مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۵، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه ۳۴-۲۱

تخمین زیربهینه مدل تأخیردار ویروس HIV با استفاده از رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت با فاصله ضربه‌های متغیر با زمان: کاربرد در ورودی پیوسته و ضربه‌ای

نسرین کلامیان[۱]، حمید خالوزاده[۲]، سید موسی آیتی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، nkalamian@ee.kntu.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، h_khaloozadeh@kntu.ac.ir

[۳] استادیار، دانشکدهٔ مکانیک، گروه مکانیک، دانشگاه تهران، m.ayati@ut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۲ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۲۵

چکیده: ویروس نقص ایمنی بدن با حمله به لنفوسیت‌های CD4+T موجب کاهش توان مقابله سیستم ایمنی میزبان در برابر انواع بیماری‌ها می‌شود. در مدل‌سازی رفتار این بیماری، تعداد لنفوسیت‌های CD4+T که می‌تواند معیاری از وخامت بیماری باشد به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود. اما در عمل اندازه‌گیری منظم تعداد این لنفوسیت‌ها امکان‌پذیر نیست و آنها با فواصلی متغیر و بزرگتر از زمان نمونه‌برداری در دسترس هستند. در این مقاله رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت برای تخمین حالت‌های بیماری HIV طراحی شده است. در مدل‌سازی رفتار این بیماری از معادله دیفرانسیل غیرخطی تأخیردار با در نظر گرفتن تأخیر درون سلولی استفاده شده است. رویتگر پیشنهادی مبتنی بر نمایش شبه‌خطی‌سازی توسعه‌یافته بوده و قادر است تخمین پیوسته‌ای از حالت‌های بیماری ایدز فراهم نماید در حالی که تعداد لنفوسیت‌های CD4+T تنها در فاصله‌های زمانی متغیر با زمان معادل چندین برابر زمان نمونه‌برداری در دسترس هستند. رویتگر پیشنهادی برای تخمین حالت با ورودی‌های کنترلی پیوسته و ضربه‌ای ارائه شده است. پایداری مجانبی رویتگر پیشنهادی با استفاده از اصل مقایسه و شرط ناحیه-محدود تحت قضایای جدید و شرایط کافی خوش‌تعریف و با محافظه‌کاری کمتر تضمین شده است. نتایج عددی و شبیه‌سازی عملکرد مناسب روش پیشنهادی را با وجود تأخیر متغیر با زمان نشان داده است.

کلمات کلیدی: رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت، شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته، اصل مقایسه، شرط ناحیه-محدود، ویروس HIV.

Sub-optimal Estimation of HIV Time-delay Model using State-Dependent Impulsive Observer with Time-varying Impulse Interval: Application to Continuous-time and Impulsive Inputs

Nasrin Kalamian, Hamid Khaloozadeh, Seyed Moosa Ayati

Abstract: Human Immunodeficiency Virus (HIV) weakens the immune system in confronting various diseases by attacking to CD4+T cells. In modeling HIV behavior, the number of CD4+T cells is considered as the output. But, continuous-time measurement of these cells is not possible in practice, and the measurement is only available at variable intervals that are several times bigger than sampling time. In this paper, a state-dependent impulsive observer is designed for state estimation of HIV model. In order to model the HIV behavior, nonlinear time-delay differential equation is employed which considers the intracellular delay. The proposed observer is based on extended pseudo linearization technique. Even though, the number of CD4+T cells is available only in time-varying impulse intervals, this observer is capable of providing a continuous-time estimation of HIV states. It is also suitable for the continuous-time and impulsive control inputs. The asymptotic stability analysis of the suggested observer is guaranteed based on comparison principle and sector-bounded condition

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

under some new theorems with well-defined sufficient conditions and less conservatism. Simulation and numerical results confirmed the efficiency of the proposed method despite the variable time-delays.

Keywords: State-dependent impulsive observer, extended pseudo linearization, Comparison principle, sector-bounded condition, HIV.

۱- مقدمه

ویروس نقص ایمنی بدن[1] (HIV) ویروسی است که به سیستم ایمنی بدن بیمار حمله کرده و به تدریج موجب از بین رفتن قدرت ایمنی فرد میزبان در مقابل سایر بیماری‌ها و عفونت‌ها می‌شود. این ویروس پس از ورود به بدن میزبان خود، لنفوسیت‌های CD4+T را که زیرگروهی از سلول‌های سیستم ایمنی بدن انسان هستند آلوده کرده و از طریق آن‌ها خود را در سراسر بدن فرد گسترش می‌دهد. ویروس HIV با حمله کردن به این نوع سلول‌ها هم به طور مستقیم باعث کاهش تعداد آن‌ها شده و هم منجر به حمله سلول‌های دیگر سیستم ایمنی بدن به این سلول‌ها می‌شود که به طور غیرمستقیم از تعداد آنها می‌کاهد. در صورتی که تعداد این سلول‌ها تا حد مشخصی کاهش یابد باعث از کار افتادن دستگاه ایمنی بدن شده و در نهایت منجر به مرگ فرد بیمار می‌شود. برای مقابله با بیماری ایدز، دسته‌های مختلفی از داروها پیشنهاد شده که منجر به بالا رفتن کیفیت زندگی بیمار و افزایش طول عمر او می‌شوند [۲-۱]. مدل‌سازی‌های مختلفی برای نشان داده رفتار این بیماری انجام شده است که می‌توان آن‌ها را در دو دسته مدل‌های دیفرانسیلی معمولی و مدل‌های دیفرانسیلی تأخیردار جای داد. در [۲-۱]، از مدل‌های بدون تأخیر برای کنترل بیماری ایدز بهره برده شده است. در [۴-۳]، مدل‌های دیفرانسیلی با در نظر گرفتن تأخیر پاسخ سیستم ایمنی ارائه شده است. برای مدل‌سازی بیماری ایدز، یک مدل دیفرانسیلی تأخیردار با تأخیر درون سلولی معادل مدت زمان بین عفونت یک سلول و انتشار ذرات ویروسی در سطح سلول ارائه شده است [۵]. در [۶]، از معیار نایکوئیست برای تخمین طول تأخیر درون سلولی که پایداری مجانبی کلی را در حالت ماندگار حفظ می‌کند استفاده شده است. در [۷]، برای افزایش کارایی مدل ارائه شده، علاوه بر تأخیر درون سلولی، اثر مقاومت دارویی نیز لحاظ شده است. برای بیماری ایدز، در [۸]، یک مدل با دو تأخیر مورد بررسی قرار گرفته است. تأخیر اول، تأخیر زمانی بین ورود ویروس به سلول و تولید HIV پنهانی و تأخیر دوم مدت زمان بین عفونت سلولی و تولید ویروس است. در [۹]، نیز یک مدل تأخیردار با سه تأخیر درون سلولی ارائه شده است. در [۱۰]، برای افزایش کارایی مدل، دو تأخیر پاسخ سیستم ایمنی و درون سلولی در نظر گرفته شده است. کنترل، ردیابی و تخمین معادله ریکاتی وابسته به حالت توسعه‌یافته[2] (ESDRE) مبتنی بر نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته[3] نیز برای مدل تأخیردار ویروس HIV ارائه شده است [۱۲-۱۱].

در اکثر مدل‌های بیولوژیکی مانند بیماری ایدز، خروجی‌های سیستم به صورت پیوسته و یا گسسته در زمان با زمان‌های نمونه‌برداری منظم در دسترس نیستند. به طور معمول در مدل‌های ارائه شده، تعداد سلول‌های CD4+T که می‌تواند معیاری از وخامت بیماری باشد به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود. اما در عمل اندازه‌گیری پیوسته تعداد این لنفوسیت‌ها امکان‌پذیر نیست؛ در واقع خروجی‌ها به جای هر نمونه، هر چندین نمونه یکبار در دسترس هستند و فاصله این نمونه‌ها نیز عموماً ثابت نیست. لذا پیاده‌سازی روش‌های کنترلی و تخمین پیوسته در زمان با ایراداتی مواجه خواهد شد. در این مقاله رویتگر ضربه‌ای[4] وابسته به حالت برای تخمین حالت‌های ویروس HIV با در نظر گرفتن تأخیر درون سلولی طراحی شده است. معادلات رویتگر با استفاده از نمایش شبه‌خطی‌سازی توسعه‌یافته و بدون خطی‌سازی و با حفظ ویژگی‌های غیرخطی سیستم نوشته شده است. همچنین در این روش، محدودیت‌های موجود بر روی تأخیر و مشتق آن تا حدود زیادی مرتفع می‌گردد. لذا این رویتگر برای مدل‌های دیگر بیماری ایدز با تأخیرهای چندگانه و انواع تأخیر قابل استفاده خواهد بود. در این مقاله، رویتگر پیشنهادی برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار با ورودی ضربه‌ای و غیرافاین در ورودی نیز ارائه شده است. همچنین پایداری رویتگر تحت شرط ناحیه-محدود[5] که حالت کلی‌تر شرط لیپشیتز است بررسی شده. در تحلیل پایداری رویتگر طراحی شده به جای استفاده از نظریه مرسوم لیاپانوف، از اصل مقایسه[6] و نتایج آن بهره برده که منجر به تولید شرایط کافی خوش‌تعریف و با محافظه‌کاری کمتر خواهد شد. این شرایط تحت نامساوی‌های خطی ماتریسی[7] (LMI) نوشته شده و همگی عملی و دارای جواب هستند. همچنین تحت قضیه پیشنهاد شده، حد بالای فاصله ضربه‌ها یا حداکثر فاصله خروجی‌های در دسترس ارائه می‌شود. نتایج عددی و شبیه‌سازی نشان‌دهنده کارایی رویتگر پیشنهادی این مقاله برای تخمین حالت‌های مدل ویروس HIV با وجود فاصله ضربه‌های متغیر با زمان، تأخیر ثابت و متغیر و محافظه‌کاری کمتر در تولید شرایط کافی و LMIهایی با ناحیه جواب بزرگتر است. در پژوهش‌های گذشته ساختار این رویتگر برای مدل یک سیستم غیرخطی تأخیردار بدون ورودی، با فاصله ضربه‌های ثابت، تأخیر ثابت و با استفاده از شرط لیپشیتز ارائه شده است [۲۲]. اثبات پایداری بر اساس نظریه مقادیر ویژه بوده و لذا راه‌کار مشخصی

[1] Human Immunodeficiency Virus
[2] Extended State-Dependent Riccati Equation
[3] Extended Pseudo-Linearization
[4] Impulsive Observer
[5] Sector-Bounded
[6] Comparison Principle
[7] Linear Matrix Inequality

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

برای حل شرایط کافی ارائه نشده است. رویتگر پیشنهادی این مقاله علاوه بر در نظر گرفتن ورودی‌های پیوسته، ضربه‌ای و نیز مدل‌هایی با ورودی‌های غیرافاین، فاصله ضربه‌های متغیر با زمان، تأخیر متغیر با زمان را مورد بررسی قرار داده است. همچنین از شرط ناحیه-محدود که حالت کلی‌تر شرط لیپشیتز است بهره برده شده.

