

## مرور و مقایسه سیستم‌های کوانتومی: مدل‌سازی، پایداری و کنترل پذیری

ابوالقاسم دائی چیان<sup>۱</sup>، فرید شیخ‌الاسلام<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، a.daiechian@ec.iut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، sheikh@cc.iut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۱۰/۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۱۸)

**چکیده:** امروزه در آستانه‌ی انقلابی در تکنولوژی قرار داریم. این انقلاب ورود تئوری کوانتوم به دنیای تکنولوژی است. یک کار حیاتی برای گسترش تکنولوژی کوانتومی، گسترش پایه‌های تئوریک کنترل سیستم‌های کوانتومی است. بنابراین نیاز به ورود مهندسی کنترل در این زمینه احساس می‌شود. در این مقاله مرور و مقایسه‌ای بر دینامیک و مدل‌های مورد استفاده برای کنترل سیستم‌های کوانتومی مانند BLM برای کنترل حلقه‌باز و MME، SME و LQSDE برای کنترل حلقه بسته، انجام شده است. بعلاوه کاربردهای هر مدل مطرح گردیده است. مروری بر شبکه‌های کوانتومی نیز صورت گرفته است که می‌تواند پلی برای ارتباط مهندسی کنترل با تئوری کوانتوم باشد. در شبکه‌های کوانتومی مدلی بصورت بلوک دیاگرام برای سیستم‌ها و اتصالات کوانتومی ارائه شده است. در ادامه، مفاهیم اساسی پایداری به کمک نسخه‌ی تصادفی از قضیه بهره کوچک و همچنین کنترل پذیری سیستم‌های کوانتومی که بیان‌گر امکان‌پذیری تبدیلات اتمی و مولکولی مخصوصاً در کنترل حلقه‌باز می‌باشد، بررسی گردیده است. در پایان جمع‌بندی و بحث در مورد مطالب مطرح شده انجام شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل سیستم کوانتومی، مدل سیستم کوانتومی، معادله اصلی اتفاقی، شبکه‌های کوانتومی، پایداری، کنترل پذیری

## Survey and Comparison of Quantum Systems: Modeling, Stability and Controllability

Abolghasem Daiechian, Farid Sheikholeslam

**Abstract:** Nowadays, we are in the beginning of a revolution in technology. The revolution is entrance of quantum theory to the world of technology. An essential task for the quantum technology is the development of the general principles of quantum control theory. Thus, it is required that control engineers enter to this topic. In this paper, a survey and comparison on the dynamics and models of quantum systems such as BLM for open loop control and MME, SME and LQSDE for close loop control are done. In addition, their applications are considered. Also, a survey on quantum network is done that link the control engineering to quantum theory. Quantum network theory analyzes the subsystems interconnections and total model. This paper followed by the concept of stability based on the quantum version of small gain theorem. Also, the concept of quantum systems controllability and investigation of controllability, which determines possibility of atomic or molecular transformation especially in open loop control, are considered. Finally, conclusions and discussion on the mentioned topics have been done.

**Keywords:** Quantum control, Quantum Systems Modeling, Stochastic Master Equation, Quantum Network, Stability, Controllability

## ۱- مقدمه

توانست در سال ۱۹۷۶ تئوری اندازه‌گیری پیوسته از یک سیستم کوانتومی (POVM) را توضیح دهد [۲۳].

با گذشت زمان تکنیک‌های آزمایشگاهی پیشرفت کردند و اندازه‌گیری‌های محدود کوانتومی روی سیستم‌ها انجام می‌شد. این آزمایش‌ها نشان از وجود تئوری‌هایی بیشتر از تئوری Von Neumann در اندازه‌گیری کوانتومی داشتند [۲۴-۲۶]. این تلاش‌ها در دهه‌ی ۱۹۹۰ منجر به ارائه معادله‌ی دینامیکی اتفاقی برای سیستم‌های کوانتومی گردید [۲۷]. Carmichael واژه‌ی مسیرهای کوانتومی را برای این روش ابداع کرد [۲۸]. این معادله با در نظر گرفتن برهمکنش بین سیستم و دستگاه اندازه‌گیری، امکان کنترل حلقه‌بسته در سیستم‌های کوانتومی را فراهم می‌کند [۲۳، ۲۹-۳۱].

روزبه‌روز بر اهمیت کنترل سیستم‌های کوانتومی افزوده می‌شود. در سال‌های اخیر شاهد ظهور اولین نمونه‌ها از تکنولوژی کوانتومی مانند اندازه‌گیری‌های کوانتومی و مخابرات کوانتومی بوده‌ایم. این تکنولوژی بر مبنای خواص منحصر بفرد کوانتومی مانند درهم‌تنیدگی بنا شده‌است و دارای بازده بسیار بالاتری نسبت به تکنولوژی کوانتومی است. صاحب‌نظران زمان فعلی را زمان رخداد دومین انقلاب کوانتومی می‌دانند که ورود تئوری کوانتوم به عرصه‌ی تکنولوژی داشته‌ی پایه‌های تئوریک قوی در کنترل سیستم‌های کوانتومی است. Mabuchi و Khaneja، یکی از اهداف اصلی در تئوری "کوانتوم کنترل" را بنا نهادن پایه‌های تئوریک و گسترش روش‌های سیستماتیک برای کنترل و دستکاری سیستم‌های کوانتومی بیان می‌کنند [۳۳]. تئوری کنترل سیستم‌های کوانتومی در سال‌های اخیر به سرعت پیشرفت کرده و امروزه کنترل پدیده‌های کوانتومی به هدفی دست‌یافتنی برای محققان شیمی و فیزیک کوانتومی تبدیل شده‌است. این تئوری موفقیت‌های قابل ملاحظه‌ای را در شیمی-فیزیک، کوانتوم اپتیک، فیزیک مولکولی و اتمی بدست آورده‌است. آینده‌پژوهی انجام شده توسط صاحب‌نظران، اهمیت و لزوم پرداختن به این موضوع را بیش از پیش آشکار می‌کند. در این مورد می‌توان به گزارش پانلی در مورد جهت‌های آینده‌ی علم کنترل، با حضور بزرگان کنترل و به ریاست Murray در سال ۲۰۰۳ [۳۴] و همچنین مقالات [۳۲، ۳۳] اشاره کرد.

با توجه به اهمیت موضوع، نیاز به ورود مهندسان کنترل در این زمینه بسیار ضروری و حیاتی می‌باشد. در این مقاله در ابتدا، اساس مکانیک کوانتومی و مفاهیم پایه‌ی تئوری کوانتومی در بخش ۲ مطرح شده‌است. دینامیک و مدل سیستم‌های کوانتومی در بخش ۳ مورد بررسی قرار گرفته، با یکدیگر مقایسه و کاربرد هر یک از مدل‌ها بیان شده‌است. پایداری سیستم‌های کوانتومی در بخش ۴ مطرح گردیده‌است. در بخش ۵، کنترل‌پذیری سیستم‌های کوانتومی که امکان‌پذیری تبدیلات اتمی، مولکولی و محاسبات کوانتومی را نشان می‌دهد، بررسی و تعاریف مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در پایان، بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۶ انجام شده‌است.

ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰ مقاله‌ای را با عنوان "درباره‌ی نظریه قانون توزیع انرژی طیف بهنجار" ارائه کرد که سرآغاز تحولی عظیم در فیزیک شد [۱]. حدود دو دهه بعد، شرویدینگر معادله‌ی موج حاکم بر رفتار تابع موج کوانتومی را ارائه داد و بدین ترتیب ساختار جدیدی به نام فیزیک کوانتوم بنا شد [۲-۴]. بعد از تولد فیزیک کوانتومی و آنالیز دقیق پدیده‌های کوانتومی، انسان، آرزوی کنترل سیستم‌های کوانتومی را در سر می‌پروراند. در دهه‌ی ۱۹۷۰، تحقیقات اولیه برای کنترل سیستم‌های کوانتومی آغاز شد و در اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ با تحقیقات گروهی از شیمیدانان صورت واقعی‌تری به خود گرفت. آن‌ها سعی کردند که واکنش‌های شیمیایی را به کمک میدان‌های مغناطیسی کنترل کنند [۵-۸]. هدف از کنترل، بالابردن احتمال یک واکنش خاص با تنظیم میدان مغناطیسی بود. کنترل‌های مطرح شده توسط شیمیدانان اغلب کنترل حلقه‌باز بودند [۹]. امکان‌پذیری آزمایش‌های شیمیایی در واکنش‌های بین میدان الکترومغناطیسی و سیستم‌های اتمی موجب تعمیم مفهوم کنترل‌پذیری برای سیستم‌های کوانتومی شد [۱۰-۱۶]. تحول زمانی سیستم‌های کوانتومی توسط عملگرهای یکانی بیان می‌شود و در نتیجه مسائل مربوط به کنترل حلقه‌باز، بصورت تعمیم نمایش‌های یکانی در گروه لی مطرح می‌شوند [۱۲، ۱۷]. مجموعه‌ی این تلاش‌ها منجر به گسترش تئوری کنترل حلقه‌باز سیستم‌های کوانتومی گردید.

