

طراحی قانون هدایت بهینه مقاوم سه بعدی برای موشک با استفاده از کنترل مد لغزشی و کنترل SDRE

سید سجاد موسی پور^۱، قاسم علیزاده^۲، سهراب خان محمدی^۳

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تبریز، Smoosapour@gmail.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تبریز، Alizadeh@tabrizu.ac.ir

^۳ استاد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تبریز، Khan@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۲/۱۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۵/۱۱)

چکیده: در این مقاله، با ترکیب روشهای کنترل بهینه SDRE و کنترل مد لغزشی یک قانون هدایت جدید برای موشک بر علیه اهداف دارای مانور طراحی می شود. به این علت که دینامیک اتوپایلوت در مرحله انتهایی پرواز موشک نقش بسیار مهمی در موفقیت یا عدم موفقیت پرواز دارد و می تواند باعث تاخیر در اجرای فرامین هدایتی شود، این دینامیک در معادلات حالت لحاظ می شود. مقاوم بودن قانون هدایت طراحی شده با استفاده از روش دوم لیپانوف اثبات می شود. از مزایای قانون هدایت پیشنهادی این است که برای پیاده سازی به منحنی دقیق شتاب هدف نیاز ندارد و تنها حداکثر مقدار شتاب هدف مورد نیاز است. ضرایب ظاهر شده در قانون هدایت پیشنهادی با استفاده از الگوریتم ژنتیک بدست می آید. برای بررسی کارایی قانون هدایت طراحی شده، با در نظر گرفتن شرایط پروازی مختلف، درگیری سه بعدی موشک و هدف شبیه سازی می شود و نتایج با قانون هدایت ناوبری تناسبی افزودنی مقایسه می گردد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که قانون هدایت پیشنهادی، در برابر اغتشاشات شتاب هدف از مقاومت بالایی نسبت به قانون ناوبری تناسبی افزودنی برخوردار است و همچنین به راحتی می توان بین سرعت همگرایی، زمان برخورد و تلاش کنترلی مصالحه انجام داد.

کلمات کلیدی: موشک، هدایت، کنترل بهینه، کنترل مقاوم، مد لغزشی، الگوریتم ژنتیک.

Three-Dimensional Optimal Robust Guidance Law Design for Missile Using Sliding-Mode Control and SDRE Control

Seyed Sajad Moosapour, Ghasem Alizadeh, and Sohrab Khanmohammadi

Abstract: In this paper, a new guidance law is designed for missile against maneuvering target by integrating optimal control SDRE technique and sliding-mode control. Due to the fact that autopilot dynamic has a very important role in success or unsuccess of engagement in terminal phase, and it can make delay in guidance commands execution, this dynamic is taken into account in state equations. The robustness of the designed guidance law against disturbances is proved by the second method of Lyapunov. The proposed guidance law does not need accurate target maneuver profile and just need the maximum value of the target maneuver. Coefficients in proposed guidance law are obtained using genetic algorithm. For investigating effectiveness of proposed guidance law, by considering different scenarios, three-dimensional missile-target engagement is simulated. Then results are compared with conventional augmented proportional navigation guidance (APNG) law. Simulation results show that the proposed guidance law has high robustness against target maneuver disturbances and also one can compromise between convergence speed, intercept time and control effort.

Keywords: Missile, guidance, optimal control, robust control, sliding-mode, genetic algorithm.

۱- مقدمه

در برابر تغییرات پارامترهای مدل مقاوم است. در [۱۶] برای موشکهای مجهز به کنترل بردار پیشران، با استفاده از کنترل مد لغزشی و کنترل تطبیقی، برای کمینه کردن فاصله نسبی موشک و هدف به صورت نمایی، یک قانون هدایت مد لغزشی تطبیقی طراحی شده است. همچنین در [۱۷] برای اهداف ثابت یا اهداف دارای حرکت آرام، با استفاده از کنترل مد لغزشی یک قانون هدایت آشیانه یاب فعال ارائه شده است.

به هر حال، زمانی که تغییرات پارامترها ناچیز است و اغتشاشی وجود ندارد؛ یعنی سیستم در حالت نامی خود قرار دارد؛ مقاوم بودن دیگر چالش و مسأله اصلی در طراحی نخواهد بود و باید دیگر معیارها نیز در نظر گرفته شود. سئوالی که پیش می آید این است که آیا می توان کنترل-کننده ای طراحی کرد که علاوه بر مقاوم بودن در برابر نامعینی ها، معیارهای دیگری نظیر حداقل مصرف انرژی، همگرایی سریع حالتها و ... را داشته باشد. می توان با ترکیب روشهای کنترل مد لغزشی و کنترل بهینه، قانون هدایتی طراحی کرد که هم عملکرد بهینه داشته باشد و هم در برابر اغتشاشات شتاب هدف مقاوم باشد و اثر پیش بینی های غیر صحیح شتاب هدف را جبران کند [۱۸-۲۱].

در این تحقیق، دینامیک های مرتبه اول برای اتوپایلوت در هر سه کانال در نظر گرفته می شوند، سپس با ترکیب روشهای کنترل مد لغزشی و کنترل بهینه یک قانون هدایت برای موشک در فضای سه بعدی طراحی می شود. قانون هدایت طراحی شده بر اساس روش کنترل بهینه معادله ریکاتی وابسته به حالت^۱ (SDRE) [۲۲، ۲۳] بدست می آید. در این روش کنترل بهینه غیر خطی، معادلات حالت سیستم به فرم ضرایب وابسته به حالت^۲ (SDC) تبدیل می شوند و سپس همانند روش تنظیم کننده خطی بهینه^۳ (LQR) معادله ماتریس ریکاتی حل می شود. در قانون هدایت طراحی شده ضرایب مختلفی ظاهر می شود که این ضرایب نیز به منظور عملکرد بهتر با استفاده از الگوریتم ژنتیک بدست می آید. شرایط پروازی مختلفی در نظر گرفته می شود و برای انواع مختلف شتاب هدف شبیه سازی های متعددی انجام می شود و نتایج با قانون هدایت ناوبری تناسبی افزودنی^۴ یا APNG مقایسه می شود.