ادامه مقاله به این صورت است. در بخش دوم، مدل تأخیردار بیماری ایدز ارائه می‌شود. در بخش سوم نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته ارائه و سپس طراحی رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت انجام خواهد شد. سپس نتایج شبیه‌سازی در بخش چهارم ارائه می‌شود. در نهایت بخش پنجم نیز به نتیجه‌گیری از این مقاله اختصاص دارد.

۲- مدل تأخیردار بیماری HIV

همانطورکه در مقدمه ذکر شد انواع مختلفی از مدل‌سازی‌ها برای بیماری ایدز ارائه شده است که از میان آن‌ها، مدل‌سازی‌های تأخیردار بهتر از مدل‌های بدون تأخیر می‌توانند بیانگر رفتار این بیماری باشند. لذا در این مقاله نیز یک مدل غیرخطی تأخیردار برای مدل‌سازی رفتار ویروس HIV در نظر گرفته شده است. این مدل به صورت زیر است [۶]:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = s - \bar{\alpha} T(t) + rT(t)\left(1 - \dfrac{T(t)+I(t)}{T_{max}}\right) \\ \qquad - k_1(1-n_r)T(t)V(t) \\ \dot{I}(t) = k_2(1-n_r)T(t-\tau)V(t-\tau) \\ \qquad + rI(t)\left(1 - \dfrac{T(t)+I(t)}{T_{max}}\right) - \beta I(t) \\ \dot{V}(t) = (1-n_p)N\beta I(t) - dV(t) \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن T، I و V به ترتیب تعداد سلول‌های CD4+T حساس، تعداد سلول‌های CD4+T آلوده و ذرات ویروس HIV عفونی هستند. S نشان‌دهنده نرخ تولید سلول‌های CD4+T جدید از پیش‌ماده در مغز استخوان و تیموس، $\bar{\alpha}$ نرخ مرگ طبیعی سلول‌های CD4+T سالم، r بیانگر حداکثر میزان تکثیر سلول‌های CD4+T و T_{max} حداکثر میزان تراکم سلول‌های CD4+T را در بدن نشان می‌دهد. اگر تعداد سلول‌ها به T_{max} رسیده باشد، این مقدار باید کاهش یابد. بنابراین محدودیت $\bar{\alpha}T_{max} > s$ اعمال شده است. همچنین سلول‌های CD4+T می‌توانند از طریق تکثیر سلول‌های CD4+T موجود تولید شوند. دو تابع $rT\left(1-(T+I)/T_{max}\right)$ و $rI\left(1-(T+I)/T_{max}\right)$ میزان تکثیر سلول‌های CD4+T سالم و آلوده را نشان می‌دهند. k_1 بیانگر میزان عفونی شدن سلول‌های CD4+T با ویروس HIV و k_2 نرخ فعال شدن سلول‌های CD4+T آلوده است به طوری که $0 \le k_2/k_1 \le 1$، نسبت سلول‌های CD4+T است که به سلول‌های آلوده فعال تبدیل می‌شوند. β نرخ مرگ سلول‌های CD4+T آلوده است که به علت بار ویروسی در سلول‌های CD4+T مبتلا به HIV، مفروض است $\beta \ge \bar{\alpha}$. ویروس‌های HIV توسط سلول‌های CD4+T آلوده تولید می‌شوند و فرض شده است که هر سلول CD4+T آلوده N ذره ویروس در تولید زندگی خود تولید می‌کند. $0 \le n_r < 1$ و $0 \le n_p < 1$ نیز معرف اثربخشی داروها هستند. n_p اثر داروی مهارکننده‌های پروتئاز (PI) را نشان می‌دهد که باعث می‌شوند سلول‌های آلوده، سلول‌های غیرعفونی با نرخ n_pN تولید کنند و n_r اثر داروی ترانس کریپتاز معکوس (RTI) را نشان می‌دهد که از تولید سلول‌های عفونی جلوگیری می‌کند. d نرخ از بین رفتن ذرات ویروس HIV و τ تأخیر زمانی بین زمان عفونی شدن اولیه سلول‌های CD4+T توسط ویروس HIV تا آزادسازی ویریون (ذره ویروسی کامل) جدید است. پارامترهای ذکر شده در این مدل همگی غیر منفی هستند.

۳- طراحی رویتگر ضربه‌ای

رویتگرهای ضربه‌ای تخمین‌گرهایی هستند که حالت‌های سیستم را تنها با تعداد نمونه‌های محدودی از خروجی تخمین می‌زنند. خروجی اندازه‌گیری شده تنها در زمان‌های ضربه در دسترس است که این زمان‌ها بزرگتر از زمان نمونه‌برداری بوده و می‌توانند چندین برابر آن باشند. همچنین استفاده از این رویتگرها موجب کاهش انتقال اطلاعات بین سیستم و رویتگر شده و در نتیجه پهنای باند کانال انتقال اشغال نشده و هزینه انتقال نیز کاهش می‌یابد [۱۳]. طراحی رویتگر ضربه‌ای برای سیستم‌های خطی با دیدگاه لیاپانوف مرسوم به منظور تنظیم گلیسمی/انسولین برای بیماران دیابتی نوع اول انجام شده است [۱۴]. این نوع رویتگرها برای دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی که از دو بخش خطی و یک عبارت غیرخطی با شرط لیپشیتز طراحی و پایداری آن با نگرش لیاپانوف مرسوم بررسی شده است [۱۶-۱۵]. طراحی رویتگر ضربه‌ای تطبیقی برای دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان متشکل از بخش‌های مجزای خطی و غیرخطی با تحلیل پایداری با استفاده از نظریه لیاپانوف مرسوم در [۱۷] انجام شده است. همچنین این نوع رویتگرها برای سیستم‌های خطی تأخیردار با تأخیر ثابت و تکه‌ای-ثابت در [۱۸] ارائه شده است. برای دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی تأخیردار که در [۱۹]، دارای چهار بخش مجزای خطی، غیرخطی، خطی تأخیردار و غیرخطی تأخیردار با محدودیت بر روی حد بالای تأخیر و مشتق آن، و در [۲۰]، شامل سه بخش جداگانه خطی، غیرخطی و خطی تأخیردار (تأخیر تنها در بخش خطی قرار داده شده) رویتگر ضربه‌ای با نظریه لیاپانوف مرسوم طراحی شده است. طراحی رویتگر ضربه‌ای و ضربه‌ای وابسته به حالت با استفاده از اصل مقایسه در [۲۱] برای دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی و در [۲۲]، با استفاده از مفهوم مقادیر ویژه با فاصله ضربه‌ها و تأخیر ثابت، با در نظر گرفتن شرط لیپشیتز برای توابع غیرخطی و بدون ارائه رهیافتی برای حل شرایط پایداری بدست آمده، انجام شده است. در تحلیل پایداری سیستم‌های ضربه‌ای نشان داده شده که منفی بودن مشتق تابع لیاپانوف همواره ضروری نیست این

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

مفهوم در قضیه و اصل سیستم مقایسه و نتایج حاصل از آن مطرح شده است. استفاده از این قضیه و نتایج آن به جای دیدگاه لیاپانوف مرسوم منجر به شرایط پایداری با محافظه‌کاری کمتر خواهد شد [۱۳].

۳-۱- اصل مقایسه

دینامیک سیستم ضربه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), & t \neq t_k \\ \Delta x(t) = x(t_k^+) - x(t_k) = f_I(x(t)), & t = t_k \end{cases} \quad (۲)$$

که در آن $x \in R^n$ بردار حالت و t_k زمان ضربه برای $k = 1,2,\ldots$ است به طوری که $0 < t_{k-1} < t_k$. بردار پرش‌های حالت $\Delta x(t_k)$ و f_I, f توابع غیرخطی و پیوسته در زمان با ابعاد مناسب هستند. سیستم مقایسه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{V}(t,x) = g(t,V(t,x)), & t \neq t_k \\ V(t_k^+, x(t_k^+)) = \psi_k(V(t_k, x(t_k))), & t = t_k \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن $V : R^+ \times R^n \to R^+$ و $g : R^+ \times R^+ \to R$ توابعی پیوسته در بین زمان‌های ضربه هستند و برای هر $x \in R^n$، $\lim_{(t,\bar{x}) \to (t_k^+, x)} V(t,\bar{x}) = V(t_k^+, x)$ و $\lim_{(t,v) \to (t_k^+, V)} g(t,v) = g(t_k^+, V)$ وجود دارند. همچنین V تابعی مشتق‌پذیر و به صورت محلی لیپشیتز است. تابع $\psi_k : R^+ \to R^+$ نیز تابعی غیر نزولی است و شرایط زیر برقرار هستند:

$$\begin{cases} D^+V(t,x) \leq g(t,V(t,x)), & t \neq t_k \\ V(t_k^+, x(t_k^+)) \leq \psi_k(V(t_k, x(t_k))), & t = t_k \end{cases} \quad (۴)$$

قابل ذکر است که به دلیل وجود ناپیوستگی‌های موجود در سیستم ضربه‌ای به هنگام وقوع ضربه‌ها، به جای مشتق معمولی از مشتق Dini (D^+V) استفاده شده است [۱۳].

