مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحه ۱۱۳-۹۳

طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی به منظور ردیابی مسیر

علی ابوئی[۱]، مهران اسلامی نصرت‌آبادی [۲] و محمد حائری[۳]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Aliabooee@yazd.ac.ir
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Mehranqwerty@yahoo.com
[۳] استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۱۱ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۵/۰۷ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۰۸

چکیده: در این مقاله، ابتدا معادلات سینماتیکی و دینامیکی توصیف‌کننده‌ی مدل حرکت و مانور زیردریایی شش درجه آزادی ارائه می‌شوند. در ادامه، با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، سه دسته‌ی مجزا از ورودی‌های کنترلی برای زیردریایی شش درجه آزادی دارای نامعینی (شامل نامعینی‌های پارامتری، دینامیک‌های مدل‌نشده، نیروها و اغتشاش‌های ناشناخته وارده از اقیانوس) طراحی می‌شوند تا با اعمال هر دسته از ورودی‌های پیشنهادی، زیردریایی بعد از مدت زمان محدودی به مسیر دلخواه و مورد نظر همگرا شود و همواره در امتداد این مسیر مانور دهد. برای هر دسته از ورودی‌های کنترلی، سطوح لغزشی غیرخطی متفاوتی پیشنهاد شده‌اند که دارای چندین پارامتر اختیاری و آزاد می‌باشند. هم‌چنین، در فرآیند اثبات پایداری زمان–محدود سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی، برای هر کلاس از ورودی‌های کنترلی طراحی‌شده یک نامساوی کاربردی استخراج می‌شود تا زمان محدود مورد نیاز برای همگرایی به مسیر مورد نظر را تعیین کند. سه نامساوی حاصله نشان می‌دهند که زمان‌های محدود همگرایی، به شرایط اولیه زیردریایی و پارامترهای اختیاری و آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی بستگی دارند. در انتها، ورودی‌های کنترلی پیشنهادی به صورت جداگانه بر روی مدل معروف زیر دریایی NPS AUV II مورد شبیه‌سازی کامپیوتری قرار می‌گیرند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند تمامی ورودی‌های پیشنهادی قادرند تا هدف ردیابی زمان–محدود را به خوبی برآورده سازند.

کلمات کلیدی: زیردریایی خودکار شش درجه آزادی، ردیابی زمان–محدود مقاوم، کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، سطوح لغزشی غیرخطی، دینامیک مد لغزشی، زیردریایی NPS AUV II.

Design of Robust Finite-Time Nonlinear Controllers for a 6-DOF Autonomous Underwater Vehicle for Path Tracking Objective

Ali Abooee, Mehran Eslami NosratAbadi, and Mohammad Haeri

Abstract: In this paper, kinematic and dynamic equations of a 6-DOF (Degree Of Freedom) autonomous underwater vehicle (6-DOF AUV) are introduced and described completely. By developing the nonsingular terminal sliding mode control method, three separate groups of control inputs are proposed for the autonomous underwater vehicle subjected to uncertainties including parametric uncertainties, unmodeled dynamics, and unknown disturbances from ocean. All classes of suggested inputs are able to steer the mentioned underwater vehicle to the desired path within finite times. For all of them, innovative nonlinear sliding surfaces are defined possessing several optional parameters. The global finite-time stability is proven for the closed-loop system of the aforementioned underwater vehicle injected by each class of proposed inputs. More, three applicable inequalities are derived to determine the convergence finite times related to suggested inputs. Obtained inequalities reveal that the mentioned finite times are dependent on initial conditions and optional parameters of control inputs. Finally, three suggested inputs are separately simulated on the Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II (NPS AUV II). Simulation results illustrate that all proposed inputs can fulfill the trajectory tracking objective for the NPS AUV II properly.

نویسنده عهده دار مکاتبات: علی ابوئی

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]

Keywords: 6-DOF autonomous underwater vehicle (6-DOF AUV), Robust finite-time tracking, Nonsingular terminal sliding mode control, sliding mode dynamic (sliding motion), NPS AUV II.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، زیردریایی‌های خودکار[1] کاربردهای متعددی در زمینه‌های مختلف از جمله سفرهای اکتشافی به اعماق اقیانوس‌ها، نقشه‌برداری برای نصب لوله‌های انتقال نفت و گاز، عیب‌یابی کابل‌های برق و انتقال داده در کف دریاها، ماموریت‌های دفاعی و نظامی و .... دارند. با توجه کاربردهای ذکر شده، هدایت و کنترل انواع زیردریایی‌های خودکار به منظور مانور و حرکت در امتداد مسیر دلخواه به مسئله‌ای جالب و چالش برانگیز در جامعه مهندسی کنترل تبدیل شده است. با توجه به انگیزش بیان شده، مقالات و مطالعات پژوهشی قابل توجهی در این زمینه به چاپ رسیده‌اند که در ادامه مرور مختصری بر روی شاخص‌ترین آن‌ها [۱-۳۰] انجام می‌شود. شایان ذکر است که در بسیاری از این مراجع [۱-۳۰]، زیردریایی‌های مورد مطالعه از نظر تعداد درجه‌های آزادی و تعداد ورودی‌های کنترلی (تعداد بالک و تراستر[2]) یکسان نیستند و تمرکز اصلی در این مرور بر روی روش کنترلی مورد استفاده در مراجع می‌باشد.

مراجع [۱-۳] با درنظر گرفتن مدل دینامیکی خطی برای انواع زیردریایی‌ها از کنترل‌کننده‌های خطی PD و PID برای کنترل و هدایت زیردریایی استفاده کرده‌اند. مقالات [۴-۶] از روش کنترل غیرخطی پسگام (گام به عقب)[3] برای طراحی ورودی‌های کنترلی چندین نوع زیردریایی بهره گرفته‌اند تا هدف ردیابی را برآورده سازند. مرجع [۷] با استفاده از روش کنترل بهینه، گشتاورهای ورودی را برای یک نوع زیردریایی پیشنهاد داده است و در حین فرآیند طراحی از مدل خطی شده استفاده کرده است. مراجع [۸-۱۱] روش کنترلی مد لغزشی[4] را برای طراحی ورودی‌های کنترلی زیردریایی به منظور تحقق هدف مانور در مسیر دلخواه به کار برده‌اند. روش کنترلی لیاپانوف مستقیم توسط مقاله‌های [۱۲-۱۴] برای قرار دادن زیردریایی در امتداد مسیر مورد نظر استفاده شده است. دو مرجع [۱۵، ۱۶] با بهره‌گیری از روش کنترل تطبیقی به حل مسئله ردیابی زیردریایی‌ها پرداخته است. تعدادی از مراجع [۱۷-۲۷] از روش‌های ترکیبی برای طراحی ورودی‌های کنترلی انواع زیردریایی بهره جسته‌اند که عمده‌ی این روش‌ها عبارتند از: روش کنترل مد لغزشی-فازی [۱۷]، روش تلفیقی تطبیقی-فازی به همراه شبکه‌های عصبی مصنوعی [۱۸-۲۱]، روش ترکیبی کنترل مد لغزشی با شبکه‌های عصبی مصنوعی [۲۲، ۲۳]، روش ترکیبی پسگام-تطبیقی [۲۴، ۲۵]، روش ترکیبی کنترل مد لغزشی-تطبیقی [۲۶، ۲۷]. با توجه به مرور انجام شده بر روی مراجع [۱۷-۲۷]، می‌توان به این نتیجه رسید که چندین نقطه ضعف مشترک در اغلب این مراجع وجود دارد که به صورت فهرست‌وار در زیر آورده شده‌اند.

(الف) درنظر گرفتن مدل خطی‌شده‌ی زیردریایی به جای مدل غیرخطی آن. بنابراین در چنین حالتی فقط پایداری مجانبی محلی تضمین می‌شود و حتی پایداری مجانبی سرتاسری (فراگیر) نیز برآورده نمی‌گردد [۱، ۲، ۷، ۸، ۱۹].

(ب) درنظر نگرفتن نامعینی‌ها[5] هم‌چون نامعینی‌های پارامتری، ترم‌های دینامیکی مدل نشده، نیروهای ناشناخته از طرف اقیانوس و اغتشاش‌های خارجی در حین فرآیند طراحی ورودی‌های کنترلی. فلذا این روش‌های کنترلی در پیاده‌سازی عملی با مشکل مواجه خواهند شد و حتی ممکن است در مواردی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی رخ می‌دهد [۱، ۳-۵، ۷، ۸، ۱۲، ۱۶، ۱۷، ۲۸].

(پ) طراحی ورودی‌های کنترلی زیردریایی به منظور فقط کنترل عمق (Z) یا کنترل حرکت زیردریایی در صفحه (X-Y) و عدم توجه به کنترل جامع و کامل زیردریایی در هنگام حرکت سه بعدی (X-Y-Z) و راستاهای مرتبط [۳، ۴، ۸، ۱۲، ۱۷، ۲۳، ۲۶].

(ت) تضمین و اثبات پایداری مجانبی [۱۷-۲۷] (و در مواردی پایداری UUB[6] [۱۴، ۲۰، ۲۱] و پایداری نمایی [۶، ۱۰، ۱۳، ۲۹]) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی و عدم توجه به پایداری زمان-محدود[7] به غیر از مرجع [۳۰]. فلذا اغلب روش‌های کنترلی ارائه شده، باعث می‌گردند که زیردریایی هرگز به طور دقیق به مسیرهای مورد نظر همگرا نشود و همیشه خطاهای حالت ماندگاری در ردیابی مسیرها وجود داشته باشند.

با توجه به مطالب ذکر شده، در این مقاله با درنظر گرفتن مدل غیرخطی برای زیردریایی خودکار شش درجه آزادی[8] که تحت تاثیر انواع نامعینی‌ها می‌باشد، ورودی‌های کنترلی غیرخطی چنان طراحی می‌شوند تا زیردریایی را بعد از گذشت مدت زمان محدودی در امتداد مسیر دلخواه قرار داده و پایداری زمان-محدود سیستم حلقه‌بسته را تضمین دهند. این مقاله، از بسط و تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین[9] برای طراحی ورودی‌های کنترلی زیردریایی استفاده شده است. به منظور توجیه دلیل انتخاب روش کنترلی ذکر شده، در پاراگراف بعدی مروری مختصر بر روی پایداری زمان-محدود و روش‌های این نوع پایدارسازی انجام می‌شود.

در پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم غیرخطی، با شروع از هر شرایط اولیه‌ای، پاسخ‌های متغیرهای حالت سیستم بعد از گذشت زمان محدودی دقیقاً به نقطه تعادل (مبدا) همگرا می‌شوند و شرط لازمه برای آن، پایداری مجانبی سرتاسری است [۳۱]. در دهه‌ی اخیر [۳۲-۳۵]، در برخی از کاربرهای عملی مفهوم این نوع پایداری جایگزین پایداری مجانبی شده است. تاکنون سه روش و رهیافت کلی برای پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است. راه‌کار اول، استفاده از روش شبه لیاپانوف مستقیم[10] می‌باشد که نقطه ضعف اصلی این روش، عدم وجود هیچ نوع الگوریتم سیستماتیکی برای پیدا کردن تابع کاندیدای لیاپانوف است [۳۶, ۳۷, ۴۰, ۴۲-۴۴]. راه‌کار دوم، استفاده از روش

[1] Autonomous underwater vehicle
[2] Thruster
[3] Backstepping method
[4] Sliding mode control
[5] Uncertainties
[6] Uniformly Ultimately Bounded
[7] Finite-time stability
[8] 6-DOF autonomous underwater vehicle
[9] Nonsingular terminal sliding mode control
[10] Direct Lyapunov-like

هموژنی است که فقط قابلیت اعمال و کاربرد برای سیستم‌های غیرخطی هموژن[1] با درجه هموژنی منفی را دارد. در پایدارسازی زمان-محدود با این روش، فقط وجود زمان محدود همگرایی اثبات می‌شود و هیچ رابطه‌ای برای تخمین و محاسبه زمان محدود همگرایی ارائه نمی‌شود [۲۸, ۴۵, ۴۶] . راه‌کار سوم، استفاده از روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین است که برگرفته شده از روش کنترل مد لغزشی معمولی بوده ولی سطوح لغزشی غیرخطی جایگزین سطوح لغزشی خطی شده‌اند. یکی از مهمترین ویژگی‌های روش سوم، مقاوم بودن در برابر نامعینی‌های سیستم، اغتشاش و تغییرات پارامترهای سیستم است [۳۸, ۴۱, ۶۰-۴۷]. یکی از نقاط قوت روش سوم آن است که رابطه‌ای (البته محافظه‌کارانه) را به منظور تخمین زمان محدود مورد نیاز برای هدف پایدارسازی زمان-محدود مشخص می‌سازد. بنابراین با استناد به مطالب بیان شده، در این مقاله از روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین برای طراحی ورودی‌های کنترلی زیردریایی استفاده می‌شود. این مقاله در مقایسه با مقالات مشابه در زمینه هدایت و کنترل زیردریایی، دارای چندین نوآوری و برتری شاخص است که در زیر به صورت فهرست‌وار به آن‌ها اشاره می‌شود.

(الف) درنظر گرفتن مدل جامع ترکیبی برای زیردریایی شش درجه آزادی به همراه نامعینی‌ها که با ساده‌سازی، قابلیت توصیف کشتی‌های سه درجه آزادی و حتی مدل بازوهای ربات را داراست.

(ب) طراحی سه دسته متمایز از ورودی‌های کنترلی با توانایی هدایت و قرار دادن زیردریایی شش درجه آزادی در امتداد مسیر مورد نظر بعد از گذشت مدت زمان محدود. شایان ذکر است که مسیر مورد نظر می‌تواند حرکت در عمق یا انواع صفحات دوبعدی یا سه‌بعدی با جهت‌گیری‌های گوناگون باشد.

(پ) استخراج روابط تعیین‌کننده‌ی زمان‌های محدود مورد نیاز و قابلیت تنظیم این زمان‌ها با استفاده از پارامترهای آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی.

(ت) ارائه اثبات‌های کاملاً دقیق و تحلیلی برای پایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی شش درجه آزادی.

در ادامه، ساختار مقاله به شرح زیر سازماندهی و نوشته شده است. در بخش دوم مقاله، قضایای کاربردی مرتبط با پایداری زمان-محدود مرور می‌شوند. در بخش سوم، مدل سینماتیکی و دینامیکی زیردریایی شش درجه آزادی ارائه می گردد. بخش چهارم مقاله به بیان مسئله ردیابی زمان-محدود و فرمول‌بندی آن اختصاص می‌یابد. در بخش پنجم مقاله که شامل سه زیربخش جداگانه است به طراحی ورودی‌های کنترلی زمان-محدود مقاوم زیردریایی پرداخته می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری بر روی مدل زیردریایی NPS AUV II در بخش ششم آورده می‌شوند. بخش هفتم به نتیجه‌گیری کلی و بیان کارهای آینده اختصاص می‌یابد.

۲- مقدمات ریاضی مرتبط با تحلیل پایداری و پایدارسازی زمان-محدود

در این بخش از مقاله، ابتدا تعریف پایداری زمان-محدود ارائه می‌شود. سپس، چندین لم کاربردی در ارتباط با پایدارسازی سیستم‌های غیرخطی مرور می‌شوند که این لم‌ها در سرتاسر مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱. سیستم غیرخطی رابطه (۱) را در نظر بگیرید که از n متغیر حالت تشکیل شده و دارای نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ است.

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ with } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Gamma}\subseteq\mathfrak{R}^n \text{ and } \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x_0} \qquad (۱)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{\Gamma}\rightarrow\mathfrak{R}^n$ تابع برداری پیوسته و $\boldsymbol{\Gamma}\subseteq\mathfrak{R}^n$ همسایگی باز از نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ است. فرض کنید که سیستم برای شرط اولیه دلخواه $\boldsymbol{x_0}$، دارای پاسخ یکتای $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x_0})$ است. در صورتی که دو شرط (الف) و (ب) برای نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ برقرار باشند، آن را یک نقطه تعادل پایدار زمان-محدود محلی[2] گویند.

(الف) نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ باید در ناحیه $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$، پایدار مجانبی محلی[3] باشد که $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\subseteq\boldsymbol{\Gamma}$ یک همسایگی باز حول نقطه تعادل است.

(ب) برای هر $\boldsymbol{x_0}$، زمان محدود همگرایی $T_{conv}(\boldsymbol{x_0}):\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}\rightarrow[0,\infty)$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه (۲) برآورده شود.

$$\lim_{t\rightarrow T_{conv}(\boldsymbol{x_0})}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{0} \text{ and } \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{0}\ \forall\, t\geq T_{conv}(\boldsymbol{x_0}) \qquad (۲)$$

در صورتی که $\boldsymbol{\Gamma}=\mathfrak{R}^n$ باشد، آنگاه نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری[4] است [۳۱، ۴۷]■.

لم ۱. سیستم غیرخطی رابطه (۱) را با نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ و بردار شرط اولیه $\boldsymbol{x_0}$، درنظر بگیرید. این نقطه، پایدار زمان-محدود محلی است اگر تابع اسکالری مثبت پیوسته مشتق‌پذیر $V(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{\Gamma}\rightarrow\mathfrak{R}^+\cup\{0\}$ چنان وجود داشته باشد که یکی از دو نامساوی‌های (۳) یا (۴) برآورده شوند. زمان‌های محدود همگرایی $T_{conv}(\boldsymbol{x_0})$ مرتبط با هر کدام از نامساوی‌ها نیز در رابطه‌های (۳) و (۴) آورده شده‌اند. لازم به ذکر است که شرایط $\rho_1>0$، $1>\rho_2>0$ و $\rho_3>0$ برای ضرایب حقیقی ρ_1,ρ_2,ρ_3 برقرار است.

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\boldsymbol{x})+\rho_1V^{\rho_2}(\boldsymbol{x})\leq 0\quad\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Gamma}\backslash\{\boldsymbol{0}\}\\&T_{conv}(\boldsymbol{x_0})\leq\big(\rho_1(1-\rho_2)\big)^{-1}V^{1-\rho_2}(\boldsymbol{x_0})\end{aligned}\qquad (۳)$$

و

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\boldsymbol{x})+\rho_1V^{\rho_2}(\boldsymbol{x})+\rho_3V(\boldsymbol{x})\leq 0,\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Gamma}\backslash\{\boldsymbol{0}\}\\&T_{conv}(\boldsymbol{x_0})\leq\big(\rho_3(1-\rho_2)\big)^{-1}\left(\ln\left(\frac{\rho_3V^{1-\rho_2}(\boldsymbol{x_0})+\rho_1}{\rho_1}\right)\right)\end{aligned}\qquad (٤)$$

چنانچه $\boldsymbol{\Gamma}=\mathfrak{R}^n$ و تابع $V(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{\Gamma}\rightarrow\mathfrak{R}^+\cup\{0\}$ به صورت شعاعی بیکران[5] باشد، آنگاه نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری خواهد بود [۳۱، ۴۳، ۴۴] ■.

لم ۲. سیستم غیرخطی رابطه (۱) را با نقطه تعادل $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ و بردار شرط اولیه $\boldsymbol{x_0}$، درنظر بگیرید. این نقطه تعادل، پایدار زمان-محدود محلی است اگر تابع اسکالری مثبت پیوسته مشتق‌پذیر $V(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{\Gamma}\rightarrow\mathfrak{R}^+\cup\{0\}$ و اعداد حقیقی $\rho_1>0$، $\rho_2>0$، $\rho_3>1$، $\rho_4=1-0.5(\rho_3)^{-1}$ و $\rho_5=1+0.5(\rho_3)^{-1}$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(\boldsymbol{x})+\rho_1V^{\rho_4}(\boldsymbol{x})+\rho_2V^{\rho_5}(\boldsymbol{x})\leq 0$ برآورده شود. علاوه بر این، تمامی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی برای زمان‌های $t\geq T_{conv}$ دقیقاً به صفر همگرا می‌شوند. هم‌چنین نامساوی $T_{conv}\leq\pi\rho_3\big(\sqrt{\rho_1\rho_2}\big)^{-1}$، کران بالای زمان محدود همگرایی را ارائه می‌دهد و این کران بالا، برخلاف رابطه‌های (۳) و (۴) به شرایط اولیه

[1] Homogenous nonlinear system
[2] Locally finite time stable
[3] locally asymptotically stable
[4] Globally finite time stable
[5] Radially unbounded

سیستم غیرخطی وابستگی ندارد. در صورتی که $\Gamma = \Re^n$ باشد و تابع $V(x): \Gamma \to \Re^+ \cup \{0\}$ به صورت شعاعی بیکران باشد، آنگاه نقطه تعادل $x = \mathbf{0}$ پایدار زمان-محدود سرتاسری است [۶۱، ۶۲] ■.