ساختار تحقیق حاضر به این صورت می باشد: نخست مدل ریاضی درگیری موشک و هدف با در نظر گرفتن دینامیک های مرتبه اول برای اتوپایلوت در هر سه کانال بدست می آید. سپس اهداف مسأله پرواز به صورت یک مسأله کنترلی بیان می شود. در ادامه روش SDRE توضیح داده خواهد شد. طراحی قانون هدایت بهینه مد لغزشی^۵ یا OSMG بر

تاکنون قوانین هدایت متنوعی برای موشکهای آشیانه یاب ارائه شده است. روشهای کنترل مدرن، نظیر کنترل بهینه و کنترل مد لغزشی برای طراحی قوانین هدایت موشک به طور چشمگیری استفاده می شود. قوانین هدایت بهینه برای موشک با دینامیک ایده آل [۱]، دینامیک مرتبه اول [۲] و دینامیک مرتبه دوم [۳] استخراج شده است. این قوانین هدایت بهینه برای اهداف دارای مانور تصادفی [۴] و دینامیک مرتبه بالا [۵] تعمیم داده شده اند. حل حلقه بسته هدایت بهینه برای موشک با سرعت متغیر با زمان در [۶] و برای دینامیک با تأخیر زمانی نامعین در [۷] بدست آمده است. هدایت بهینه و تخمین غیر خطی برای اهداف با شتاب کاهشی در [۸] و شتاب افزایشی در [۹] انجام شده است. در مرجع [۱۰] برای اهداف دارای شتاب ثابت قانون هدایت فواصل زمانی ثابت ارائه شده است. همچنین در [۱۱، ۱۲] به صورت مفصل قوانین هدایت به طور کلی و هدایت بهینه به طور خاص مرور شده است.

اگر چه قوانین هدایت بهینه از نظر مصرف انرژی عملکرد مطلوبی دارند ولی دارای معایبی نیز هستند. تخمین شتاب هدف و تخمین زمان باقیمانده تا اصابت به هدف از جمله مشکلاتی است که در پیاده سازی قوانین هدایت بهینه خود را نشان می دهد. تخمین به علت تأخیر زمانی ذاتی، مشکلاتی را در اجرای فرامین هدایتی به وجود می آورد. یکی از مهمترین ضعفهای قوانین هدایت بهینه این است که در حضور نامعینی هایی نظیر تغییرات پارامترها و اغتشاشات بیرونی، عملکرد سیستم هدایت کاهش می یابد و ممکن است معیار عملکرد از مقدار مطلوب فاصله بگیرد و حتی ممکن است در مواردی منجر به ناپایداری سیستم گردد. در هدایت بهینه برای اهداف متحرک، به علت وابستگی قانون هدایت بهینه به فاصله نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی، پیاده سازی آن مشکل می باشد. لازم به ذکر است در قانون هدایت بهینه منحنی آینده شتاب هدف به طور کامل نیاز می باشد و در نتیجه هر گونه تغییر در شتاب هدف ممکن است نتایج نامطلوبی به همراه داشته باشد.

از سوی دیگر، روش کنترل مد لغزشی به علت توانایی بالای آن در مقاوم ساختن سیستم تحت کنترل در برابر نامعینی ها، به عنوان یک ابزار قدرتمند به طور گسترده ای در طراحی قوانین هدایت غیر خطی مورد استفاده قرار می گیرد. مهمترین مزیت کنترل کننده مد لغزشی عدم حساسیت پاسخ سیستم در برابر اغتشاشات و نامعینی های مدل می باشد [۱۳، ۱۴]. به عنوان نمونه در [۱۵] یک قانون هدایت مد لغزشی برای یک موشک هوا به هوا با در نظر گرفتن دینامیک غیر خطی طراحی شده است. همچنین ثابت شده است که قانون هدایت حلقه بسته بدست آمده،

¹ State-dependent Riccati equation

² State-dependent coefficient

³ Linear quadratic regulator

⁴ Augmented proportional navigation guidance

⁵ Optimal sliding mode guidance

محاسبه گردد. حال اگر $r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi, a_{Mr}, a_{M\theta}$ و $a_{M\phi}$ به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شوند؛ که در آن $v_r = \dot{r}$ سرعت نسبی شعاعی^۲، $v_\theta = r\dot{\theta}\cos\phi$ و $v_\phi = r\dot{\phi}$ نیز سرعتهای نسبی جانبی^۳ هستند؛ معادلات (۱) را می توان به صورت زیر نوشت [۱۲]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \quad (۳)$$

که در آن بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ ، بردار میدان $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ ، بردار شتاب موشک $\mathbf{u}(t)$ ، بردار شتاب هدف $\mathbf{w}(t)$ و ماتریسهای \mathbf{B} و \mathbf{D} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} rv_r \\ v_\theta \\ \cos\phi \\ v_\phi \\ v_\theta^2 + v_\phi^2 - a_{Mr} \\ -v_r v_\theta + v_\theta v_\phi \tan\phi - a_{M\theta} \\ -v_r v_\phi - v_\theta^2 \tan\phi - a_{M\phi} \\ -(r/T)a_{Mr} \\ -(r/T)a_{M\theta} \\ -(r/T)a_{M\phi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \\ v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \\ a_{Mr} \\ a_{M\theta} \\ a_{M\phi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \\ a_{T\phi} \end{pmatrix}$$

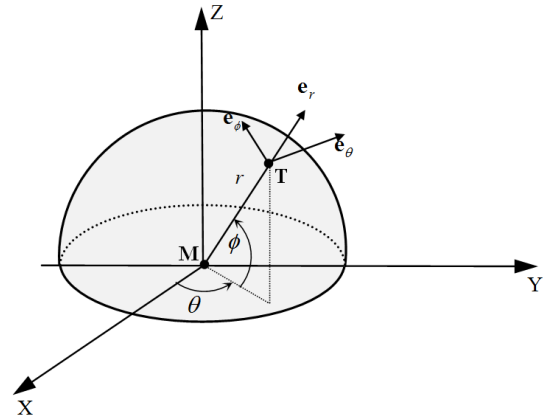
۳- بیان مساله

سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

اساس روش SDRE در بخش بعدی آورده می شود. بعد از طراحی قانون هدایت به منظور اثبات کارایی و عملکرد مناسب آن، شبیه سازی های متعددی انجام می شود. در پایان نتایج تحقیق حاضر جمع بندی می شود.

۲- مدل ریاضی

شکل ۱ هندسه سه بعدی پرواز را در دستگاه مختصات کروی نشان (r, θ, ϕ) می دهد. همان طور که مشاهده می شود، موشک در مرکز دستگاه قرار دارد و هدف نیز بر کره محیط می باشد. فاصله نسبی موشک و هدف و زوایای جانبی^۱ نسبی به ترتیب با r, θ و ϕ نمایش داده شده است.