مهندسان کنترل به دلیل مزایای موجود در کنترل حلقه‌بسته، همیشه علاقه‌مند به استفاده از آن بوده‌اند. اولین تحقیقات در زمینه‌ی کنترل حلقه‌بسته‌ی سیستم‌های کوانتومی در سیستم‌های اپتیک کوانتومی انجام شده‌است [۱۸-۲۰]. کنترل حلقه‌بسته نیازمند اندازه‌گیری خروجی سیستم است و اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی باعث برهمکنش بین دستگاه اندازه‌گیری و سیستم کوانتومی شده و در دینامیک سیستم تأثیر گذار است و می‌تواند باعث افزایش نامعینی در سیستم شود. به دلیل اثر اندازه‌گیری بر دینامیک سیستم‌های کوانتومی، کنترل حلقه‌باز در سیستم‌های کوانتومی نسبت به کنترل کلاسیک از اهمیت بالاتری برخوردار است. علیرغم مشکلاتی که اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی ایجاد می‌کند، Qi نشان داده‌است که همچنان استفاده از کنترل حلقه‌بسته نسبت به حلقه‌باز دارای ارجحیت است [۲۱، ۲۲].

یک اندازه‌گیری خاص بر روی سیستم کوانتومی معمولاً بصورت توزیع احتمال بیان می‌شود که چگونگی آن توسط حالت کوانتومی و مشاهده‌پذیری که اندازه‌گیری را توصیف می‌کند بیان می‌شود. تلاش‌های Dirac در بیان صورت کلی اندازه‌گیری کوانتومی (۱۹۳۰)، Neumann و Lüders (۱۹۵۱) در بیان پایه‌های ریاضی اندازه‌گیری تحت عنوان اصل تصویر (Projection postulate)، منجر به تئوری اندازه‌گیری تصویری شد که امروزه نیز استفاده می‌شود [۲۳]. بعد از کارهای Von Neumann، محققان فیزیک کوانتومی به فکر معرفی تئوری تعمیم‌یافته‌ای برای اندازه‌گیری‌های غیرآدمه‌آل کوانتومی افتادند که سرانجام Davis

## ۲- مرور مختصری بر مکانیک کوانتومی

به هر سیستم کوانتومی یک فضای هیلبرت  $\mathbb{H}$  نسبت داده می‌شود. اکنون می‌توان مفاهیم مکانیک کوانتومی را روی این فضا تعریف کرد.

## ۱-۲ حالت سیستم کوانتومی

حالت سیستم کوانتومی اطلاعاتی است که وضعیت سیستم را بطور کامل بیان می‌کند. هر حالت سیستم عضوی از فضای هیلبرت متناظر است و بصورت  $|\phi\rangle$  نوشته شده و آنرا کیت گویند. دوگان کیت، بصورت  $\langle\phi|$  نمایش داده شده و برا نام دارد. بنابراین ضرب داخلی  $\langle\phi_1|$  و  $|\phi_2\rangle$  بصورت  $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$  نوشته می‌شود. با توجه به این که  $c|\phi\rangle$  و  $|\phi\rangle$  از نظر فیزیکی تفاوتی ندارند، معمولاً حالت را نرمالیزه می‌کنند ( $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ ). پایه‌های فضای هیلبرت متناظر با سیستم را حالت خالص می‌نامند. در صورتی که اطلاعات سیستم را بصورت آماری داشته باشیم، آن‌گاه حالت سیستم بصورت عملگر خطی خودالحاقی روی  $\mathbb{H}$  تعریف می‌شود. این عملگر را عملگر چگالی نامیده و با  $\rho$  نمایش می‌دهند. عملگر  $\rho$  بصورت  $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$  تعریف شده و دارای خصوصیات  $\rho \geq 0$  و  $\text{Tr}[\rho] = 1$  است [۳۵].

## ۲-۲ مشاهده‌پذیرها

مقادیر فیزیکی مانند مکان، اندازه حرکت و غیره بصورت عملگرهای خطی خودالحاقی روی  $\mathbb{H}$  تعریف می‌شوند. برای سادگی مشاهده‌پذیر  $X$  را کراندار فرض می‌کنیم. عملگر  $X$  دارای تجزیه طیفی بصورت  $X = \sum_i \lambda_i P_i$  است که  $\lambda_i$ ها مقادیر ویژه و  $P_i$ ها عملگر تصویر بر فضای ویژه‌ی متناظر است و در  $I = \sum_i P_i$  صدق می‌کنند [۳۵].

## ۳-۲ اندازه‌گیری

نتیجه‌ی هر اندازه‌گیری از مشاهده‌پذیر  $X$  مقداری درون طیف آن خواهد بود. احتمال آن‌که نتیجه‌ی اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر  $X$  برای سیستمی در حالت  $|\phi\rangle$  مقدار  $\lambda_i$  باشد برابر است با  $p_i = \langle\phi|P_i|\phi\rangle$ . مقدار چشم‌داشتی اندازه‌گیری‌های انجام شده که همان مقدار کلاسیکی است، برابر است با  $\langle X \rangle = \langle\phi|X|\phi\rangle = \sum_i p_i \lambda_i$ . حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری، روی فضای ویژه‌ی متناظر با نتیجه‌ی اندازه‌گیری، تصویر می‌شود. اگر سیستم در حالت  $\rho$  باشد، داریم  $p_i = \text{Tr}[\rho P_i]$  و  $\langle X \rangle = \text{Tr}[\rho X]$ . در این صورت حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری برابر است با  $\rho' = (P_i \rho P_i) / \text{Tr}[\rho P_i]$ . به این رابطه اصل تصویر می‌گویند.

## ۴-۲ تحوّل زمانی

همیلتونین سیستم، مشاهده‌پذیر انرژی سیستم است. دینامیک یک سیستم کوانتومی توسط معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شود:

$$i\hbar|\dot{\phi}\rangle = H|\phi\rangle \quad (1)$$

که در آن  $\hbar$  ثابت کاهش‌یافته‌ی پلانک است. رابطه‌ی (۱) تحوّل زمانی حالت سیستم را بصورت  $|\phi(t)\rangle = U(t, \tau)|\phi(\tau)\rangle$  بیان می‌کند که در آن  $U(t, \tau) = \exp[-iH(t - \tau)]$  است. اگر حالت سیستم به کمک عملگر چگالی بیان شود داریم:  $\rho(t) = U(t, \tau)\rho(\tau)U^\dagger(t, \tau)$ . این معادله را تحوّل زمانی از دیدگاه شرودینگر می‌گویند.

مقدار چشم‌داشتی برای مشاهده‌پذیر  $X$  برابر است با  $\langle X(t) \rangle = \text{Tr}[\rho(t)X] = \text{Tr}[\rho(\tau)U^\dagger(t, \tau)XU(t, \tau)]$ . از این رابطه مشخص است که می‌توان تحوّل زمانی را به جای حالت سیستم، برای مشاهده‌پذیر فرض کرد:

$$X(t) = U^\dagger(t, \tau)XU(t, \tau) \quad (۲)$$

این معادله را تحوّل زمانی از دیدگاه هایزنبرگ می‌گویند که عموماً برای کنترل مناسب‌تر است. تفاوت اساسی بین مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی و کوانتومی آن است که مشاهده‌پذیرهای کوانتومی جابه‌جایی‌ناپذیر هستند. به مشاهده‌پذیرهای جابه‌جایی‌ناپذیر، مشاهده‌پذیرهای ناسازگار می‌گویند. جابه‌جایی‌ناپذیری نتیجه‌ای از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است.

## ۵-۲ سیستم‌های مرکب

سیستم مرکبی که از دو سیستم  $\mathbb{H}_A$  و  $\mathbb{H}_B$  تشکیل شده است، در فضای تانسوری  $\mathbb{K} = \mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$  قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر فرض کنید  $|\phi\rangle \in \mathbb{H}_A$  و  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}_B$  آن‌گاه نگاشتی را بصورت  $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \rightarrow (|\phi\rangle, |\psi\rangle)$  تعریف می‌کنیم که نگاشتی دوخطی بوده و دارای خصوصیات زیر است:

۱- اگر  $\{|\phi_i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$  و  $\{|\psi_j\rangle; j = 1, 2, \dots\}$  به ترتیب پایه‌های اورتونرمال برای  $\mathbb{H}_A$  و  $\mathbb{H}_B$  باشند، آن‌گاه  $\{|\phi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle; i, j = 1, 2, \dots\}$  پایه‌ای اورتونرمال برای  $\mathbb{K}$  است.