قضیه ۱ [۱۳]: در سیستم (۲) $f(0) = 0$، $f_I(0) = 0$ و $g(t,0) = 0$ مفروض است بنابراین حل بدیهی سیستم (۲) و سیستم مقایسه برابرند. همچنین تمامی شرایط موجود در سیستم مقایسه و شرایط زیر برقرارند:

۱- برای $\rho > 0$، $V : R^+ \times S_\rho \to R^+$ به طوری که $S_\rho = \{x \in R^n \mid x < \rho\}$.

۲- وجود دارد $\rho_0 > 0$ به طوری که $x \in S_{\rho_0}$ به معنی $x + \Delta x \in S_{\rho_0}$ برای همه kها است.

۳- $b(x) \leq V(t,x) \leq a(x)$ روی $R^+ \times S_\rho$ به طوری که a و b توابعی پیوسته و مثبت، $a(0) = b(0) = 0$ و در x اکیداً افزایشی هستند.

در این صورت ویژگی‌های پایداری حل بدیهی سیستم مقایسه، ویژگی‌های پایداری حل بدیهی سیستم ضربه‌ای (۲) را نشان می‌دهد.

سیستم مقایسه یک سیستم ضربه‌ای اسکالر است. لذا با بهره‌گیری از اصل مقایسه، مطالعه پایداری سیستم ضربه‌ای چندمتغیره اصلی به یک معادله دیفرانسیل ضربه‌ای کاهش می‌یابد. از این قضیه نتیجه زیر حاصل شده است:

نتیجه ۱ [۱۳]: در صورتی که $g(t,V(t,x)) = \dot{\lambda}(t)V(t,x)$ به طوری که λ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است و $\psi_k(V(t_k, x(t_k))) = d_k V(t_k, x(t_k))$ در نظر گرفته شوند، مبدأ سیستم ضربه‌ای (۱) به صورت مجانبی پایدار است اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

۱) $\dot{\lambda}(t) \geq 0$

۲) $d_k \geq 0$ برای تمام kها

۳) $\lambda(t_k) - \lambda(t_{k-1}) + \ln(\gamma d_k) \leq 0$ به طوری که $\gamma > 1$

۳-۲- شبه‌خطی‌سازی توسعه‌یافته

در اکثر روش‌های ارائه شده در طراحی رویتگر ضربه‌ای برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار، تنها دسته خاصی از این نوع سیستم‌ها در نظر گرفته شده است. همچنین در طراحی رویتگرهای ضربه‌ای پیشین محدودیت‌هایی بر روی تأخیر و مشتق آن در نظر گرفته شده است که در مواردی بسیار محدودکننده هستند. در این مقاله از نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته برای طراحی رویتگر ضربه‌ای استفاده شده که این رویتگر را برای دسته وسیع‌تری از سیستم‌های غیرخطی تأخیردار قابل استفاده می‌سازد. این رویکرد برای انواع سیستم‌های تأخیردار مانند سیستم‌های دارای تأخیرهای چندگانه، سیستم‌های با تأخیر متغیر با زمان و یا سیستم‌های دارای تأخیر توزیع شده قابل استفاده است [۱۲-۱۱].

معادله سیستم غیرخطی تأخیردار با تأخیر در حالت‌ها به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), x(t-\tau_1(v)), \ldots x(t-\tau_m(v)), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (۵)$$

که در آن $x \in R^n$، $u \in R^q$ و $y \in R^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند. $\bar{f} : \overbrace{R^n \times R^n \times \cdots \times R^n}^{m+1} \times R^q \to R^n$ و $h : R^n \to R^p$ توابعی پیوسته و مشتق‌پذیرند. $\tau_1(v) < \cdots < \tau_m(v)$ مقادیر تأخیرها هستند که می‌توانند به زمان، حالت و یا هر دو وابسته باشند. $\bar{f}(0, x(t-\tau_1(v)), \ldots x(t-\tau_m(v)), 0) = 0$ مفروض است. در ادامه برای اختصار در نظر گرفته شده است: $(x_t) = (x(t), x(t-\tau_1(v)), \ldots x(t-\tau_m(v)))$.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

۳-۲-۱- سیستم‌های افاین در ورودی

معادله سیستم غیرخطی تأخیردار با تأخیر در حالت‌ها و افاین در ورودی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\dot{x}(t)=f(x_t)+B(x_t)u(t) \qquad (۶)$$

نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته برای سیستم با ورودی افاین به صورت زیر است [۱۲-۱۱]:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(x_t)x(t)+B(x_t)u(t)\\ y(t)=C(x(t))x(t)\end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $A:\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{m+1}\to R^{n\times n}$، $B:\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{m+1}\to R^{n\times q}$ و $C:R^n\to R^{p\times n}$ ماتریس‌های وابسته به حالت نامیده می‌شوند. قابل توجه است که در این نمایش تمام قسمت‌های تأخیردار در ماتریس‌های A و B قرار داده شده است و لذا روش‌های مورد استفاده در سیستم‌های خطی بدون تأخیر برای دینامیک‌های غیرخطی تأخیردار با حفظ تمام ویژگی‌های غیرخطی آن‌ها قابل توسعه است. شرط کافی برای وجود این نمایش ارائه شده و در صورت وجود آن، اگر تعداد حالت‌های سیستم بیش از یکی باشد به بی‌شمار فرم قابل نوشتن است. در صورتی که Ω زیرمجموعه محدود و بازی از R^n باشد که مبدأ را شامل شود و تابع f یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر باشد در این صورت به ازای هر $x_t\in\Omega$، نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته‌ای به صورت زیر وجود دارد:

$$A(x_t)=\int_0^1\left.\frac{\partial f(x_t)}{\partial x(t)}\right|_{x=\lambda x}d\lambda \qquad (۸)$$

که در آن λ متغیر مجازی است. برای نمایش ارائه شده، ماتریس رویت‌پذیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_O(x_t)=\left[C(x)\middle|C(x)A(x_t)\middle|\cdots\middle|C(x)\left(A(x_t)\right)^{n-1}\right]^T \qquad (۹)$$

نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته به صورت نقطه‌ای رویت‌پذیر است اگر ماتریس رویت‌پذیری بالا به ازای تمام $x_t\in\Omega$ همواره مرتبه کامل باشد [۱۱].

۳-۲-۲- سیستم‌های غیر افاین در ورودی

با توجه به ارائه نمایش شبه‌خطی برای سیستم‌های غیرخطی غیرافاین در ورودی [۲۳]، می‌توان این نمایش را برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار نیز بسط داد. معادله سیستم غیرخطی تأخیردار و غیرافاین در ورودی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\dot{x}(t)=f(x_t)+g(x_t,u(t)) \qquad (۱۰)$$

نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته برای این سیستم به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(x_t)x(t)+B(x_t,u)u(t)\\ y(t)=C(x(t))x(t)\end{cases} \qquad (۱۱)$$

که در آن $B:\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{m+1}\times R^q\to R^{n\times q}$. در صورتی که Ω زیرمجموعه محدود و بازی از R^n باشد که مبدأ را شامل شود و توابع f و g پیوسته و مشتق‌پذیر باشند در این صورت به ازای هر $x_t\in\Omega$، نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته‌ای به صورت زیر وجود دارد:

$$A(x_t)=\int_0^1\left.\frac{\partial f(x_t)}{\partial x(t)}\right|_{x=\lambda x}d\lambda$$
$$B(x_t,u)=\int_0^1\left.\frac{\partial g(x_t,u)}{\partial u(t)}\right|_{u=\bar{\lambda}u}d\bar{\lambda} \qquad (۱۲)$$

که در آن λ و $\bar{\lambda}$ متغیرهای مجازی هستند.

۳-۳- رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت

در این بخش طراحی رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار با ورودی‌های مختلف، فاصله ضربه‌ها و تأخیر متغیر با زمان و شرط ناحیه‌-محدود ارائه می‌شود.

۳-۳-۱- ورودی پیوسته در زمان

دینامیک سیستم غیرخطی تأخیردار با ورودی پیوسته در زمان و افاین به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x_t)+g(x_t)u(t)\\ y(t)=h(x(t))\end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن $f:\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{m+1}\to R^n$، $g:\overbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}^{m+1}\to R^{n\times q}$ و $h:R^n\to R^p$ توابع پیوسته هستند که $f\left(0,x(t-\tau_1(v)),\ldots x(t-\tau_m(v))\right)=0$ و $g\left(0,x(t-\tau_1(v)),\ldots x(t-\tau_m(v))\right)=0$. لذا $x=0$ حل بدیهی سیستم (۱۳) است. نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته این سیستم به صورت (۷) است. لم و فرایض زیر در نظر گرفته شده است.

فرض ۱: ماتریس‌های وابسته به حالت $A(x_t)$، $B(x_t)$ و $C(x)$ نسبت به x پیوسته هستند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

فرض ۲: سیستم (۷) به صورت نقطه‌ای رویت‌پذیر است به ازای همه $x_t \in \Omega$.