لم ۳. سیستم غیرخطی مرتبه اول (اسکالری) را به فرم رابطه (۵) درنظر بگیرید که دارای نقطه تعادل اسکالری $x = 0$ است. در رابطه (۵)، ρ_1 و ρ_2 دو عدد حقیقی مثبت و پارامترهای ثابت ρ_3، ρ_4، ρ_5 و ρ_6 اعداد صحیح فرد با شرایط $\rho_3 > \rho_4 > 0$ و $\rho_6 > \rho_5 > 0$ می‌باشند.

$$\dot{x} = -\rho_1 x^{\frac{\rho_3}{\rho_4}} - \rho_2 x^{\frac{\rho_5}{\rho_6}} \text{ with } x \in \Re \text{ and } x(0) = x_0 \qquad (۵)$$

برای سیستم رابطه (۵)، اثبات شده است که نقطه تعادل $x = 0$ به صورت زمان-محدود سرتاسری پایدار است و با شروع از هر شرط اولیه دلخواه x_0، متغیر $x(t)$ برای زمان‌های $t \geq T_{conv}$ به صفر همگرا می‌شود. رابطه (۶)، تخمینی از کران بالای T_{conv} را ارائه می‌دهد.

$$T_{conv} \leq \left(\rho_4\big(\rho_1(\rho_3-\rho_4)\big)^{-1} + \rho_6\big(\rho_2(\rho_6-\rho_5)\big)^{-1}\right) \qquad (۶)$$

علاوه بر این، چنانچه چهار عدد صحیح فرد ρ_3، ρ_4، ρ_5 و ρ_6، شرط $\frac{\rho_6(\rho_3-\rho_4)}{\rho_4(\rho_6-\rho_5)} \leq 1$ را نیز برآورده سازند، می‌توان کران بالای T_{conv} را از رابطه (۷) نیز تخمین زد. در واقع، رابطه (۷) دارای محافظه‌کاری کمتری نسبت به رابطه (۶) در تخمین کران بالای زمان همگرایی است [۳۲، ۳۸، ۴۱] ■.

$$T_{conv} \leq \left(\frac{\rho_4}{\rho_1(\rho_3-\rho_4)} + \frac{\rho_6}{(\rho_6-\rho_5)\sqrt{\rho_1\rho_2}}\arctan\left(\sqrt{\rho_1/\rho_2}\right)\right) \qquad (۷)$$

لم ٤. سیستم غیرخطی مرتبه دوم رابطه (۸) را با دو متغیر حالت x_1 و x_2 درنظر بگیرید که $g(x_1,x_2)$ بیانگر ورودی کنترلی سیستم می‌باشد. اگر ورودی کنترلی $g(x_1,x_2) = -\rho_1 \text{sign}(x_1) - \rho_2 \text{sign}(x_2)$ به سیستم (۸) اعمال شود و دو پارامتر اختیاری ρ_1 و ρ_2 شرط $\rho_1 > \rho_2 > 0$ را برآورده سازند، آنگاه پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم غیرخطی (۸) تضمین می‌شود.

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ and } \dot{x}_2 = g(x_1,x_2) \qquad (۸)$$

علاوه بر این، هر دو متغیر x_1 و x_2 برای زمان‌های $t \geq T_{conv}$ به صفر همگرا می‌شوند. رابطه (۹)، تخمینی از کران بالای T_{conv} را ارائه می‌دهد.

$$\begin{aligned} &T_{conv} \leq 2(\min(\rho_4))^{-1}\sqrt{V\big(x_1(0),x_2(0)\big)} \\ &V(x_1,x_2) = \begin{cases} 0.25(\rho_4)^2\big(h(x_1,x_2,\rho_3,\rho_5)\big)^2 & \text{if } x_1x_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{\rho})^2 x_2^2 & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25|x_1| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases} \\ &h = (\rho_3)^{-1}x_2 \text{sign}(x_1) + \rho_5\sqrt{|x_1| + 0.5(\rho_3)^{-1}x_2^2} \end{aligned} \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، ثابت $\bar{\rho}$ چنان انتخاب می‌شود که نامساوی $\left(\sqrt{2(\rho_1+\rho_2)}\right)^{-1} < \bar{\rho} < \left(\sqrt{2(\rho_1-\rho_2)}\right)^{-1}$ برقرار باشد و در ادامه، ثابت‌های ρ_3، ρ_4 و ρ_5 از طریق رابطه (۱۰) محاسبه می‌شوند [۶۳] ■.

$$\begin{aligned} &\rho_3 = \rho_1 + \rho_2 \text{sign}(x_1x_2) \\ &\rho_4 = \sqrt{0.5\rho_3}\left|\sqrt{2\rho_3}\,\bar{\rho} - 1\right| \\ &\rho_5 = \sqrt{2(\rho_3)^{-1}}\left(\sqrt{2\rho_3}\,\bar{\rho} - 1\right)^{-1}\text{sign}(x_1x_2) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

لم ۵. سیستم غیرخطی مرتبه دوم رابطه (۸) را درنظر بگیرید. اگر ورودی کنترلی $g(x_1,x_2)$ به فرم رابطه (۱۱) انتخاب شود که ρ_1 ثابت حقیقی دلخواه با شرط $0 < \rho_1 < 1$ است، آنگاه سیستم غیرخطی (۸) دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری خواهد بود و متغیرهای حالت x_1 و x_2 برای زمان‌های $t \geq T_{conv}$ به صفر همگرا خواهند شد.

$$\begin{aligned} &g(x_1,x_2) = -|x_2|^{\rho_1}\text{sign}(x_2) - |\ell|^{\rho_1(2-\rho_1)^{-1}}\text{sign}(\ell) \\ &\ell = x_1 + (2-\rho_1)^{-1}|x_2|^{2-\rho_1}\text{sign}(x_2) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

کران بالای T_{conv} از نامساوی رابطه (۱۲) تخمین زده می‌شود و در این رابطه، ρ_2 و ρ_3 دو ثابت حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 1$ می‌باشند [۳۶]■.

$$\begin{aligned} &T_{conv} \leq \big(\varpi(1-\rho_1)\big)^{-1}(3-\rho_1)\big(V(x_1(0),x_2(0))\big)^{\frac{1-\rho_1}{3-\rho_1}} \\ &V(x_1,x_2) = \tfrac{2-\rho_1}{3-\rho_1}|\ell(x_1,x_2)|^{\frac{3-\rho_1}{2-\rho_1}} + \rho_2\, x_2\ell(x_1,x_2) + \tfrac{\rho_3}{3-\rho_1}|x_2|^{3-\rho_1} \\ &\varpi = -\max_{(x_1,x_2)\in\Xi}\dot{V}(x_1,x_2) \text{ with } \Xi = \{(x_1,x_2): V(x_1,x_2) = 1\} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

لم ٦. فرض کنید که $a_k, k = 1,2,3,\cdots,n$ اعداد حقیقی اختیاری و σ_1 و σ_2 دو عدد حقیقی مثبت با شرایط $\sigma_1 \geq 1$ و $0 < \sigma_2 < 1$ باشند. آنگاه دو نامساوی رابطه (۱۳) همواره برقرار هستند [۶۴] ■.

$$\begin{aligned} &(i): \left(\sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|^2}\right)^{\sigma_1} \leq \left(\textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|\right)^{\sigma_1} \leq n^{\sigma_1-1}\textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|^{\sigma_1} \\ &(ii): \sqrt{\left(\textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1+\sigma_2}} \leq \textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|^{1+\sigma_2} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

لم ۷. فرض کنید که $\boldsymbol{A} \in \Re^{n\times n}$ یک ماتریس حقیقی مثبت معین[1] و $\boldsymbol{A}^{-1} \in \Re^{n\times n}$ معکوس این ماتریس باشد، آنگاه دو نامساوی رابطه (۱۴) همواره برقرار می‌باشند. در رابطه (۱۴)، نمادهای $\lambda_{max}(\boldsymbol{A}), \lambda_{min}(\boldsymbol{A})$ و $\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^{-1}), \lambda_{min}(\boldsymbol{A}^{-1})$ به ترتیب بیانگر کمترین و بیشترین مقادیر ویژه ماتریس‌های $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{-1}$ می‌باشند. نمادهای $\|\boldsymbol{A}\|$ و $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ توصیف‌کننده‌ی نرم اقلیدسی ماتریس‌های $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{A}^{-1}$ هستند و با استفاده از روابط $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$ و $\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \sqrt{\lambda_{max}((\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}^{-1})}$ محاسبه می‌شوند [64] ■.

$$\begin{aligned} &(i): \lambda_{min}(\boldsymbol{A}) \leq \|\boldsymbol{A}\| \leq \lambda_{max}(\boldsymbol{A}) \\ &(ii): \lambda_{min}(\boldsymbol{A}^{-1}) \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \lambda_{max}(\boldsymbol{A}^{-1}) \end{aligned} \qquad (۱٤)$$

۳- توصیف مدل جامع ترکیبی زیردریایی شش درجه آزادی

در این بخش از مقاله، مدل زیردریایی با شش درجه آزادی که دارای ۶ ورودی (چهار بالک و دو تراستر) است، ارائه می‌شود. در واقع ورودی‌های کنترلی شامل سه گشتاور و سه نیرو می‌باشند که این ورودی‌ها توسط چهار بالک و دو تراستر به زیردریایی اعمال می‌شوند. مطالعه مدل مانور و حرکت زیردریایی، شامل دو توصیف سینماتیکی و توصیف دینامیکی می‌باشد.

توصیف سینماتیکی فقط به جنبه‌های هندسی حرکت و ارتباط میان دستگاه‌های مختصات می‌پردازد و توصیف دینامیکی، نیروهای موثر برای حرکت را مورد بررسی قرار می‌دهد. برای بیان معادلات سینماتیکی و دینامیکی حاکم بر مانور زیردریایی از دو دستگاه مختصات مرجع بدنه-ثابت[2] و مرجع زمین-ثابت[3] استفاده می‌شود. در دستگاه مختصات مرجع بدنه-ثابت، معمولاً مبدا مختصات منطبق با مرکز ثقل زیردریایی[4] درنظر گرفته می‌شود و در دستگاه مختصات مرجع زمین-ثابت، مبدا مختصات توسط سطح اقیانوس تعیین می‌گردد.

شکل ۱، شماتیکی از یک زیردریایی را همراه با دو دستگاه مرجع

[1] Positive definite matrix
[2] Body-fixed reference frame
[3] Earth-fixed reference frame
[4] Center of gravity of AUV

ذکر شده به تصویر می‌کشد که دارای چهاربالک و دو تراستر است. لازم به ذکر است که این شکل مستقیماً از مرجع [۶۵] انتخاب شده است. نمادهای مورد استفاده برای توصیف متغیرهای مدل زیردریایی بر اساس استاندارد SNAME [1] در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. توصیف نمادهای مورد استفاده در مدل زیردریایی مطابق با SNAME [66, 67].

عناوین نمادها	راستای‌محور x	راستای‌محور y	راستای‌محور z
سرعت‌های خطی	u	v	ω
سرعت‌های زاویه‌ای	p	q	r
نیروهای ورودی	F_X	F_Y	F_Z
گشتاورهای ورودی	τ_K	τ_M	τ_N
موقعیت‌ها	x	y	z
زاویه‌های اویلر	ϕ	θ	ψ

در ادامه برای بیان روابط مرتبط با مدل زیردریایی شش درجه آزادی از سه بردار $\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{R}^6$، $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{R}^6$ و $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^6$ استفاده خواهد شد که بردار $\boldsymbol{\eta}$ موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی مطابق با دستگاه مختصات مرجع زمین–ثابت، $\boldsymbol{v}$ بردار سرعت‌های خطی و زاویه‌ای زیردریایی مطابق با دستگاه مختصات مرجع بدنه–ثابت و $\boldsymbol{\tau}$ بردار توصیف نیروها و گشتاورهای اعمالی بر زیردریایی مطابق با دستگاه مختصات مرجع بدنه–ثابت می‌باشند. رابطه (۱۵)، این سه بردار را با همراه با درایه‌های مربوطه نشان می‌دهد.

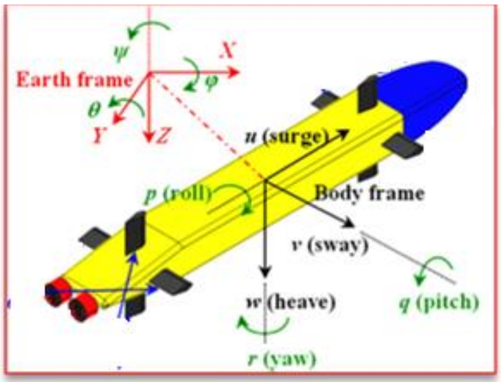
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_1 = [x \quad y \quad z]^T \in \mathfrak{R}^3, \boldsymbol{\eta}_2 = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \in \mathfrak{R}^3 \\
&\boldsymbol{v}_1 = [u \quad v \quad \omega]^T \in \mathfrak{R}^3, \boldsymbol{v}_2 = [p \quad q \quad r]^T \in \mathfrak{R}^3 \\
&\boldsymbol{\tau}_1 = [F_X \quad F_Y \quad F_Z]^T \in \mathfrak{R}^3, \boldsymbol{\tau}_2 = [\tau_K \quad \tau_M \quad \tau_N]^T \in \mathfrak{R}^3 \\
&\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1^T \quad \boldsymbol{\eta}_2^T]^T, \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1^T \quad \boldsymbol{v}_2^T]^T, \boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_1^T \quad \boldsymbol{\tau}_2^T]^T
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

رابطه (۱۶)، ارتباط بین بردار سرعت خطی زیردریایی $\boldsymbol{v}$ (بیان شده در دستگاه مختصات مرجع بدنه–ثابت) را با میزان تغییرات بردار موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی $\boldsymbol{\eta}$ (بیان شده در دستگاه مختصات مرجع زمین–ثابت) نشان می‌دهد.

در واقع، رابطه (۱۶) معادلات سینماتیکی را برای مدل زیردریایی شش درجه آزادی بیان می‌کند. لازم به ذکر است که در رابطه (۱۶)، $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2) \in \mathfrak{R}^{3\times3}$ و $\boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2) \in \mathfrak{R}^{3\times3}$ ماتریس‌های تبدیل از دستگاه مختصات مرجع بدنه–ثابت به دستگاه مختصات مرجع زمین–ثابت می‌باشند. نماد $\mathbf{0}_{3\times3}$ (به کار رفته در رابطه (۱۶)) به مفهوم ماتریس مربعی 3×3 با درایه‌های صفر می‌باشد. لازم به ذکر است که نمادهای c_θ، c_ψ، c_ϕ، s_θ، s_ψ، s_ϕ به ترتیب بیانگر توابع ریاضی $\cos\theta$، $\cos\psi$، $\cos\phi$، $\sin\theta$، $\sin\psi$، $\sin\phi$ می‌باشند.

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{v}, \ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2) & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}, \\
&\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{v}_1, \ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{v}_2 \\
&\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\theta c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi \tan\theta & c_\phi \tan\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi \sec\theta & c_\phi \sec\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

رابطه (۱۷)، معادلات سینماتیک معکوس مرتبط با زیردریایی شش درجه آزادی را توصیف می‌کند که در این رابطه از معکوس ماتریس‌های تبدیل $\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{\eta}_2)$ و $\boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{\eta}_2)$ استفاده شده است.



شکل ۱. شماتیک یک زیردریایی شش درجه آزادی به همراه دو دستگاه مختصات مرجع بدنه–ثابت و زمین–ثابت [65].

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2)\dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}, \\
&\boldsymbol{J}_1^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) = \boldsymbol{J}_1^T(\boldsymbol{\eta}_2), \boldsymbol{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \neq \boldsymbol{J}_2^T(\boldsymbol{\eta}_2) \\
&\boldsymbol{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با توجه به معادلات لاگرانژ–اویلر، معادلات دینامیکی مرتبط با زیردریایی شش درجه آزادی به فرم ماتریسی رابطه (۱۸)، قابل بیان است.

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{dis} \tag{۱۸}$$

در رابطه (۱۸)، $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ ماتریس اینرسی شامل جرم اضافه شده[۲]، $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v}) \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ ماتریس کوریولیس و گریز از مرکز شامل جرم اضافه شده[۳]، $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ ماتریس میرایی[۴]، $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathfrak{R}^6$ بردار نیروها و ممان‌های گرانشی[۵]، $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^6$ بردار نیروها و گشتاورهای وارد بر زیردریایی هستند. فرم گسترش‌یافته‌ی ماتریس‌های $\boldsymbol{M}$، $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v})$، $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ و $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ به ترتیب در رابطه‌های (۱۹) الی (۲۳) ارائه می‌شوند. $\boldsymbol{\tau}_{dis} \in \mathfrak{R}^6$ بردار نامعینی و اغتشاش‌های موجود در مدل دینامیکی زیردریایی است که برای این بردار، فرض ۱ (که در ادامه آورده خواهد شد) همواره برقرار است. باید به این نکته توجه داشت که نامعینی‌های موجود در مدل زیردریایی می‌توانند ناشی از مواردی هم‌چون دینامیک‌های مدل نشده، دقیق نبودن پارامترها و ثابت‌های فیزیکی مدل، محدودیت‌های غیرخطی (اشباع و ناحیه مرده[۶] و ...) عملگرها (بالک‌ها و تراستر) و نیروهای ناشناخته وارده از اقیانوس بر زیردریایی باشند.

لازم به ذکر است که برای انوع زیردریایی‌ها با درجه‌های آزادی مختلف، ماتریس‌های $\boldsymbol{M}$، $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v})$، $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$ و $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ مختصر شده و با ابعاد مناسب بیان می‌شوند. ماتریس $\boldsymbol{M}$ به صورت $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{RB} + \boldsymbol{M}_A$ قابل بیان است که $\boldsymbol{M}_{RB} \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ ماتریس اینرسی جسم صلب[۷] و $\boldsymbol{M}_A \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ ماتریس جرم اضافه شده می‌باشند. رابطه (۱۹)، دو ماتریس $\boldsymbol{M}_A$ و $\boldsymbol{M}_{RB}$ را

[1] Society of Naval Architects and Marine Engineers
[2] Inertia matrix (including added mass)
[3] Matrix of Coriolis and centrifugal (including added mass)
[4] Damping matrix
[5] Vector of gravitational forces and moments
[6] Dead-zone
[7] Rigid body inertia matrix

معرفی می‌کند. درایه‌های هر دو ماتریس $\boldsymbol{M}_A$ و $\boldsymbol{M}_{RB}$ دارای مقادیر ثابتی هستند که با توجه به مشخصات فیزیکی مدل زیردریایی تعیین می‌شوند. در رابطه (۱۹)، m بیانگر جرم زیردریایی، بردار $r_G = [x_G \quad y_G \quad z_G]^T \in \mathfrak{R}^3$ توصیف‌کننده‌ی مختصات مرکز ثقل زیردریایی و $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ نشان دهنده‌ی ماتریس همانی می‌باشند. علاوه بر این، $\boldsymbol{I}_0 \in \mathfrak{R}^{3\times3}$ بیانگر ماتریس اینرسی زیردریایی است که شامل تعدادی مقادیر ثابت مشخص می‌باشد. تمام درایه‌های ماتریس $\boldsymbol{M}_A$ اعداد ثابتی بوده و با توجه به مدل و نوع زیردریایی تعیین می‌شوند.

$$\boldsymbol{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m\boldsymbol{I}_{3\times3} & -mS(\boldsymbol{r}_G) \\ mS(\boldsymbol{r}_G) & \boldsymbol{I}_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{r}_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix},$$
$$S(\boldsymbol{r}_G) = \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$
$$\boldsymbol{M}_A = -\begin{bmatrix} X_{\dot u} & X_{\dot v} & X_{\dot \omega} & X_{\dot p} & X_{\dot q} & X_{\dot r} \\ Y_{\dot u} & Y_{\dot v} & Y_{\dot \omega} & Y_{\dot p} & Y_{\dot q} & Y_{\dot r} \\ Z_{\dot u} & Z_{\dot v} & Z_{\dot \omega} & Z_{\dot p} & Z_{\dot q} & Z_{\dot r} \\ K_{\dot u} & K_{\dot v} & K_{\dot \omega} & K_{\dot p} & K_{\dot q} & K_{\dot r} \\ M_{\dot u} & M_{\dot v} & M_{\dot \omega} & M_{\dot p} & M_{\dot q} & M_{\dot r} \\ N_{\dot u} & N_{\dot v} & N_{\dot \omega} & N_{\dot p} & N_{\dot q} & N_{\dot r} \end{bmatrix}$$

مشابه با ماتریس $\boldsymbol{M}$، ماتریس $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v})$ نیز از حاصل جمع دو ماتریس $\boldsymbol{C}_{RB} \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ و $\boldsymbol{C}_A \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ تشکیل شده است که این دو ماتریس به ترتیب توسط رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) معرفی می‌شوند.