۲- اگر  $|\xi_1\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle$  و  $|\xi_2\rangle = |\phi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ ، آن‌گاه  $\langle\xi_1|\xi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\psi_1|\psi_2\rangle$ .

برهمکنش بین سیستم‌ها باید بصورت عملگرهایی در این فضا بررسی شود.

## ۳- مدل سیستم کوانتومی

## ۱-۳ مدل دوخطی (BLM: Bilinear Model)

دینامیک یک سیستم بسته‌ی کوانتومی توسط معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شود [۳۵، ۳۶]. منظور از سیستم بسته آن است که هیچ اثر خارجی به آن وارد نمی‌شود. برای یک سیستم  $N$ -بُعدی، فضای هیلبرت مختلط  $\mathbb{H}$  دارای  $N$ -بُعد خواهد بود و حالت‌های ویژه‌ی همیلتونین آزاد سیستم (یعنی  $\bar{D} = \{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^N$ ) تشکیل پایه‌ای متعامد برای  $\mathbb{H}$  می‌دهند. در این مدل از سیستم، کنترل با مجموعه‌ای از توابع  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  که به کمک

### ۲-۳ مدل معادله‌ی اصلی مارکوف (MME): Markovian Master Equation)

در بسیاری از کاربردهای عملی، باید سیستم را بصورت سیستم باز در نظر گرفت زیرا در برهمکنش با محیط قرار دارد. در این حالت معادله‌ی اصلی کوانتومی گزینه‌ی مناسبی برای بیان دینامیک سیستم است. معادلات اصلی کوانتومی با استفاده از نگاه Kraus در معادله‌ی شرودینگر بدست می‌آیند [۳۸]. ساده‌ترین حالت در صورتی است که یک تخمین مارکوف با کمترین همبستگی زمانی در نظر گرفته شود [۳۸]. اگر از ماتریس چگالی  $\rho(t)$  برای بیان حالت یک سیستم کوانتومی بسته استفاده شود، دینامیک سیستم توسط معادله‌ی کوانتومی لیوویل (در برخی مقالات مانند [۳۹] به عنوان معادله شرودینگر-وان‌نیومن ذکر شده است) بیان می‌شود [۳۶]:

$$i\dot{\rho}(t) = [H(t), \rho(t)] \quad (۹)$$

که در آن  $[H, \rho] = H\rho - \rho H$  عملگر جابه‌جایی است. اکنون برای حالت  $\rho(t)$  در یک سیستم کوانتومی باز  $N$ -بُعدی می‌توان معادله دینامیکی اصلی مارکوف (MME) را بصورت زیر نوشت [۳۸]:

$$\dot{\rho}(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{N^2-1} \alpha_{jk} \{ [F_j \rho(t), F_k^\dagger] + [F_j, \rho(t) F_k^\dagger] \} \quad (۱۰)$$

در این رابطه  $\{F_j\}_{j=0}^{N^2-1}$  پایه‌ای را برای فضای عملگرهای خطی محدود در فضای هیلبرت با  $F_0 = I$  بیان می‌کنند. ماتریس ضرایب  $A = (\alpha_{jk})$  نیز یک ماتریس مثبت نیمه معین می‌باشد. این مدل در فیدبک کوانتومی مارکوف استفاده می‌شود.

### ۳-۳ مدل معادله‌ی اصلی اتفاقی (SME: Stochastic master equation)

در کنترل فیدبک باید اندازه‌گیری پیوسته‌ای بر روی سیستم انجام شده و فیدبک شود. دینامیک سیستم کوانتومی که تحت اندازه‌گیری پیوسته‌ی  $X$  قرار گرفته است توسط معادله‌ی اتفاقی شرودینگر (SSE) بصورت زیر بیان می‌شود [۳۹]:

$$d|\psi\rangle = \{-\kappa(X - \langle X \rangle)^2 dt + \sqrt{2\kappa}(X - \langle X \rangle)dW\}|\psi(t)\rangle \quad (۱۱)$$

که در آن  $\kappa$  پارامتری متناسب با قدرت اندازه‌گیری،  $\langle X \rangle$  مقدار چشم‌داشتی عملگر  $X$ ،  $dW$  متغیر تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس  $dt$  است که رابطه‌ی زیر را با خروجی اندازه‌گیری یعنی  $y$  دارد:

$$dy = \langle X \rangle dt + \frac{dW}{\sqrt{8\kappa}} \quad (۱۲)$$

معادله‌ی SSE را می‌توان برای ماتریس چگالی احتمال نیز نوشت که به مدل معادله‌ی اصلی اتفاقی (SME) معروف است [۳۶، ۳۹]:

همیلتونین‌های مستقل از زمان  $H_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) با سیستم کوپل می‌شود، صورت می‌گیرد. بنابراین دینامیک سیستم کنترل‌شده بصورت زیر بیان می‌شود:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = [H_0 + \sum_k u_k(t) H_k] |\psi(t)\rangle \quad (۳)$$

کاربرد این مدل معمولاً به منظور یافتن زمان  $T > 0$  و کنترل‌های قابل قبول  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  است که سیستم را از حالت اولیه‌ی  $|\psi_0\rangle$  به حالت دلخواه  $|\psi_f\rangle$  ببرد [۳۶].

همیلتونین  $H = H_0 + \sum_k u_k(t) H_k$ ، تبدیل یکانی تحویل زمانی  $U(t)$  را تعریف می‌کند که انتقال از حالت خالص  $|\psi_0\rangle$  به حالت خالص  $|\psi(t)\rangle$  را انجام می‌دهد.

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle \quad (۴)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴) در (۳) داریم:

$$i\hbar \dot{U}(t) = [H_0 + \sum_k u_k(t) H_k] U(t), \quad U(0) = I \quad (۵)$$

کاربرد این مدل، یافتن تبدیل یکانی مناسب برای رسیدن به مسیر حالت مطلوب می‌باشد [۳۶].

طبق اصل برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی [۳۷]،  $|\psi(t)\rangle$  را می‌توان بصورت ترکیب خطی از حالت‌های ویژه در  $\bar{D}$ ، یعنی بصورت  $|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^N c_j(t) |\phi_j(t)\rangle$  نوشت و با جایگذاری آن در رابطه‌ی (۳) و با فرض  $C(t) = \{C_1(t), \dots, C_N(t)\}$  داریم:

$$i\hbar \dot{C}(t) = [H_0 + \sum_k u_k(t) H_k] C(t), \quad C_0 = (c_{0j})_{j=1}^N, \quad c_{0j} = \langle \phi_j | \psi_0 \rangle \quad (۶)$$

کاربرد این مدل، یافتن ضرایب مسیر حالت مطلوب می‌باشد [۳۶]. رابطه‌های (۳)، (۵) و (۶) همگی مدل دوخطی سیستم کوانتومی با بُعد محدود نامیده می‌شوند. این مدل‌ها بطور گسترده در کنترل سیستم‌های کوانتومی بسته مانند سیستم‌های مولکولی، شیمی-فیزیک و سیستم‌های اسپین در NMR و مخصوصاً به منظور کنترل حلقه‌باز استفاده می‌شوند. به عنوان نمونه آقایان D'Alessandro و Dahleh در سال ۲۰۰۱ به طراحی کنترل سیستم  $\frac{1}{2}$  اسپین با میدان مغناطیسی ثابت در راستای محور  $z$  به کمک میدان‌های مغناطیسی در راستای  $x$  و  $y$  پرداخته‌اند [۱۲]. بدین منظور ماتریس‌های پاوولی بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۷)$$

و سیستم تحت کنترل بصورت زیر درمی‌آید:

$$i\dot{U}(t) = [I_z + u_x(t) I_x + u_y(t) I_y] U(t), \quad U(0) = I \quad (۸)$$

که در آن  $u_x(t) \in \mathbb{R}$ ،  $u_y(t) \in \mathbb{R}$ ،  $I_x = (1/2)\sigma_x$ ،  $I_y = (1/2)\sigma_y$ ،  $I_z = (1/2)\sigma_z$