شکل ۱: هندسه سه بعدی درگیری موشک و هدف

جهت سادگی، موشک و هدف به صورت جرم نقطه ای فرض می شوند. فرض کنید بردارهای یک جهت محوره ای مختصات مفروض باشد. بردار فاصله نسبی \mathbf{r} را می توان بر حسب بردارهای یک جهت به صورت $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ نوشت. با دو بار مشتق گرفتن متوالی از این رابطه، مؤلفه های شتاب نسبی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2\phi &= a_{Tr} - a_{Mr} \\ r\ddot{\theta} \cos\phi + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos\phi - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin\phi &= a_{T\theta} - a_{M\theta} \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\theta}^2 \cos\phi \sin\phi &= a_{T\phi} - a_{M\phi} \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن $a_{Tr}, a_{T\theta}, a_{T\phi}$ مؤلفه های شتاب هدف؛ و $a_{Mr}, a_{M\theta}, a_{M\phi}$ و مؤلفه های شتاب اعمالی موشک می باشد. اگر دینامیکهای مرتبه اول در هر سه کانال برای اتوپیلوت در نظر گرفته شوند، در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{Mr} + (1/T)a_{Mr} &= (1/T)u_r \\ \dot{a}_{M\theta} + (1/T)a_{M\theta} &= (1/T)u_\theta \\ \dot{a}_{M\phi} + (1/T)a_{M\phi} &= (1/T)u_\phi \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن T ثابت زمانی دینامیک اتوپیلوت می باشد؛ و u_r, u_θ و u_ϕ نیز مؤلفه های ورودی کنترلی می باشد که باید توسط قانون هدایت

² Radial relative velocity

³ Tangential relative velocities

¹ Aspects or azimuth angles

برای بیان روش SDRE لازم است ابتدا با مفهوم خطی سازی تعمیم یافته که یک مفهوم کلیدی در این روش طراحی می باشد، آشنا شویم. خطی سازی تعمیم یافته یا پارامتریزه کردن SDC، فرایندی است که طی آن سیستم غیر خطی به یک ساختار شبه خطی شامل ماتریسهای SDC تبدیل می شود. با فرض $\mathbf{f}(0) = 0$ و همچنین اگر تابع \mathbf{f} مشتق پذیر باشد، در این صورت همواره یک تابع ماتریسی غیر خطی پیوسته $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ وجود خواهد داشت به طوری که:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ با فاکتورگیری ریاضی بدست می آید و واضح است که برای $n > 1$ ، منحصر بفرد نیست. بنابراین خطی سازی تعمیم یافته سیستم غیر خطی (6) با فرض $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad (10)$$

که دارای یک ساختار خطی با ماتریسهای به فرم SDC $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ می باشد. با الهام گرفتن از مساله LQR که با یک معادله جبری ریکاتی² (ARE) توصیف می شود، کنترل فیدبک SDRE نیز یک رهیافت مشابه برای مساله تنظیم کننده غیر خطی بهینه فراهم می کند. کنترل کننده فیدبک حالت SDRE به فرم زیر به دست می آید:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \quad (11)$$

که در آن $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ یک ماتریس مثبت معین متقارن منحصر به فرد در هر نقطه از \mathbf{x} می باشد که از حل معادله جبری ریکاتی وابسته به حالت بدست می آید:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0 \quad (12)$$

شایان ذکر است که ماتریس $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ در صورتی وجود خواهد داشت که زوج $\{\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})\}$ برای تمام \mathbf{x} ها به صورت نقطه ای کنترل پذیر و زوج $\{\mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\}$ که $\mathbf{C}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})$ برای تمام \mathbf{x} ها به صورت نقطه ای آشکار پذیر باشد.

همان طور که مشاهده می شود روش حل SDRE برای مساله تنظیم کننده غیر خطی زمان نامحدود (6) و (7)، تعمیمی است از روش LQR نامتغیر با زمان و زمان نامحدود، که در آن تمام ضرایب ماتریسی به صورت وابسته به حالت می باشند. در هر لحظه، ماتریسهای SDC به صورت ثابت فرض می شوند و ورودی کنترلی با حل مساله کنترل بهینه LQR محاسبه می گردد. این روش می تواند به عنوان یک جایگزین قدرتمند برای روشهایی مانند حل مساله معادلات مشتقی غیر خطی با شرایط مرزی جداگانه³ (TPBVP) و یا حل معادلات مشتقی جزئی

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \delta(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{u}(t)$ به ترتیب بردار حالت و بردار ورودی، $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ توابع غیر خطی از بردار حالت، و $\delta(\mathbf{x}, t)$ تابعی نامعین و بیانگر هر نوع نامعینی نظیر تغییرات پارامترهای داخلی، اغتشاشات بیرونی و دینامیکهای مدل نشده می باشد. فرض می شود $\delta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t)$ در نتیجه می توان نوشت:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

همچنین فرض می شود $\|\bar{\delta}(\mathbf{x}, t)\| \leq \gamma_0 + \gamma_1 \|\mathbf{x}(t)\|$ ، که در آن γ_0 و γ_1 ثابتهای مثبتی هستند. حال اگر فرض شود که $\bar{\delta}(\mathbf{x}, t) = 0$ در این صورت سیستم (5) به صورت زیر ساده می شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad (6)$$

در سیستم فوق فرض کنید $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{con}$ می تواند تابع هزینه زیر را کمینه کند.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \} dt \quad (7)$$

که در آن $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ توابع غیر خطی از بردار حالت \mathbf{x} می باشد. بصورت نقطه ای مثبت نیمه معین و $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ نیز بصورت نقطه ای مثبت معین می باشد. برای جبران عدم قطعیت های سیستم (5) قانون کنترل به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{con} + \mathbf{u}_{dis} \quad (8)$$

که \mathbf{u}_{con} برای بهینه سازی سیستم نامی و \mathbf{u}_{dis} برای از بین بردن اثر اغتشاشات بیرونی و تغییرات پارامترها به کار می رود و باید محاسبه گردند. قانون هدایت بهینه مد لغزشی باعث می شود علاوه بر اینکه سیستم دارای عملکرد بهینه باشد، در برابر اغتشاشات نیز مقاوم باشد. برای طراحی قسمت بهینه قانون کنترلی یعنی \mathbf{u}_{con} ، از روش SDRE و برای طراحی \mathbf{u}_{dis} از کنترل مد لغزشی استفاده می شود.

۴- روش کنترل بهینه SDRE [۲۲، ۲۳]

۴-۱ تنظیم کننده بهینه غیر خطی^۱

مساله تنظیم بهینه غیر خطی زمان نامحدود و پیوسته با زمان را برای سیستم (6) در نظر بگیرید. هدف کمینه سازی معیار عملکرد زمان نامحدود با بردار حالت غیر مربعی (nonquadratic) و بردار ورودی مربعی (quadratic) معادله (7) می باشد.