$$\boldsymbol{C}_{RB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & -mS(\boldsymbol{v}_1) - mS(\boldsymbol{v}_2)S(\boldsymbol{r}_G) \\ -mS(\boldsymbol{v}_1) + mS(\boldsymbol{r}_G)S(\boldsymbol{v}_2) & -S(\boldsymbol{I}_0\boldsymbol{v}_2) \end{bmatrix},$$
$$S(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v \\ \omega & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix}, S(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$
$$S(\boldsymbol{r}_G) = \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\boldsymbol{C}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_3 & \Delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_3 & 0 & -\Delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & -\Delta_3 & \Delta_2 & 0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Delta_3 & 0 & -\Delta_1 & \Lambda_3 & 0 & -\Lambda_1 \\ -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} \Delta_1 = X_{\dot u}u + X_{\dot v}v + X_{\dot \omega}\omega + X_{\dot p}p + X_{\dot q}q + X_{\dot r}r \\ \Delta_2 = X_{\dot v}u + Y_{\dot v}v + Y_{\dot \omega}\omega + Y_{\dot p}p + Y_{\dot q}q + Y_{\dot r}r \\ \Delta_3 = X_{\dot \omega}u + Y_{\dot \omega}v + Z_{\dot \omega}\omega + Z_{\dot p}p + Z_{\dot q}q + Z_{\dot r}r \\ \Lambda_1 = X_{\dot p}u + Y_{\dot p}v + Z_{\dot p}\omega + K_{\dot p}p + K_{\dot q}q + K_{\dot r}r \\ \Lambda_2 = X_{\dot q}u + Y_{\dot q}v + Z_{\dot q}\omega + K_{\dot q}p + M_{\dot q}q + M_{\dot r}r \\ \Lambda_3 = X_{\dot r}u + Y_{\dot r}v + Z_{\dot r}\omega + K_{\dot r}p + M_{\dot r}q + N_{\dot r}r \end{cases} \quad (۲۱)$$

ماتریس $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$، به فرم حاصل‌جمع دو ماتریس میرایی خطی $\boldsymbol{D}_0 \in \mathfrak{R}^{6\times6}$ و ماتریس میرایی غیرخطی $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v})$ می‌باشد و رابطه (۲۲)، این دو ماتریس ذکر شده را توصیف می‌کند. لازم به ذکر است، نماد $diag\{.\}$ در رابطه (۲۲) به مفهوم ماتریس مربعی قطری با ابعاد مناسب است که علائم درون نماد $diag\{.\}$، درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربوطه را نشان می‌دهند. در رابطه (۲۲)، پارامترهای $X_u, Y_v, Z_\omega, K_p, M_q, N_r$ و $X_{u|u|}, Y_{v|v|}, Z_{\omega|\omega|}, K_{p|p|}, M_{q|q|}, N_{r|r|}$ اعداد ثابت مرتبط با مدل زیردریایی هستند که متناسب با نوع، ابعاد و مشخصات فیزیکی هر زیردریایی تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}_0 - \boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{D}_0 = -diag\{X_u, Y_v, Z_\omega, K_p, M_q, N_r\} \\ &\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v}) = diag\{X_{u|u|}|u|, Y_{v|v|}|v|, Z_{\omega|\omega|}|\omega|, K_{p|p|}|p|, M_{q|q|}|q|, N_{r|r|}|r|\} \end{aligned} \quad (۲۲)$$

بردار $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ توسط رابطه (۲۳) معرفی و توصیف می‌شود که درایه‌های این بردار، بیانگر نیروها و گشتاورهای رانشی و گرانشی وارد بر زیردریایی شش درجه آزادی می‌باشند.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W-B)s_\theta \\ -(W-B)s_\phi c_\theta \\ -(W-B)c_\phi c_\theta \\ -(y_G W - y_B B)c_\phi c_\theta + (z_G W - z_B B)s_\phi c_\theta \\ (x_G W - x_B B)c_\phi c_\theta + (z_G W - z_B B)s_\theta \\ -(x_G W - x_B B)s_\phi c_\theta + (y_G W - y_B B)s_\theta \end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

در رابطه (۲۳)، ضرایب ثابت W و B به ترتیب وزن زیردریایی و رانش زیردریایی[1] را توصیف می‌کنند. هم‌چنین نمادهای z_B، y_B و x_B مختصات مرکز رانش زیردریایی را بیان می‌کنند که به صورت فرم برداری $r_B = [x_B \quad y_B \quad z_B]^T \in \mathfrak{R}^3$ نیز نمایش داده می‌شوند. بردار $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_1 \quad \boldsymbol{\tau}_2]^T = [F_X, F_Y, F_Z, \tau_K, \tau_M, \tau_N]^T$ بیانگر نیروها و گشتاورهایی است که توسط چهار بالک‌ها و دو تراستر به زیردریایی اعمال می‌شوند و عامل اصلی حرکت و مانور زیردریایی در جهت‌ها و زوایای مختلف می‌باشند. این بردار در واقع نقش بردار ورودی‌های کنترلی مرتبط با زیردریایی را دارا است. برای مانور و حرکت زیردریایی در مسیر دلخواه، بردار کنترلی $\boldsymbol{\tau}$ باید به طور مناسب طراحی و به زیردریایی اعمال گردد. همان‌طوری که در بالا ذکر شد، $\boldsymbol{\tau}_{dis} \in \mathfrak{R}^6$ بردار نامعینی‌های مرتبط با مدل زیردریایی است، که شامل ترم‌های نامعینی جمعی سازگار[2] می‌باشند. در ادامه فرض می‌کنیم که کران بالایی برای نرم اقلیدسی بردار $\boldsymbol{\tau}_{dis}$ وجود دارد. این کران بالا به صوت فرض ۱ آورده شده است. شایان ذکر است که فرض ۱، معقول و منطقی بوده و با مسائل فیزیکی و عملی مرتبط با زیردریایی سازگاری دارد.

فرض ۱. نرم اقلیدسی بردار نامعینی $\boldsymbol{\tau}_{dis} \in \mathfrak{R}^6$ به صورت رابطه (۲۴) کراندار است و ضرایب β_h و α_h اعداد ثابت معلوم و مشخص(در اختیار) می‌باشند. توجه داشته باشید که ترم $\chi(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|)$، تابعی نامحدود است.

$$\|\boldsymbol{\tau}_d\| \le \sum_{h=0}^{n} \alpha_h \|\boldsymbol{\eta}\|^h + \sum_{h=1}^{n} \beta_h \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^h = \chi(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|) \quad (۲۴)$$

با مشتق‌گیری از (۱۶)، $\dot{\boldsymbol{v}}$ به صورت $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})(\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}})$ حاصل می‌شود. با جایگذاری بردار اخیر $\dot{\boldsymbol{v}}$ و رابطه (۱۷) در رابطه (۱۸)، مدل جامع ترکیبی زیردریایی در دستگاه مختصات مرجع زمین-ثابت به فرم رابطه (۲۵) نتیجه می‌گردد. از این جهت به این مدل حاصله، مدل جامع ترکیبی اطلاق می‌شود که هم توصیف سینماتیکی و هم توصیف دینامیکی زیردریایی را شامل می‌شود [۶۶، ۶۷].

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{C}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G}_\eta(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{dis}) \\ &\boldsymbol{M}_\eta(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\boldsymbol{C}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\eta})\right]\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\boldsymbol{D}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\boldsymbol{G}_\eta(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

در رابطه (۲۵)، نماد $\boldsymbol{J}^{-T}$ به مفهوم ماتریس معکوس ترانهاده ماتریس $\boldsymbol{J}$ می‌باشد. در مراجع [۶۶، ۶۷] نشان داده می‌شود که ماتریس‌های $\boldsymbol{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})$، $\boldsymbol{C}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta})$ و $\boldsymbol{D}_\eta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\eta})$ دارای ویژگی‌ها و خاصیت‌های بیان شده توسط رابطه (۲۶) هستند. در رابطه (۲۶)، ویژگی اول به مفهوم متقارن بودن و

[1] Buoyancy

[2] Matched additive uncertainty

مثبت معین بودن ماتریس $\boldsymbol{M_\eta(\eta)}$، ویژگی دوم به مفهوم شبه‌متقارن بودن ماتریس $\boldsymbol{\dot{M}_\eta(\eta)} - 2\boldsymbol{C_\eta(v,\eta)}$ و ویژگی سوم به مفهوم مثبت معین بودن ماتریس $\boldsymbol{D_\eta(v,\eta)}$ است.

$$\begin{aligned}&(i): \boldsymbol{M_\eta(\eta)} = \boldsymbol{M_\eta^T(\eta)} > \boldsymbol{0}\ ,\ \forall\, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{R}^6\ ,\\ &(ii): \boldsymbol{L}^T[\boldsymbol{\dot{M}_\eta(\eta)} - 2\boldsymbol{C_\eta(v,\eta)}]\boldsymbol{L} = 0\ ,\ \forall\, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{L} \in \mathfrak{R}^6\\ &(iii): \boldsymbol{D_\eta(v,\eta)} > \boldsymbol{0}\ ,\ \forall\, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{R}^6, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{R}^6\end{aligned} \tag{۲۶}$$

یادآوری ۱. معادلات جامع ترکیبی (۲۵) می‌توانند رفتار سینماتیکی و دینامیکی وسایلی که بر روی سطح دریا حرکت می‌کنند (مانند کشتی) را نیز توصیف کنند. برای این توصیف ذکر شده، درایه‌های بردار $\boldsymbol{\eta}$ به صورت $\boldsymbol{\eta} = [x \quad y \quad \psi]^T$ و درایه‌های بردار سرعت خطی کشتی در مختصات مرجع بدنه-ثابت به صورت $\boldsymbol{v} = [u \quad v \quad r]^T$ کاهش می‌یابند. علاوه بر این، ابعاد ماتریس‌های $\boldsymbol{M_\eta(\eta)}$، $\boldsymbol{C_\eta(v,\eta)}$، $\boldsymbol{D_\eta(v,\eta)}$، $\boldsymbol{G_\eta(\eta)}$ و $\boldsymbol{\tau}$ به طور مناسب تغییر خواهند کرد.

۴- بیان مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود زیردریایی شش درجه آزادی

در این بخش از مقاله، زیردریایی شش درجه آزادی رابطه (۲۵) را درنظر گرفته و مسئله ردیابی زمان-محدود مقاوم[1] مسیر مورد نظر را برای این زیردریایی، به فرم روابط ریاضی فرمول‌بندی می‌کنیم. مسیر مورد نظر به فرم برداری $\boldsymbol{\eta_d}(t) = [x_d \quad y_d \quad z_d \quad \phi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^T$ انتخاب می‌شود که $\boldsymbol{\eta_d}(t)$ می‌تواند مسیر مانور از قبل طراحی شده برای زیردریایی یا مسیر زیردریایی دشمن در حال فرار باشد. در مسئله ردیابی، بردار ورودی‌های کنترلی زیردریایی $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^6$ باید به گونه‌ای طراحی شود که بردار موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی (یعنی بردار $\boldsymbol{\eta}(t)$) بعد از گذشت مدت زمان محدود قابل تنظیم T_{total} به طور کاملاً دقیق و بدون وجود هیچ خطای حالت ماندگاری به بردار مسیرهای دلخواه $\boldsymbol{\eta_d}$ میل کند. باید توجه داشت که فرض ۲ برای بردار مسیرهای دلخواه $\boldsymbol{\eta_d}(t)$ برقرار است.

یادآوری ۲. بردار مسیرهای مورد نظر $\boldsymbol{\eta_d}(t)$ همواره مشخص و در اختیار بوده و تمام درایه‌های آن توابعی هستند که حداقل تا دو بار پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشند. به عبارت دیگر، همواره دو بردار $\boldsymbol{\dot\eta_d}(t)$ و $\boldsymbol{\ddot\eta_d}(t)$ وجود دارند و می‌توانند در طراحی ورودی‌های کنترلی زیردریایی مورد استفاده قرار گیرند.

برای فرمول‌بندی مسئله ذکر شده، دو بردار خطای ردیابی $\boldsymbol{e_{odd}} \in \mathfrak{R}^6$ و $\boldsymbol{e_{even}} \in \mathfrak{R}^6$ به صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e_{odd}} &= [e_1 \quad e_3 \quad e_5 \quad e_7 \quad e_9 \quad e_{11}]^T\\ &= [x - x_d \quad y - y_d \quad z - z_d \quad \phi - \phi_d \quad \theta - \theta_d \quad \psi - \psi_d]^T\\ \boldsymbol{e_{even}} &= [e_2 \quad e_4 \quad e_6 \quad e_8 \quad e_{10} \quad e_{12}]^T\\ &= [\dot x - \dot x_d \quad \dot y - \dot y_d \quad \dot z - \dot z_d \quad \dot\phi - \dot\phi_d \quad \dot\theta - \dot\theta_d \quad \dot\psi - \dot\psi_d]^T\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با درنظر گرفتن دو بردار خطای ردیابی تعریف شده و استفاده از معادلات جامع زیردریایی (۲۵)، معادلات دینامیکی خطاهای ردیابی زیردریایی به صورت رابطه (۲۸) نتیجه می‌شوند. شایان ذکر است که سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی رابطه (۲۸) از شش زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم تشکیل شده است که این زیرسیستم‌ها همگی با هم اندرکنش دارند.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\dot e_{odd}} = \boldsymbol{e_{even}}\\ &\boldsymbol{\dot e_{even}} = -\boldsymbol{M_\eta}^{-1}(\boldsymbol{C_\eta\dot\eta} + \boldsymbol{D_\eta\dot\eta} + \boldsymbol{G_\eta}) + \boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau_{dis}}) - \boldsymbol{\ddot\eta_d}\end{aligned} \tag{۲۸}$$

با توجه به سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی زیردریایی (۲۸)، می‌توان هدف ردیابی زمان-محدود مسیرهای دلخواه را به فرم رابطه (۲۹) بازنویسی کرد. در واقع، رابطه (۲۹) این نکته را بیان می‌کند که برای برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-محدود ذکر شده در بالا، ورودی‌های کنترلی زیردریایی باید چنان طراحی گردند که بعد از گذشت مدت زمان محدود قابل تنظیم T_{total}، هر دو بردار خطای ردیابی $\boldsymbol{e_{odd}}$ و $\boldsymbol{e_{even}}$ به صفر همگرا شوند و برای زمان‌های $t \geq T_{total}$ این دو بردار همواره صفر باشند. در ادامه، برآورده شدن هدف ردیابی زیردریایی معادل و هم‌ارز با فراهم شدن شرایط رابطه (۲۹) می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to T_{total}} \boldsymbol{e_{odd}} = \boldsymbol{0},\ \ and\ \ \boldsymbol{e_{odd}} = \boldsymbol{0}\ \ \text{for}\ \forall\, t \geq T_{total}\\ &\lim_{t\to T_{total}} \boldsymbol{e_{even}} = \boldsymbol{0},\ \ and\ \ \boldsymbol{e_{even}} = \boldsymbol{0}\ \ \text{for}\ \forall\, t \geq T_{total}\end{aligned} \tag{۲۹}$$

در ادامه، با استفاده از روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، سه کلاس و دسته از ورودی‌های کنترلی برای زیردریایی شش درجه آزادی طراحی می‌شوند که هر دسته و کلاس از ورودی‌های کنترلی پیشنهادی می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم مسیرهای دلخواه را برای زیردریایی فراهم سازند.

۵- طراحی ورودی‌های کنترلی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی

در این بخش از مقاله، روش کارا و مفید کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین [۴۷، ۵۱، ۶۰-۵۳]برای تضمین ردیابی زمان-محدود مقاوم به کار برده و تعمیم داده می‌شود. علت انتخاب و استفاده از روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، ویژگی‌های ذاتی و مزایای این روش می‌باشد که در زیر به طور فهرست‌وار و خلاصه به بخشی از آن‌ها اشاره می‌گردد [۵۵-۵۸].

(الف) این روش کنترل غیرخطی، در برابر اغتشاش‌های بیرونی وارده بر زیردریایی (از طرف امواج اقیانوس) و نامعینی‌های موجود در مدل زیر دریایی (از جمله دینامیک‌های مدل نشده و عدم‌قطعیت در پارامترهای ثابت و فیزیکی زیردریایی) مقاوم می‌باشد و با وجود همه‌ی عوامل ذکر شده، می‌تواند پایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی را تضمین دهد.

(ب) این روش کنترلی در مقایسه با روش‌های دیگر کنترل غیرخطی دارای پاسخ گذاری سریعتری است [۵۱، ۶۰-۵۸].

(پ) این روش، یکی از معدود روش‌های کنترل غیرخطی است که می‌تواند علاوه بر پایداری مجانبی، پایداری زمان-محدود سرتاسری را برای سیستم‌های غیرخطی فراهم سازد [۴۷، ۵۱، ۵۵-۵۳].

(ت) این روش، رابطه‌ای را برای محاسبه و تخمین زمان محدود همگرایی مورد نیاز ارائه می‌دهد. این رابطه‌ی مذکور ارتباط میان پارامترهای اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی را با زمان محدود مورد نیاز برای برآورده شدن هدف ردیابی نشان می‌دهد. در واقع، می‌توان از این رابطه برای تنظیم و کاهش زمان محدود همگرایی استفاده کرد و به نوعی کیفیت پاسخ گذاری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی را بهبود بخشید [۵۱، ۵۵، ۵۹، ۶۰].

[1] Robust finite-time tracking

(ث) برخلاف تمامی روش‌های مرتبط با کنترل خطی، این روش کنترلی نیازی به خطی‌سازی روابط دینامیکی زیردریایی حول نقطه تعادل نداشته و از همان مدل غیرخطی همراه با وجود نامعینی‌ها استفاده می‌کند [۴۷، ۵۴-۵۲، ۵۸].

(ج) تحقق فیزیکی و پیاده‌سازی عملی این روش کنترلی غیرخطی ساده و ارزان است.

برای طراحی با استفاده از روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین از تعمیم مفاهیم پایه و اولیه کنترل مد لغزشی استفاده می‌شود که شامل دو مرحله (الف): تعریف سطوح لغزشی مناسب با هدف پایدارسازی دینامیک مد لغزشی و (ب): طراحی ورودی‌های کنترلی به منظور هدایت و رساندن سیستم غیرخطی به دینامیک مد لغزشی (تضمین وجود مد لغزشی) می‌باشد [۴۷، ۵۱، ۶۰-۵۳]. در روش پیشنهادی، بردار سطوح لغزشی غیرخطی چنان تعریف می‌شوند که دینامیک مد لغزشی سیستم خطای ردیابی نه تنها به صورت مجانبی پایدار باشد، بلکه دارای پایداری زمان محدود همراه با زمان نشست محدود قابل تنظیم T_s باشد. ورودی‌های کنترلی روش پیشنهادی نیز به صورتی طراحی می‌گردند تا قادر باشند که همه خطاهای ردیابی را در زمان محدود T_r بر روی سطوح لغزشی غیرخطی قرار دهند یا به عبارت دیگر ورودی‌های کنترلی باید بتواند در زمان محدود T_r، وجود دینامیک مد لغزشی تعریف شده برای سیستم خطای ردیابی را تضمین کنند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که بعد از زمان محدود کلی T_{total} که مجموع دو زمان ذکر شده است ($T_{total} = T_s + T_r$)، هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی (۲۵) برآورده گردد [۴۷، ۶۰-۵۱].

در ادامه، به منظور فراهم ساختن هدف ردیابی زمان-محدود (۲۹)، سه دسته از ورودی‌های کنترلی برای مدل زیردریایی شش درجه آزادی طراحی می‌گردند. بنابراین این قسمت از مقاله، از سه زیربخش تشکیل شده است که هر زیربخش به معرفی یک دسته از ورودی‌های کنترلی پیشنهادی و اثبات پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی با استفاده آن دسته از ورودی‌ها اختصاص می‌یابد.

۵-۱ طراحی ورودی‌های کنترلی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی

برای این دسته از ورودی‌های کنترلی، بردار سطوح لغزشی غیرخطی $\boldsymbol{s}(t) = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6]^T \in \mathfrak{R}^6$ به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود. در این رابطه، $l_{i_j}\ , i = 1, 2\ \ , j = 1, 2, \cdots, 6$ ثابت‌های مثبت حقیقی اختیاری با شرایط $l_{1_j} > l_{2_j} > 0$ هستند که توسط کاربر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{e}_{even} + \int_0^t \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}(\varsigma))d\varsigma + \int_0^t \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even}(\varsigma))d\varsigma\\
&\boldsymbol{l_1} = [l_{1_1} \quad l_{1_2} \quad l_{1_3} \quad l_{1_4} \quad l_{1_5} \quad l_{1_6}]^T\\
&\boldsymbol{l_2} = [l_{2_1} \quad l_{2_2} \quad l_{2_3} \quad l_{2_4} \quad l_{2_5} \quad l_{2_6}]^T\\
&\boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) = [l_{1_1}\mathrm{sign}(e_1) \quad l_{1_2}\mathrm{sign}(e_3) \quad \dots \quad l_{1_6}\mathrm{sign}(e_{11})]^T\\
&\boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even}) = [l_{2_1}\mathrm{sign}(e_2) \quad l_{2_2}\mathrm{sign}(e_4) \quad \dots \quad l_{2_6}\mathrm{sign}(e_{12})]^T
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

قوانین کنترلی مقاوم برای رساندن خطاهای ردیابی به سطوح لغزشی تعریف شده، به فرم رابطه (۳۱) پیشنهاد می‌گردند که در این رابطه، $\chi(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|)$ همان کران بالای بردار نامعینی‌هاست و قبلاً در فرض ۱ معرفی شده است. در رابطه (۳۱)، نماد $\lambda_{max}\left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\right)$ به مفهوم بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{M_\eta}(\boldsymbol{\eta})\left(\boldsymbol{\tau}_{eq} + \boldsymbol{\tau}_r\right)\\
&\boldsymbol{\tau}_{eq} = \boldsymbol{M_\eta}^{-1}\left(\boldsymbol{C_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G_\eta}\right) + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) - \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\\
&\boldsymbol{\tau}_r = -\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^\gamma(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\mu}\,\mathbf{sig}(\boldsymbol{s}) - \lambda_{max}\left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\right)(\chi)\mathbf{sign}(\boldsymbol{s})\\
&\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_6]^T, \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_6]^T\\
&\mathbf{sign}(\boldsymbol{s}) = [\mathrm{sign}(s_1) \quad \mathrm{sign}(s_2) \quad \dots \quad \mathrm{sign}(s_6)]^T\\
&\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{sig}(\boldsymbol{s}) = [\mu_1|s_1|\mathrm{sign}(s_1) \quad \mu_2|s_2|\mathrm{sign}(s_2) \quad \dots \quad \mu_6|s_6|\mathrm{sign}(s_6)]^T\\
&\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^\gamma(\boldsymbol{s}) = [\xi_1|s_1|^\gamma\mathrm{sign}(s_1) \quad \xi_2|s_2|^\gamma\mathrm{sign}(s_2) \quad \dots \quad \xi_6|s_6|^\gamma\mathrm{sign}(s_6)]^T
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

در رابطه (۳۱)، γ و $\xi_j, \mu_j,\ j = 1, 2, \cdots, 6$ ثابت‌های حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \gamma < 1$، $\mu_j > 0$ و $\xi_j > 0$ بوده و توسط طراح و کاربر تعیین می‌شوند. در ادامه، قضیه ۱ و اثبات آن نشان می‌دهند که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) قادرند تا هدف ردیابی زمان-محدود توصیف شده توسط رابطه (۲۹) را برای زیردریایی شش درجه آزادی برآورده سازند.