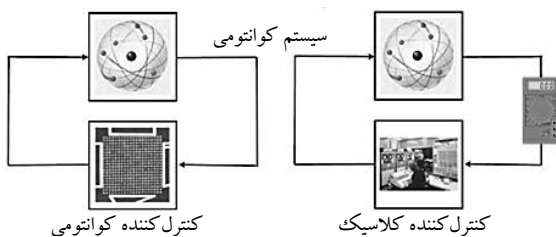
که ماتریس‌های  $A, B, C$  و  $D$  به ترتیب ماتریس‌های  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $\mathbb{R}^{n_y \times n_\omega}$ ،  $\mathbb{R}^{n_y \times n}$  و  $\mathbb{R}^{n_y \times n_\omega}$  متغیرهای  $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$  اولیه سیستم  $x(0) = x_0$  شامل عملگرهایی است که رابطه‌ی جابه‌جایی زیر را برآورده می‌کنند:

$$[x_j(0), x_k(0)] = 2i\theta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (16)$$

که در آن  $\theta_{jk}$  اجزاء ماتریس پادمتقارن  $\Theta$  می‌باشند. برای سادگی ماتریس  $\Theta$  را به شکل کانونیکال  $\Theta = \text{diag}(J, \dots, J)$  و یا به شکل degenerate canonical بصورت  $\Theta = \text{diag}(0_{n' \times n'}, J, \dots, J)$  در نظر می‌گیریم که  $0 < n' \leq n$ ، تعداد متغیرهای کلاسیک و  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  می‌باشد. بردار  $\omega$  بیان‌گر بردار ورودی است و بصورت  $d\omega(t) = \beta_\omega(t)dt + d\tilde{\omega}(t)$  در نظر گرفته می‌شود که  $\tilde{\omega}(t)$  بخش مربوط به نویز و  $\beta_\omega(t)$  یک پروسه‌ی خودالحاق و تطبیقی می‌باشد [۵۱]. نویز  $\tilde{\omega}(t)$  نویزی کوانتومی با قانون Itô بصورت  $d\tilde{\omega}(t)d\tilde{\omega}^T(t) = F_\omega dt$  می‌باشد که در آن  $F_\omega$  ماتریس هرمیتی و مثبت نیمه معین می‌باشد. معادله‌ی (۱۵) می‌تواند سیستم‌های کوانتومی مانند سیستم‌های خطی اپتیک کوانتومی را توصیف کند ولی لزوماً همیشه بیان‌کننده‌ی معادلات یک سیستم فیزیکی نیست و باید محدودیت‌های دیگری نیز روی آن اعمال شود تا بیان‌گر یک سیستم فیزیکی قابل تحقق باشد. جزئیات بیشتر در [۵۰] آورده شده است.

### ۳-۵ شبکه‌های کوانتومی

در مهندسی کنترل علاقه‌مندیم که هر سیستم را بصورت بلوک‌هایی که توسط سیگنال‌های ارتباطی به یکدیگر متصل شده‌اند بیان کنیم (شکل ۱).



شکل ۱: بیان بلوک دیاگرامی از سیستم

این روش بیان، امکان تحلیل و طراحی را برای سیستم‌های پیچیده فراهم می‌کند. در سال ۱۹۸۵، Collett و Gardiner تئوری میدان‌های ورودی-خروجی الکترومغناطیسی کوانتومی را مطرح کردند که با سیستم مکانیک کوانتومی در برهمکنش قرار می‌گیرد [۵۲]. این مدل برای مهندسی کنترل مناسب‌تر است زیرا سیگنال‌های ورودی و خروجی در رئوس شبکه (همان سیستم) به یکدیگر می‌رسند. در این روش، سیستم بصورت مکانیک کوانتومی در فضای هیلبرت  $\mathbb{H}$  و ورودی‌ها و خروجی‌ها بصورت کانال‌های کوانتومی از یک طرف بی‌نهایت، به فرم

$$d\rho = -i[H, \rho]dt - \kappa[X, [X, \rho]]dt + \sqrt{2\kappa}(X\rho + \rho X - 2(X\rho)dW) \quad (13)$$

مانند رابطه‌ی (۱۱)،  $\kappa$  پارامتری متناسب با قدرت اندازه‌گیری،  $dW$  نیز نموی وینر با میانگین صفر و واریانس  $dt$  است و رابطه‌ی زیر را با خروجی اندازه‌گیری یعنی  $y$  دارد:

$$dW = dy - 2\sqrt{\kappa}\text{tr}(X\rho)dt \quad (14)$$

در معادله‌ی (۱۳)، عبارت  $-i[H, \rho]dt$  ناشی از تأثیر همپلتونین و بقیه عبارات ناشی از انجام اندازه‌گیری پیوسته با قدرت  $\kappa$  در سیستم می‌باشد. حالت  $\rho$  در معادله‌ی فوق حالتی شرطی است زیرا در دینامیک آن از اندازه‌گیری استفاده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، انجام اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی بر روی مدل سیستم تأثیر می‌گذارد. لازم به ذکر است که معادله‌ی (۱۳)، یک معادله‌ی نوعی SME است و با توجه به فرآیندهای متفاوت در اندازه‌گیری، می‌توان معادلات دیگری نوشت. در دو مقاله‌ی [۲۱، ۲۲]، مدل سیستم برای چند حالت مختلف اندازه‌گیری، ذکر شده است.

معادله‌ی SME را می‌توان بصورت معادله‌ی فیلترینگ، از تئوری فیلترینگ کوانتومی بدست آورد. Belavkin از پایه‌گذاران تئوری فیلترینگ کوانتومی در [۴۰-۴۳] و van Handel و همکارانشان در [۴۴-۴۶] به این موضوع پرداخته‌اند. چگونگی استخراج معادله‌ی SME برای یک سیستم کوانتومی اپتیکی تحت اندازه‌گیری پیوسته در [۴۵] آورده شده است. در اغلب موارد به منظور حل SME از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در ساده‌ترین روش  $\Delta t$  بسیار کوچک و یک تولیدکننده‌ی اعداد تصادفی برای انتخاب  $\Delta W$  در هر مرحله در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از  $\Delta t$  و  $\Delta W$  مقدار  $\Delta\rho$  محاسبه شده و به مقدار  $\rho$  اضافه می‌شود. با این روش یک مسیر خاص تولید می‌شود. هر دنباله‌ای از  $\Delta W$  مسیر متفاوتی را ایجاد می‌کند و احتمال این که هر مسیر رخ دهد برابر با احتمال آن است که موکد اعداد تصادفی آن دنباله را تولید کند. جزئیات بیشتری برای حل عددی SME در مراجع [۴۷] و [۴۸] آمده است. در برخی موارد می‌توان SME را بصورت تحلیلی حل کرد. بدین منظور معادله‌ی اتفاقی خطی سازی شده و در آن از حساب Itô استفاده می‌شود [۳۹]. به عنوان نمونه به مراجع [۳۹، ۴۹] مراجعه کنید.

### ۳-۴ معادله‌ی دیفرانسیل خطی تصادفی کوانتومی (LQSDE: Linear Quantum Stochastic Differential Equation)

در این مدل از دیدگاه هایزنبرگ به سیستم نگاه شده است. دسته‌ی جالبی از سیستم‌های خطی تصادفی جابه‌جایی ناپذیر را می‌توان توسط معادله‌ی LQSDE زیر توصیف کرد [۵۰]:

$$\begin{aligned} dx(t) &= Ax(t) + Bd\omega(t); \quad x(0) = x_0 \\ dy(t) &= Cx(t) + Dd\omega(t) \end{aligned} \quad (15)$$

عملگر تحول زمانی برای سیستمی که با پارامترهای  $\mathbf{G} = (\mathbf{S}, \mathbf{L}, H)$  توصیف شده است، بصورت

$$dU(t) = \left\{ \text{Tr}[(\mathbf{S} - \mathbf{I})d\Lambda^T] + d\mathbf{A}^* \mathbf{L} - \mathbf{L}^* \mathbf{S} d\mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{L}^* \mathbf{L} dt - iH dt \right\} U(t) = dG(t)U(t) \quad (19)$$

و با شرط اولیه  $U(0) = I$  است.