فرض ۳: اگر شرایط زیر برقرار باشند توابع غیرخطی $f(x_t)$، $g(x_t)u$ و $h(x_t)$ به ناحیه‌های $[R_1,R_2]$، $[Q_1,Q_2]$ و $[W_1,W_2]$ تعلق دارند [۲۴]:

$$\left(f(x_t)-f(\hat{x}_t)-R_1(x-\hat{x})\right)^T\left(f(x_t)-f(\hat{x}_t)-R_2(x-\hat{x})\right)\le 0 \qquad (۱۴)$$

$$\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u-Q_1(x-\hat{x})\right)^T\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u-Q_2(x-\hat{x})\right)\le 0 \qquad (۱۵)$$

$$\left(h(x)-h(\hat{x})-W_1(x-\hat{x})\right)^T\left(h(x)-h(\hat{x})-W_2(x-\hat{x})\right)\le 0 \qquad (۱۶)$$

به طوری‌که $R_1,R_2\in R^{n\times n}$، $Q_1,Q_2\in R^{n\times n}$ و $W_1,W_2\in R^{p\times n}$ ماتریس‌هایی ثابت و معلوم هستند. شرایط ناحیه-محدود را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت [۲۴]:

$$\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{R}_1 & \bar{R}_2\\ \bar{R}_2^T & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix}\le 0 \qquad (۱۷)$$

$$\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ h(x)-h(\hat{x})\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{W}_1 & \bar{W}_2\\ \bar{W}_2^T & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\hat{x} \\ h(x)-h(\hat{x})\end{bmatrix}\le 0 \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$\bar{R}_1=\frac{R_1^TR_2+R_2^TR_1}{2},\ \bar{R}_2=-\frac{R_1^T+R_2^T}{2} \qquad (۱۹)$$

$$\bar{W}_1=\frac{W_1^TW_2+W_2^TW_1}{2},\bar{W}_2=-\frac{W_1^T+W_2^T}{2} \qquad (۲۰)$$

لم ۱ [۲۵]: برای ماتریس‌های $N,M\in R^{n\times n}$ و بردارهای $a,b\in R^n$ و ثابت $\varepsilon>0$، نامساوی زیر برقرار است:

$$a^TN^TMb+b^TM^TNa\le \varepsilon b^Tb+\varepsilon^{-1}a^TN^TMM^TNa \qquad (۲۱)$$

رویتگر ضربه‌ای پیشنهادی برای سیستم (۱۳) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t)=A(\hat{x}_t)\hat{x}(t)+B(\hat{x}_t)u(t), & t\ne t_k\\ \hat{y}(t)=C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)\\ \Delta\hat{x}(t)=-F(\hat{x}_t)\left(y(t)-\hat{y}(t)\right), & t=t_k\end{cases} \qquad (۲۲)$$

که در آن $\Delta\hat{x},\hat{y},\hat{x}$ به ترتیب بردارهای حالت، خروجی و پرش‌های حالت تخمین زده شده هستند و $F(\hat{x}_t)$ ماتریس بهره پرش‌های حالت است که توسط قضیه پایداری رویتگر محاسبه می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنید فرض‌های ۱ تا ۳ برقرارند و اعداد ثابت $\alpha>0$، $\sigma>0$، $\gamma>1$ و $\varepsilon_i>0;i=1:3$ و ماتریس‌های ثابت $Q_3,Q_4\in R^{n\times n}$ وجود دارند به طوری که شرایط زیر ارضا شوند:

$$\begin{bmatrix}\Xi_i & \left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_i\\ \left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_i & -\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)I\end{bmatrix}\le 0;i=1,2 \qquad (۲۳)$$

$$\Xi_i=A^T(\hat{x}_t)P_i+P_iA(\hat{x}_t)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+Q_3-\alpha P_i \qquad (۲۴)$$

$$\begin{bmatrix}-\sigma P_1 & \left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right)^T\\ \left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right) & -\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)P_2\end{bmatrix}\le 0 \qquad (۲۵)$$

$$\alpha\Delta_k+\ln(\gamma\sigma)\le 0 \qquad (۲۶)$$

$$A^T(\hat{x}_t)A(\hat{x}_t)\le\bar{R}_1,-A^T(\hat{x}_t)\le\bar{R}_2 \qquad (۲۷)$$

$$-Q_3\le Q_1^TQ_2;\ Q_1^T\le Q_4\le -Q_2 \qquad (۲۸)$$

$$C^T(\hat{x})C(\hat{x})\le\bar{W}_1;\ -C^T(\hat{x})\le\bar{W}_2 \qquad (۲۹)$$

به طوری که $\gamma\sigma<1$، P_1 و $P_2\le I$ ماتریس‌های مثبت معین متقارنی هستند و

$$P(t)=P_1+\rho(t)(P_2-P_1) \qquad (۳۰)$$

که $\rho(t)=(t_k-t)/\Delta_k$ در بازه $t\in(t_{k-1},t_k]$، $\Delta_k=t_k-t_{k-1}$، k امین فاصله بین ضربه‌ها و P ماتریسی مثبت معین متقارن و در بازه مذکور متناوب است به طوری که $P(t_k)=P_1$ و $P(t_k^+)=P_2$ و $F(\hat{x}_t)=P_2^{-1}\bar{F}(\hat{x}_t)$. در این صورت خطای تخمین حالت $e=x-\hat{x}$ رویتگر پیشنهادی (۲۲) به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود.

اثبات: با استفاده از معادلات سیستم و رویتگر، دینامیک و پرش خطای تخمین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t)&=A(x_t)x(t)-A(\hat{x}_t)\hat{x}(t)+\left(B(x_t)-B(\hat{x}_t)\right)u(t)\\&=A(\hat{x}_t)e(t)+\tilde{A}x(t)+\tilde{B}u(t),\ t\ne t_k\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

$$\begin{aligned}\Delta e(t)&=F(\hat{x}_t)\left(y(t)-\hat{y}(t)\right)\\&=F(\hat{x}_t)\left(C(\hat{x})e(t)+\tilde{C}x(t)\right),\ t=t_k\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

که در آن $\tilde{A}=A(x_t)-A(\hat{x}_t)$، $\tilde{B}=B(x_t)-B(\hat{x}_t)$ و $\tilde{C}=C(x)-C(\hat{x})$ تعریف شده‌اند. با توجه به تعریف پرش، خطای حالت در هنگام وقوع ضربه به صورت زیر است:

$$e(t_k^+)=\left(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right)e(t_k)+F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k) \qquad (۳۳)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

تابع لیاپانوف به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V(t,e)=e^T(t)P(t)e(t) \qquad (۳۴)$$

با توجه به دینامیک خطا و تعریف ماتریس P، مشتق Dini این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} D^+V(t,e)=&e^T\left(A^T(\hat{x}_t)P+PA(\hat{x}_t)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}\right)e \\ &+x^T\tilde{A}^TPe+e^TP\tilde{A}x+u^T\tilde{B}^TPe+e^TP\tilde{B}u \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

با استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود:

$$x^T\tilde{A}^TPe+e^TP\tilde{A}x\le\varepsilon_1x^T\tilde{A}^T\tilde{A}x+\varepsilon_1^{-1}e^TP^2e \qquad (۳۶)$$

$$u^T\tilde{B}^TPe+e^TP\tilde{B}u\le\varepsilon_2u^T\tilde{B}^T\tilde{B}u+\varepsilon_2^{-1}e^TP^2e \qquad (۳۷)$$

با توجه به شرایط (۲۷) و (۲۸) و فرض ۳ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} x^T\tilde{A}^T\tilde{A}x&=(f(x_t)-f(\hat{x}_t)-A(\hat{x}_t)e)^T(f(x_t)-f(\hat{x}_t)-A(\hat{x}_t)e) \\ &=\begin{bmatrix}e\\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A^T(\hat{x}_t)A(\hat{x}_t) & -A^T(\hat{x}_t)\\ -A(\hat{x}_t) & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix} \\ &\le\begin{bmatrix}e\\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{R}_1 & \bar{R}_2\\ \bar{R}_2^T & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ f(x_t)-f(\hat{x}_t)\end{bmatrix}\le 0 \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

$$\begin{aligned} u^T\tilde{B}^T\tilde{B}u&=\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\right)^T\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\right) \\ &\pm e^TQ_3e+\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\right)Q_4^Te-e^TQ_4\left(g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\right) \\ &=\begin{bmatrix}e\\ g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-Q_3 & -Q_4\\ Q_4^T & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\end{bmatrix} \\ &\quad+e^TQ_3e \\ &\le\begin{bmatrix}e\\ g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q_1^TQ_2 & -Q_1^T\\ -Q_2 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ g(x_t)u-g(\hat{x}_t)u\end{bmatrix} \\ &\quad+e^TQ_3e\le e^TQ_3e \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

بنابراین رابطه (۳۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$D^+V(t,e)\le e^T\begin{pmatrix}A^T(\hat{x}_t)P+PA(\hat{x}_t)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}\\ +\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P^2+Q_3\end{pmatrix}e \qquad (۴۰)$$

با جمع و تفریق کردن سمت راست رابطه بالا با عبارت $\alpha V(t,e)$ بدست می‌آید:

$$D^+V(t,e)\le e^T\Omega e+\alpha V(t,e) \qquad (۴۱)$$

که در آن

$$\Omega=A^T(\hat{x}_t)P+PA(\hat{x}_t)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P^2+Q_3-\alpha P \qquad (۴۲)$$

با توجه به تعریف ماتریس P می‌توان نوشت:

$$\Omega=\Omega_1+\rho\Omega_2+\rho^2\Omega_3$$

$$\begin{aligned} \Omega_1&=A^T(\hat{x}_t)P_1+P_1A(\hat{x}_t)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_1^2+Q_3-\alpha P_1 \\ \Omega_2&=A^T(\hat{x}_t)(P_2-P_1)+(P_2-P_1)A(\hat{x}_t) \\ &\quad+2\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_1(P_2-P_1)-\alpha(P_2-P_1) \\ \Omega_3&=\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)(P_2-P_1)^2 \end{aligned} \qquad (۴۳)$$

با توجه به $0\le\rho(t)\le 1$ و $\Omega_3\ge 0$ لذا با ارضای شرایط $\Omega_1\le 0$ و $\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3\le 0$ توسط LMIهای (۲۳)، $\Omega\le 0$ نتیجه می‌شود و در نهایت $D^+V(t,e)\le\alpha V(t,e)$ بدست می‌آید که شرط اول نتیجه قضیه مقایسه را برقرار می‌کند. با جایگذاری خطای تخمین حالت در زمان ضربه طبق رابطه (۳۳) و $P(t_k^+)=P_2$، تابع لیاپانوف برابر است با:

$$\begin{aligned} &V(t_k^+,e(t_k^+))= \\ &\quad e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \\ &\quad+(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^TP_2(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k)) \\ &\quad+e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k)) \\ &\quad+(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^TP_2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

با استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k)) \\ &\quad+(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^TP_2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \\ &\le\varepsilon_3(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^T(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k)) \\ &\quad+\varepsilon_3^{-1}e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2^2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

طبق شرط $P_2\le I$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &V(t_k^+,e(t_k^+)) \\ &\le(1+\varepsilon_3^{-1})e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \\ &\quad+(1+\varepsilon_3)(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^T(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k)) \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