قضیه ۱. زیردریایی شش درجه آزادی رابطه (۲۵) را همراه با فرض‌های ۱ و ۲ درنظر بگیرید. چنانچه ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) به این زیردریایی اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۲۹) برآورده شده و بردار موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی $\boldsymbol{\eta}(t)$ بعد از گذشت مدت زمان محدود $T_{total} = T_r + T_s$ به طور کاملاً دقیق (بدون هیچ‌گونه خطای حالت ماندگار) به بردار مسیرهای دلخواه و مورد نظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا می‌شوند. علاوه بر این، برای زمان‌های $t > T_{total}$ تساوی $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t)$ همواره برقرار خواهد بود. شایان ذکر است که دو زمان محدود T_r و T_s به ترتیب توسط نامساوی‌های (۳۲) و (۳۳) تخمین زده می‌شوند. در واقع این دو نامساوی، کران‌های بالایی را برای دو زمان T_r و T_s ارائه می‌دهند که به شرایط اولیه زیردریایی و پارامترهای آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی وابسته هستند.

$$T_r \le \left(\mu_{\min}(1-\gamma)\right)^{-1}\left(\ln(\mu_{\min}\|\boldsymbol{s}(0)\|^{1-\gamma} + \xi_{\min}) - \ln\xi_{\min}\right) \tag{۳۲}$$

در رابطه (۳۲)، $\mu_{\min}$ و $\xi_{\min}$ به صورت $\mu_{\min} \triangleq \min\limits_j(\mu_j)$ و $\xi_{\min} \triangleq \min\limits_j(\xi_j)$ با $j = 1, 2, \cdots, 6$ تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned}
&T_s = \max_j\left({}_jT_s\right) \ \text{ with } j = 1,2,\cdots,6.\\
&{}_jT_s \le 2\left(\min\left(l_{4_j}\right)\right)^{-1}\sqrt{\Psi_j\left(e_{2j-1}(t = T_r), e_{2j}(t = T_r)\right)}\\
&\Psi_j = \begin{cases} 0.25\left(l_{4_j}\right)^2\left(h_j\right)^2 & \text{if } e_{2j-1}e_{2j} \neq 0\\ 0.25\left(\bar{l}_j\right)^2 e_{2j}^2 & \text{if } e_{2j-1} = 0\\ 0.25\left|e_{2j-1}\right| & \text{if } e_{2j} = 0\end{cases}\\
&h_j = \left(l_{3_j}\right)^{-1} e_{2j}\mathrm{sign}\left(e_{2j-1}\right) + l_{5_j}\sqrt{\left|e_{2j-1}\right| + 0.5\left(l_{3_j}\right)^{-1} e_{2j}^2}
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در رابطه (۳۳)، $\bar{l}_j$ها از $\left(\sqrt{2\left(l_{1_j} + l_{2_j}\right)}\right)^{-1} < \bar{l}_j < \left(\sqrt{2\left(l_{1_j} - l_{2_j}\right)}\right)^{-1}$ انتخاب می‌شوند. هم‌چنین l_{3_j}، l_{4_j} و l_{5_j} توسط رابطه (۳۴) تعیین می‌شوند ■.

$$\begin{aligned}
&l_{3_j} = l_{1_j} + l_{2_j}\mathrm{sign}\left(e_{2j-1}e_{2j}\right)\\
&l_{4_j} = \sqrt{0.5 l_{3_j}}\left|\sqrt{2 l_{3_j}}\,\bar{l}_j - 1\right|\\
&l_{5_j} = \sqrt{2\left(l_{3_j}\right)^{-1}}\left(\sqrt{2 l_{3_j}}\,\bar{l}_j - 1\right)^{-1}\mathrm{sign}\left(e_{2j-1}e_{2j}\right)
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

اثبات قضیه ۱. این اثبات از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحله اول اثبات می‌شود که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی (۳۱) می‌توانند وجود

دینامیک مد لغزشی[1] $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ را در زمان محدود T_r تضمین دهند. در این مرحله نشان داده می‌شود که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی می‌توانند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۲۸) را برای زمان‌های $t \geq T_r$ به دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ تبدیل کنند. در مرحله دوم اثبات، نشان داده می‌شود که دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ دارای پایداری زمان–محدود سرتاسری است و تمامی خطاهای ردیابی $e_{2j-1}, e_{2j}\ , j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ قرار گرفته‌اند، بعد از زمان T_s دقیقاً به صفر واقعی همگرا می‌شوند. در انتها نیز با جمع‌بندی این دو مرحله، می‌توان ادعا کرد که با اعمال ورودی‌های کنترلی (۳۰) و (۳۱)، هدف ردیابی زمان–محدود (۲۹) بعد از گذشت مدت $T_{total} = T_r + T_s$ برآورده خواهد شد و برای زمان‌های $t > T_{total}$، زیردریایی شش درجه آزادی (۲۵) بر روی مسیر مورد نظر مانور می‌دهد. برای اثبات ادعای مطرح شده در مرحله اول، کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2 = 0.5\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ انتخاب می‌شود که مشتق این تابع به فرم $\dot{V}(t) = \boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ است. با مشتق‌گیری از (۳۰)، $\dot{\boldsymbol{s}}(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_{even} + \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) + \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری $\dot{\boldsymbol{e}}_{even}$ از رابطه (۲۸) و سپس جایگذاری بردار $\boldsymbol{\tau}$ از رابطه (۳۱)، ترم برداری $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ به فرم $\dot{\boldsymbol{s}}(t) = (\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis})$ حاصل می‌گردد. حال با جایگذاری $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ در مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف $\dot{V}(t) = \boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ و استفاده از ترم برداری $\boldsymbol{\tau}_r$ (مطابق با رابطه (۳۱))، ترم اسکالری $\dot{V}(t)$ به صورت رابطه (۳۵) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-\textstyle\sum_{j=1}^{6}\xi_j|s_j|^{\gamma+1} - \sum_{j=1}^{6}\mu_j|s_j|^2 \\ &-\chi\lambda_{max}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j| - \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\end{aligned} \tag{۳۵}$$

با استناد به دو تعریف $\mu_{\min} \triangleq \min\limits_j(\mu_j)$، $\xi_{\min} \triangleq \min\limits_j(\xi_j)$ و بهره گرفتن از نامساوی پرکاربرد و با اهمیت کوشی–شوآرتز[2] $|-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}| \leq \|\boldsymbol{s}\|\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\| \leq \|\boldsymbol{s}\|\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|\,\|\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\|$، رابطه (۳۵) به فرم نامساوی (۳۶) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq \ \{&-\xi_{\min}\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j|^{\gamma+1} - \mu_{\min}\sum_{j=1}^{6}|s_j|^2 \\ &-\chi\,\lambda_{max}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j| + \|\boldsymbol{s}\|\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|\,\|\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\|\}\end{aligned} \tag{۳۶}$$

با استناد به نامساوی‌های معروف لم‌های ۶ و ۷، سه نامساوی $\left(-\sum_{j=1}^{6}|s_j|\right) \leq -\|\boldsymbol{s}\|$، $\left(-\left(\sum_{j=1}^{6}|s_j|^{\gamma+1}\right)\right) \leq \left(-\left(\sum_{j=1}^{6}|s_j|^2\right)^{0.5(\gamma+1)}\right)$ و $\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\| \leq \lambda_{max}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})$ نتیجه می‌گردند. با استفاده از این سه نامساوی اخیر و تعریف $\|\boldsymbol{s}\|^2 = \sum_{j=1}^{6}|s_j|^2$، نامساوی رابطه (۳۶) به فرم ساده شده‌ی (۳۷) تبدیل می‌گردد.

$$\dot{V} \leq -\xi_{\min}\|\boldsymbol{s}\|^{\gamma+1} - \mu_{\min}\|\boldsymbol{s}\|^2 + \lambda_{max}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})\|\boldsymbol{s}\|(\|\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\| - \chi) \tag{۳۷}$$

با توجه به فرض ۱، ترم اسکالری $(\|\boldsymbol{\tau}_{\text{dis}}\| - \chi)$ همواره نامثبت (کوچکتر یا مساوی صفر) است. با درنظر گرفتن این نکته و تعریف کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2$، نامساوی (۳۷) به فرم (۳۸) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} + 2\mu_{\min}V + \sqrt{2^{\gamma+1}}\xi_{\min}V^{0.5(\gamma+1)} \leq 0 \tag{۳۸}$$

حال چنانچه ρ_1، ρ_2 و ρ_3 را به صورت $\rho_1 = 2\mu_{\min}$، $\rho_2 = \sqrt{2^{\gamma+1}}\xi_{\min}$ و $\rho_3 = 0.5(\gamma+1)$ درنظر گرفته و از لم ۱ استفاده شود، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $\boldsymbol{s}(t)$ به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ تضمین می‌گردد. علاوه بر این، T_r با رابطه‌ی (۳۲) تخمین زده می‌شود. در اینجا اثبات ادعای گام اول به پایان می‌رسد.

بنابراین در مرحله دوم برای زمان‌های $t \geq T_r$، دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ به صورت رابطه (۳۹) نتیجه می‌شود که از شش زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم مستقل (بدون اندرکنش) تشکیل شده است.

$$\begin{cases}\dot{e}_{2j-1} = e_{2j} \\ \dot{e}_{2j} = -l_{1_j}\text{sign}(e_{2j-1}) - l_{2_j}\text{sign}(e_{2j})\end{cases} \quad \text{with } j = 1,2,\cdots,6. \text{ for } t \geq T_r \tag{۳۹}$$

حال با مقایسه میان هر کدام از شش زیرسیستم غیرخطی رابطه (۳۹) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۴ (رابطه (۸))، پایداری زمان–محدود سرتاسری دینامیک مد لغزشی (۳۹) نتیجه می‌گردد و همگی خطاهای ردیابی $e_{2j-1}, e_{2j}\ , j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ قرار گرفته‌اند، بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s به صفر واقعی همگرا می‌شوند. هم‌چنین زمان محدود T_s می‌تواند توسط رابطه (۳۳) تخمین زده شود. بنابراین در انتها با استناد به دو مرحله‌ی ذکر شده (و اثبات مربوط به هر مرحله) می‌توان نتیجه گرفت که بردار موقعیت و جهت‌گیری $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی شش درجه آزادی در مدت زمان محدود $T_{total} = T_s + T_r$ به بردار مسیرهای موردنظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ می‌رسد و زیردریایی در مسیر موردنظر قرار گرفته و هدف ردیابی زمان–محدود (۲۹) برآورده می‌گردد. بنابراین اثبات قضیه ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد ■.

یادآوری ۲. از آنجایی که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی (۳۱) از تابع علامت[3] استفاده می‌کنند، پدیده نامطلوب وزوز (چترینگ[4]) (سوئیچینگ‌های فرکانس بالای ورودی‌های کنترلی همراه با صدای وزوز) رخ می‌دهد. برای غلبه بر این مشکل، ورودی‌های کنترلی رابطه (۳۱) به فرم رابطه (۴۰) اصلاح می‌گردند. شایان ذکر است که برای ورودی‌های کنترلی اصلاح شده (۴۰)، قضیه ۱ و اثبات آن برقرار و صحیح می‌باشند.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_{even} + \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) + \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even}) \\ &\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{M_\eta}(\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\tau}_{eq} + \boldsymbol{\tau}_r) \\ &\boldsymbol{\tau_{eq}} = \boldsymbol{M_\eta}^{-1}(\boldsymbol{C_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G_\eta}) + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) - \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even}) \\ &\dot{\boldsymbol{\tau}}_r = -\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^{\gamma}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\mu}\,\mathbf{sig}(\boldsymbol{s}) \\ &\qquad - \left(\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|(\Upsilon(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|)) + \chi\left\|\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})\right\|\right)\mathbf{sign}(\boldsymbol{s})\end{aligned} \tag{۴۰}$$

در رابطه (۴۰)، فرض شده است ترم اسکالری $\Upsilon(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|)$ کران بالای بردار $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{dis}(t)$ مطابق با رابطه (۴۱) می‌باشد که κ_h و σ_h اعداد حقیقی مثبت و معلوم هستند.

$$\|\dot{\boldsymbol{\tau}}_{dis}(t)\| \leq \textstyle\sum_{h=0}^{n}\kappa_h\|\boldsymbol{\eta}\|^h + \sum_{h=0}^{n}\sigma_h\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^h = \Upsilon(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|) \tag{۴۱}$$

۲-۵ طراحی دسته‌ی دوم از ورودی‌های کنترلی زمان–محدود مقاوم

برای این دسته از ورودی‌های کنترلی، بردار سطوح لغزشی غیرخطی $\boldsymbol{s} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6]^T \in \mathfrak{R}^6$ به فرم رابطه (۴۲) تعریف می‌شود. در این رابطه، $0 < o_j < 1\ , j = 1,2,\cdots,6$ ثابت‌های مثبت

[1] Sliding mode dynamic (sliding motion)
[2] Cauchy–Schwarz inequality
[3] Sign function
[4] Chattering phenomenon

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]

حقیقی اختیاری هستند.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_{even} + \int_0^t \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}\big(\boldsymbol{e}_{even}(\varsigma)\big)d\varsigma + \int_0^t \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(\mathbf{2}-\boldsymbol{o})^{-\mathbf{1}}}\big(\mathbf{H}(\varsigma)\big)d\varsigma \\
&\mathbf{H} = [\mathrm{H}_1 \quad \mathrm{H}_2 \quad \mathrm{H}_3 \quad \mathrm{H}_4 \quad \mathrm{H}_5 \quad \mathrm{H}_6]^T \\
&\mathrm{H}_j\big(e_{2j-1}, e_{2j}\big) = e_{2j-1} + (2-o_j)^{-1}\big|e_{2j}\big|^{(2-o_j)}\mathrm{sign}(e)\ , j = 1,2,\dots,6 \\
&\boldsymbol{o} = [o_1 \quad o_2 \quad o_3 \quad o_4 \quad o_5 \quad o_6]^T \\
&\boldsymbol{o}(\mathbf{2}-\boldsymbol{o})^{-\mathbf{1}} = [o_1(2-o_1)^{-1} \quad o_2(2-o_2)^{-1} \quad \dots \quad o_6(2-o_6)^{-1}]^T \\
&\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) = \begin{bmatrix} |e_2|^{o_1}\mathrm{sign}(e_2) \\ |e_4|^{o_2}\mathrm{sign}(e_4) \\ |e_6|^{o_3}\mathrm{sign}(e_6) \\ |e_8|^{o_4}\mathrm{sign}(e_8) \\ |e_{10}|^{o_5}\mathrm{sign}(e_{10}) \\ |e_{12}|^{o_6}\mathrm{sign}(e_{12}) \end{bmatrix}, \\
&\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(\mathbf{2}-\boldsymbol{o})^{-\mathbf{1}}}(\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} |\mathrm{H}_1|^{o_1(2-o_1)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_1) \\ |\mathrm{H}_2|^{o_2(2-o_2)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_2) \\ |\mathrm{H}_3|^{o_3(2-o_3)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_3) \\ |\mathrm{H}_4|^{o_4(2-o_4)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_4) \\ |\mathrm{H}_5|^{o_5(2-o_5)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_5) \\ |\mathrm{H}_6|^{o_6(2-o_6)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_6) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۴۲}
$$

قوانین کنترلی مقاوم برای رساندن خطاهای ردیابی به سطوح لغزشی تعریف شده، به فرم رابطه (۴۳) پیشنهاد می‌گردند.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}\left(\boldsymbol{\tau}_{eq} + \boldsymbol{\tau}_r\right) \\
&\boldsymbol{\tau}_{eq} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\big(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\eta}}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{\eta}}\big) + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) - \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(\mathbf{2}-\boldsymbol{o})^{-\mathbf{1}}}(\mathbf{H}) \\
&\boldsymbol{\tau}_r = -\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^{\Omega_1}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\mu}\mathbf{sig}^{\Omega_2}(\boldsymbol{s}) - \chi\lambda_{max}\big(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big)\mathbf{sign}(\boldsymbol{s}) \\
&\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4 \quad \xi_5 \quad \xi_6]^T \\
&\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4 \quad \mu_5 \quad \mu_6]^T \\
&\mathbf{sign}(\boldsymbol{s}) = [\mathrm{sign}(s_1) \quad \mathrm{sign}(s_2) \quad \dots \quad \mathrm{sign}(s_6)]^T \\
&\boldsymbol{\mu}\mathbf{sig}^{\Omega_2}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} \mu_1|s_1|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_1) \\ \mu_2|s_2|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_2) \\ \mu_3|s_3|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_3) \\ \mu_4|s_4|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_4) \\ \mu_5|s_5|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_5) \\ \mu_6|s_6|^{\Omega_2}\mathrm{sign}(s_6) \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^{\Omega_1}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} \xi_1|s_1|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_1) \\ \xi_2|s_2|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_2) \\ \xi_3|s_3|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_3) \\ \xi_4|s_4|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_4) \\ \xi_5|s_5|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_5) \\ \xi_6|s_6|^{\Omega_1}\mathrm{sign}(s_6) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۴۳}
$$

در رابطه (۴۳)، $\xi_j, \mu_j,\ j = 1, 2, \cdots, 6$ ثابت‌های حقیقی اختیاری با شرایط $\mu_j > 0$ و $\xi_j > 0$ بوده و توسط طراح و کاربر تعیین می‌شوند. هم‌چنین، دو ثابت حقیقی Ω_1 و Ω_2 توسط روابط $\Omega_1 = 1 - (\Omega_3)^{-1}$ و $\Omega_2 = 1 + (\Omega_3)^{-1}$ تعیین می‌گردند که در این روابط، Ω_3 عدد حقیقی اختیاری با شرط $\Omega_3 > 1$ است. در ادامه، قضیه ۲ و اثبات مرتبط با آن آشکار می‌سازند که ورودی‌های کنترلی طراحی‌شده‌ی رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) می‌توانند هدف ردیابی را برای زیردریایی شش درجه آزادی (۲۵) فراهم سازند.

قضیه ۲. زیردریایی شش درجه آزادی رابطه (۲۵) را همراه با فرض‌های ۱ و ۲ درنظر بگیرید. اگر ورودی‌های کنترلی طراحی شده‌ی رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) به زیردریایی (۲۵) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۲۹) برآورده شده و بردار موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی $\boldsymbol{\eta}(t)$ بعد از گذشت مدت زمان محدود قابل تنظیم $T_{total} = T_r + T_s$ به طور کاملاً دقیق به بردار مسیر دلخواه و مورد نظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا می‌شود. هم‌چنین، برای زمان‌های $t > T_{total}$ تساوی $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t)$ همواره برقرار خواهد بود. دو زمان محدود T_r و T_s به ترتیب توسط نامساوی‌های (۴۴) و (۴۵) محاسبه و تخمین زده می‌شوند. این دو نامساوی، کران‌های بالایی را برای دو زمان T_r و T_s معرفی می‌کنند که به شرایط اولیه زیردریایی وابسته نیستند.

$$
T_r \le 0.5\pi\Omega_3\left(\sqrt{\mu_{\min}\xi_{\min}}\right)^{-1}\sqrt{3^{\frac{1+\Omega_3}{\Omega_3}}}
\tag{۴۴}
$$

در رابطه (۴۴)، $\mu_{\min}$ و $\xi_{\min}$ به فرم $\mu_{\min} \triangleq \min\limits_j(\mu_j)$ و $\xi_{\min} \triangleq \min\limits_j(\xi_j)$ تعریف شده‌اند

$$
\begin{aligned}
&T_s = \max_j\left({}_jT_s\right) \ \text{with}\ j = 1,2,\cdots,6. \\
&{}_jT_s \le \left(\varpi_j(1-o_j)\right)^{-1}(3-o_j)\left(\Psi_j(e_{2j-1}(t=T_r), e_{2j}(t=T_r))\right)^{\frac{1-o_j}{3-o_j}} \\
&\Psi_j\big(e_{2j-1}, e_{2j}\big) = \frac{2-o_j}{3-o_j}|\mathrm{H}_j|^{\frac{3-o_j}{2-o_j}} + \vartheta_{1_j}\,e_{2j}\mathrm{H}_j + \frac{\vartheta_{2_j}}{3-o_j}|e_{2j}|^{3-o_j} \\
&\varpi_j = -\max_{(e_{2j-1},e_{2j})\in\Xi_j}\dot{\Psi}_j(e_{2j-1}, e_{2j}) \\
&\text{with}\ \ \Xi_j = \left\{(e_{2j-1}, e_{2j}) : \Psi_j(e_{2j-1}, e_{2j}) = 1\right\}
\end{aligned}
\tag{۴۵}
$$

در رابطه (۴۵)، $j = 1, 2, \cdots, 6$، ϑ_{1_j} و ϑ_{2_j} اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $1 < \vartheta_{1_j} < 0$ و $\vartheta_{2_j} > 1$ هستند ■.