اکنون می‌توان تحول زمانی عملگر  $X$  را بصورت  $X(t) = j_t(X) = XU^\dagger(t)U(t)$  بیان کرد که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند [۵۶]:

$$dX(t) = (L_{\mathbf{L}(t)}(X(t)) - i[X(t), H(t)])dt + d\mathbf{A}^*(t)\mathbf{S}^*(t)[X(t), \mathbf{L}(t)] + [\mathbf{L}^*(t), X(t)]\mathbf{S}(t)d\mathbf{A}(t) + \text{Tr}[(\mathbf{S}^*(t)X(t)\mathbf{S}(t) - X(t))d\Lambda^T(t)] \quad (20)$$

که در آن همه‌ی عملگرها با عملگر یکانی تحول زمانی تغییر می‌کنند، مثلاً  $\mathbf{L}(t) = j_t(\mathbf{L})$  و  $L_{\mathbf{L}}(X) = \frac{1}{2} \mathbf{L}^* [X, \mathbf{L}] \frac{1}{2} [\mathbf{L}^*, X] \mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} L_i^* [X, L_i] \frac{1}{2} [L_i^*, X] L_i \right)$

میدان‌های خروجی نیز با عملگر تحول زمانی تغییر می‌کنند:

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = U^\dagger(t)\mathbf{A}(t)U(t), \quad \tilde{\mathbf{L}}(t) = U^\dagger(t)\mathbf{L}(t)U(t) \quad (21)$$

و در روابط دیفرانسیل تصادفی کوانتومی زیر صدق می‌کنند:

$$d\tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{S}(t)d\mathbf{A}(t) + \mathbf{L}(t)dt \\ d\tilde{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{S}^*(t)d\Lambda(t)\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{S}^*(t)d\mathbf{A}^*(t)\mathbf{L}^T(t) + \mathbf{L}^*(t)d\mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{L}^*(t)\mathbf{L}^T(t)dt \quad (22)$$

اکنون با ساختار تعریف شده برای میدان‌های ورودی، خروجی و تحول زمانی عملگرهای سیستم، می‌توان اتصالات مختلفی را برای زیر سیستم‌ها بیان کرد. اتصالات مختلف را می‌توان بر اساس دو اتصال سری و الحاق (Concatenation) بدست آورد.

الف) اتصال الحاق

فرض می‌کنیم دو سیستم با پارامترهای  $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{S}_1, \mathbf{L}_1, H_1)$  و  $\mathbf{G}_2 = (\mathbf{S}_2, \mathbf{L}_2, H_2)$  را داریم. پارامترهای اتصال الحاق دوسیستم (شکل ۲) بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{G}_1 \boxplus \mathbf{G}_2 = \left( \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix}, H_1 + H_2 \right) \quad (23)$$

و در این صورت سیستم  $\mathbf{G} = (\mathbf{S}, \mathbf{L}, H)$  را کاهش‌پذیر گوئیم اگر بتوان آنرا بصورت  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \boxplus \mathbf{G}_2$  نوشت.

ب) اتصال سری

دو سیستم با پارامترهای  $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{S}_1, \mathbf{L}_1, H_1)$  و  $\mathbf{G}_2 = (\mathbf{S}_2, \mathbf{L}_2, H_2)$  تعداد کانال‌های یکسان را در نظر بگیرید. پارامترهای اتصال سری دو سیستم (شکل ۲) بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{G}_2 \triangleleft \mathbf{G}_1 = \left( \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1, \mathbf{L}_2 + \mathbf{S}_2 \mathbf{L}_1, H_1 + H_2 + \frac{1}{2i} (\mathbf{L}_2^* \mathbf{S}_2 \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_1^* \mathbf{S}_2^* \mathbf{L}_2) \right) \quad (24)$$

ج) اتصال فیدبک

پارامترهای  $\mathbf{G}_{2-1}$  برای سیستم فیدبکی که از اتصال خروجی اول به ورودی دوم برای سیستم  $\mathbf{G}_1 \boxplus \mathbf{G}_2$  بدست آمده است بصورت  $\mathbf{G}_2 \triangleleft \mathbf{G}_{2-1} = \mathbf{G}_2 \triangleleft \mathbf{G}_1$  می‌باشد.

سیگنال‌های میدان کوانتومی مدل می‌شوند. این مسیر توسط دو مقاله‌ی ارزنده در سال ۲۰۰۳ توسط Yanagisawa و Kimura با هدف ارائه‌ی مدلی برای کنترل سیستم‌ها ادامه یافت [۵۳، ۵۴]. در این مقاله‌ها با تعریف ورودی، خروجی و حالت‌های سیستم بصورت عملگر، مدلی از سیستمی متشکل از حرکت میدان الکترومغناطیسی درون یک کاواک (کاواک شامل دو آینه است که در مقابل یکدیگر قرار می‌گیرند) و برهمکنش بین آن‌ها انجام دادند و مدل سیستم بصورت تابع انتقال بیان شده است. روش کار بدین صورت است که به کمک همیلتونین کاواک، میدان الکترومغناطیسی و برهمکنش بین آن‌ها، ماتریس یکانی تحول زمانی سیستم  $(U(dt))$  بدست می‌آید. سپس با تعریف  $a$  (عملگر پائین‌برنده) به عنوان حالت سیستم، عملگر  $b_{in}$  به عنوان ورودی و عملگر  $b_{out}$  به عنوان خروجی،  $b_{out}$  برحسب  $b_{in}$  بصورت زیر بدست آمده است:

$$\dot{a} = -\frac{\gamma}{2}a - \sqrt{\gamma}b_{in} \\ b_{out}(t) = \sqrt{\gamma}a(t) + b_{in}(t) \quad (17)$$

در سال ۲۰۰۸ توسط Yanagisawa، Gohm، Gough، قوانین جبری برای تعیین خصوصیات دینامیکی شبکه‌ای متشکل از سیستم نوسانگر کوانتومی با ورودی-خروجی‌هایی به فرم میدان کوانتومی استخراج شده است [۵۵]. در سال ۲۰۰۹ نیز توسط Gough و James تئوری شبکه‌های فیدبک کوانتومی بصورت عام‌تر مطرح شد [۵۶] و همچنین صورت کلی آن بر مبنای فرمول‌بندی همیلتونی بیان شد [۵۷].

طرح کلی مطرح شده برای شبکه‌های کوانتومی بدین صورت است که یک سیستم کوانتومی باز با چند میدان به عنوان کانال‌های ورودی-خروجی را می‌توان بوسیله‌ی  $\mathbf{G} = (\mathbf{S}, \mathbf{L}, H)$  نمایش داد که در آن  $\mathbf{S}$  یک ماتریس مربعی با خصوصیت  $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = \mathbf{I}$ ، برداری ستونی با درایه‌های عملگری و  $H$  عملگری خودالحاقی است. به کمک  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{L}$  که به ترتیب ماتریس پراکنندگی و بردار کوپلینگ نامیده می‌شوند، ارتباط بین سیستم و میدان ورودی بیان می‌شود و  $H$  نیز همیلتونین سیستم است که در واقع بیان‌گر انرژی داخلی سیستم است. به کمک این ساختار می‌توان سیستم‌های مختلف را بیان کرد به عنوان مثال اسیلاتور هارمونی بسته بصورت  $\mathbf{G} = (-, -, \omega a^* a)$ ، کاواک بصورت  $(I, \sqrt{\gamma}a, \Delta a^* a)$  و پرتوشکن (Beamsplitter) بصورت  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, 0, 0)$  می‌باشد. کانال‌های ورودی بصورت  $n$  کانال میدانی  $\mathbf{A}$  با فرآیند پیمان‌های  $\Lambda$  مربوط به آن بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن  $A_{ij}$  بیان‌گر ناپودی یک فوتون در کانال  $j$  و تولید یک فوتون در کانال  $i$  می‌باشد. این فرآیندها کانونیک فرض می‌شوند بدین معنا که دارای حاصل‌ضرب‌های مرتبه‌ی دوم بصورت  $dA_{jk}(t)dA_l(t)^* = \delta_{kl}dA_j(t)^*$ ،  $dA_j(t)dA_k(t)^* = \delta_{jk}dt$ ،  $dA_{jk}(t)dA_{lm}(t) = \delta_{kl}dA_{jm}(t)$  و  $dA_j(t)dA_{kl}(t) = \delta_{jk}dA_l(t)$  می‌باشند که به ضرب‌های Ito معروف هستند. معادله‌ی شرودینگر برای

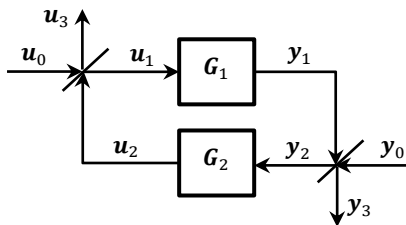
**تعریف ۱-** سیستم تصادفی  $G$  به همراه سیگنال‌های تصادفی ورودی  $u$  و خروجی  $y$  را دارای بهره‌ی مربعی میانگین  $g$  گوئیم اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$E\left(\int_0^t |y(s)|^2 ds\right) \leq E\left(\mu + \lambda t + g^2 \int_0^t |u(s)|^2 ds\right) \quad (25)$$

که در آن  $\lambda \geq 0$  و  $\mu$  ثابت‌های غیرمنفی می‌باشند.