با توجه به شرط (۲۹) و فرض ۳ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} &(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))^T(F(\hat{x}_t)\tilde{C}x(t_k))\le F(\hat{x}_t)^2(\tilde{C}x(t_k))^T(\tilde{C}x(t_k)) \\ &=F(\hat{x}_t)^2(h(x_t)-h(\hat{x}_t)-C(\hat{x}_t)e(t_k))^T(h(x_t)-h(\hat{x}_t)-C(\hat{x}_t)e(t_k)) \\ &=F(\hat{x}_t)^2\begin{bmatrix}e(t_k)\\ h(x_t)-h(\hat{x}_t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}C^T(\hat{x}_t)C(\hat{x}_t) & -C^T(\hat{x}_t)\\ -C(\hat{x}_t) & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t_k)\\ h(x_t)-h(\hat{x}_t)\end{bmatrix} \\ &\le F(\hat{x}_t)^2\begin{bmatrix}e(t_k)\\ h(x_t)-h(\hat{x}_t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\bar{W}_1 & \bar{W}_2\\ \bar{W}_2^T & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t_k)\\ h(x_t)-h(\hat{x}_t)\end{bmatrix}\le 0 \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

بنابراین رابطه (۴۶) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &V(t_k^+,e(t_k^+))\le \\ &(1+\varepsilon_3^{-1})e^T(t_k)(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))^TP_2(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x}))e(t_k) \end{aligned} \qquad (۴۸)$$

با برقراری شرط

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

$$\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)\le\sigma P_1 \qquad (۴۹)$$

که با استفاده از مکمل شور به صورت LMI (۲۵) نوشته می‌شود و $P\left(t_k\right)=P_1$، می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$V\left(t_k^+,e\left(t_k^+\right)\right)\le\sigma e^T\left(t_k\right)P_1e\left(t_k\right)=\sigma V\left(t_k,e\left(t_k\right)\right) \qquad (۵۰)$$

لذا شرط دوم نتیجه قضیه مقایسه نیز برقرار است. در نهایت شرط سوم نتیجه قضیه مقایسه نیز به صورت رابطه (۲۶) در نظر گرفته شده است. با توجه به $\alpha>0$ و $\Delta_k>0$ لذا برای برقراری این رابطه باید آرگومان تابع $\ln$ منفی باشد که با در نظر گرفتن شرط $\gamma\sigma<1$ در قضیه برای انتخاب این دو پارامتر، قابل ارضا است. ■

همچنین می‌توان بزرگترین فاصله بین ضربه‌ها را نیز به صورت رابطه زیر بدست آورد:

$$\Delta_k^{max}=\max_{k=1,2,\ldots}\left(t_k-t_{k-1}\right)=-\ln\left(\gamma\sigma\right)/\alpha \qquad (۵۱)$$

قابل ذکر است که بزرگترین فاصله بین ضربه‌ها یا به عبارتی بیشترین زمان ممکن بین دو خروجی در دسترس، به سه پارامتر طراحی وابسته است که برای تعیین آن‌ها باید مصالحه‌ای بین بزرگتر شدن بیشترین فاصله بین ضربه‌ها و کاهش محافظه‌کاری در حل LMIها انجام داد.

تبصره ۱: باید در نظر داشت که برای جلوگیری از وقوع پدیده Zeno، حداقل فاصله بین ضربه‌ها برابر با یک زمان نمونه‌برداری سیستم در نظر گرفته شده است تا اختلاف بین دو زمان ضربه متوالی همواره مثبت بوده و الگوریتم تخمین پیشنهادی از نظر سخت‌افزاری قابل پیاده‌سازی باشد.

قابل ذکر است که با توجه به وابسته به حالت بودن ماتریس‌های سیستم و در نتیجه نامساوی‌های خطی ماتریسی در قضیه ۲، باید آنها در هر زمان ضربه حل شوند تا بهره رویتگر وابسته به حالت در همان زمان بدست آید. الگوریتم زیر روال پیاده‌سازی رویتگر پیشنهادی را نشان می‌دهد.

الگوریتم ۱: روال زیر طراحی رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت را ارائه می‌دهد:

گام ۱: انتخاب پارامترهای طراحی با در نظر گرفتن معادلات (۲۶) و (۵۱) و مصالحه برای برقراری شرایط قضیه ۲.

گام ۲: محاسبه ماتریس‌های وابسته به حالت $A\left(\hat{x}_t\right)$، $B\left(\hat{x}_t\right)$ و $C\left(\hat{x}_t\right)$ و حل شرایط قضیه ۲ برای بدست آوردن ضرایب P_1، P_2 و F.

گام ۳: تکرار گام‌های ۱ و ۲ در هر زمان ضربه.

شرط ناحیه-محدود حالت کلی‌تری از شرط لیپشیتز است و در صورت استفاده از این شرط، رویتگر پیشنهادی را برای دسته وسیع‌تری از سیستم‌های غیرخطی تأخیردار می‌توان به کار برد. در قضیه بعد پایداری رویتگر پیشنهادی با وجود توابع غیرخطی که شرط لیپشیتز را ارضا می‌کنند بررسی می‌شود.

فرض ٤: شرایط لیپشیتز به صورت زیر برقرار هستند:

$$f\left(x_t\right)-f\left(\hat{x}_t\right)\le K_fe \qquad (۵۲)$$

$$g\left(x_t\right)u-g\left(\hat{x}_t\right)u\le K_ge \qquad (۵۳)$$

$$h\left(x\right)-h\left(\hat{x}\right)\le K_he \qquad (۵۴)$$

که در آن K_h,K_g,K_f اعداد ثابت مثبت هستند.

قضیه ۳: فرض کنید فرض‌های ۱، ۲ و ۴ برقرارند و عدد ثابت $K_F>0$ به طوری که شرایط زیر ارضا شوند:

$$\begin{bmatrix}\Xi_i & \left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_i\\ \left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_i & -\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)I\end{bmatrix}\le 0;i=1,2 \qquad (۵۵)$$

$$\Xi_i=A^T\left(\hat{x}_t\right)P_i+P_iA\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\left(2\varepsilon_1K_f^2+\varepsilon_2K_g^2\right)I +2\varepsilon_1A^T\left(\hat{x}_t\right)A\left(\hat{x}_t\right)-\alpha P_i \qquad (۵۶)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\Xi} & \left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T\\ \left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right) & -\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)P_2\end{bmatrix}\le 0 \qquad (۵۷)$$

$$\bar{\Xi}=2\left(1+\varepsilon_3\right)K_h^2K_F^2I+2\left(1+\varepsilon_3\right)K_F^2C^T\left(\hat{x}\right)C\left(\hat{x}\right)-\sigma P_1 \qquad (۵۸)$$

$$F\left(\hat{x}_t\right)\le K_F \qquad (۵۹)$$

و رابطه (۲۶) نیز برقرار و شرایط سایر پارامترها، با قضیه ۲ یکسان است. در این صورت خطای تخمین حالت رویتگر پیشنهادی (۲۲) به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود.

اثبات: با استفاده از فرض ۴ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}x^T\tilde{A}^T\tilde{A}x&=\tilde{A}x^2=f\left(x_t\right)-f\left(\hat{x}_t\right)-A\left(\hat{x}_t\right)e^2\\&\le 2K_f^2e^Te+2e^TA^T\left(\hat{x}_t\right)A\left(\hat{x}_t\right)e\end{aligned} \qquad (۶۰)$$

$$u^T\tilde{B}^T\tilde{B}u=\tilde{B}u^2=g\left(x_t\right)u-g\left(\hat{x}_t\right)u^2\le K_g^2e^Te \qquad (۶۱)$$

بنابراین رابطه (۴۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&D^+V\left(t,e\right)\\&\le e^T\begin{pmatrix}A^T\left(\hat{x}_t\right)P+PA\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}\\+\left(2\varepsilon_1K_f^2+\varepsilon_2K_g^2\right)I+\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P^2+2\varepsilon_1A^T\left(\hat{x}_t\right)A\left(\hat{x}_t\right)\end{pmatrix}e\end{aligned} \qquad (۶۲)$$

بنابراین در رابطه (۴۱) Ω برابر است با:

$$\Omega=A^T\left(\hat{x}_t\right)P+PA\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\left(2\varepsilon_1K_f^2+\varepsilon_2K_g^2\right)I +\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P^2+2\varepsilon_1A^T\left(\hat{x}_t\right)A\left(\hat{x}_t\right)-\alpha P \qquad (۶۳)$$

به طوری که Ω_1 به صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\Omega_1=A^T\left(\hat{x}_t\right)P_1+P_1A\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\left(2\varepsilon_1K_f^2+\varepsilon_2K_g^2\right)I +\left(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\right)P_1^1+2\varepsilon_1A^T\left(\hat{x}_t\right)A\left(\hat{x}_t\right)-\alpha P_1 \qquad (۶۴)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

که شرایط لازم به صورت LMIهای (۵۵) نوشته شده است. با توجه به شرط (۵۹) و فرض ۴ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}&\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)\\&\le F\left(\hat{x}_t\right)^2 h\left(x_t\right)-h\left(\hat{x}_t\right)-C\left(\hat{x}_t\right)e\left(t_k\right)^2\\&\le K_F^2\left(2K_h^2e^Te+2e^TC^T\left(\hat{x}\right)C\left(\hat{x}\right)e\right)\end{aligned}\qquad(۶۵)$$

بنابراین رابطه (۴۸) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&V\left(t_k^+,e\left(t_k^+\right)\right)\\&\le\left(1+\varepsilon_3^{-1}\right)e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&+2\left(1+\varepsilon_3\right)K_h^2K_F^2I+2\left(1+\varepsilon_3\right)K_F^2C^T\left(\hat{x}\right)C\left(\hat{x}\right)\end{aligned}\qquad(۶۶)$$

که شرط لازم به صورت LMI (۵۷) نوشته شده است. ■

۳-۳-۱- ورودی ضربه‌ای

در دو قضیه قبل پایداری رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت برای سیستم غیرخطی تأخیردار با ورودی پیوسته و افاین بررسی شد. در ادامه این رویتگر برای سیستم غیرخطی تأخیردار ضربه‌ای ارائه و پایداری آن تحلیل می‌شود. معادله سیستم غیرخطی تأخیردار ضربه‌ای افاین در ورودی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases}\dot{x}\left(t\right)=f\left(x_t\right), & t\ne t_k\\ y\left(t\right)=h\left(x\left(t\right)\right)\\ \Delta x\left(t\right)=g\left(x_t\right)u\left(t\right), & t=t_k\end{cases}\qquad(۶۷)$$