اثبات قضیه ۲. این اثبات مشابه با اثبات قضیه ۱ از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحله اول اثبات می‌شود که ورودی‌های کنترلی طراحی‌شده‌ی (۴۲) و (۴۳) می‌توانند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۲۸) را برای زمان‌های $t \ge T_r$ به دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \mathbf{0}$ تبدیل کنند. در مرحله دوم اثبات، نشان داده می‌شود که دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \mathbf{0}$ دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و تمامی خطاهای ردیابی $e_{2j-1}, e_{2j}\ , j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \mathbf{0}$ قرار گرفته‌اند، بعد از زمان T_s دقیقاً به صفر واقعی همگرا می‌شوند. در انتها نیز با جمع‌بندی این دو مرحله، مشخص می‌گردد که با اعمال ورودی‌های کنترلی (۴۲) و (۴۳)، هدف ردیابی (۲۹) در مدت زمان محدود $T_{total} = T_r + T_s$ برآورده خواهد شد. برای اثبات مرحله اول، کاندیدای لیاپانوف به فرم $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2 = 0.5\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ انتخاب می‌گردد و مشتق این تابع به صورت $\dot{V}(t) = 0.5\sum_{j=1}^{6} s_j^2$ است. با مشتق‌گیری از (۴۲)، ترم برداری $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ به صورت $\boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ $\dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{e}}_{even} + \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) + \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(\mathbf{2}-\boldsymbol{o})^{-\mathbf{1}}}(\mathbf{H})$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری $\dot{\boldsymbol{e}}_{even}$ از رابطه (۲۸) و سپس جایگذاری بردار $\boldsymbol{\tau}$ از (۴۳)، ترم برداری $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ به فرم $\dot{\boldsymbol{s}}(t) = (\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis})$ حاصل می‌گردد. حال با جایگذاری $\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ در مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف $\dot{V}(t) = \boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ و استفاده از ترم برداری $\boldsymbol{\tau}_r$ (مطابق با رابطه (۴۳))، ترم اسکالری $\dot{V}(t)$ به صورت رابطه (۴۶) نتیجه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\dot{V} = &-\textstyle\sum_{j=1}^{6}\xi_j\big|s_j\big|^{\Omega_1+1} - \sum_{j=1}^{6}\mu_j\big|s_j\big|^{\Omega_2+1} \\
&-\chi\lambda_{max}\big(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big)\textstyle\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big| - \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}
\end{aligned}
\tag{۴۶}
$$

باتوجه به دو تعریف $\mu_{\min} \triangleq \min\limits_j(\mu_j)$، $\xi_{\min} \triangleq \min\limits_j(\xi_j)$ و بهره جستن از نامساوی پرکاربرد و با اهمیت کوشی-شوآرتز $\big|-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\big| \le \|\boldsymbol{s}\|\big\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\big\| \le \|\boldsymbol{s}\|\big\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big\|\,\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\|$، رابطه (۴۶) به فرم نامساوی (۴۷) تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\dot{V} \le \{&-\xi_{\min}\textstyle\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^{\Omega_1+1} - \mu_{\min}\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^{\Omega_2+1} \\
&-\chi\lambda_{max}\big(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big)\textstyle\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big| + \|\boldsymbol{s}\|\big\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big\|\,\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\|\}
\end{aligned}
\tag{۴۷}
$$

با توجه به نامساوی‌های معروف لم‌های ۶ و ۷، چهار نامساوی $-\|\boldsymbol{s}\| \ge \big(-\sum_{j=1}^{6}|s_j|\big)$ ، $-\left(\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^{\Omega_1+1}\right) \le -\left(\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^2\right)^{0.5(\Omega_1+1)}$، $\left(-\left(\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^{\Omega_2+1}\right)\right) \le \left(-3^{-\Omega_2}\left(\sum_{j=1}^{6}\big|s_j\big|^2\right)^{0.5(\Omega_2+1)}\right)$ و $\big\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big\| \le \lambda_{max}\big(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}{}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{J}^{-T}\big)$ نتیجه می‌گردند. با استفاده از این

چهار نامساوی اخیر و تعریف $\|\boldsymbol{s}\|^2 = \sum_{j=1}^{6}|s_j|^2$، نامساوی رابطه (۴۷) به فرم ساده شده‌ی (۴۸) تبدیل می‌گردد.

$$\dot{V} \le \{-\xi_{\min}\|\boldsymbol{s}\|^{\Omega_1+1} - \mu_{\min}3^{-\Omega_2}\|\boldsymbol{s}\|^{\Omega_2+1} + \lambda_{max}(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T})\|\boldsymbol{s}\|(\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\| - \chi)\} \qquad (۴۸)$$

با توجه به فرض ۱، ترم $(\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{dis}}\| - \chi)$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر است. با درنظر گرفتن این نکته و تعریف تابع کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2$، نامساوی (۴۸) به فرم (۴۹) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} + \sqrt{2^{\Omega_1+1}}\xi_{\min}V^{0.5(\Omega_1+1)} + 3^{-\Omega_2}\sqrt{2^{\Omega_2+1}}\mu_{\min}V^{0.5(\Omega_2+1)} \le 0 \qquad (۴۹)$$

حال در ادامه ρ_1، ρ_2، ρ_3، ρ_4 و ρ_5 به صورت $\rho_1 = \sqrt{2^{\Omega_1+1}}\xi_{\min}$، $\rho_2 = 3^{-\Omega_2}\sqrt{2^{\Omega_2+1}}\mu_{\min}$، $\rho_3 = \Omega_3$، $\rho_4 = 0.5(\Omega_1 + 1)$ و $\rho_5 = 0.5(\Omega_2 + 1)$ درنظر گرفته می‌شوند و با اعمال رابطه‌های $\Omega_1 = 1 - (\Omega_3)^{-1}$ و $\Omega_2 = 1 + (\Omega_3)^{-1}$، این پنج پارامتر به صورت $\rho_1 = \sqrt{2^{\Omega_1+1}}\xi_{\min}$، $\rho_2 = 3^{-\Omega_2}\sqrt{2^{\Omega_2+1}}\mu_{\min}$، $\rho_3 = \Omega_3$، $\rho_4 = 1 - 0.5(\rho_3)^{-1}$ و $\rho_4 = 1 + 0.5(\rho_3)^{-1}$ نتیجه می‌شوند. بنابراین با مقایسه‌ی مقادیر نتیجه شده برای ρ_1، ρ_2، ρ_3، ρ_4 و ρ_5 با لم ۲، می‌توان ادعا کرد که $V(t)$ و $\boldsymbol{s}(t)$ به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \ge T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ تضمین می‌گردد. علاوه بر این، T_r با رابطه‌ی (۴۴) تعیین می‌شود. بنابراین در مرحله‌ی دوم اثبات، برای زمان‌های $t \ge T_r$، دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ به صورت رابطه (۵۰) نتیجه می‌شود که از شش زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم مستقل و بدون اندرکنش تشکیل شده است.

$$\begin{cases} \dot{e}_{2j-1} = e_{2j} \\ \dot{e}_{2j} = -|e_{2j}|^{o_j}\mathrm{sign}(e_{2j}) - |\mathrm{H}_j|^{o_j(2-o_j)^{-1}}\mathrm{sign}(\mathrm{H}_j) \\ \text{with } j = 1, 2, \cdots, 6 \text{ for } t \ge T_r \end{cases} \qquad (۵۰)$$

در ادامه، با مقایسه میان هر کدام از شش زیرسیستم غیرخطی رابطه (۵۰) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۵ (رابطه‌های (۸) و (۱۱))، پایداری زمان-محدود سرتاسری دینامیک مد لغزشی (۵۰) نتیجه می‌گردد و همگی خطاهای ردیابی e_{2j-1}, e_{2j}, $j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ قرار گرفته‌اند بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s به صفر واقعی همگرا می‌شوند. هم‌چنین زمان محدود T_s توسط رابطه (۴۵) تعیین می‌گردد. در آخر، با توجه به دو مرحله‌ی ذکر شده می‌توان ادعا کرد که بردار موقعیت و جهت‌گیری $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی شش درجه آزادی بعد از گذشت مدت زمان محدود $T_{total} = T_s + T_r$ به طور کاملاً دقیق به بردار مسیر موردنظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا می‌شود و زیردریایی در مسیر موردنظر قرار گرفته و هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۲۹) برآورده می‌گردد. بنابراین اثبات قضیه ۲ در این‌جا پایان می‌پذیرد ■.

یادآوری ۳. مشابه با استدلال ذکر شده در یادآوری ۲، با اعمال ورودی‌های کنترلی طراحی شده‌ی (۴۳) به زیردریایی شش درجه آزادی، پدیده وزوز اتفاق می‌افتد. برای کاهش این پدیده نامطلوب، ورودی‌های کنترلی رابطه (۴۳) به فرم رابطه (۵۱) اصلاح می‌گردند. باید به این موضوع توجه داشت که برای ورودی‌های کنترلی اصلاح شده (۵۱)، قضیه ۲ و اثبات آن برقرار می‌باشند. در رابطه (۵۱)، ترم اسکالری $\Upsilon(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|)$ کران بالای بردار $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{dis}(t)$ مطابق با رابطه (۴۱) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_{even} + \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) + \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(2-\boldsymbol{o})^{-1}}(\mathbf{H}),\ \ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M_\eta}(\boldsymbol{\tau}_{eq} + \boldsymbol{\tau}_r) \\ &\boldsymbol{\tau}_{eq} = \boldsymbol{M_\eta}^{-1}(\boldsymbol{C_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G_\eta}) + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d - \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) - \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(2-\boldsymbol{o})^{-1}}(\mathbf{H}) \\ &\dot{\boldsymbol{\tau}}_r = -\boldsymbol{\xi}\mathbf{sig}^{\Omega_1}(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\mu}\mathbf{sig}^{\Omega_2}(\boldsymbol{s}) \\ &\quad - \left(\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|\Upsilon(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|) + \chi\left\|\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\right)\right\|\right)\mathbf{sign}(\boldsymbol{s}) \end{aligned} \qquad (۵۱)$$

۳-۵ طراحی دسته‌ی سوم از ورودی‌های کنترلی زمان-محدود مقاوم

برای دسته سوم از ورودی‌های کنترلی زمان-محدود، بردار سطوح لغزشی غیرخطی $\boldsymbol{s} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6]^T \in \Re^6$ به فرم رابطه (۵۲) تعریف می‌شود.

در رابطه (۵۲)، b_j, ϵ_j, $j = 1,2,\cdots,6$ ثابت‌های مثبت حقیقی اختیاری هستند که توسط کاربر تعیین می‌شوند. در رابطه (۵۲)، $\hbar_j$، $\eth_j$، ω_j و $\mho_j$ چهار عدد صحیح فرد[1] اختیاری هستند و باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $\hbar_j > \eth_j > 0$، $\mho_j > \omega_j > 0$، $2\omega_j > \mho_j$ و $\hbar_j(\eth_j)^{-1} - \omega_j(\mho_j)^{-1} > 1$ را برای $j = 1,2,\cdots,6$ برآورده سازند. بدیهی است که توابع اسکالری $\mathcal{L}(e_{2j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, 6$ همواره مثبت هستند و اثبات این موضوع به علت سادگی به خواننده محترم واگذار می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{e}_{odd} + (\boldsymbol{e}_{even}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{e}_{odd}))^{\frac{\mho}{\omega}} \\ &s_j(t) = e_{2j-1} + \left(e_{2j}\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\frac{\mho_j}{\omega_j}} \\ &(\boldsymbol{e}_{even}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{e}_{odd}))^{\frac{\mho}{\omega}} = \begin{bmatrix} (e_2\mathcal{L}(e_1))^{\frac{\mho_1}{\omega_1}} \\ (e_4\mathcal{L}(e_3))^{\frac{\mho_2}{\omega_2}} \\ (e_6\mathcal{L}(e_5))^{\frac{\mho_3}{\omega_3}} \\ (e_8\mathcal{L}(e_7))^{\frac{\mho_4}{\omega_4}} \\ (e_{10}\mathcal{L}(e_9))^{\frac{\mho_5}{\omega_5}} \\ (e_{12}\mathcal{L}(e_{11}))^{\frac{\mho_6}{\omega_6}} \end{bmatrix} \\ &\mathcal{L}(e_{2j-1}) = \left(b_j + \epsilon_j(e_{2j-1})^{\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j}\right)}\right)^{-1} \\ &\text{with } j = 1, 2, \cdots, 6 \end{aligned} \qquad (۵۲)$$

قوانین کنترلی مقاوم برای رساندن خطاهای ردیابی به سطوح لغزشی تعریف شده، به فرم رابطه (۵۳) پیشنهاد می‌گردند.

در رابطه (۵۳)، γ و ξ_j, μ_j, $j = 1, 2, \cdots, 6$ ثابت‌های حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \gamma < 1$، $\mu_j > 0$ و $\xi_j > 0$ بوده و توسط طراح و کاربر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M_\eta}(\boldsymbol{\tau}_{eq} + \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_m) \\ &\boldsymbol{\tau}_m = [\tau_{m_1} \quad \tau_{m_2} \quad \tau_{m_3} \quad \tau_{m_4} \quad \tau_{m_5} \quad \tau_{m_6}]^T \\ &\boldsymbol{\tau}_{eq} = \boldsymbol{M_\eta}^{-1}(\boldsymbol{C_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{D_\eta}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{G_\eta}) + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_d \\ &\boldsymbol{\tau}_r = [\tau_{r_1} \quad \tau_{r_2} \quad \tau_{r_3} \quad \tau_{r_4} \quad \tau_{r_5} \quad \tau_{r_6}]^T \\ &\tau_{m_j} = -\frac{\omega_j}{\mho_j}\left((e_{2j})^{2-\frac{\mho_j}{\omega_j}}(\mathcal{L}(e_{2j-1}))^{-\frac{\mho_j}{\omega_j}}\right) + \\ &\qquad + \epsilon_j(e_{2j})^2\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j}\right)(e_{2j-1})^{\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j} - 1\right)}\mathcal{L}(e_{2j-1}) \\ &\tau_{r_j} = -\frac{\omega_j}{\mho_j}\left((e_{2j})^{2-\frac{\mho_j}{\omega_j}}(\mathcal{L}(e_{2j-1}))^{-\frac{\mho_j}{\omega_j}}\right)(\mu_j|s_j| + \xi_j|s_je_{2j}|^{\gamma})\mathrm{sign}(s_je_{2j}) \\ &\qquad - \chi\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|\ \mathrm{sign}(s_j) \text{ with } j = 1, 2, \cdots 6 \end{aligned} \qquad (۵۳)$$

در ادامه، قضیه ۳ و اثبات مرتبط با آن نشان می‌دهند که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه‌های (۵۲) و (۵۳) می‌توانند هدف ردیابی را برای زیردریایی شش درجه آزادی (۲۵) فراهم سازند.

[1] Odd integer

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]

قضیه ۳. زیردریایی شش درجه آزادی رابطه (۲۵) را همراه با فرض‌های ۱ و ۲ درنظر بگیرید. چنانچه ورودی‌های کنترلی پیشنهادی رابطه‌های (۵۲) و (۵۳) به زیردریایی (۲۵) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۲۹) برآورده شده و بردار موقعیت و جهت‌گیری زیردریایی $\boldsymbol{\eta}(t)$ بعد از گذشت مدت زمان محدود قابل تنظیم $T_{total} = T_r + T_s$ به طور کاملاً دقیق به بردار مسیر دلخواه و مورد نظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا می‌شود. هم‌چنین، برای زمان‌های $t > T_{total}$ تساوی $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t)$ همواره برقرار خواهد بود. دو زمان محدود T_r و T_s به ترتیب توسط نامساوی‌های (۵۴) و (۵۵) تخمین زده می‌شوند. این دو نامساوی، کران‌های بالایی را برای دو زمان T_r و T_s ارائه می‌کنند ■.

$$T_r \leq \left(\Theta(1-\gamma)\right)^{-1}\left(\ln(\Theta\|\boldsymbol{s}(0)\|^{1-\gamma} + \Pi) - \ln \Pi\right) \qquad (۵٤)$$

در رابطه (۵۴)، Θ و Π به صورت $\Theta \triangleq \min_j\left(\mu_j|e_{2j}|\right)$ و $\Pi \triangleq \min_j\left(\xi_j|e_{2j}|^{\gamma+1}\right)$ تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} &T_s = \max_j\left({}_jT_s\right) \quad \text{with } j = 1, 2, \cdots, 6. \\ &\text{where } \; {}_jT_s \leq \frac{1}{\epsilon_j}\left(\frac{\eth_j}{\hbar_j - \eth_j}\right) + \frac{1}{b_j}\left(\frac{\mho_j}{\mho_j - \omega_j}\right) \end{aligned} \qquad (۵۵)$$

اثبات قضیه ۳. این اثبات مشابه با اثبات قضیه‌های ۱ و ۲ از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحله اول اثبات می‌شود که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی (۵۲) و (۵۳) می‌توانند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۲۸) را برای زمان‌های $t \geq T_r$ به دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ تبدیل کنند. در مرحله دوم نشان داده می‌شود که دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و خطاهای ردیابی e_{2j-1}, e_{2j} , $j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t) = \boldsymbol{0}$ قرار گرفته‌اند، بعد از زمان T_s دقیقاً به صفر واقعی همگرا می‌شوند. با جمع‌بندی این دو مرحله، مشخص می‌گردد که با اعمال ورودی‌های کنترلی (۵۲) و (۵۳)، هدف ردیابی (۲۹) بعد از گذشت مدت زمان محدود $T_{total} = T_r + T_s$ برآورده خواهد شد. برای اثبات مرحله اول، کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2 = 0.5\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ انتخاب می‌گردد و مشتق این تابع به صورت $\dot{V}(t) = \boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ است. با مشتق‌گیری از رابطه (۵۲)، $\dot{s}_j(t), j = 1, 2, \cdots, 6$ به صورت رابطه (۵۶) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} &\dot{s}_j = e_{2j} + \frac{\mho_j}{\omega_j}\left(e_{2j}\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}-1\right)}\left(\dot{e}_{2j}\mathcal{L}(e_{2j-1}) + e_{2j}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(e_{2j-1})\right) \\ &\frac{d}{dt}\mathcal{L}(e_{2j-1}) = -\epsilon_j\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j}\right)e_{2j}(e_{2j-1})^{\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j}-\frac{\omega_j}{\mho_j}-1\right)}\left(\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^2 \\ &\text{with } j = 1, 2, \cdots, 6. \end{aligned} \qquad (٥٦)$$

حال با جایگذاری $\dot{e}_{2j}$ (از رابطه (۲۸)) و ورودی‌های کنترلی رابطه (۵۳) در رابطه (۵۶)، ترم‌های اسکالری $\dot{s}_j(t), j = 1, 2, \cdots, 6$ به فرم رابطه (۵۷) تبدیل می‌شود. در این رابطه‌ی اخیر، $\left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis}\right)_j$ بیانگر j امین درایه‌ی بردار $\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis}$ است.

$$\begin{aligned} \dot{s}_j = \; &e_{2j} + \frac{\mho_j}{\omega_j}\left(e_{2j}\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}-1\right)}\left(\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)\left(\tau_{m_j} + \tau_{r_j} + \left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis}\right)_j\right) \\ &-\epsilon_j\frac{\mho_j}{\omega_j}\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j}\right)(e_{2j-1})^{\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j}-\frac{\omega_j}{\mho_j}-1\right)}\left(e_{2j}\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}+1\right)} \end{aligned} \qquad (٥٧)$$

حال چنانچه ترم‌های اسکالری τ_{m_j} و τ_{r_j} (از رابطه (۵۳)) را در رابطه (۵۷) جایگذاری کنیم، ترم اسکالری $\dot{s}_j(t)$ به فرم رابطه (۵۸) ساده می‌شود. توجه داشته باشید ترم $\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}(e_{2j})^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}-1\right)}\left(\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\frac{\mho_j}{\omega_j}}\right)$ که در رابطه (۵۸) ظاهر شده است، همواره نامنفی می‌باشد.