² Algebraic Riccati equation

³ Two-point boundary value problem

¹ Nonlinear optimal regulator

آن را نمی‌دهد و در نتیجه کاهش آن از یک حد معین می‌تواند منجر به ناپایداری شود.

۵- طراحی قانون هدایت بهینه مد لغزشی

برای طراحی قانون هدایت بهینه مد لغزشی، سطح لغزشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{s}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \times \int_0^t [\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})] \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (13)$$

که در آن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ یک ماتریس دلخواه است و باید در شرط غیر تکین بودن ماتریس حاصل ضرب $\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$ صدق کند. از معادله (۱۲) بوضوح مشخص است که $\mathbf{s}(0, \mathbf{x}(0)) = 0$ ؛ بنابراین سیستم از سطح لغزشی تعریف شده شروع به کار می‌کند. با مشتق گرفتن از رابطه (۱۳) نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t)] \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \\ &\quad + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t)] \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})[\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t)] \end{aligned}$$

حال اگر $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ برقرار شود، ورودی کنترلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_{con} = -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \quad (14)$$

اگر ورودی کنترلی بدست آمده از تئوری مد لغزشی با ورودی کنترلی روش SDRE مقایسه شود، ملاحظه می‌شود که این دو رابطه دقیقاً یکسان هستند. در واقع با در نظر گرفتن سطح لغزشی فوق قانون کنترلی بدست آمد که نه تنها در برابر اغتشاشات مقاوم است بلکه دارای عملکردی بهینه نیز می‌باشد و به عبارتی یک قانون هدایت بهینه مد لغزشی خواهد بود.

حال با انتخاب تابع لیاپانوف $V = (1/2)\mathbf{s}^T\mathbf{s}$ قانون کنترلی طراحی می‌شود که متغیرهای سوئیچینگ در زمان محدود به سمت سطح لغزشی میل کنند و همواره روی آن باقی بمانند. یک شرط کافی برای این منظور $\dot{V} = \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{s}} < 0$ می‌باشد. برای این منظور قانون مد لغزشی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{con} + \mathbf{u}_{dis} \\ \mathbf{u}_{con} &= -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{u}_{dis} &= -[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]^{-1} \times [\eta + \gamma_0 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \\ &\quad + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x}\|] \text{sgn}(\mathbf{s}), \end{aligned} \quad (15)$$

که در رابطه فوق η یک ضریب ثابت مثبت می‌باشد. همچنین در در این تحقیق محدودیت‌هایی نیز بر روی سیگنال کنترل اعمال می‌شود که با در

همیلتون-جاکوبی-بلمن^۱ مورد استفاده قرار گیرد. در واقع در روش SDRE هیچ نیازی به حل معادلات مشتقی مذکور نمی‌باشد و در نتیجه یکی از مهمترین مزایای این روش سادگی و کارایی آن می‌باشد. حال به ذکر چند نکته راجع به روش SDRE می‌پردازیم.

۲-۴ درجه های آزادی اضافی

برای سیستم اسکالر، پارامتریزه کردن SDC یا خطی سازی تعمیم یافته برای هر $x \neq 0$ منحصر به فرد می‌باشد ($a(x) = f(x)/x$)؛ ولی برای سیستمهای چند متغیره، می‌توان نشان داد که بی‌شمار نمایش SDC وجود دارد. منحصر به فرد نبودن نمایش SDC، یک انعطاف پذیری در طراحی بوجود می‌آورد که می‌توان به کمک آن عملکرد سیستم را بهبود داد و یا بین معیارهای بهینگی، پایداری، مقاوم بودن و دفع اغتشاش مصالحه انجام داد. همچنین با تغییر ماتریسهای $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ می‌توان بین تلاش کنترلی و همگرایی سریع خطا مصالحه انجام داد.

۳-۴ پیاده سازی زمان واقعی^۲

همانگونه که ذکر شد، روش SDRE یک روش کنترل فیدبک حالت کامل می‌باشد که به تمام حالتها نیاز دارد. بنابراین برای سیستمی که در آن تمام حالتها اندازه گیری نمی‌شوند، باید یک رویت گر برای تخمین حالتها طراحی و به کار گرفته شود.

در پیاده سازی واقعی نمونه برداری از حالتها در هر لحظه از زمان t_k برای سیستم پیوسته با زمان انجام می‌شود و سیگنال کنترل پیوسته با زمان (۱۳) محاسبه و به سیستم اعمال می‌شود. در واقع نیازی به گسسته سازی سیستم نمی‌باشد. مهمترین قسمت محاسباتی برای پیاده سازی روش SDRE به دست آوردن جواب حالت ماندگار معادله جبری ریکاتی در حالت زمان فعلی t_k می‌باشد. زیرا این معادله ماتریسی باید به روش عددی و تکراری حل شود که زمان بر خواهد بود. روشهای حل عددی نظیر تجزیه Schure، ماتریس همیلتونین و... برای حل این معادله استفاده می‌شود. البته برای بعضی سیستمهای خاص می‌توان با استفاده از یک بسته نرم افزاری سمبولیک، یک حل فرم بسته برای قانون کنترل بدست آورد.

اندازه بازه نمونه برداری $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$ نیز یکی از مسائل مهم عملی در حفظ پایداری روش SDRE در حین پیاده سازی می‌باشد. نشان داده شده است که باید تغییرات ماتریسهای \mathbf{P} ، \mathbf{A} و \mathbf{B} در هر بازه نمونه برداری نسبت به تغییرات ماتریس \mathbf{Q} خیلی کوچک باشد. بنابراین از لحاظ فیزیکی، با انتخاب هر چه بزرگتر ماتریس \mathbf{Q} ، پایداری سیستم افزایش می‌یابد. البته باید توجه داشت که افزایش زیاد ماتریس \mathbf{Q} نیز منجر به افزایش تلاش کنترلی خواهد شد. نکته دیگر در مورد مساله پیاده سازی این است که، برای سیستمهای با غیر خطی گری بالا محدودیتهای موجود بر روی نرخ نمونه برداری اجازه افزایش بیش از حد

¹ Hamilton-Jacobi-Bellman

² Real-time implementation

خط دید موشک به هدف نچرخد و ثابت بماند، در اینجا نیز می توان کاری کرد که زوایای چرخش خط دید ثابت بماند و نرخ این زوایا صفر شود. در واقع سرعت های نسبی جانبی را می توان به عنوان متغیرهای سوئیچینگ در نظر گرفت. بنابراین بردار سطح لغزشی به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T = [v_r + k \quad v_\theta \quad v_\phi]^T \quad (17)$$