که شرایط توابع مانند سیستم غیرضربه‌ای قبل است. نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته این سیستم برابر است با:

$$\begin{cases}\dot{x}\left(t\right)=A\left(x_t\right)x\left(t\right), & t\ne t_k\\ y\left(t\right)=C\left(x\left(t\right)\right)x\left(t\right)\\ \Delta x\left(t\right)=B\left(x_t\right)u\left(t\right), & t=t_k\end{cases}\qquad(۶۸)$$

رویتگر ضربه‌ای پیشنهادی برای این سیستم به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}\left(t\right)=A\left(\hat{x}_t\right)\hat{x}\left(t\right), & t\ne t_k\\ \hat{y}\left(t\right)=C\left(\hat{x}\left(t\right)\right)\hat{x}\left(t\right)\\ \Delta\hat{x}\left(t\right)=B\left(\hat{x}_t\right)u\left(t\right)-F\left(\hat{x}_t\right)\left(y\left(t\right)-\hat{y}\left(t\right)\right), & t=t_k\end{cases}\qquad(۶۹)$$

قضیه ٤: فرض کنید فرض‌های ۱ تا ۳ برقرارند و اعداد ثابت و مثبت ε_4 و ε_5 وجود دارند به طوری که شرایط زیر ارضا شوند:

$$\begin{bmatrix}\Xi_i & \varepsilon_1^{-1}I\\ \varepsilon_1^{-1}I & -\varepsilon_1^{-1}I\end{bmatrix}\le 0; i=1,2\qquad(۷۰)$$

$$\Xi_i=A^T\left(\hat{x}_t\right)P_i+P_iA\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}-\alpha P_i\qquad(۷۱)$$

$$\begin{bmatrix}\left(1+\varepsilon_4+\varepsilon_5\right)Q_3-\sigma P_1 & \left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T\\ \left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right) & -\left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)I\end{bmatrix}\le 0\qquad(۷۲)$$

و روابط (۲۶) تا (۲۹) نیز برقرار و شرایط سایر پارامترها، با قضیه ۲ یکسان است. در این صورت خطای تخمین حالت پیشنهادی (۶۹) به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود.

اثبات: با استفاده از روابط معادله سیستم و رویتگر، دینامیک خطای تخمین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{e}\left(t\right)=A\left(\hat{x}_t\right)e\left(t\right)+\tilde{A}x\left(t\right),\ t\ne t_k\qquad(۷۳)$$

$$e\left(t_k^+\right)=\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)+F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)+\tilde{B}u\left(t\right),\ t=t_k\qquad(۷۴)$$

با تعریف تابع لیاپانوف مشابه قبل و استفاده از لم ۱، شرط (۲۷) و فرض ۳، مشتق Dini تابع لیاپانوف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D^+V\left(t,e\right)\le e^T\left(A^T\left(\hat{x}_t\right)P+PA\left(\hat{x}_t\right)+\frac{P_1-P_2}{\Delta_k}+\varepsilon_1^{-1}P^2\right)e\qquad(۷۵)$$

که به طریق مشابه منجر به LMIهای (۷۰) می‌شود. تابع لیاپانوف در زمان وقوع ضربه به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}&V\left(t_k^+,e\left(t_k^+\right)\right)\\&=e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&+\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)+\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T P_2\tilde{B}u\left(t_k\right)\\&+e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)\\&+\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&+e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\tilde{B}u\left(t_k\right)\\&+\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&+\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T P_2\tilde{B}u\left(t_k\right)+\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)\end{aligned}\qquad(۷۶)$$

با استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\tilde{B}u\left(t_k\right)\\&+\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&\le\varepsilon_4\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T\tilde{B}u\left(t_k\right)\\&+\varepsilon_4^{-1}e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2^2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T P_2\tilde{B}u\left(t_k\right)+\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T P_2\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)\\&\le\varepsilon_5\left(\tilde{B}u\left(t_k\right)\right)^T\tilde{B}u\left(t_k\right)\\&+\varepsilon_5^{-1}\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)^T P_2^2\left(F\left(\hat{x}_t\right)\tilde{C}x\left(t_k\right)\right)\end{aligned}\qquad(۷۷)$$

با استفاده از شرایط (۲۸)، (۲۹) و $P_2\le I$ و فرض ۳ رابطه (۷۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&V\left(t_k^+,e\left(t_k^+\right)\right)\le\\&\left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)e^T\left(t_k\right)\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)^T P_2\left(I+F\left(\hat{x}_t\right)C\left(\hat{x}\right)\right)e\left(t_k\right)\\&+\left(1+\varepsilon_4+\varepsilon_5\right)e^T\left(t_k\right)Q_3e\left(t_k\right)\end{aligned}\qquad(۷۸)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

که به روش مشابه به LMI (۷۲) منجر می‌شود. ■

در قضیه بعد پایداری رویتگر پیشنهادی برای سیستم غیرخطی تأخیردار ضربه‌ای با ورودی افاین با وجود توابع غیرخطی که شرط لیپشیتز را ارضا می‌کنند بررسی می‌شود.

قضیه ۵: فرض کنید فرض‌های ۱، ۲ و ۴ برقرارند و اعداد ثابت و مثبت ε_4 و ε_5 وجود دارند به طوری که شرایط زیر ارضا شوند:

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & \varepsilon_1^{-1}P_i \\ \varepsilon_1^{-1}P_i & -\varepsilon_1^{-1}I \end{bmatrix} \le 0; i = 1,2 \qquad (۷۹)$$

$$\begin{aligned} \Xi_i &= A^T(\hat{x}_t)P_i + P_iA(\hat{x}_t) + \frac{P_1 - P_2}{\Delta_k} \\ &+ 2\varepsilon_1 A^T(\hat{x}_t)A(\hat{x}_t) + 2\varepsilon_1 K_f^2 I - \alpha P_i \end{aligned} \qquad (۸۰)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right)^T \\ \left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)\left(P_2+\bar{F}(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right) & -\left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)P_2 \end{bmatrix} \le 0 \qquad (۸۱)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= \left(1+\varepsilon_4+\varepsilon_5\right)K_g^2 I \\ &+ 2\left(1+\varepsilon_3+\varepsilon_5^{-1}\right)K_F^2\left(K_h^2 I + C^T(\hat{x})C(\hat{x})\right) - \sigma P_1 \end{aligned} \qquad (۸۲)$$

و رابطه (۲۶) نیز برقرار و شرایط سایر پارامترها، با قضیه ۳ یکسان است. در این صورت خطای تخمین حالت رویتگر پیشنهادی (۶۹) به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود.

اثبات: با استفاده از لم ۱ و فرض ۴، مشتق Dini تابع لیاپانوف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D^+V(t,e) \le e^T \begin{pmatrix} A^T(\hat{x}_t)P + PA(\hat{x}_t) + \frac{P_1 - P_2}{\Delta_k} \\ +\varepsilon_1^{-1}P^2 + 2\varepsilon_1 K_f^2 I + 2\varepsilon_1 A^T(\hat{x}_t)A(\hat{x}_t) \end{pmatrix} e \qquad (۸۳)$$

که به طریق مشابه منجر به LMIهای (۷۹) می‌شود. تابع لیاپانوف در هنگام وقوع ضربه نیز با استفاده از فرض ۴ و شرط $P_2 \le I$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &V\left(t_k^+, e(t_k^+)\right) \le \\ &\left(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4^{-1}\right)e^T(t_k)\left(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right)^T P_2\left(I+F(\hat{x}_t)C(\hat{x})\right)e(t_k) \\ &+\left(1+\varepsilon_4+\varepsilon_5\right)K_g^2 I + 2\left(1+\varepsilon_3+\varepsilon_5^{-1}\right)K_F^2\left(K_h^2 I + C^T(\hat{x})C(\hat{x})\right) \end{aligned} \qquad (۸۴)$$

که شرط لازم به صورت LMI (۸۱) نوشته شده است.

تبصره ۲: رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت برای سیستم غیرخطی تأخیردار با ورودی پیوسته و غیرافاین در ورودی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}_t)\hat{x}(t) + B(\hat{x}_t, u)u(t), & t \ne t_k \\ \hat{y}(t) = C\left(\hat{x}(t)\right)\hat{x}(t) \\ \Delta\hat{x}(t) = -F(\hat{x}_t)\left(y(t) - \hat{y}(t)\right), & t = t_k \end{cases} \qquad (۸۵)$$

که پایداری و بهره رویتگر پیشنهادی مشابه قضیه ۲ و ۳ تحلیل و محاسبه می‌شود.

تبصره ۳: رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت برای سیستم غیرخطی تأخیردار با ورودی ضربه‌ای و غیرافاین در ورودی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(\hat{x}_t)\hat{x}(t), & t \ne t_k \\ \hat{y}(t) = C\left(\hat{x}(t)\right)\hat{x}(t) \\ \Delta\hat{x}(t) = B(\hat{x}_t, u)u(t) - F(\hat{x}_t)\left(y(t) - \hat{y}(t)\right), & t = t_k \end{cases} \qquad (۸۶)$$

که پایداری و بهره رویتگر پیشنهادی مشابه قضیه ۴ و ۵ تحلیل و محاسبه می‌شود.