$$\begin{aligned} \dot{s}_j = \; &-\xi_j\, e_{2j}|s_je_{2j}|^\gamma \operatorname{sign}(s_je_{2j}) - \mu_je_{2j}\operatorname{sign}(s_je_{2j}) + \\ &+\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}(e_{2j})^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}-1\right)}\left(\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\frac{\mho_j}{\omega_j}}\right) \\ &\times\left(\left(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis}\right)_j - \chi\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis}\|\operatorname{sign}(s_j)\right) \end{aligned} \qquad (۵۸)$$

با جایگذاری $\dot{s}_j$ از رابطه (۵۸) در $\dot{V}(t) = \sum_{j=1}^{6}\dot{s}_js_j$ و در نظرگرفتن نامساوی $|(\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}_{dis})_j| \leq \|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\|\|\boldsymbol{\tau}_{dis}\|$، ترم اسکالری $\dot{V}(t)$ به فرم رابطه (۵۹) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq \{&-\left(\min_j(\mu_j|e_{2j}|)\right)\left(\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j|^2\right) \\ &-\left(\min_j\left(\xi_j|e_{2j}|^{\gamma+1}\right)\right)\left(\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j|^{\gamma+1}\right) + \\ &+\|\boldsymbol{M_\eta}^{-1}\boldsymbol{J}^{-T}\| \times (\|\boldsymbol{\tau}_{dis}\| - \chi) \times \\ &\times\left(\textstyle\sum_{j=1}^{6}|s_j|\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}(e_{2j})^{\left(\frac{\mho_j}{\omega_j}-1\right)}\left(\mathcal{L}(e_{2j-1})\right)^{\frac{\mho_j}{\omega_j}}\right)\right)\} \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

با استناد به فرض ۱، ترم $(\|\boldsymbol{\tau}_{dis}\| - \chi)$ همواره نامنفی می‌باشد. با درنظرگرفتن $\Theta \triangleq \min_j\left(\mu_j|e_{2j}|\right)$، $\Pi \triangleq \min_j\left(\xi_j|e_{2j}|^{\gamma+1}\right)$ و نامساوی $\left(-\left(\sum_{j=1}^{6}|s_j|^{\gamma+1}\right)\right) \leq \left(-\left(\sum_{j=1}^{6}|s_j|^2\right)^{0.5(\gamma+1)}\right) = -2^{0.5(\gamma+1)}V^{0.5(\gamma+1)}$، رابطه (۵۹) به فرم نامساوی (۶۰)ساده می‌شود.

$$\dot{V} \leq -2\Theta V - 2^{0.5(\gamma+1)}\Pi V^{0.5(\gamma+1)} \qquad (۶۰)$$

چنانچه ρ_1، ρ_2 و ρ_3 را به صورت $\rho_1 = 2\Theta$، $\rho_2 = 2^{0.5(\gamma+1)}\Pi$ و $\rho_3 = 0.5(\gamma + 1)$ درنظر گرفته و از لم ۱ استفاده شود، می‌توان ادعا کرد که $V(t)$ و $s_j(t), j = 1, 2, \cdots, 6$ به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ تضمین می‌گردد. علاوه بر این، T_r با رابطه‌ی (۵۴) تعیین می‌شود. بنابراین در مرحله‌ی دوم اثبات، برای زمان‌های $t \geq T_r$، دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ به صورت رابطه (۶۱) نتیجه می‌شود که از شش زیرسیستم غیرخطی مرتبه اول مستقل و بدون اندرکنش تشکیل شده است.

$$\begin{cases} \dot{e}_{2j-1} = e_{2j} \\ \dot{e}_{2j-1} = -\epsilon_j(e_{2j-1})^{\frac{\hbar_j}{\eth_j}} - b_j(e_{2j-1})^{\frac{\omega_j}{\mho_j}} \end{cases} \qquad (٦١)$$
$$\text{with } j = 1, 2, \cdots, 6. \text{ for } t \geq T_r.$$

در ادمه، با مقایسه میان هر کدام از شش زیرسیستم غیرخطی رابطه (۶۱) با سیستم غیرخطی مرتبه اول موجود در لم ۳ (رابطه (۵))، پایداری زمان-محدود سرتاسری دینامیک مد لغزشی (۶۱) نتیجه می‌گردد و همگی خطاهای ردیابی e_{2j-1}, e_{2j} , $j = 1,2,\cdots,6$ که بر روی دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ قرار گرفته‌اند بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s به صفر واقعی همگرا می‌شوند. هم‌چنین زمان محدود T_s توسط رابطه (۵۵) تعیین می‌گردد. در آخر، با توجه به دو مرحله‌ی ذکر شده می‌توان ادعا کرد که بردار موقعیت و جهت‌گیری $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی شش درجه آزادی بعد از گذشت مدت زمان محدود $T_{total} = T_s + T_r$ به طور کاملاً دقیق به بردار مسیر موردنظر $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا می‌شود و هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۲۹) برآورده می‌گردد. بنابراین اثبات قضیه ۳ در این‌جا پایان می‌پذیرد ■.

یادآوری ٤. اگر در ورودی‌های کنترلی پیشنهادی دسته سوم، چهار عدد صحیح فرد اختیاری $\hbar_j$، $\eth_j$، ω_j و $\mho_j$ $(j = 1,2,\cdots,6)$ به گونه‌ای انتخاب شوند که علاوه بر شرایط $\hbar_j > \eth_j > 0$ ، $2\omega_j > \mho_j > \omega_j > 0$ و $1 > \frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j}$، شرط اضافی $\frac{\mho_j(\hbar_j - \eth_j)}{\eth_j(\mho_j - \omega_j)} \leq 1$ نیز برآورده شود، می‌توان زمان محدود T_s را از نامساوی (۶۲) تخمین زد که این نامساوی دارای

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]

محافظه‌کاری کمتری نسبت به نامساوی رابطه (۵۵) می‌باشد.

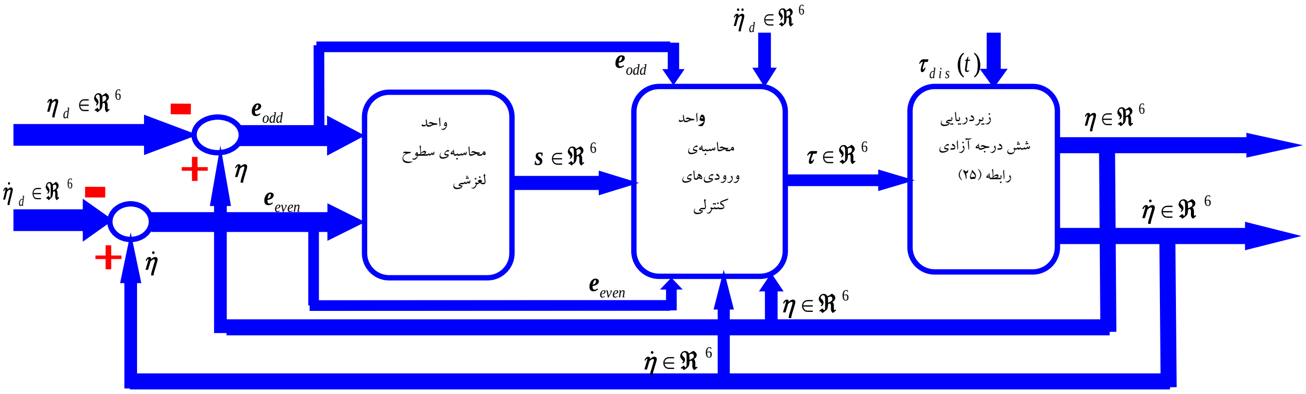
$$T_s = \max_j ({}_jT_s), \text{with } 1,2,\cdots,6.$$
$$\text{where } {}_jT_s \leq \left(\frac{\eth_j}{\epsilon_j(\hbar_j - \eth_j)} + \frac{\mho_j}{(\mho_j - \omega_j)\sqrt{\epsilon_j b_j}} \arctan\left(\sqrt{\epsilon_j / b_j} \right) \right) \quad (٦٢)$$

یادآوری ۵. جدول ۲ تمام پارامترهای آزاد موجود در سه دسته از ورودی‌های کنترلی پیشنهادی را همراه با شرایط لازم‌شان نشان می‌دهد. شایان ذکر است که کاربر می‌تواند برای انتخاب مناسب این پارامترهای آزاد، از حل یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی دارای قیود استفاده کند تا هم انرژی کنترلی (و هم‌چنین ماکزیمم دامنه گشتاورهای ورودی کنترلی) کاهش یافته و زمان‌های همگرایی نیز حداقل شوند. بنابراین برای مسئله‌ی بهینه‌سازی ذکر شده، باید تابع هزینه‌ای تعریف شود که شامل دو ترم مرتبط با تلاش کنترلی (انرژی کنترلی) و زمان‌های همگرایی باشد. قیود موجود در این مسئله بهینه‌سازی شامل قیدهای مرتبط با محدوده‌های پارامترهای آزاد و ماکزیمم دامنه‌های گشتاورهای ورودی کنترلی خواهند بود.

شکل ۲، شماتیکی مفهومی از نحوه‌ی برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-محدود زیردریایی شش درجه آزادی را نشان می‌دهد، که این شماتیک برای هر کدام از سه دسته ورودی‌های کنترلی پیشنهادی صادق و برقرار است.

جدول ۲. پارامترهای اختیاری موجود در هر سه دسته ورودی‌های کنترلی پیشنهادی همراه با شرایط لازمه.

	پارامترهای اختیاری موجود در سطوح لغزشی	پارامترهای اختیاری موجود در قوانین کنترلی
دسته اول	where $l_{1_j} > l_{2_j} > 0.l_{i_j}, i = 1,2$ with $j = 1,2,\cdots,6$	$, \xi_j > 0,$ and $\mu_j > 0,$ with $j = 1,2,\cdots,60 < \gamma < 1$
دسته دوم	$0 < o_j < 1$ with $j = 1,2,\cdots,6.$	and$\xi_j > 0,$ and $\mu_j > 0,$ with $j = 1,2,\cdots,6$ $, \Omega_1 = 1 - (\Omega_3)^{-1},$ and $\Omega_2 = 1 + (\Omega_3)^{-1}\Omega_3 > 1$
دسته سوم	and $\hbar_j, \eth_j, \omega_j, b_j > 0, \epsilon_j > 0$, with $j = 1,2,\cdots,6$ $\mho_j$ are odd integers where $\hbar_j > \eth_j > 0, 2\omega_j > \mho_j > \omega_j >$ $0,$ and $\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\omega_j}{\mho_j} > 1,$ with $j = 1,2,\cdots,6.$	$, \xi_j > 0,$ and $\mu_j > 0,$ with $j = 1,2,\cdots,6.0 < \gamma < 1$



شکل ۲. شماتیک مفهومی از پیاده‌سازی ورودی‌های کنترلی پیشنهادی به منظور برآورده ساختن هدف ردیابی زیردریایی شش درجه آزادی.

٦- نتایج شبیه‌سازی ورودی‌های کنترلی پیشنهادی بر روی مدل زیردریایی NPS AUV II

در این مقاله، برای شبیه‌سازی‌ها از مدل زیردریایی شناخته شده‌ی Naval Postgraduate School Autonomous Underwater Vehicle II استفاده می‌گردد که این زیردریایی در مراجع مختلف [۶۵-۶۷] با نام اختصاری NPS AUV II شناخته می‌شود. در اغلب مقالات و مطالعات پژوهشی، زیردریایی شش درجه آزادی NPS AUV II، به عنوان یک محک ارزیابی برای شبیه‌سازی روش‌های کنترلی پیشنهادی مختص زیردریایی‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. زیردریایی NPS AUV II دارای چهار بالک و دو تراستر می‌باشد که شش ورودی کنترلی از طریق این شش عملگر به سیستم زیردریایی اعمال می‌شود. معادلات دینامیکی و سینماتیکی زیردریایی NPS AUV II، دقیقاً با رابطه‌های (۱۵) تا (۲۶) توصیف می‌گردند. جدول ۳، مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی موجود در ماتریس اینرسی جسم صلب $\boldsymbol{M}_{RB}$ متعلق به زیردریایی NPS AUV II را نشان می‌دهد. مطابق با رابطه (۱۹) ماتریس جرم اضافه شده $\boldsymbol{M}_A$ برای زیردریایی NPS AUV II دارای ۳۶ درایه است که ۲۲ درایه از آن کاملاً صفر بوده و این درایه‌ها در رابطه (۶۳) آورده شده‌اند. ۱۴ درایه دیگر مطابق با رابطه (۶۴) محاسبه می‌شوند.

جدول ۳. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی موجود در ماتریس M_{RB} متعلق به زیردریایی NPS AUV II [65-67].

پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی	پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی
m	5454.54(kg)	I_y	13587(N.m.s^2)
x_G	0.0(m)	I_z	13587(N.m.s^2)
y_G	0.0(m)	I_{xy}	-13.58 (N.m.s^2)
z_G	0.061(m)	I_{yz}	-13.58 (N.m.s^2)
I_x	2038(N.m.s^2)	I_{xz}	-13.58 (N.m.s^2)

$$\begin{cases} X_{\dot{v}} = X_{\dot{\omega}} = Y_{\dot{u}} = Y_{\dot{\omega}} = Z_{\dot{u}} = Z_{\dot{v}} = 0 \\ X_{\dot{p}} = X_{\dot{q}} = X_{\dot{r}} = Y_{\dot{q}} = Z_{\dot{p}} = Z_{\dot{r}} = 0 \\ K_{\dot{u}} = K_{\dot{\omega}} = M_{\dot{u}} = M_{\dot{v}} = N_{\dot{u}} = N_{\dot{\omega}} = 0' \\ K_{\dot{q}} = M_{\dot{p}} = M_{\dot{r}} = N_{\dot{q}} = 0 \end{cases} \quad (٦٣)$$

$$\begin{cases} X_{\dot{u}} = 0.5\rho L^3 \acute{X}_{\dot{u}} \\ Y_{\dot{v}} = 0.5\rho L^3 \acute{Y}_{\dot{v}} \\ Z_{\dot{\omega}} = 0.5\rho L^3 \acute{Z}_{\dot{\omega}} \end{cases}, \begin{cases} Y_{\dot{p}} = 0.5\rho L^4 \acute{Y}_{\dot{p}} \\ Y_{\dot{r}} = 0.5\rho L^4 \acute{Y}_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{q}} = 0.5\rho L^4 \acute{Z}_{\dot{q}} \end{cases} \begin{cases} N_{\dot{p}} = 0.5\rho L^5 \acute{N}_{\dot{p}} \\ N_{\dot{r}} = 0.5\rho L^5 \acute{N}_{\dot{r}} \end{cases} \quad (٦٤)$$
$$\begin{cases} K_{\dot{v}} = 0.5\rho L^4 \acute{K}_{\dot{v}} \\ N_{\dot{v}} = 0.5\rho L^4 \acute{N}_{\dot{v}} \\ M_{\dot{\omega}} = 0.5\rho L^4 \acute{M}_{\dot{\omega}} \end{cases}, \begin{cases} K_{\dot{p}} = 0.5\rho L^5 \acute{K}_{\dot{p}} \\ K_{\dot{r}} = 0.5\rho L^5 \acute{K}_{\dot{r}} \\ M_{\dot{q}} = 0.5\rho L^5 \acute{M}_{\dot{q}} \end{cases}$$

مقادیر عددی پارامترهای موجود در رابطه (۶۴) در جدول ۴ آورده شده است.با توجه جدول‌های ۳ و ۴، برای زیردریایی NPS AUV II دو ماتریس $\boldsymbol{M}_{RB}$ و $\boldsymbol{M}_A$ به فرم عددی رابطه‌های (۶۵) و (۶۶) نتیجه می‌شوند.

جدول ۴. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی موجود در ماتریس $\boldsymbol{M}_A$ متعلق به زیردریایی NPS AUV II [65-67].

پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی	پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی
L	5.3(m)	$\acute{K}_{\dot{v}}$	$1.2*10^{-4}$
ρ	$1000(kg.m^{-3})$	$\acute{N}_{\dot{v}}$	$1.2*10^{-3}$
$\acute{X}_{\dot{u}}$	$-7.6*10^{-3}$	$\acute{M}_{\dot{\omega}}$	$-6.8*10^{-3}$
$\acute{Y}_{\dot{v}}$	$-5.5*10^{-2}$	$\acute{K}_{\dot{p}}$	$-1*10^{-3}$
$\acute{Z}_{\dot{\omega}}$	$-2.4*10^{-1}$	$\acute{K}_{\dot{r}}$	$-3.4*10^{-5}$
$\acute{Y}_{\dot{p}}$	$1.2*10^{-4}$	$\acute{M}_{\dot{q}}$	$-1.7*10^{-2}$
$\acute{Y}_{\dot{r}}$	$1.2*10^{-3}$	$\acute{N}_{\dot{p}}$	$-3.4*10^{-5}$
$\acute{Z}_{\dot{q}}$	$-6.8*10^{-3}$	$\acute{N}_{\dot{r}}$	$-3.4*10^{-3}$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} 565.733 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4094.1 & 0 & -47.343 & 0 & -473.43 \\ 0 & 0 & 17865 & 0 & 2682.8 & 0 \\ 0 & -47.343 & 0 & 2091 & 0 & 71.0932 \\ 0 & 0 & 2682.8 & 0 & 35547 & 0 \\ 0 & -473.43 & 0 & 71.0932 & 0 & 7109.3 \end{bmatrix} \quad (٦٥)$$

و

$$\boldsymbol{M}_{RB} = \begin{bmatrix} 5454.5 & 0 & 0 & 0 & 332.7 & 0 \\ 0 & 5454.5 & 0 & -332.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5454.54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -332.73 & 0 & 2038 & 13.6 & 13.6 \\ 332.7 & 0 & 0 & 13.6 & 13587 & 13.6 \\ 0 & 0 & 0 & 13.6 & 13.6 & 13587 \end{bmatrix} \quad (٦٦)$$

ازآنجایی که پارامترهای فیزیکی به کار رفته در ماتریس‌های $\boldsymbol{M}_{RB}$ و $\boldsymbol{M}_A$ همان پارامترهای فیزیکی مورد استفاده در ماتریس‌های $\boldsymbol{C}_{RB}(\boldsymbol{v})$ و $\boldsymbol{C}_A(\boldsymbol{v})$ هستند، این دو ماتریس برای زیردریایی NPS AUV II، به فرم عددی رابطه‌های (۶۷) و (۶۸) نتیجه می‌شوند.

متغیرهای u, v, ω و p, q, r همان سرعت‌های خطی و زاویه‌ای زیردریایی بیان شده در دستگاه مختصات بدنه ثابت می‌باشند. جدول ۵، مقادیر پارامترهای فیزیکی دو ماتریس $\boldsymbol{D}_0$ و $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v})$ متعلق به زیردریایی NPS AUV II را ارائه می‌دهد.

$$\boldsymbol{C}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 332.7269\, r & 5454.54\omega & -5454.54v \\ 0 & 0 & 0 & -5454.54\omega & 332.7269\, r & 5454.54u \\ 0 & 0 & 0 & 5454.54v - 332.7269\, p & -5454.54u - 332.7269\, q & 0 \\ -332.7269\, r & 5454.54\omega & -5454.54v + 332.7269\, p & 0 & 13.58p + 13.58q + 13587r & -13.58p - 13587q - 13.58r \\ -5454.54\omega & -332.7269\, r & 5454.54u + 332.7269\, q & -13.58p - 13.58q - 13587r & 0 & 2038p + 13.58q + 13.58r \\ 5454.54v & -5454.54u & 0 & 13.58p + 13587q + 13.58r & -2038p - 13.58q - 13.58r & 0 \end{bmatrix} \quad (۶۷)$$

جدول ۵. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی موجود در دو ماتریس D_0 و $D_n(v)$ زیردریایی NPS AUV II [65-67].

ضرایب میرایی	مقادیر عددی	ضرایب هیدرودینامیکی	مقادیر عددی
X_u	0.0 (kg/s)	$X_{u\|u\|}$	-30.9 (kg/m)
Y_v	-1404.5 (kg/s)	$Y_{v\|v\|}$	-206.5 (kg/m)
Z_ω	-4213.5 (kg/s)	$Z_{\omega\|\omega\|}$	-338.1 (kg/m)
M_q	-14045.05 (kg.m/s)	$M_{q\|q\|}$	-214.66 (kg.m)
N_r	-6312.38 (kg.m/s)	$N_{r\|r\|}$	-346.26 (kg.m)
K_p	-4339.76 (kg.m/s)	$K_{p\|p\|}$	0.0 (kg.m)

با توجه جدول ۵، برای زیردریایی NPS AUV II، دو ماتریس $\boldsymbol{D}_0$ و $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v})$ به فرم عددی رابطه‌های (۶۹) و (۷۰) نتیجه می‌شوند.

جدول ۶. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی موجود در ماتریس $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ متعلق به زیردریایی NPS AUV II [65-67].

پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی	پارامتر فیزیکی	مقادیر عددی
W	53.4(kN)	B	53.4(kN)
x_G	0.0(m)	y_B	0.0(m)
y_G	0.0(m)	z_B	0.0(m)
z_G	0.061(m)		
x_B	0.0(m)		

$$\boldsymbol{C}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_3 & \Delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_3 & 0 & -\Delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & -\Delta_3 & \Delta_2 & 0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Delta_3 & 0 & -\Delta_1 & \Lambda_3 & 0 & -\Lambda_1 \\ -\Delta_2 & \Delta_1 & 0 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = -565.7326u \\ \Delta_2 = -4094.1v + 47.3429p + 473.4289r \\ \Delta_3 = -17865\omega - 2682.8q \\ \Lambda_1 = 47.3429v - 2091p - 71.0932r \\ \Lambda_2 = -2682.8\omega - 35547q \\ \Lambda_3 = 473.4289v - 71.0932p - 7109.3r \end{cases} \qquad (۶۸)$$

و

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1404.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4213.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4339.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14045.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6312.4 \end{bmatrix}, \qquad (۶۹)$$

و

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{bmatrix} -30.9|u| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -206.5|v| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -338.1\,|\omega| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -214.7|q| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -346.3\,|r| \end{bmatrix} \qquad (۷۰)$$

جدول ۶، پارامترهای عددی موجود در بردار $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ متعلق به زیردریایی NPS AUV II را نشان می‌دهد. با درنظرگرفتن جدول ۶، بردار $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ برای زیردریایی NPS AUV II به فرم رابطه (۷۱) حاصل می‌شود. بنابراین با در اختیار داشتن ماتریس‌های $\boldsymbol{M}_{RB}$، $\boldsymbol{M}_A$، $\boldsymbol{C}_{RB}(\boldsymbol{v})$، $\boldsymbol{C}_A(\boldsymbol{v})$، $\boldsymbol{D}_0$، $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ و $\boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{v})$، مدل جامع ترکیبی (سینماتیکی و دینامیکی) مرتبط با زیردریایی شش درجه آزادی NPS AUV II با استفاده از رابطه (۲۵) قابل توصیف است.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3257.4\sin\phi\cos\theta \\ 3257.4\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۱)$$

تمام شبیه‌سازی‌های مرتبط با این مقاله، در محیط سیمولینک نرم‌افزار MATLAB انجام شده است و برای حل معادلات دیفرانسیلی موجود در مدل زیردریایی از الگوریتم رانگ-کوتا[1] با گام‌های ۰.۰۰۰۱ ثانیه بهره گرفته شده است. در همگی شبیه‌سازی‌ها، بردار مسیر موردنظر و بردارهای شرایط اولیه برای زیردریایی NPS AUV II به فرم (۷۲) انتخاب شده‌اند.

در تمامی شبیه‌سازی‌ها، ترم نامعینی برداری $\boldsymbol{\tau}_{dis} \in \mathfrak{R}^6$ به صورت رابطه (۷۳) درنظر گرفته شده و به مدل زیردریایی NPS AUV II اضافه شده است. شایان ذکر است که ترم برداری رابطه (۷۳)، فرض ۱ را برآورده می‌سازد.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\eta}_d(t) = [x_d \quad y_d \quad z_d \quad \phi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^T = \\ &= \left[40\cos(0.02\pi t) \quad -40\sin(0.02\pi t) \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{\pi t}{15}\right]^T \\ &\boldsymbol{\eta}(0) = [x(0) \quad y(0) \quad z(0) \quad \phi(0) \quad \theta(0) \quad \psi(0)]^T = \\ &= \left[4 \quad -25 \quad 0 \quad \tfrac{\pi}{8} \quad -\tfrac{\pi}{4} \quad -\tfrac{\pi}{2}\right]^T \\ &\dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = [\dot{x}(0) \quad \dot{y}(0) \quad \dot{z}(0) \quad \dot{\phi}(0) \quad \dot{\theta}(0) \quad \dot{\psi}(0)]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \qquad (۷۲)$$

و

$$\boldsymbol{\tau}_{dis} = 0.1\boldsymbol{\eta}(t) + 0.15\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \begin{bmatrix} 0.2\sin(\pi t) \\ 0.15\sin(2\pi t) \\ 0.25\sin(3\pi t) \\ 0.1\sin(4\pi t) \\ 0.3\sin(5\pi t) \\ 0.15\sin(6\pi t) \end{bmatrix} \qquad (۷۳)$$

با توجه به رابطه (۷۳) و استناد به فرض ۱ ،کران بالای ترم نامعینی برداری به فرم $\chi(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|) = 0.1\|\boldsymbol{\eta}\| + 0.15\|\boldsymbol{\eta}\| + 1.15$ نتیجه می‌گردد. این بخش از مقاله، از سه زیربخش جداگانه تشکیل شده است که در هر زیربخش، یکی از سه دسته ورودی‌های کنترلی پیشنهادی به مدل زیردریایی NPS AUV II اعمال شده و نتایج شبیه‌سازی‌ها آورده می‌شوند. سه شبیه‌سازی جداگانه نشان می‌دهند که هر سه دسته از ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، قادرند که زیردریایی NPS AUV II را بعد از گذشت مدت زمان محدودی به مسیر مورد نظر رابطه (۷۲) برسانند و همواره در امتداد این مسیر حرکت دهند. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی‌ها، به جای تابع علامت ($sign(s)$) از تابع ($\frac{2}{\pi}\arctan(100s)$) استفاده شده و این جایگزینی باعث گردیده که پدیده چترینگ تا حد زیادی کاهش یابد. بنابراین در شبیه‌سازی‌ها، به جای تابع پرشی و ناپیوسته علامت، از شبیه‌ترین تابع پیوسته به تابع علامت یعنی تابع $\frac{2}{\pi}\arctan(100s)$ استفاده گردید. با جایگزینی ذکر شده در شبیه‌سازی‌ها، پدیده وزوز تا حد بسیار قابل توجهی کاهش یافته و علناً می‌توان ادعا کرد که این پدیده به صفر رسیده است. اما شایان ذکر است که در اثبات‌های قضیه‌های مقاله از همان توابع علامت استفاده شده است.

۶-۱ نتایج شبیه‌سازی دسته‌ی اول از ورودی‌های کنترلی در حل مسئله ردیابی زمان-محدود

دسته اول از ورودی‌های کنترلی مطابق با روابط (۳۰) و (۳۱) تولید شده و به زیردریایی NPS AUV II اعمال می‌شوند. جدول ۷، مقادیر درنظر گرفته شده برای ثابت‌های اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی دسته اول را نشان می‌دهد. شکل ۳، پاسخ‌های زمانی متغیرهای مرتبط با

جدول ۷. مقادیر عددی انتخاب شده در شبیه‌سازی برای پارامترهای اختیاری موجود در دسته اول از ورودی‌های کنترلی.

	پارامترهای اختیاری موجود در قوانین کنترلی	پارامترهای اختیاری موجود در سطوح لغزشی
دسته اول	$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 1 \gamma = 0.1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1$	$l_{1_1} = l_{1_2} = l_{1_3} = l_{1_4} = l_{1_5} = l_{1_6} = 3$ $l_{2_1} = l_{2_2} = l_{2_3} = l_{2_4} = l_{2_5} = l_{2_6} = 2$.

[1] Runge-Kutta

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]

جدول ۸. مقادیر عددی انتخاب شده در شبیه‌سازی برای پارامترهای اختیاری موجود در دسته دوم از ورودی‌های کنترلی.

	پارامترهای اختیاری موجود در قوانین کنترلی	پارامترهای اختیاری موجود در سطوح لغزشی
دسته دوم	$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 1$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1$ $, \Omega_1 = 0.8, \text{and } \Omega_2 = 1.2 \Omega_3 = 5$	$o_1 = o_2 = o_3 = o_4 = o_5 = o_6 = 0.5$

جدول ۹. مقادیر عددی انتخاب شده در شبیه‌سازی برای پارامترهای اختیاری موجود در دسته سوم از ورودی‌های کنترلی.

	پارامترهای اختیاری موجود در قوانین کنترلی	پارامترهای اختیاری موجود در سطوح لغزشی
دسته سوم	$, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 1 \gamma = 0.01$ $.\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1$	$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0.3, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 =$ $\epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0.1$ $\eth_1 = \eth_2 = \hbar_1 = \hbar_2 = \hbar_3 = \hbar_4 = \hbar_5 = \hbar_6 = 9$ $\eth_3 = \eth_4 = \eth_5 = \eth_6 = 5, \mho_1 = \mho_2 = \mho_3 = \mho_4 = \mho_5 =$ $\mho_6 = 5, \varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma_3 = \varsigma_4 = \varsigma_5 = \varsigma_6 = 3$

جدول ۱۰. زمان‌های همگرایی زیردریایی NPS AUV II به مسیرهای مرجع با اعمال انواع گشتاورهای ورودی پیشنهادی.

انواع ورودی‌های کنترلی پیشنهادی	$\boldsymbol{x \to x_d}$	$\boldsymbol{y \to y_d}$	$\boldsymbol{z \to z_d}$	$\boldsymbol{\phi \to \phi_d}$	$\boldsymbol{\theta \to \theta_d}$	$\boldsymbol{\psi \to \psi_d}$
دسته اول گشتاورهای ورودی	16(sec)	12.5(sec)	6(sec)	2.65(sec)	3.85(sec)	3.5(sec)
دسته دوم گشتاورهای ورودی	12(sec)	8.5(sec)	7.75(sec)	5.5(sec)	9.5(sec)	3.125(sec)
دسته سوم گشتاورهای ورودی	7.25(sec)	6.5(sec)	6.2(sec)	7.2(sec)	7.9(sec)	6.8(sec)

بردار مسیر واقعی $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی NPS AUV II را با اعمال دسته اول از ورودی‌های کنترلی نشان می‌دهد. با دقت در تمام نمودارهای موجود در شکل ۳، می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر واقعی زیردریایی به پاسخ‌های زمانی متغیرهای (متناظرشان) بردار مسیر دلخواه $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا شده‌اند.

شکل ۴، پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته اول $\boldsymbol{\tau} = [F_X, F_Y, F_Z, \tau_K, \tau_M, \tau_N]^T$ را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که واحد تمامی گشتاورها نیوتن‌متر (Nm) است.

۶-۲ نتایج شبیه‌سازی دسته‌ی دوم از ورودی‌های کنترلی در حل مسئله ردیابی زمان-محدود

دسته دوم از ورودی‌های کنترلی مطابق با روابط (۴۲) و (۴۳) ساخته شده و به زیردریایی NPS AUV II اعمال می‌شوند. جدول ۸، مقادیر درنظر گرفته شده برای ثابت‌های اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی دسته دوم را نشان می‌دهد. شکل ۵، پاسخ‌های زمانی متغیرهای مرتبط با بردار مسیر واقعی $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی NPS AUV II را با اعمال دسته دوم از ورودی‌های کنترلی نشان می‌دهد. با دقت در شکل ۵، می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر واقعی زیردریایی به پاسخ‌های زمانی متغیرهای بردار مسیر دلخواه $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا شده‌اند. شکل ۶، پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته دوم $\boldsymbol{\tau} = [F_X, F_Y, F_Z, \tau_K, \tau_M, \tau_N]^T$ را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که واحد تمامی گشتاورها نیوتن‌متر (Nm) است.

۶-۳ نتایج شبیه‌سازی دسته‌ی سوم از ورودی‌های کنترلی در حل مسئله ردیابی زمان-محدود

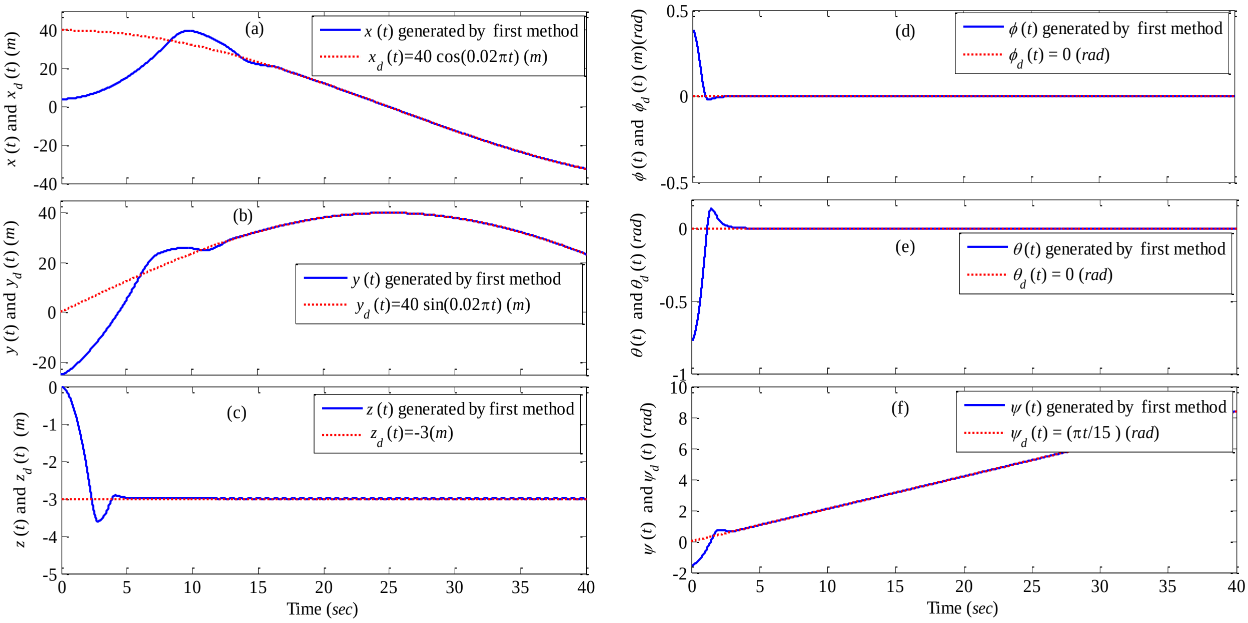
دسته سوم از ورودی‌های کنترلی مطابق با روابط (۵۲) و (۵۳) تولید شده و به زیردریایی NPS AUV II اعمال می‌شوند. جدول ۹، مقادیر درنظر گرفته شده برای ثابت‌های اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی دسته سوم را نشان می‌دهد. شکل ۷، پاسخ‌های زمانی متغیرهای مرتبط با بردار مانور واقعی $\boldsymbol{\eta}(t)$ زیردریایی NPS AUV II را با اعمال دسته سوم از ورودی‌های کنترلی نشان می‌دهد. با دقت در شکل ۷، می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر واقعی زیردریایی به پاسخ‌های زمانی متغیرهای بردار مسیر دلخواه $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ همگرا شده‌اند. شکل ۸، پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته سوم $\boldsymbol{\tau} = [F_X, F_Y, F_Z, \tau_K, \tau_M, \tau_N]^T$ را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که واحد تمامی گشتاورها نیوتن‌متر (Nm) است. جدول ۱۰، زمان‌های محدود همگرایی زیردریایی به بردار مسیرهای مرجع را برای هر سه دسته گشتاورهای ورودی کنترلی ارائه می‌دهد.

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

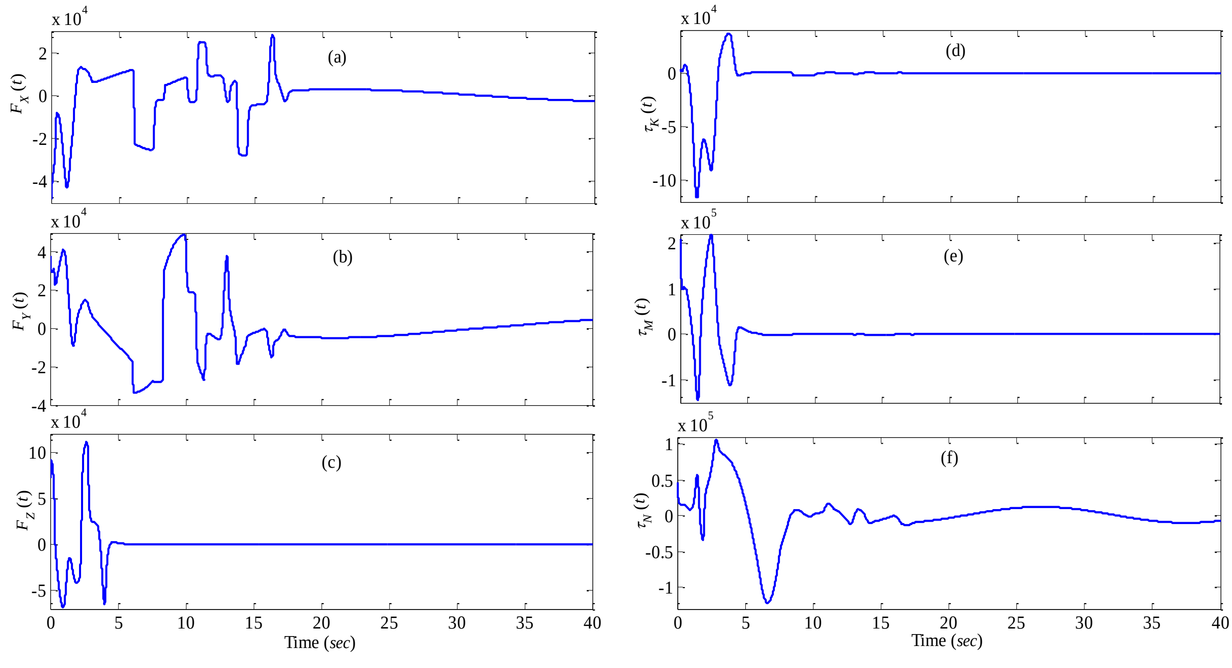
در این مقاله، مسئله هدایت و کنترل زیردریایی شش درجه آزادی برای مانور در امتداد مسیر دلخواه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. سه کلاس و دسته ورودی‌های کنترلی با استفاده از تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال و تعریف سطوح لغزشی ابتکاری طراحی شدند تا هدف مانور زیردریایی شش درجه آزادی در مسیر دلخواه به صورت زمان-محدود برآورده گردد. از نقاط قوت ورودی‌های کنترلی پیشنهادی، مقاوم بودن در برابر نامعینی‌های پارامتری، دینامیک‌های مدل نشده و نیروهای ناشناخته اقیانوس بود.

با استفاده از تحلیل‌های ریاضی موجود در مقاله، چندین رابطه برای محاسبه و تخمین زمان‌های محدود مورد نیاز برای برآوردشدن هدف ردیابی حاصل شد که با استفاده از این روابط و تنظیم مناسب پارامترهای آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی می‌توان کیفیت پاسخ گذاری سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی را بهبود بخشید. نتایج شبیه‌سازی‌های عددی نیز نشان از کارایی و عملکرد مناسب ورودی‌های کنترلی پیشنهادی داشت. نویسندگان در راستای کارهای آینده مرتبط با این مقاله تصمیم دارند تا چندین مسئله جدید و کاربردی را مورد بررسی و مطالعه قرار دهند که این مسائل عبارتند از: (الف) طراحی مجدد ورودی‌های کنترلی زیردریایی با درنظرگرفتن اثرات غیرخطی‌گری‌های عملگرها از جمله اشباع و ناحیه

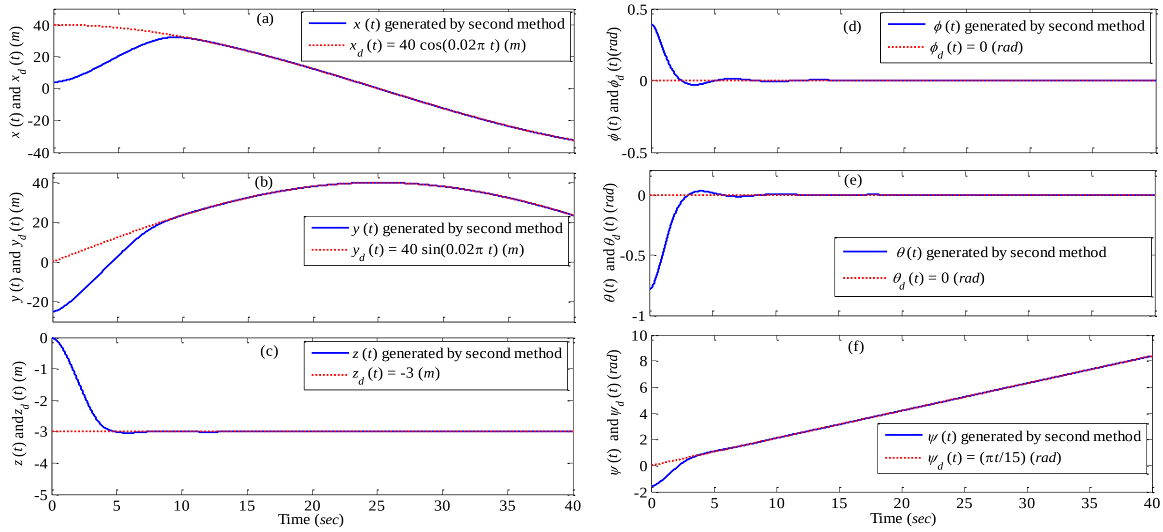
مرده، (ب) طراحی رویتگر غیرخطی زمان–محدود برای تخمین بردار سرعت‌های خطی و زاویه‌ای به منظور کاهش تعداد سنسورهای فیزیکی زیردریایی، (ج) طراحی قوانین تطبیق و به‌روزرسانی برای تخمین زمان–محدود ضرایب کران بالای نامعینی‌های مدل زیردریایی و اثبات مجدد پایداری زمان–محدود سیستم حلقه‌بسته‌ی زیردریایی.