۴-۱ قضیه بهره کوچک در شبکه‌های اپتیک کوانتومی

با توجه به مقدمه‌ی کوتاه مطرح شده، می‌توان قضیه‌ی بهره کوچک را برای شبکه‌های کوانتومی مانند شکل ۴ مطرح کرد.



شکل ۴: شبکه‌ی فیدبک کوانتومی

سیگنال‌های شبکه‌ی کوانتومی بصورت میدان‌های همدوس به فرم زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$U_0(t) = \int_0^t \beta_{u_0}(s) ds + B_{u_0}(t) \quad (26)$$

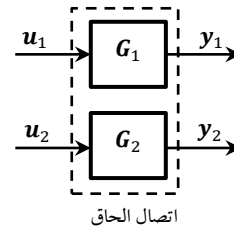
$$Y_0(t) = \int_0^t \beta_{y_0}(s) ds + B_{y_0}(t) \quad (27)$$

که در این روابط  $\beta_{y_0}$  و  $\beta_{u_0}$  مقادیر عملگری و  $B_{y_0}$  و  $B_{u_0}$  میدان خلاء می‌باشد که به فرم یک فرآیند وینر کلاسیک است. همچنین برای هر زیرسیستم رابطه‌ی بهره‌ی میانگین مربعی بصورت  $\|\beta_y\|_t^2 \leq \mu + \lambda t + g^2 \|\beta_u\|_t^2$  برقرار است. پرتوشکن‌ها نیز دارای پارامتر تضعیفی برابر  $\delta_A$  و  $\delta_B$  می‌باشند. در این صورت نسخه‌ی کوانتومی قضیه‌ی بهره کوچک می‌گوید که شبکه‌ی شکل ۴ پایدار است اگر  $\delta_A \delta_B g_A g_B < 1$  باشد [۵۹]. در مرجع [۵۹] بهره برای تعدادی از سیستم‌های کوانتومی اپتیکی محاسبه و قضیه‌ی فوق اثبات شده است.

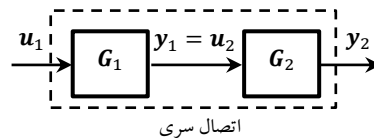
### ۵- کنترل‌پذیری

کنترل‌پذیری از مباحث بنیادین در سیستم‌های کوانتومی است. کنترل‌پذیری بیانگر آن است که آیا می‌توان سیستم کوانتومی را به حالت دلخواه منتقل کرد. مسأله کنترل‌پذیری به دلیل ارتباط نزدیک با جامعیت محاسبات کوانتومی و امکان‌پذیری تبدیلات اتمی یا مولکولی از نظر عملی اهمیت فراوانی دارد. به عنوان نمونه در [۶۰] اثبات شده است که جامعیت اجزاء در محاسبات کوانتومی توسط معیاری مشخص که بیانگر

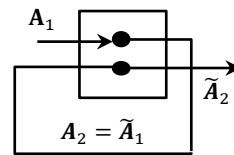
با کمک این نوع مدل‌سازی سیستم و اتصالات مختلف مطرح شده می‌توان مدل شبکه‌های کوانتومی را بدست آورده و در آنالیز و طراحی کنترل‌کننده از آن استفاده کرد که نمونه‌هایی از آن در [۵۵، ۵۶، ۵۸] آمده است.



اتصال الحاق



اتصال سری

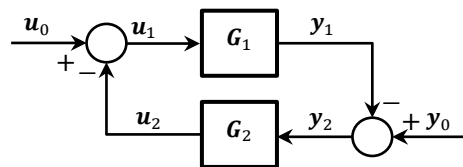


اتصال فیدبک

شکل ۲: اتصالات مختلف زیرسیستم‌ها

### ۴- پایداری

برای بررسی پایداری سیستم‌های دینامیکی روش‌های مختلفی مانند محل قطب‌های سیستم، معیار نایکوئیست، مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های SISO و روش لیاپانوف در فضای حالت مطرح شده است که در کتاب‌های کنترل موجود است. روش دیگر، روش بهره کوچک است که از مشخصات ورودی-خروجی سیستم برای بررسی پایداری استفاده می‌کند. این روش به‌جای این که به جزئیات داخلی سیستم بپردازد، از خواص ورودی-خروجی زیرسیستم‌ها برای بررسی پایداری شبکه استفاده می‌کند و در نتیجه برای سیستم‌های پیچیده مناسب‌تر است و به همین دلایل برای بررسی پایداری سیستم‌های کوانتومی از این قضیه استفاده شده است. در این قضیه به هر زیرسیستم بهره‌ی غیرمتغیر با زمان  $g$  نسبت داده می‌شود و شرط پایداری برای شبکه شکل ۳ آن است که بهره‌ی حلقه، کوچک‌تر از یک باشد.



شکل ۳: شبکه فیدبک

بهره‌ی هر سیستم نیز به کمک تعریف زیر بدست می‌آید:

می‌گویند اگر  $U_{i=1}^N \mathcal{R}(|\phi_i\rangle) = S_{\mathbb{C}}^{N-1}$  که در آن  $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$  بردارهای ویژه همیلتونین آزاد  $H_0$  می‌باشند [۶۳].

## ۵-۲ معیارهای کنترل‌پذیری در سیستم‌های بسته

در دو قضیه‌ای که در ادامه ذکر خواهد شد، معیارهایی برای سنجش کنترل‌پذیری خالص و کنترل‌پذیری عملگری برحسب جبرلی متناظر با مدل سیستم ارائه شده است.

**قضیه ۱-** سیستم کوانتومی با مدل دوخطی  $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]|\psi(t)\rangle$ ، کنترل‌پذیر حالت خالص است اگر و فقط اگر جبرلی دینامیکی  $L_0$  متناظر با آن یکی از شرایط زیر را داشته باشد:  $L_0 = su(N) - 2$ ؛  $L_0 = su(N) - 1$  مزدوج مختلط  $sp(\frac{N}{2})$  که  $sp(\frac{N}{2})$  یک گروه هممتافته  $N/2$  بُعدی است؛  $L_0 = u(N) - 3$ ؛  $L_0 = u(N)$  (iv)  $L_0 = \text{span}\{i\mathbf{1}_{N \times N}\} \oplus \tilde{L}$  که  $\tilde{L}$  جبرلی مزدوج مختلط  $sp(\frac{N}{2})$  است [۶۲].

**قضیه ۲-** سیستم کوانتومی با مدل دوخطی  $i\dot{U}(t) = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]U(t)$ ، کنترل‌پذیر عملگر است اگر و فقط اگر  $L_0 = u(N)$  (یا  $su(N)$ ) [۱۰].

از این دو قضیه مشخص می‌شود که کنترل‌پذیر عملگر، قوی‌تر از کنترل‌پذیری حالت خالص است و از تعاریف ارائه شده نیز مشخص می‌شود که کنترل‌پذیری حالت خالص قوی‌تر از کنترل‌پذیری حالت ویژه است. لازم به ذکر است که تفاوت  $L_0 = u(N)$  و  $L_0 = su(N)$  در کنترل‌پذیری کامل این است که اگر  $L_0 = su(N)$  باشد، کنترلی روی فاز حالت نخواهیم داشت [۱۴]. با توجه به این که فاز حالت از نظر فیزیکی مفهومی ندارد، در بسیاری از موارد کاربردی مشکلی نخواهیم داشت ولی در کنترل محاسبات کوانتومی که فاز اهمیت دارد، باید  $L_0 = u(N)$  باشد. لم زیر چک کردن این شرط را کمی ساده‌تر می‌کند: **لم ۱** [۱۴]: اگر  $L_0$  شامل  $su(N)$  باشد و  $\text{Trace}(H_0) \neq 0$ ، آنگاه  $L_0 = su(N) \oplus u(1) \simeq u(N)$

Schirmer و همکاران در [۱۴] به ساده‌سازی بیشتر شرط فوق بر اساس ماتریس‌های پایه در حالت‌های خاص پرداخته‌اند. Fu و همکاران نیز در [۶۴] به بررسی کنترل‌پذیری و ساده‌سازی شرط آن در حالت‌های مختلف پرداخته‌اند و چند حالت کنترل‌ناپذیر را مطرح نموده‌اند.

