با انتخاب مقادیر مناسب σ, P, Q قابل تنظیم بوده و ردیابی دقیق ورودی با شرط عدم اشباع کنترل کننده، قابل دستیابی است.

$$\dot{x}_n = f + \frac{g}{g_m} (-\hat{f} + v - u_r) \quad (ض ۶-۵)$$

$$= (f - \hat{f}) + (1 - \Delta g)(\hat{f} - v) + v - \Delta g u_r$$

و جایگذاری $v = \dot{x}_{nd} - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1}$

$$\dot{e}_n - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1} = (f - \hat{f}) + (1 - \Delta g)(\hat{f} - v) - \Delta g u_r \quad (ض ۶-۶)$$

و بازنویسی رابطه حاصل به صورت فضای حالت:

$$\dot{e} = A e + b [(f - \hat{f}) + (1 - \Delta g)(\hat{f} - v) - \Delta g u_r] \quad (ض ۶-۷)$$

که $b = [0, 0, \dots, 1]^T \in R^n$ است.

با توجه به اینکه f نایقینی کلی است، می‌توان از روش های مرسوم کنترل تطبیقی نسبت به پایداری حلقه بسته اقدام نمود. با استفاده از رویکرد تقریب توابع متعامد، برای تقریب f می‌توان نوشت:

$$f = w^T z + \varepsilon \quad (ض ۶-۸)$$

$$\hat{f} = \hat{w}^T z$$

با جایگذاری در رابطه (ض ۶-۷):

$$\dot{e} = A e + b [\tilde{w}^T z + \varepsilon + (1 - \Delta g)(\hat{f} - v) - \Delta g u_r] \quad (ض ۶-۹)$$

که $\tilde{w} = w - \hat{w}$. برای تعیین قاعده تطبیق تابع لیاپانف بصورت

زیر انتخاب می‌شود:

$$V = e^T P e + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w} \quad (ض ۶-۱۰)$$

که در آن P و Γ ماتریس‌های مثبت معین بوده و P شرط پایداری لیاپانف یعنی $A^T P + P A = -Q$ که Q ماتریس مثبت معین است را اجابت می‌نماید.

با مشتق‌گیری از (ض ۶-۱۰) در امتداد (ض ۶-۹):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T (A^T P + P A) e + 2[(1 - \Delta g)(\hat{f} - v) - \Delta g u_r] b^T P e + 2\varepsilon b^T P e + 2\tilde{w}^T (z b^T P e - \Gamma \hat{w}) \\ &\leq -e^T Q e + 2(1 - \delta_{\max}) |\hat{f} - v| |b^T P e| - 2\delta_{\min} u_r b^T P e + 2\varepsilon b^T P e + 2\tilde{w}^T (z b^T P e - \Gamma \hat{w}) \end{aligned} \quad (ض ۶-۱۱)$$

با انتخاب عبارت مقاوم‌ساز:

$$u_r = \frac{1 + \delta_{\max}}{\delta_{\min}} |\hat{f} - v| \operatorname{sgn}(b^T P e) \quad (ض ۶-۱۲)$$

و قاعده تطبیق با رویکرد اصلاح σ بصورت:

$$\dot{\hat{w}} = \Gamma^{-1} (z b^T P e - \sigma \hat{w}), \quad \sigma > 0 \quad (ض ۶-۱۳)$$

و جایگذاری (ض ۶-۱۲ و ۱۳) در (ض ۶-۱۱):

$$\dot{V} \leq -e^T Q e + 2\varepsilon b^T P e + 2\sigma \tilde{w}^T \hat{w} \quad (ض ۶-۱۴)$$

$$= -e^T Q e + 2\varepsilon b^T P e + 2\sigma \tilde{w}^T (w - \tilde{w}) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) |\varepsilon| \|e\|$$

$$+ \underbrace{2\sigma [(\tilde{w}^T w - \|\tilde{w}\|^2)]}_{(a)}$$

با بازنویسی عبارت (a) در رابطه (ض ۶-۱۴) بصورت:

$$-\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) |\varepsilon| \|e\|$$