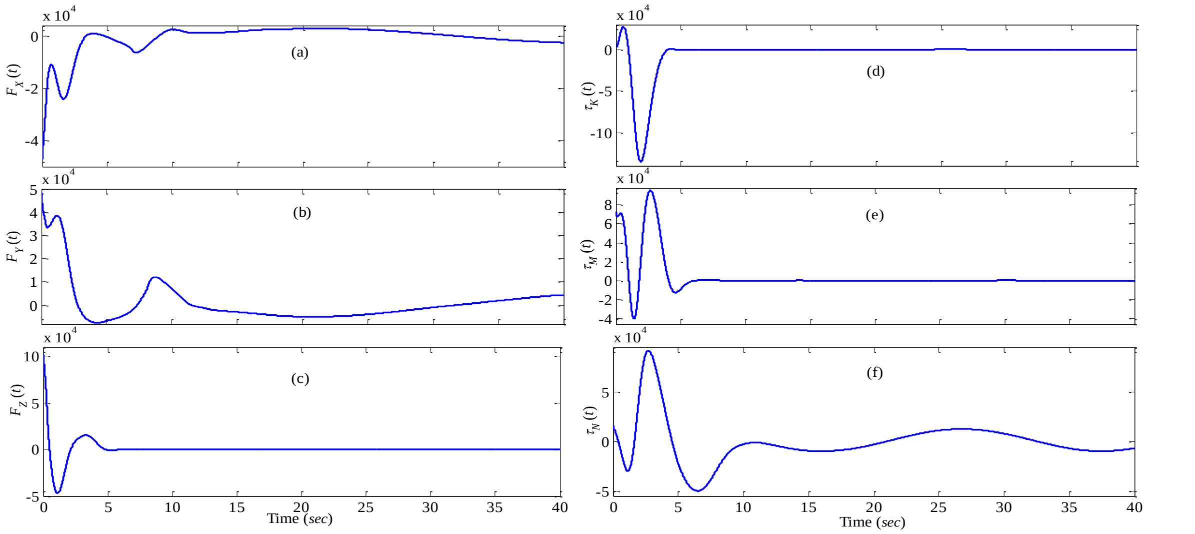
شکل ۳. پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر مانور واقعی زیردریایی NPS AUV II با اعمال اولین دسته از ورودی‌های کنترلی طراحی شده. (a): پاسخ‌های زمانی $x(t)$ و $x_d(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $y(t)$ و $y_d(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $z(t)$ و $z_d(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $\phi(t)$ و $\phi_d(t)$، (e): پاسخ‌های زمانی $\theta(t)$ و $\theta_d(t)$، (f): پاسخ‌های زمانی $\psi(t)$ و $\psi_d(t)$.



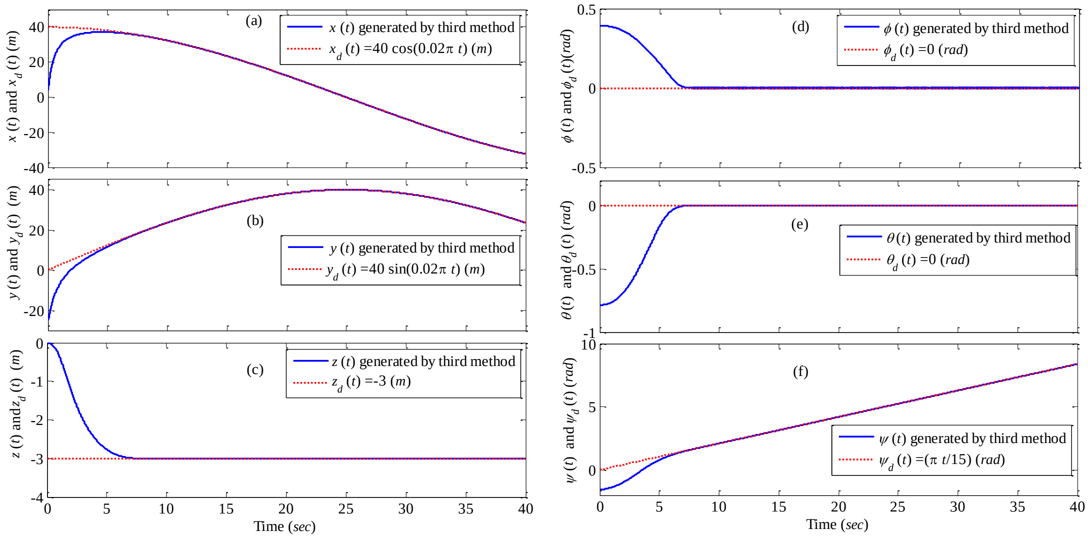
شکل ۴. پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته اول $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{t})$ اعمال شده به زیردریایی NPS AUV II. (a): پاسخ زمانی $F_X(t)$، (b): پاسخ زمانی $F_Y(t)$، (c): پاسخ زمانی $F_Z(t)$، (d): پاسخ زمانی $\tau_K(t)$، (e): پاسخ زمانی $\tau_M(t)$، (f): پاسخ زمانی $\tau_N(t)$.



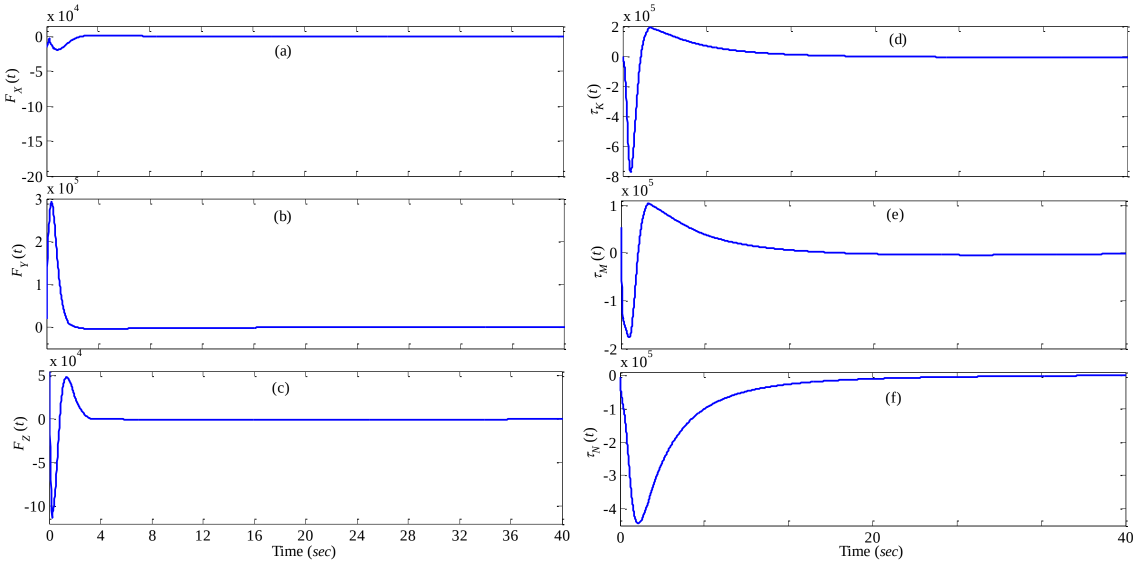
شکل ۵. پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر مانور واقعی زیردریایی NPS AUV II با اعمال دومین دسته از ورودی‌های کنترلی طراحی شده. (a): پاسخ‌های زمانی $x(t)$ و $x_d(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $y(t)$ و $y_d(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $z(t)$ و $z_d(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $\phi(t)$ و $\phi_d(t)$، (e): پاسخ‌های زمانی $\theta(t)$ و $\theta_d(t)$، (f): پاسخ‌های زمانی $\psi(t)$ و $\psi_d(t)$.



شکل ۶. پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته دوم $\boldsymbol{\tau(t)}$ اعمال شده به زیردریایی NPS AUV II. (a): پاسخ زمانی $F_X(t)$، (b): پاسخ زمانی $F_Y(t)$، (c): پاسخ زمانی $F_Z(t)$، (d): پاسخ زمانی $\tau_K(t)$، (e): پاسخ زمانی $\tau_M(t)$، (f): پاسخ زمانی $\tau_N(t)$.



شکل ۷. پاسخ‌های زمانی متغیرهای مسیر مانور واقعی زیردریایی NPS AUV II با اعمال سومین دسته از ورودی‌های کنترلی طراحی شده. (a): پاسخ‌های زمانی $x(t)$ و $x_d(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $y(t)$ و $y_d(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $z(t)$ و $z_d(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $\phi(t)$ و $\phi_d(t)$، (e): پاسخ‌های زمانی $\theta(t)$ و $\theta_d(t)$، (f): پاسخ‌های زمانی $\psi(t)$ و $\psi_d(t)$.



شکل ۸ پاسخ‌های زمانی ورودی‌های کنترلی دسته سوم $\boldsymbol{\tau}(t)$ اعمال شده به زیردریایی NPS AUV II. (a): پاسخ زمانی $F_X(t)$، (b): پاسخ زمانی $F_Y(t)$، (c): پاسخ زمانی $F_Z(t)$، (d): پاسخ زمانی $\tau_K(t)$، (e): پاسخ زمانی $\tau_M(t)$، (f): پاسخ زمانی $\tau_N(t)$.

مراجع

[1] Y. Nasuno, E. Shimizu, M. Ito, I. Yamamoto, S. Tsukioka, and H. Yoshida, “A controller design for autonomous underwater vehicle ‘ MR-X1 ’ using linear matrix inequalities,” *International Journal of Control*, vol. 80, no. 7, pp. 1125–1135, 2008.

[2] Y. Shen, K. Shao, W. Ren, and Y. Liu, “Diving control of autonomous underwater vehicle based on improved active disturbance rejection control approach,” *Neurocomputing*, vol. 173, no. 3, pp. 1377-1385, 2016.

[3] D. Maalouf, I. Tamanaja, E. Campos, A. Chemori, V. Creuze, J. Torres, and R. Lozano, “From PD to nonlinear adaptive depth-control of a tethered autonomous underwater vehicle,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 2, pp. 743–748, 2013.

[4] F. Repoulias and E. Papadopoulos, “Planar trajectory planning and tracking control design for underactuated AUVs,” *Ocean Engineering*, vol. 34, no. 11-12, pp. 1650–1667, 2007.

[5] Y. Li, C. Wei, Q. Wu, P. Chen, Y. Jiang, and Y. Li, “Study of 3 dimension trajectory tracking of underactuated autonomous underwater vehicle,” *Ocean Engineering*, vol. 105, no. 1, pp. 270–274, 2015.

[6] S. Liu, D. Wang, and E. Poh, “Nonlinear output feedback tracking control for AUVs in shallow wave disturbance condition,” *International Journal of Control*, vol. 81, no. 11, pp. 1806–1823, 2008.

[7] B. Subudhi, K. Mukherjee, and S. Ghosh, “A static output feedback control design for path following of autonomous underwater vehicle in vertical plane,” *Ocean Engineering*, vol. 63, no. 1, pp. 72–76, 2013.

[8] I. Yang, S. Byun, B. Seo, D. Lee, and D. S. Han, “Robust dynamic inversion based on sliding mode control for autonomous underwater vehicles,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 10, pp. 79–84, 2013.

[9] M. Kim, H. Joe, J. Kim, and S. Yu, “Integral sliding mode controller for precise maneuvering of autonomous underwater vehicle in the presence of unknown environmental disturbances,” *International Journal of Control*, vol. 88, no. 10, pp. 2055–2065, 2015.

[10] H. Joe, M. Kim, and S. Yu, “Second-order sliding-mode controller for autonomous underwater vehicle in the presence of unknown disturbances,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, no. 1, pp. 183-196, 2014.

[11] G. Bartolini and A. Pisano, “Black-box position and attitude tracking for underwater vehicles by second-order sliding-mode technique,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, no. 14, pp. 1594–1609, 2010.

[12] J. Guo, “A waypoint-tracking controller for a biomimetic autonomous underwater vehicle,” *Ocean Engineering*, vol. 33, no. 17-18, pp. 2369–2380, 2006.

[13] F. Y. Bi., Y. J. Wei, J. Z. Zhang, and W. Cao, “Position-tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles in the presence of unknown ocean currents,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 11, pp. 2369–2380, 2010.

[14] K. Mukherjee, I. N. Kar, and R. K. P. Bhatt, “Region tracking based control of an autonomous underwater vehicle with input delay,” *Ocean Engineering*, vol. 99, no. 1, pp. 107–114, 2015.

[15] X. Qi, “Adaptive coordinated tracking control of multiple autonomous underwater vehicles,” *Ocean Engineering*, vol. 91, no. 1, pp. 84–90, 2014.

[16] G. Antonelli, S. Chiaverini, N. Sarkar, and M. West, “Adaptive control of an autonomous underwater vehicle: Experimental results on ODIN,” *IEEE Transactions On Control Systems Technology*, vol. 9, no. 5, pp. 756–765, 2001.

[17] J. Guo, F. Chiu, and C. Huang, “Design of a sliding mode fuzzy controller for the guidance and control of an autonomous underwater vehicle,” *Ocean Engineering*, vol. 30, no. 16, pp. 2137–2155, 2003.

[18] Y. C. Liu, S. Y. Liu, and N. Wang, “Fully-tuned fuzzy neural network based robust adaptive tracking control of unmanned underwater vehicle with thruster dynamics,” *Neurocomputing*, vol. 196, no. 1, pp. 1-13, 2016.

[19] Y. Chen, R. Zhang, X. Zhao, and J. Gao, “Adaptive fuzzy inverse trajectory tracking control of underactuated underwater vehicle with uncertainties,” *Ocean Engineering*, vol. 121, no. 1, pp. 123–133, 2016.

[20] K. Shojaei, “Neural network formation control of underactuated autonomous underwater vehicles with saturating actuators,” *Neurocomputing*, vol. 194, no. 1, pp. 372-384, 2016.

[21] B. Miao, T. Li, and W. Luo, “A DSC and MLP based robust adaptive NN tracking control for underwater vehicle,” *Neurocomputing*, vol. 111, no. 1, pp. 184-189, 2013.

[22] A. Bagheri and J. J. Moghaddam, "Simulation and tracking control based on neural-network strategy and sliding-mode control for underwater remotely operated vehicle," *Neurocomputing*, vol. 72, no. 7, pp. 1934–1950, 2009.

[23] J. Yang, J. Feng, D. Qi, and Y. Li, "Longitudinal motion control of underwater vehicle based on fast smooth second order sliding mode," *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 127, no. 20, pp. 9118-9130, 2016.

[24] J. Ghommam and M. Saad, "Backstepping-based cooperative and adaptive tracking control design for a group of underactuated AUVs in horizontal plane," *International Journal of Control*, vol. 87, no. 5, pp. 1076–1093, 2014.

[25] F. Rezazadegan, K. Shojaei, F. Sheikholeslam, and A. Chatraei, "A novel approach to 6-DOF adaptive trajectory tracking control of an AUV in the presence of parameter uncertainties," *Ocean Engineering*, vol. 107, no. 1, pp. 246–258, 2015.

[26] J. Xu, M. Wang, and L. Qiao, "Dynamical sliding mode control for the trajectory tracking of underactuated unmanned underwater vehicles," *Ocean Engineering*, vol. 105, no. 1, pp. 54–63, 2015.

[27] Z. H. Ismail, M. B. M. Mokhar, V. W. E. Putranti, and M. W. Dunnigan, "A robust dynamic region-based control scheme for an autonomous underwater vehicle," *Ocean Engineering*, vol. 111, no. 1, pp. 155–165, 2016.

[28] S. Li and X. Wang, "Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs," *Automatica*, vol. 49, no. 11, pp. 3359–3367, 2013.

[29] Z. Peng, D. Wang, G. Sun, and H. Wang, "Formation tracking control of multiple marine surface vehicles over a directed network : A cooperative dynamic surface control design," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 20, pp. 707–712, 2013.

[30] S. Li, X. Wang, and L. Zhang, "Finite-time output feedback tracking control for autonomous underwater vehicles," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 40, no. 3, pp. 727–751, 2015.

[31] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.

[32] M. Galicki, "Finite-time control of robotic manipulators," *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 49-54, 2015.

[33] M.R. Mokhtari and B. Cherki, "A new robust control for minirotorcraft unmanned aerial vehicles," *ISA Transactions*, vol. 56, no. 1, pp. 86-101, 2015.

[34] M. Jiang, S. Wang, J. Mei, and Y. Shen, "Finite-time synchronization control of a class of memristor-based recurrent neural networks," *Neural Networks*, vol. 63, no. 1, pp. 133-140, 2015.

[35] M. Galicki, "Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulator ," *Automatica*, vol. 67, no. 1, pp. 165-170, 2016.

[36] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.

[37] Y. Hong, J. Huang, and Y. Xu, "On an output feedback finite-time stabilization problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 305-309, 2001.

[38] Z. Zuo and L. Tie, "A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems," *International Journal of Control*, vol. 87, no. 2, pp. 363-370, 2016.

[39] A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, "Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach," *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 332-340, 2015.

[40] X. H. Zhang, K. Zhang, and X. J. Xie, "Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feed forward systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 8, pp. 1794-1814, 2016.

[41] Z. Zuo, "Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks," *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 305–309, 2015.

[42] H. B. Oza, Y. V. Orlov, and S. K. Spurgeon, "Finite time stabilization of a perturbed double integrator with unilateral constraints," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 95, no. 1, pp. 200-212, 2014.

[43] Y. Su and C. Zheng, "Robust finite-time output feedback control of perturbed double integrator," *Automatica*, vol. 60, no. 1, pp. 86-91, 2015.

[44] H. Liu, T. Zhang, and X. Tian, "Continuous output-feedback finite-time control for a class of second-order nonlinear systems with disturbances," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 2, pp. 218-234, 2016.

[45] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101-127, 2005.

[46] Q. Lan, S. Li, J. Yang, and L. Guo, "Finite-time control for soft landing on an asteroid based on line-of-sight angle," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 1, pp. 383-398, 2014.

[47] S. Yu and X. Long, "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode," *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 158-165, 2015.

[48] Y. Zhang, G. Liu, and B. Luo, "Finite-time cascaded tracking control approach for mobile robots," *Information Sciences*, vol. 284, no. 1, pp. 31-43, 2014.

[49] S. Mondal and C. Mahanta, "Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 2356-2377, 2014.

[50] K. Lu and Y. Xia, "Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence," *Automatica*, vol. 49, no. 12, pp. 3591-3599, 2013.

[51] S. Y. Chen and F. J. Lin, "Robust nonsingular terminal sliding mode control for nonlinear magnetic bearing system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 636-643, 2011.

[52] Y. Chen, Z. Shi, and C. Lin, "Some criteria for the global finite-time synchronization of two Lorenz-Stenflo systems coupled by a new controller," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 15, pp. 4078-4085, 2014.

[53] S. Liu and L. Q. Chen, "Second-order terminal sliding mode control for networks synchronization," *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, no. 1, pp. 205-213, 2015.

[54] H. Komurcugil, "Adaptive terminal sliding-mode control strategy for DC–DC buck converters," *ISA Transactions*, vol. 51, no. 6, pp. 673-681, 2012.

[55] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri "Free-chattering robust finite time tracking for connected double integrator nonlinear systems," *submitted to 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation*, Qazvin Islamic Azad University, Qazvin, Iran, January 27-28, 2016.

[56] Y. Feng, X. Yu, and F. Han, "On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1715-1722, 2013.

[57] S. Zhankui and K. Sun, "Nonlinear and chaos control of a micro-electro-mechanical system by using second-order fast terminal sliding mode control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 9, pp. 2540-2548, 2013.

[58] X. Liu and Y. Han, "Finite time control for MIMO nonlinear system based on higher-order sliding mode," *ISA Transactions*, vol. 53, no. 6, pp. 1838-1846, 2014.

[59] M. Ghasemi, S. G. Nersesov, and G. Clayton, "Finite-time tracking using sliding mode control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 5, pp. 2966-2990, 2014.

[60] J. Yang, S. Li, J. Su, and X. Yu, "Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances," *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 2287-2291, 2013.

[61] S. E. Parsegov, A. E. Polyakov, and P. S. Shcherbakov, "Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 110–115, 2013.

[62] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu, "Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics," *IET Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 14, pp. 2165–2170, 2015.

[63] A. Polyakov and A. Poznyak, "Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: "Twisting" controller for second-order sliding mode realization," *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444-448, 2009.

[64] G. H. Hardly, J. E. Littlewood, and G. Polya "*Inequalities*," Cambridge University Press, 1952.

[65] B. Geranmehr and S.Rafee Nekoo, "Nonlinear suboptimal control of fully coupled non-affine six-DOF autonomous underwater vehicle using the state-dependent Riccati equation," *Ocean Engineering*, vol. 96, no. 1, pp. 248-257, 2015.

[66] T. I. Fossen, "*Marine control systems: guidance, navigation and control of ships, rigs and underwater vehicles*," Marine Cybernetics, Trondheim, Norway, 2002.

[67] T. I. Fossen, "*Guidance and control of ocean vehicles*," John Wiley and Sons Ltd, England, 1994.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.4.2]

[DOI: 10.29252/joc.14.1.93]