برای محاسبه‌ی معیار کنترل‌پذیری، الگوریتم‌هایی نیز ارائه شده است. در [۱۳] به بررسی کنترل‌پذیری سیستم‌های مولکولی با مدل  $\dot{U} = AU(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)B_iU(t)$  که در آن  $A$  توصیف ماتریسی متناظر با همیلتونین داخلی و  $B_i$  توصیف متناظر با همیلتونین محیط می‌باشد، پرداخته شده و الگوریتمی برای آن ارائه شده است. بدین منظور جبرلی  $l$  (شامل تمام ترکیبات خطی و براکت‌های  $A, B_1, \dots, B_m$ )، جبرلی  $l_0$  (شامل تمام ترکیبات خطی و براکت‌های  $B_1, \dots, B_m$  و براکت‌های آن‌ها با  $A$ ) و  $G$  گروه لی محیط تعریف شده است. در اینصورت اگر بُعد  $l$  با بُعد  $G$  برابر باشد و  $G$  فشرده باشد، آنگاه سیستم مورد نظر کنترل‌پذیر است. برای تعیین کنترل‌پذیری با این فرض، نیاز به الگوریتمی برای تعیین

کنترل‌پذیری سیستم کنترلی مربوطه می‌باشد، بیان می‌شود. این معیار می‌تواند برای طراحی کنترل‌کننده نیز استفاده شود. در [۱۳] نیز آنالیز کنترل‌پذیری سیستم‌های مولکولی انجام شده است و کمترین فایده‌ی آن بررسی امکان تحقق ذکر شده است. بدین منظور مفاهیم متفاوت کنترل‌پذیری حالت خالص، کنترل‌پذیری کامل، کنترل‌پذیری حالت ویژه و کنترل‌پذیری جنبشی تعریف شده است [۱۰، ۶۱]. در [۶۲] مفاهیم مختلف کنترل‌پذیری و بعضی از قضایای مربوطه بطور عمیق بررسی شده است. بطور کلی تحقیقات انجام شده در این زمینه را می‌توان به دو دسته‌ی سیستم‌های با ابعاد محدود و نامحدود تقسیم کرد [۳۶].

در دسته‌ی سیستم‌های با ابعاد محدود تعدادی از محققین روش‌های مبتنی بر گروه‌های لی و جبرلی را در پیش گرفته‌اند. در این حالت معیار کنترل‌پذیری سیستم بر اساس ساختار و رتبه‌ی گروه و جبرلی مربوطه بیان می‌شود. این روش برای سیستم‌های بسته مناسب است و در برخی موارد می‌توان نتایج سیستم‌های کلاسیک را به سیستم‌های کوانتومی تعمیم داد. مشکل این روش‌ها آن است که با افزایش بُعد سیستم، پیچیدگی محاسبات افزایش می‌یابد. برای رفع این مشکل گروهی دیگر روش‌های کنترل‌پذیری بر مبنای تئوری گراف را ارائه نموده‌اند.

بررسی کنترل‌پذیری در سیستم‌های با بُعد بی‌نهایت یا سیستم‌های باز، بسیار پیچیده‌تر است و کارهای محدودی در این مورد انجام شده است. این مبحث هنوز به عنوان یک مسأله‌ی باز برای تحقیقات بیشتر مطرح می‌باشد.

## ۵-۱ مفاهیم کنترل‌پذیری

گویی واحد  $N$  بُعدی مختلط را با  $S_{\mathbb{C}}^N$ ، جبرلی تولید شده توسط عملگرهای  $\{-iH_0, -iH_1, \dots, -iH_k\}$  را با  $L_0$  و همه‌ی حالت‌های قابل دسترسی از  $|\psi\rangle$  را با  $\mathcal{R}(|\psi\rangle)$  نمایش می‌دهیم.  $U(N)$  ( $SU(N)$ ) بیانگر گروه یکانی (گروه یکانی خاص)  $N$  بُعدی و  $u(N)$  ( $su(N)$ ) جبرلی مربوط به آن‌ها می‌باشند. اکنون به تعریف مفاهیم مختلف کنترل‌پذیری می‌پردازیم.

**تعریف ۲-** کنترل‌پذیری حالت خالص (در بعضی از مقالات کنترل‌پذیری تابع موج نامیده می‌شود): سیستم با مدل دوخطی  $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]|\psi(t)\rangle$  را کنترل‌پذیرحالت خالص می‌گویند اگر برای هر جفت حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$  و نهایی  $|\psi_f\rangle$  توابع کنترل  $\{u_k(t)\}$  و زمان  $T > 0$  وجود داشته باشد که  $|\psi(T)\rangle = |\psi_f\rangle$  [۱۰].

**تعریف ۳-** کنترل‌پذیری عملگر (درحالت یکانی در بعضی از مقالات کنترل‌پذیری کامل نامیده می‌شود): سیستم با مدل دوخطی  $i\dot{U}(t) = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]U(t)$  را کنترل‌پذیرعملگر می‌گویند اگر به ازای هر  $U_f \in U(N)$  (یا  $SU(N)$ )، توابع کنترل  $\{u_k(t)\}$  وجود داشته باشد که عملگر یکانی  $U$  را از  $I$  به  $U_f$  ببرد [۱۰].

**تعریف ۴-** کنترل‌پذیری حالت ویژه: سیستم با مدل دوخطی  $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]|\psi(t)\rangle$  را کنترل‌پذیرحالت ویژه



اثبات قضیه فوق در [۱۶] آمده است. در [۱۵] نشان داده شده است که شرایط ۲ و ۳ را می‌توان کمی ساده‌تر کرد. همچنین در صورت اضافه شدن یک حالت ویژه جدید به سیستم، چک کردن کنترل‌پذیری خالص سیستم جدید، ساده می‌باشد.

### ۳-۵ معیار کنترل‌پذیری در سیستم‌های باز

بسیاری از سیستم‌های کوانتومی، مخصوصاً سیستم‌های با طیف پیوسته، دارای بُعد بی‌نهایت می‌باشند. وجود ناحیه‌ی آنالیتیک چگال و شرایطی بر روی جبرلی مربوط به آن، از شرایط کافی کنترل‌پذیری این سیستم‌ها بیان شده است [۶۶، ۶۷]. تحقیقات در این زمینه همچنان ادامه دارد.

### ۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مرور و مقایسه‌ای بر دینامیک و مدل‌های مختلف سیستم‌های کوانتومی صورت گرفته و کاربردهای آن‌ها ذکر شد. مدل BLM و صورت‌های مختلف آن بر مبنای معادله‌ی شرودینگر بنا شده است و اعمال کنترل به سیستم نیز از طریق همیلتونین‌های خارجی (مانند میدان مغناطیسی) انجام می‌شود. این مدل برای طراحی کنترل‌کننده‌های حلقه‌باز استفاده می‌شود. مزیت BLM سادگی آن در طراحی کنترل‌کننده، نداشتن محاسبات آنی و امکان پیاده‌سازی عملی ساده می‌باشد. مدل MME برای بیان دینامیک سیستم باز در برهمکنش با محیط استفاده می‌شود و در فیدبک کوانتومی مارکوف استفاده می‌شود. مدل SME و نسخه‌ی خطی آن یعنی LQSDE برای سیستم‌های حلقه بسته مطرح شده‌اند. در این مدل‌ها، یک دینامیک تصادفی برای سیستم، تحت اندازه‌گیری پیوسته در نظر گرفته شده است و می‌تواند در کنترل حلقه بسته مورد استفاده قرار گیرد. به کمک SME و مخصوصاً LQSDE، امکان صورت‌های مختلف فیدبک شامل اندازه‌گیری کلاسیکی-کنترل‌کننده کلاسیکی، اندازه‌گیری کوانتومی-کنترل‌کننده کوانتومی و اندازه‌گیری کوانتومی-کنترل‌کننده کوانتومی همراه با برهمکنش بین سیستم و کنترل‌کننده مهیا می‌شود. همچنین با حل معادله‌ی SME می‌توان کنترل‌کننده را بدست آورد. مدل SME و LQSDE بطور گسترده به منظور کنترل سیستم‌های کوانتومی استفاده شده‌اند. مشکل اصلی معادله‌ی SME حل پیچیده‌ی آن و نیاز به حجم محاسبات بالا بصورت زمان واقعی در زمان بسیار کوتاه از مرتبه‌ی زمان‌های اتمی می‌باشد. شبکه‌های کوانتومی در کنترل همدوس (مخصوصاً در سیستم‌های اپتیک کوانتومی) مطرح شده‌اند. در این مبحث، سیستم‌ها بصورت بلوک‌هایی مطرح می‌شوند که میدان‌های مغناطیسی، سیگنال‌ها را بین آن‌ها جابه‌جا می‌کنند. سپس، سعی شده است تا با ارائه‌ی قوانین جبری ساده، مدل سیستم‌های حاصل از اتصال زیرسیستم‌ها به یکدیگر و برهمکنش بین آن‌ها براساس مدل زیرسیستم‌ها و اتصالات بین آن‌ها بیان شود. در شبکه‌های کوانتومی اتصالات مختلفی مانند اتصال سری، فیدبک و اتصال الحاقی مطرح شدند