٤- نتایج شبیه‌سازی

یکی از بی‌شمار نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته معادلات مدل بیماری ایدز که در بخش ۲ بیان شد و مقادیر پارامترهای آن در جدول ۱ آورده شده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & -r\frac{x_1(t)}{T_{max}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & \left(1-n_p\right)N\beta & -d \end{bmatrix} x(t) \qquad (۸۷)$$

که در آن $x = \left[T, I, V\right]^T$ بردار حالت سیستم است و

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{s}{x_1(t)} - \bar{\alpha} + r\left(1 - \frac{x_1(t)}{T_{max}}\right) - \frac{k_1(1-n_r)}{2}x_3(t) \\ a_{13} &= -\frac{k_1(1-n_r)}{2}x_1(t) \\ a_{21} &= \frac{k_2(1-n_r)x_1(t-\tau)x_3(t-\tau)}{x_1(t)} - r\frac{x_1(t)}{T_{max}} \\ a_{22} &= r\left(1 - \frac{x_2(t)}{T_{max}}\right) - \beta \end{aligned} \qquad (۸۸)$$

با توجه به پیوستگی ماتریس وابسته به حال (۸۷) نسبت به x، فرض ۱ برقرار است. همچنین فرض ۲ نیز برقرار است زیرا ماتریس رویت‌پذیری نمایش شبه‌خطی در نظر گرفته شده که در زیر آمده است به ازای تمام x ها رتبه کامل است و دترمینان آن برابر است با $\left|\Phi_O(x_t)\right| = a_{21}^2 a_{13}$. با توجه به تعریف مدل این بیماری، فرض ۴ نیز به ازای $k_f = 10$ برقرار است.

$$\Phi_O(x_t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{21}\left(a_{11}+a_{22}\right) & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 & a_{21}a_{13} \end{bmatrix} \qquad (۸۹)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

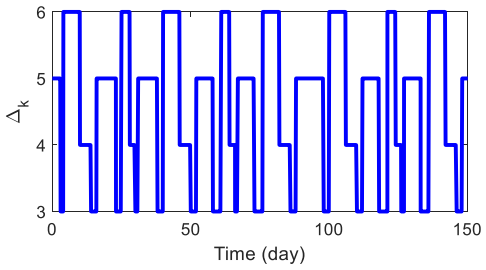
جدول ۱: پارامترهای مدل بیماری ایدز [۶]

پارامتر	مقدار	واحد	پارامتر	مقدار	واحد
s	10	cell day^{-1} mm^{-3}	β	0.26	day^{-1}
N	500	virions / cell	$\bar{\alpha}$	0.02	day^{-1}
r	0.03	day^{-1}mm^{-3}	d	2.4	day^{-1}
T_{max}	1500	mm^{-3}	τ	2	day
k_1	2.5×10^{-4}	virions day^{-1}mm^{-3}	n_r	0.6	
k_2	2×10^{-4}	virions day^{-1}mm^{-3}	n_p	0.7	

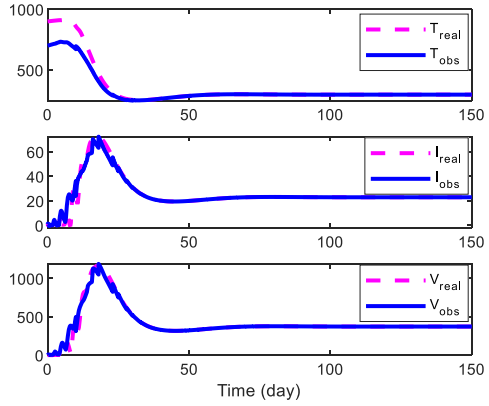
شرایط اولیه حالت‌های واقعی و تخمین آن‌ها، به صورت $x(t)=[900,0.1,0.1]^T$ و $\hat{x}(t)=[700,1,1]^T$ برای $t\in[-\tau,0]$ فرض شده است. پارامترهای طراحی به صورت $\sigma=0.5$، $\gamma=1.01$، $\alpha=0.1$، $\varepsilon_1=\varepsilon_2=5$ و $\varepsilon_3=10$ در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به این مقادیر بزرگترین فاصله بین ضربه‌ها به صورت $\Delta_k^{max}=6.832$ روز بدست می‌آید.

۴-۱- تأخیر ثابت

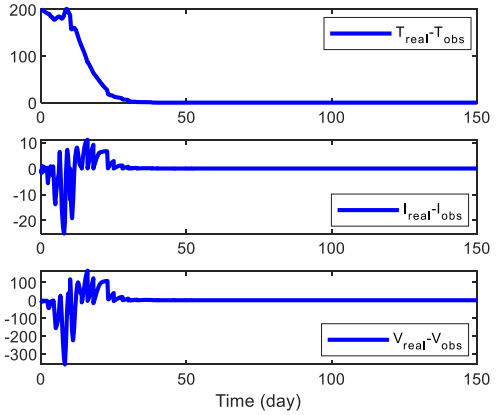
در این بخش از شبیه‌سازی تأخیر ثابت مطابق جدول ۱ و فاصله ضربه‌ها مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۲ و ۳ حالت‌های واقعی و تخمین زده شده و خطای تخمین حالت‌ها نشان داده شده است. مشاهده می‌شود هنگامی که فاصله ضربه‌ها کوچکتر و در نتیجه اطلاعات خروجی مدت زمان بیشتری در دسترس است تخمین حالت‌ها با سرعت بیشتری انجام شده است. با توجه به پرش حالت‌ها که در شکل ۴ رسم شده است، در هر زمان ضربه اطلاعات خروجی در دسترس رویتگر قرار گرفته و حالت‌های تخمین زده شده با پرش، مقدار خود را به مقدار واقعی نزدیکتر کرده‌اند. با گذشت زمان و رسیدن حالت‌ها به مقادیر واقعی از دامنه پرش‌ها نیز کاسته شده تا به صفر رسیده‌اند. در شکل ۵ بهره رویتگر که از حل LMIهای ارائه شده در هر زمان ضربه بدست آمده نشان می‌دهد که این بهره با توجه به روش پیشنهادی متغیر با زمان است و با همگرا شدن حالت‌ها به مقدار ثابتی می‌رسد.



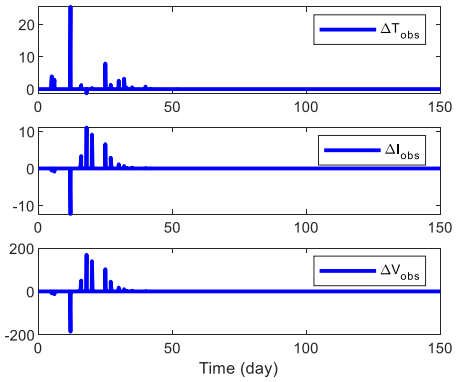
شکل ۱: فاصله ضربه‌های متغیر



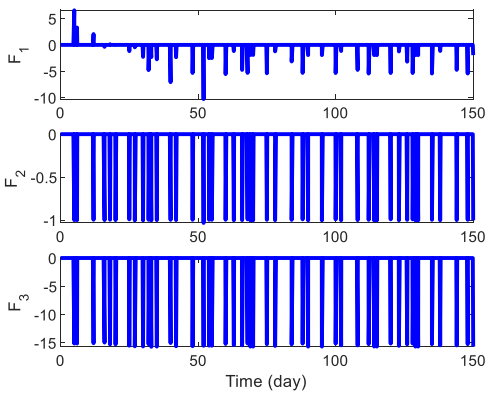
شکل ۲: حالت‌های واقعی و تخمین زده شده



شکل ۳: خطای تخمین حالت‌ها



شکل ۴: پرش‌های تخمین حالت‌ها

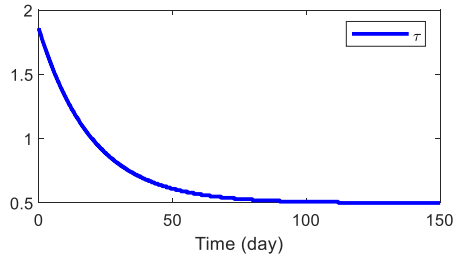


شکل ۵: بهره رویتگر

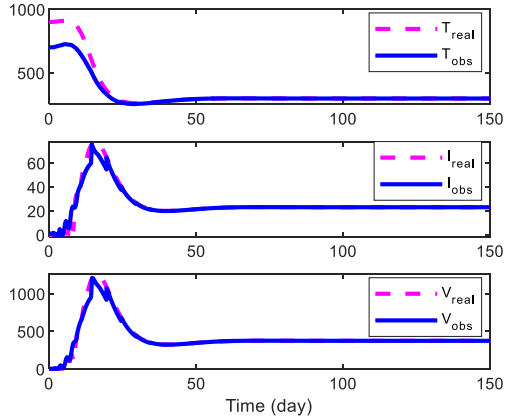
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

۴-۲- تأخیر متغیر با زمان

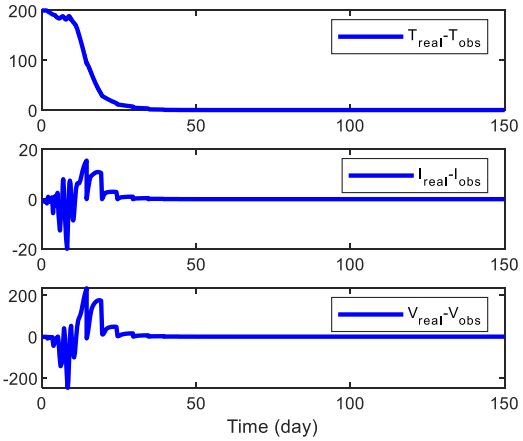
برای بررسی عملکرد رویتگر پیشنهادی نسبت به تأخیر متغیر با زمان، تأخیر با تغییر نمایی مطابق شکل ۶ در نظر گرفته شده است. بقیه پارامترها مطابق شبیه‌سازی اول است. در شکل‌های ۷ و ۸ حالت‌های واقعی و تخمین زده شده و خطای تخمین حالت‌ها رسم شده که نشان می‌دهند با کاهش تأخیر سرعت همگرایی حالت‌ها افزایش می‌یابد. پرش حالت‌ها و بهره رویتگر با وجود تأخیر نمایی نیز در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.