بعد از انتخاب متغیرهای سوئیچینگ، تنها متغیر مجهول باقیمانده، ماتریس $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ می باشد. فرض کنید:

$$\mathbf{sw} = [sw_1 \quad sw_2 \quad \dots \quad sw_9]^T = [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] - \int_0^t [\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})]\mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (18)$$

با توجه به فرض فوق، می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{sw} = \mathbf{s} \quad (19)$$

همان طور که از رابطه فوق مشخص است، ماتریس $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ منحصر به فرد نیست و باید برای محاسبه آن شرط غیر تکین بودن حاصل ضرب $\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$ برقرار باشد. با در نظر گرفتن شرایط فوق، ماتریس $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{s_1 + c_1 sw_4}{sw_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ \frac{s_2 + c_2 sw_5}{sw_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 \\ \frac{s_3 + c_3 sw_6}{sw_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن c_1 ، c_2 و c_3 ثابت های دلخواهی هستند که باید مخالف صفر باشند. در این مقاله، از الگوریتم ژنتیک برای محاسبه این ضرایب استفاده می شود. تابع هزینه ای که الگوریتم ژنتیک باید برای محاسبه این ضرایب کمینه کند، همان تابع هزینه (۷) می باشد.

۶- شبیه سازی

در این بخش شبیه سازی های عددی متعددی انجام می شود و قابلیت قانون هدایت پیشنهادی از جنبه های مختلف بررسی می شود. شرایط پروازی مختلف و انواع مختلف شتاب هدف در نظر گرفته می شود و سپس کارایی قانون هدایت بهینه مد لغزشی طراحی شده با قانون هدایت متداول ناوبری تناسبی افزودنی یا APNG مقایسه می شود. اغتشاشات بیرونی در معادله (۳) توسط سه نوع شتاب هدف زیر تولید می شود تا مقاوم بودن قانون هدایت بررسی شود:

۱- شتاب هدف پله:

نظر گرفتن آنها، قانون هدایت بدست آمده (۱۵) به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\mathbf{u}_{sat} = \mathbf{Sat}(\mathbf{u}) = [\mathbf{Sat}(u_r) \quad \mathbf{Sat}(u_\theta) \quad \mathbf{Sat}(u_\phi)]^T \quad (16)$$

که در رابطه فوق تابع اشباع^۱ بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{Sat}(u_i(t)) = \begin{cases} u_{i,max} & \text{if } u_i > u_{i,max} \\ u_i & \text{if } u_{i,min} \leq u_i \leq u_{i,max}, i = r, \theta, \phi \\ u_{i,min} & \text{if } u_i < u_{i,min} \end{cases}$$

در واقع با وجود اشباع شتاب موشک، سیگنال کنترل معادله (۱۵) بعد از تولید توسط قانون هدایت به ورودی تابع اشباع داده می شود و سپس سیگنال حاصل یا \mathbf{u}_{sat} معادله (۱۶) به سیستم اعمال می شود. حال، با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف انتخاب شده، به اثبات پایداری نمایی آن می پردازیم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T (\mathbf{G}(\mathbf{x})[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t)] \\ &\quad + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \\ \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t)] \\ &\quad + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \\ \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) [\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t)] \\ &\quad + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \\ \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) [-\mathbf{B}(\mathbf{x})[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]^{-1}[\gamma_0 + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \\ &\quad + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x}\| \text{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t)]] \\ \dot{V} &= -\eta \|\mathbf{s}\| + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}\bar{\delta}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - [\gamma_0 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x}\|] \|\mathbf{s}\| \\ \dot{V} &\leq -\eta \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{s}\| \|\bar{\delta}(\mathbf{x}, t)\| - \\ &\quad [\gamma_0 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x}\|] \|\mathbf{s}\| \\ \dot{V} &\leq -\eta \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{s}\| (\gamma_0 + \gamma_1 \|\mathbf{x}\|) \\ &\quad - [\gamma_0 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| + \gamma_1 \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{x}\|] \|\mathbf{s}\| \\ \dot{V} &\leq -\eta \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\| (\gamma_0 + \gamma_1 \|\mathbf{x}\|) (\|\mathbf{s}\| - \|\mathbf{s}\|) \end{aligned}$$

که در آن $\|\mathbf{s}\|$ بیانگر نرم یک می باشد. با توجه به اینکه $\|\mathbf{s}\| < \|\mathbf{s}\|$ و با استفاده از رابطه آخر نتیجه می گیریم که $\dot{V} < 0$.

اکنون، متغیرهای سطح سوئیچینگ را انتخاب می کنیم. برای این منظور چند نکته باید مد نظر قرار داده شود. اول اینکه متغیر سوئیچینگ باید طوری انتخاب شود که فاصله نسبی موشک و هدف در نهایت صفر شود و برخورد صورت گیرد. انتخاب یکی از متغیرهای سوئیچینگ به صورت $s_1 = v_r + k$ ، تضمین می کند که فاصله نسبی موشک و هدف به صورت یک خط مستقیم و با شیب منفی به سمت صفر میل خواهد کرد. همچنین، همان گونه که در قانون هدایت تناسبی سعی می شود که

¹ Saturation

دست آمده اند. همچنین مقادیر γ_1 و γ_0 نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\gamma_1 = 10^{-3} \gamma_0 = 20$$

در تمام شبیه سازی ها محدودیت $\|u_i\| \leq 10g$ به روی ورودی اعمال می شود. فرض می شود دستور شتاب توسط یک میکرو کامپیوتر موجود در موشک ارسال می شود و زمان نمونه برداری برابر 10 میلی ثانیه است. مقادیر ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 به کمک الگوریتم ژنتیک به صورت زیر بدست می آیند:

$$c_1 = 0.453, c_2 = 0.356, c_3 = 0.862$$

در الگوریتم ژنتیک استفاده شده برای محاسبه ضرایب فوق، تعداد 30 کروموزوم به عنوان جمعیت اولیه در نظر گرفته شد. تعداد نسلها برابر 1000 فرض شد. برش تک نقطه ای، جهش گوسی و انتخاب چرخ رولت عملگرهای به کار رفته در الگوریتم ژنتیک می باشند. نرخ برش و جهش نیز به ترتیب برابر 0.07 و 0.059 در نظر گرفته شده است.

تلاش کنترلی: در اینجا ورودی کنترلی برای هر دو قانون APNG و OSMG مقایسه می شود. دستور شتاب برای هر دو قانون و برای هر دو حالت 1 و 2، به ترتیب در شکل های 2 و 3 آورده شده است. شکل 2 نتایج شبیه سازی را برای شرایط اولیه حالت اول، که در آن هدف به سمت موشک حرکت می کند، نشان می دهد. شکل 3 نیز نتایج شبیه سازی را برای شرایط اولیه حالت دوم، که در آن هدف از موشک دور می شود، نشان می دهد.

در هر دو حالت میزان سوخت مصرفی مقایسه شده است. مولفه u_r در قانون APNG، به این دلیل که دستور شتاب تولیدی عمود بر خط دید اعمال می شود، برابر صفر است؛ ولی این مولفه شتاب در OSMG مخالف صفر می باشد. با مشاهده شکلها و با در نظر گرفتن هر سه مولفه شتاب و محاسبه اندازه بردار شتاب در طول زمان، قانون هدایت OSMG میزان سوخت و انرژی تقریباً کمتری نسبت به قانون APNG مصرف می کند. این به این دلیل است که در معیار عملکرد قانون هدایت پیشنهادی، مصرف انرژی کنترلی لحاظ گردیده است ولی در قانون هدایت APNG در نظر گرفته نمی شود. همچنین برای اهداف دارای شتاب سینوسی و با دامنه های مختلف، دستور شتاب APNG به صورت نوسانی می باشد، در حالی که در قانون هدایت پیشنهادی دستور شتاب موشک، نوسانات ناشی از شتاب هدف را ندارد. شایان ذکر است، به علت استفاده از تابع اشباع¹ به جای تابع علامت² در قسمت ناپیوسته سیگنال کنترل قانون هدایت پیشنهادی، در مولفه های شتاب موشک پدیده وز وز حذف گردیده است.

خطای ردیابی، زمان نهایی و فاصله خطا: همان طور که می دانیم هدف از طراحی قانون هدایت در اینجا این است که قانونی

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\phi \end{bmatrix} = \lambda_T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \frac{-\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\dot{\theta} \cos \phi}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{step}$$

۲- شتاب هدف شیب:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\phi \end{bmatrix} = \lambda_T t \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \frac{-\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\dot{\theta} \cos \phi}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{ramp}$$

۳- شتاب هدف سینوسی:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\phi \end{bmatrix} = \lambda_T \sin(\Omega t) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \frac{-\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{\dot{\theta} \cos \phi}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi}} \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \mathbf{w}_{sin}$$

$$\mathbf{w}_{sin} = \sin(\Omega t) \mathbf{w}_{step}$$

که در روابط فوق λ_T بهره شتاب هدف می باشد و در شبیه سازی ها یک عدد تصادفی در محدوده صفر تا چهار برابر شتاب جاذبه زمین فرض می شود. برای بررسی کارایی قانون هدایت پیشنهادی دو حالت مختلف زیر در نظر گرفته می شود:

حالت اول: هدف از موشک دور می شود ($w_r > 0$)

$$r = 5 \text{ km}, \quad \theta = \pi/3, \quad \phi = \pi/3$$

$$v_r = -500 \text{ m/s}, \quad v_\theta = 200 \text{ m/s}, \quad v_\phi = 300 \text{ m/s}$$

حالت دوم: هدف به موشک نزدیک می شود ($w_r < 0$)

$$r = 10 \text{ km}, \quad \theta = \pi/3, \quad \phi = \pi/3$$

$$v_r = -1000 \text{ m/s}, \quad v_\theta = 200 \text{ m/s}, \quad v_\phi = 300 \text{ m/s}$$

ماتریسهای وزنی $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ به صورت ماتریسهای قطری زیر در نظر گرفته می شوند:

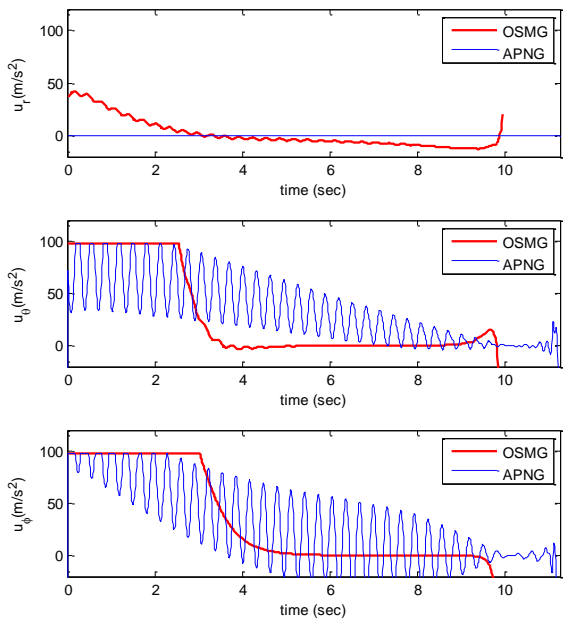
$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \text{diag}(10^{-5}, 1, 1, 10^{-10}, 1, 1, 10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10})$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \text{diag}(10, 10, 10)$$

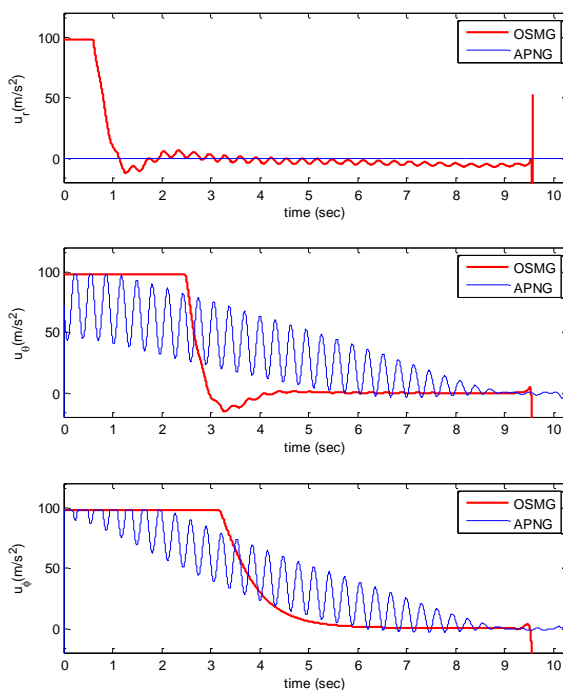
که در روابط فوق، diag ماتریس قطری است و درایه های قطر اصلی آن مشخص شده است. شایان ذکر است این ماتریسها با سعی و خطا به

¹ Saturation

² Sign



شکل ۱: تلاش کنترلی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت اول.



شکل ۲: تلاش کنترلی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت دوم.

بدست آید که نرخ زاویه خط دید در هر دو محور عرضی^۱ و طولی^۲، و همچنین فاصله نسبی، با وجود نامعینی‌های شتاب هدف به کمترین مقدار خود رسانده شوند. همان‌گونه که در شکل‌های ۴ تا ۷ مشاهده می‌شود، سرعت‌های نسبی جانبی و همچنین فاصله نسبی برای هر دو حالت در نظر گرفته شده، در صورت استفاده از قانون هدایت پیشنهادی، همگی سریعتر از قانون APNG به سمت صفر میل می‌کنند.