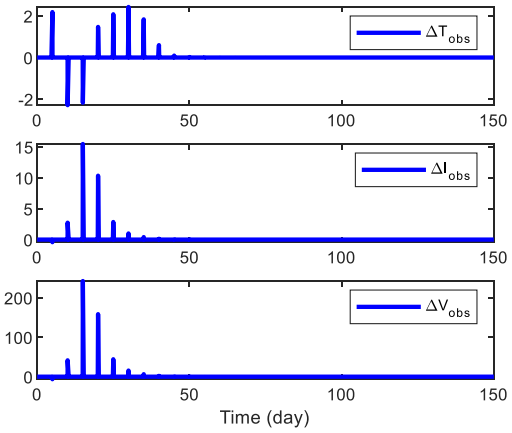
شکل ۶: تأخیر متغیر با زمان



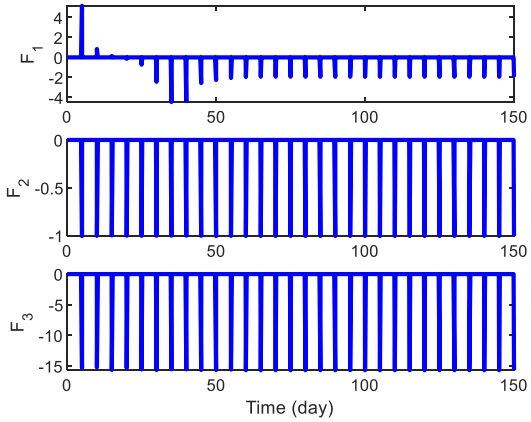
شکل ۷: حالت‌های واقعی و تخمین زده شده با تأخیر متغیر با زمان



شکل ۸: خطای تخمین حالت‌ها با تأخیر متغیر با زمان



شکل ۹: پرش‌های تخمین حالت‌ها با تأخیر متغیر با زمان



شکل ۱۰: بهره رویتگر با تأخیر متغیر با زمان

برای نشان دادن تأثیر فاصله ضربه‌ها و تأخیرهای متفاوت بر روی تخمین حالت‌ها توسط رویتگر پیشنهادی از معیار میانگین مربعات خطای نرمالیزه شده[1] (NMSE) که به صورت زیر محاسبه می‌شود بهره برده شده است.

$$\mathrm{NMSE}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{e_i(j)}{\max_j\left|e_i(j)\right|}\right)^2 \qquad (۹۰)$$

به طوری که e_i خطای تخمین iامین حالت است. در جدول ۲ مقادیر عددی این معیار به ازای فاصله ضربه‌ها و تأخیرهای مختلف دیده می‌شود. واضح است که با افزایش فاصله ضربه‌ها و در دسترس بودن خروجی در زمان کمتر مجموع مربعات خطای نرمالیزه شده افزایش یافته است. همچنین با افزایش این فاصله به بیش از مقدار حداکثر بدست آمده از قضیه پایدای رویتگر پیشنهادی، معیار NMSE افزایش قابل توجهی داشته که نشان‌دهنده کاهش عملکرد قابل ملاحظه‌ای است. با افزایش تأخیر نیز معیار NMSE افزایش یافته اما همگی مقادیر قابل قبولی هستند که نشان‌دهنده تخمین حالت با عملکرد مناسب رویتگر پیشنهادی است.

[1] Normalized Mean Square Error

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

جدول ۲: NMSE به ازای فاصله ضربه و تأخیرهای مختلف

τ \ Δ	8	6	5	4	3	2
0	0.7472	0.0656	0.0576	0.0478	0.0382	0.0371
0.5	1.3810	0.1066	0.0863	0.0750	0.0715	0.0635
1	1.996	0.1216	0.1064	0.0997	0.0903	0.0811
1.5	3.1407	0.1888	0.1772	0.1594	0.1450	0.1097
2	4.0182	0.3606	0.2508	0.2235	0.2124	0.1893
3	5.6739	0.4998	0.4106	0.3756	0.3679	0.2361

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای تخمین حالت‌های رفتار بیماری ایدز، رویتگر ضربه‌ای وابسته به حالت بر اساس نمایش شبه‌خطی سازی توسعه‌یافته طراحی شده است. در عمل خروجی‌های این مدل یعنی تعداد سلول‌های $CD4^+T$ در هر زمان نمونه‌برداری در دسترس نیستند؛ لذا رویتگر ضربه‌ای به صورت پیوسته حالت‌های سیستم را فقط با استفاده از خروجی‌های گسسته با فاصله‌های نمونه‌برداری متغیر تخمین می‌زند. با توجه به اینکه مدل غیرخطی تأخیردار نسبت به مدل‌های بدون تأخیر عملکرد بسیار بهتری در نشان دادن رفتار ویروس HIV دارد، استفاده از تکنیک شبه‌خطی سازی باعث حفظ تمامی ویژگی‌های غیرخطی مدل شده و کارایی تخمین را بهبود می‌دهد. همچنین با این تکنیک می‌توان رویتگر پیشنهادی را برای مدل‌های دیگر این بیماری شامل مدل‌هایی با چندین تأخیر ارائه کرد. در تحلیل پایداری این رویتگر که برای مدل‌های بیماری ایدز با انواع ورودی‌های پیوسته و ضربه‌ای و همچنین غیرافاین در ورودی ارائه شده است، با بهره‌گیری از اصل مقایسه برای سیستم‌های ضربه‌ای و نتایج حاصله از آن، قضیه‌هایی ارائه شده که همگرایی مجانبی خطای تخمین حالت‌ها را به صفر تضمین می‌کنند. این قضیه‌ها با بهره‌گیری از شرط ناحیه-محدود و اصل مقایسه، شرایط کافی مناسب و کمتر محافظه‌کارانه‌ای را برای بدست آوردن بهره رویتگر نسبت به دیدگاه مرسوم لیاپانوف ارائه می‌دهند. نتایج شبیه‌سازی و عددی عملکرد مناسب رویتگر پیشنهادی را با وجود فاصله ضربه‌های متغیر با زمان و تأخیر ثابت و متغیر تأیید می‌کنند.

مراجع

[1] H. Chang and A. Astolfi, "Control of HIV infection dynamics," IEEE Control Systems Magazine, vol. 28, no. 2, pp. 28-39, 2008.

[2] B. M. Adams, H. T. Banks, M. Davidian, H-D. Kwon, H. T. Tran, S. N. Wynee and E. S. Rosenberg, "HIV dynamics: modeling, data analysis, and optimal treatment protocols," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 184, no. 1, pp. 10-49, 2005.

[3] D. Liu and B. Wang, "A novel time delayed HIV/AIDS model with vaccination and antiretroviral therapy and its stability analysis," Applied Mathematical Modelling, vol. 37, no. 7, pp. 4608-4625, 2013.

[4] D. Huang, X. Zhang, Y. Guo and H. Wang, "Analysis of an HIV infection model with treatments and delayed immune response," Applied Mathematical Modelling, vol. 40, no. 4, pp. 1-9, 2015.

[5] R. V. Culshaw and S. Ruan, "A delay-differential equation model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells," Mathematical Biosciences, vol. 165, no. 1, pp. 27-39, 2000.

[6] Z. Hu, X. Liu, H. Wang and W. Ma, "Analysis of the dynamics of a delayed HIV pathogenesis model," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 2, pp. 461-476, 2010.

[7] Y. Wang, F. Brauer, J. Wu and J. M. Heffernan, "A delay-dependent model with HIV drug resistance during therapy," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 414, no. 2, pp. 514-531, 2014.

[8] H. Liu and J-F. Zhang, "Dynamics of two time delays differential equation model to HIV latent infection," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 514, pp. 384-395, 2019.

[9] R. Ouifki and G. Witten, "Stability analysis of a model for HIV infection with RTI and three intracellular delays," BioSystems, vol. 95, no. 1, pp. 1-6, 2009.

[10] S.K. Sahani and Yashi, "A delayed HIV infection model with apoptosis and viral loss," Journal of Biological Dynamics, vol. 12, no. 1, pp. 1012-1034, 2018.

[11] Y. Batmani and H. Khaloozadeh, "On the design of human immunodeficiency virus treatment based on a non-linear time-delay model," IET Systems Biology, vol. 8, no. 1, pp. 13-21, 2014.

[12] Y. Batmani and H. Khaloozadeh, "On the design of observer for nonlinear time-delay systems," Asian Journal of Control, vol. 16, no. 4, pp. 1191-1201, 2014.

[13] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, vol. 6, World Scientific, 1989.

[14] P. S. Rivadeneira, J. E. Sereno, N. Magdelaine and C. Moog, "Blood glycemia reconstruction from discrete measurements using an impulsive observers," IFAC PaperOnLine, vol. 50, no. 1, pp. 14723-14728, 2017.

[15] L. Etienne, L. Hetel, D. Efimov and M. Petreczky, "Observer synthesis under time-varying sampling for Lipschitz nonlinear systems," Automatica, vol. 85, pp. 433-440, 2017.

[16] L. Etienne, S. Di Gennaro and J-P Barbot, "Periodic event-triggered observation and control for nonlinear Lipschitz systems using impulsive

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]

observers,' Robust and Nonlinear Control, vol. 27, no. 18, pp. 4363-4380, 2017.

[17] J. Li, R. MA and G. M. Dimirovski, "adaptive impulsive observers for a class of switched nonlinear systems with unknown parameters," Asian Journal of Control, vol. 19, no. 3, pp. 1-11, 2017.

[18] Z. Kader, G. Zheng and J.P. Barbot, "Impulsive observer design for linear systems with delayed outputs," IFAC PaperOnLine, vol. 51, no. 1, pp. 1263-1268, 2017.

[19] W-H. Chen, D. X. Li and X. Lu, "Impulsive observers with variable update intervals for Lipschitz nonlinear time-delay systems," Systems Science, vol. 44, no. 10, pp. 1934-1947, 2013.

[20] X. Li and Z. Xiang, "Observer design of discrete-time impulsive switched nonlinear systems with time-varying delays," Applied Mathematics and Computation, vol. 229, pp. 327-339, 2014.

[21] M. Ayati, H. Khaloozadeh and X. Liu, "Synchronizing chaotic systems with parametric uncertainty via a novel adaptive impulsive observer," Asian Journal of Control, vol. 13, no. 6, pp. 809-817, 2011.

[22] N. Kalamian, H. Khaloozadeh and M. Ayati, "State-dependent impulsive observer design for nonlinear time-delay systems," International Conference on Control, Instrumentation and Automation, Iran, pp. 183-188, 2017.

[23] K. Azimi Roudkenary, H. Khaloozadeh and A. Khaki Sedigh, "SDRE control of non-affine systems," International Conference on Control, Instrumentation and Automation, Iran, pp. 239-244, 2016.

[24] Z. Wang, Y. Li and X. Liu, "H_∞ filtering for uncertain stochastic time-delay systems with sector-bounded nonlinearities," Automatica, vol. 44, no. 5, pp. 1268-1277, 2008.

[25] G. Zong, S. Xu and Y. Wu, "Robust H_∞ stabilization for uncertain switched impulsive control systems with state delays: an LMI approach," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 2, no. 4, pp. 1287-1300, 2008.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-17]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.1.6]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.21]