زمان نهایی پرواز برای هر دو قانون OSMG و APNG و برای حالت اول به ترتیب ۹.۹۶ و ۱۱.۲۷ ثانیه و برای حالت دوم ۹.۵۶ و ۱۰.۲۷ ثانیه می‌باشد. همچنین فاصله خطا (Miss distance) برای هر دو قانون و برای حالت اول به ترتیب ۰.۲۶ متر و ۰.۴۷ متر و برای حالت دوم ۰.۱۶ متر و ۰.۶۴ متر می‌باشد.

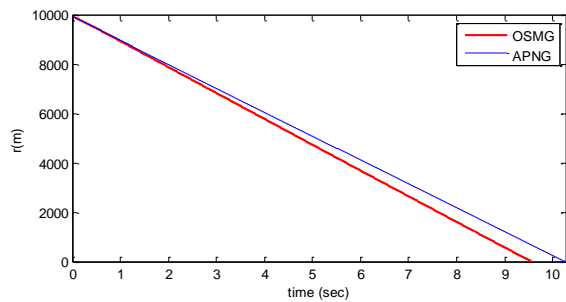
بنابراین قانون هدایت پیشنهادی نه تنها تا اندازه‌ای انرژی کنترلی کمتری مصرف می‌کند بلکه می‌تواند زمان نهایی پرواز را نیز کاهش دهد. البته، قابل ذکر است که ضریب شتاب هدف γ_T یک عدد تصادفی است و ممکن است مقدار آن در هر بار اجرای شبیه‌سازی تغییر یابد.

مقاوم بودن در برابر اغتشاشات: برای بررسی مقاوم بودن قانون

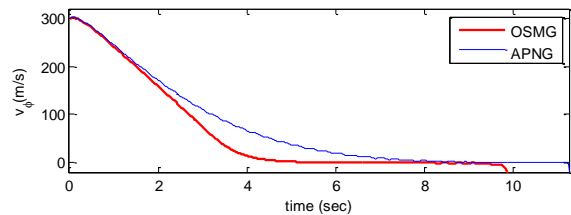
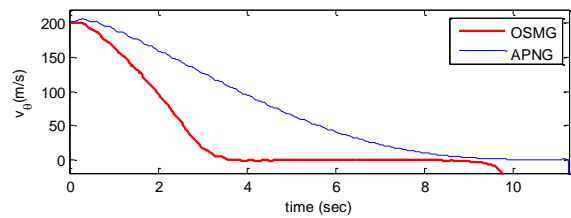
هدایت پیشنهادی، از سه نوع شتاب هدف مختلف در شبیه‌سازی‌ها استفاده می‌شود و سپس نتایج با قانون APNG مقایسه می‌گردد. همان‌طور که می‌دانیم کنترل مد لغزشی باعث می‌شود قانون کنترل در برابر اغتشاشات بیرونی یا تغییرات پارامترها حساسیت خیلی کمی داشته باشد. بنابراین انتظار می‌رود که قانون هدایت پیشنهادی، به لحاظ بهره بردن از کنترل مد لغزشی در برابر اغتشاشات مقاوم باشد. برای حالت اول و برای شتاب هدف از نوع پله و شیب، شبیه‌سازی انجام شده است. شکل‌های ۸ و ۹ منحنی فاصله نسبی موشک و هدف را به ترتیب برای شتاب هدف پله و شیب نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل‌ها ملاحظه می‌گردد، قانون APNG نمی‌تواند منجر به برخورد موشک و هدف شود ولی قانون هدایت پیشنهادی موفق به دفع اثر اغتشاش شتاب هدف می‌شود و باعث برخورد موشک به هدف می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که قانون OSMG در برابر اغتشاشات شتاب هدف، به مراتب از قانون APNG مقاوم‌تر است.

علاوه بر این، قانون APNG برای پیاده سازی به مقادیر لحظه‌ای شتاب هدف به صورت دقیق نیاز دارد، در صورتی که قانون هدایت پیشنهادی تنها به حداکثر دامنه شتاب هدف احتیاج دارد و این یکی دیگر از مزایای قانون هدایت پیشنهادی می‌باشد.

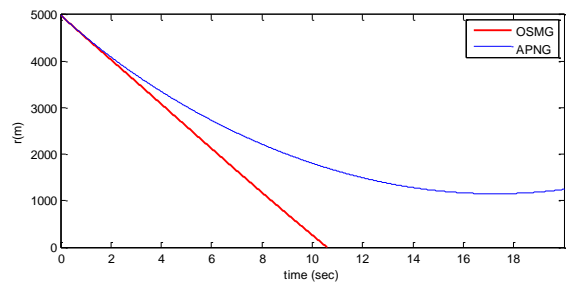
¹ Pitch
² Yaw



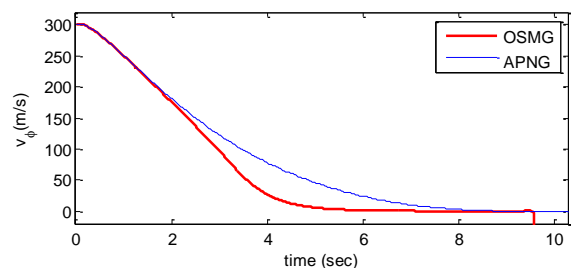
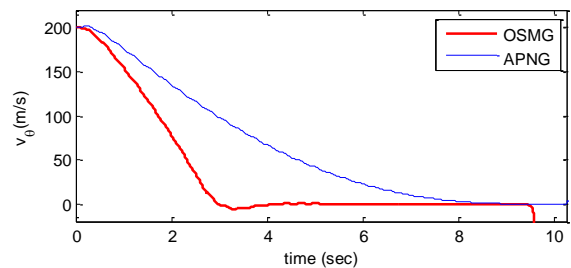
شکل ۶: فاصله نسبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت دوم.



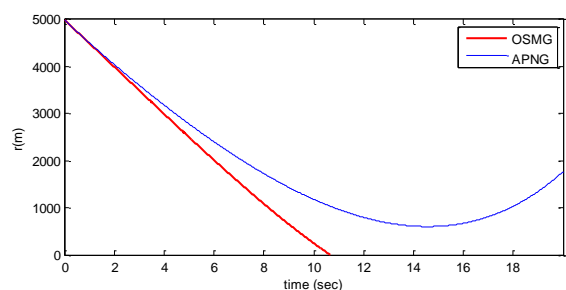
شکل ۳: سرعت‌های نسبی جانبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت اول.



شکل ۷: فاصله نسبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف پله و با شرایط اولیه حالت اول.



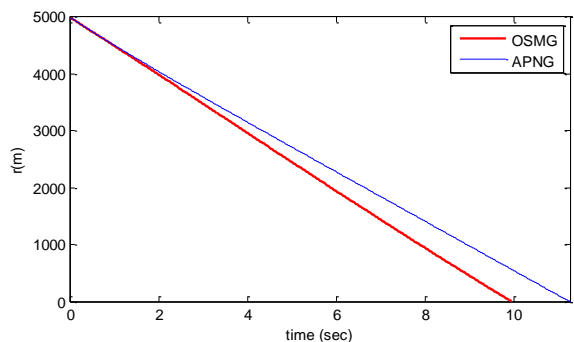
شکل ۴: سرعت‌های نسبی جانبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت دوم.



شکل ۸: فاصله نسبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف پله و با شرایط اولیه حالت اول.

۷- نتیجه گیری

یک قانون هدایت جدید برای موشک بر ضد اهداف دارای مانور بالا، با ترکیب روش‌های کنترل بهینه و مد لغزشی طراحی شده است. از روش کنترل بهینه SDR برای طراحی قانون هدایت و از الگوریتم ژنتیک برای تنظیم تعدادی از پارامترها استفاده شده است. دینامیک مرتبه اول برای حلقه کنترل و هدایت در معادلات در نظر گرفته شده است و سپس قانون هدایت در فضای سه بعدی استخراج شد. اثبات مقاوم بودن قانون هدایت پیشنهادی با استفاده از روش دوم لیپانوف ارائه شد. همچنین با در نظر گرفتن انواع شتاب هدف و برای شرایط پروازی مختلف، با انجام شبیه سازی‌های مختلف عددی، مقاوم بودن و موثر بودن قانون هدایت پیشنهادی نشان داده شد. در قانون هدایت پیشنهادی، به لحاظ بهره بردن از روش کنترل بهینه می‌توان مصالحه‌ای بین خطای ردیابی و سیگنال کنترل انجام داد و همچنین به لحاظ استفاده از کنترل مد



شکل ۵: فاصله نسبی برای هر دو قانون OSMG و APNG، برای شتاب هدف سینوسی و با شرایط اولیه حالت اول.

- [12] P. Pastrik, S. M. Seltzer, and M. E. Warren, "Guidance laws for short-range tactical missiles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 4, no. 2, pp. 98–108, 1981.
- [13] E. J. -J. Slotine and W. Li, "Applied nonlinear control," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991, ch. 7.
- [14] R. B. Fernandez and J. K. Hedrick, "Control of multivariable nonlinear systems by the sliding-mode method," *International Journal of Control*, vol. 46, no. 3, 1019–1040, 1987.
- [15] S. D. Brierley and R. Longchamp, "Application of sliding-mode control to air-air interception problem," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 306–325, 1990.
- [16] F.-K. Yeh, "Adaptive-sliding-mode guidance law design for missiles with thrust vector control and divert control system," *Journal of Control Theory & Applications, IET*, vol. 6, no. 4, pp. 552–559, 2012.
- [17] C.-H. Lee, T.-H. Kim, M.-J. Tahk, and K.-S. Kim, "Design of guidance law for passive homing missile using sliding mode control," *International Conference on Control Automation and Systems, Gyeonggi-do*, pp. 2380–2385, 2010.
- [18] C. Y. Kai, F. Li, L. Xiaogeng, and L. Ling, "Optimal sliding-mode terminal guidance law design of airborne boost-phase ballistic missile interception," *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 40-41, pp. 15–20, 2011.
- [19] Z. Hu, X. Tang, and Y. Wang, "A 3-dimensional robust guidance law with impact angle constraint," *Control and Decision Conference, Beijing, China*, pp. 999–1006, 2011.
- [20] M. Bahrami, B. Ebrahimi, and J. Roshanian, "Optimal sliding-mode guidance law for fixed-interval propulsive maneuvers," In *Proc. IEEE Conference on Control Application, Munich, Germany*, pp. 1014–1018, 2006.
- [21] B. Ebrahimi, M. Bahrami, and J. Roshanian, "Optimal sliding-mode guidance with terminal velocity constraint for fixed-interval propulsive maneuvers," *Acta Astronautica*, vol. 62, no. 10, pp. 556–562, 2008.
- [22] T. Çimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method," *Annual Reviews in Control*, vol. 34, pp. 32–51, 2010.
- [23] T. Çimen, "State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey," In *Proc. of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pp. 3761–3775, July 2008.
- لغزشی، قانون هدایت پیشنهادی در برابر اغتشاشات شتاب هدف مقاوم می‌باشد. همچنین به دلیل نیاز به مقدار حداکثر شتاب هدف، و نه مقدار لحظه ای دقیق آن، در عمل مشکلات مربوط به پیاده سازی را نخواهد داشت.

مراجع

- [1] P. Zarchan, "Tactical and strategic missile guidance," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 3rd ed., vol. 176, AIAA, New York, 1997.
- [2] R. G. Cottrell, "Optimal intercept guidance for short range tactical missiles," *AIAA Journal*, vol. 9, no. 7, 1414–1415, 1971.
- [3] E. J. Holder and V. B. Sylvester, "An analysis of modern versus classical homing guidance," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 4, pp. 599–606, 1990.
- [4] I. Rusnak, "Advanced guidance laws for acceleration constrained missile, randomly maneuvering target and noisy measurements," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 1, pp.456–464, 1996.
- [5] I. Rusnak and L. Meir, "Optimal guidance for high-order and acceleration constrained missile," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 3, pp. 589–596, 1991.
- [6] H. J. Cho, C. K. Ryoo, and M. J. Tahk, "Closed-form optimal guidance law for missiles of time-varying velocity," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 5, pp. 1017–1023, 1996.
- [7] I. Yaesh, and J. Z. Ben-Asher, "Optimal guidance with a single uncertain time lag," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 18, no. 5, pp. 981–988, 1995.
- [8] M. E. Hough, "Optimal guidance and nonlinear estimation for interception of decelerating targets," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 316–324, 1995.
- [9] M. E. Hough, "Optimal guidance and nonlinear estimation for interception of accelerating targets," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 5, pp. 961–968, 1995.
- [10] M. A. Massoumnia, "Optimal midcourse guidance law for fixed-interval propulsive maneuvers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 3, pp. 465–470, 1995.
- [11] J. Z. Ben-Asher and I. Yaesh, "Advances in missile guidance theory," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 180, AIAA, New York, 1998.