بُعد  $l$  داریم. بُعد  $l_0$  برابر با بُعد  $l$  و یا یکی کمتر از آن است. بنابراین می‌توان با تعیین  $l_0$  راجع به کنترل‌پذیری اظهارنظر کرد. برای تعیین  $l_0$  هر ماتریس  $A$  و  $B_i$  را بصورت برداری در  $R^{N^2}$  در نظر گرفته و مراحل زیر برای یافتن  $l_0$  انجام شده است:

- ۱- بردارهای متناظر با  $B_i$  نرمالیزه می‌شوند.
- ۲- به مجموعه‌ی بدست آمده، حاصل براکت لی اعضا با یکدیگر و همچنین حاصل براکت لی آن‌ها با  $A$  اضافه می‌شود.
- ۳- اگر رتبه‌ی مجموعه‌ی بدست آمده در مرحله‌ی ۱ و ۲ با هم برابر باشند، آنگاه مجموعه‌ی بدست آمده در مرحله‌ی ۱ همان  $l_0$  است. در غیراین صورت مرحله ۴ انجام می‌شود.
- ۴- نمایشی جدید را به عنوان مجموعه‌ی اولیه در ۱ جایگزین کرده و مراحل فوق تکرار می‌شود.

الگوریتم‌های مشابه دیگری در [۱۴، ۶۲، ۶۵] ارائه شده است.

روش‌هایی که تاکنون مطرح شدند بر مبنای جبر و گروه لی به بررسی کنترل‌پذیری می‌پرداختند. با افزایش بُعد سیستم، میزان محاسبات روش‌های فوق افزایش چشم‌گیری دارند [۱۵]. برای رفع این مشکل روش‌هایی مبتنی بر نظریه گراف مطرح شده‌اند. Turinici و Rabitz در [۱۵، ۱۶] با فرض روش جداسازی متغیرها و با جایگذاری  $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^N c_j(t)|\phi_j\rangle$  در معادله شرودینگر  $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = [H_0 + \sum_k u_k(t)H_k]|\psi(t)\rangle$  و با فرض این که به کمک یک لیزر قرار است عمل کنترل صورت گیرد به مدل زیر رسیده‌اند:

$$i\dot{C} = AC(t) + u(t)BU(t), C_0 = (c_{0j})_{j=1}^N \quad (28)$$

که در آن  $C(t) = \{c_1, \dots, c_N\}$  و همچنین  $A$  و  $B$  به ترتیب توصیف ماتریس همیلتونین داخلی و برهمکنشی سیستم می‌باشند. سپس به هر سیستم گراف  $G = (V, E)$  را نسبت داده‌اند که در آن مجموعه‌ی  $V$  متناظر با  $|\phi_i\rangle$  و مجموعه‌ی  $E$  متناظر با جفت حالت‌های ویژه هستند که توسط  $B$  به یکدیگر مرتبط شده‌اند.

$$G(V, E): V = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_N\rangle\}, E = \{(|\phi_i\rangle, |\phi_j\rangle); i < j, B_{ij} \neq 0\} \quad (29)$$

با فرض این که اجزاء متصل به هم در گراف فوق بصورت  $\lambda_i (i = 1, \dots, N)$  نمادگذاری شوند و  $G_k = (V^k, E^k), k = 1, \dots, K$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  و  $\omega_{ij} = \lambda_i - \lambda_j (i, j = 1, \dots, N)$  باشد، آن‌گاه قضیه زیر وضعیت کنترل‌پذیری سیستم را مشخص می‌کند:

**قضیه ۳-** اگر شرایط زیر برقرار باشد آنگاه سیستم رابطه‌ی (۲۸) کنترل‌پذیر خالص است [۱۵، ۱۶]:

- ۱- گراف  $G$  یک گراف متصل باشد؛ یعنی  $K = 1$
- ۲- گراف  $G$  مسیرهای چندگانه نداشته باشد؛  $\forall (i, j) \neq (a, b), B_{ij} \neq 0, B_{ij} \neq 0 \Rightarrow \omega_{ij} \neq \omega_{ab}$
- ۳- برای هر  $i, j, a, b = 1, \dots, N$  که  $\omega_{ij} \neq 0$  آن‌گاه عدد  $\frac{\omega_{ab}}{\omega_{ij}}$  کسری است.

نسخه‌ی کوانتومی قضیه‌ی بهره کوچک نیز در صورتی که بهره‌ی حلقه کمتر از واحد باشد، شبکه‌ی کوانتومی پایدار خواهد بود. مفهوم کنترل‌پذیری به‌ویژه در کنترل حلقه‌باز از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. کنترل‌پذیری، امکان‌پذیری انجام تبدیلات اتمی و مولکولی را مشخص می‌کند. مفاهیم مختلف کنترل‌پذیری به ترتیب محافظه‌کاری بیشتر شامل کنترل‌پذیری حالت خالص، کنترل‌پذیری عملگر و کنترل‌پذیری حالت ویژه و قضایایی که بررسی کنترل‌پذیری سیستم‌های کوانتومی را برعهده داشتند، مطرح شدند.

که دیگر اتصالات نیز به کمک آن‌ها قابل بیان است. مقایسه‌ای بین مدل‌های مختلف در جدول ۱ آمده است. پایداری از مفاهیم اساسی در کنترل است و روش‌های مختلفی برای اثبات پایداری سیستم‌های کلاسیکی وجود دارد ولی با توجه به این که حالت‌های سیستم و سیگنال‌های ورودی-خروجی در سیستم‌های کوانتومی بصورت تصادفی می‌باشند، مناسب‌ترین راه برای بررسی پایداری در سیستم‌های کوانتومی استفاده از قضیه بهره کوچک است. در

جدول ۱: مقایسه‌ی مدل‌های مختلف برای سیستم‌های کوانتومی

مدل سیستم	نوع سیستم	نوع فیدبک	توضیحات	کاربردهای عملی
BLM	سیستم‌های بسته با بعد محدود	حلقه‌باز	رسیدن به حالت خالص مطلوب تعیین ضرایب مسیر حالت مطلوب امکان پیاده‌سازی عملی ساده نیاز نبودن به محاسبات زمان واقعی در نظرنگرفتن اثر برهمکنش محیط بر سیستم و امکان‌پذیر نبودن طراحی کنترل‌کننده مقاوم	سیستم‌های شیمی-فیزیک واکنش‌های شیمیایی NMR
MME	سیستم‌های باز	فیدبک کوانتومی مارکوف	بیان‌گر مدل سیستم در برهمکنش با محیط است	سیستم‌های اپتیک کوانتومی
SME	سیستم‌های باز	حلقه بسته، فیلترینگ	بیان‌گر مدل سیستم‌باز تحت اندازه‌گیری پیوسته حل پیچیده نیاز به حجم محاسبات زیاد بصورت زمان واقعی در زمان بسیار کوتاه	مخابرات کوانتومی Qubit کامپیوترهای کوانتومی اندازه‌گیری‌های دقیق کوانتومی
LQSDE	سیستم‌های باز	حلقه بسته	بیان‌گر مدل سیستم‌باز تحت اندازه‌گیری پیوسته بصورت خطی در دیدگاه هاینبرگ است برمبنای مدل SME می‌باشد امکان طراحی کنترل‌کننده مقاوم $H_{\infty}$	سیستم‌های خطی اپتیک کوانتومی مخابرات کوانتومی اپتیکی
شبکه‌های کوانتومی	سیستم‌های باز	کنترل حلقه بسته، بیان ورودی-خروجی، اتصال زیرسیستم‌ها	بیان سیستم بصورت ورودی-خروجی اتصالات مختلف زیرسیستم‌ها یافتن مدل سیستم کلی برمبنای مدل SME می‌باشد	کنترل همدوس سیستم‌های اپتیک کوانتومی

## مراجع

- [5] S. H. Tersigni, P. Gaspard, and S. A. Rice, "On using shaped light pulses to control the selectivity of product formation in a chemical reaction: An application to a multiple level system," *The Journal of chemical physics*, vol. 93, p. 1670, 1990.
- [6] A. P. Peirce, M. A. Dahleh, and H. Rabitz, "Optimal control of quantum-mechanical systems: Existence, numerical approximation, and applications," *Physical Review A*, vol. 37, p. 4950, 1988.
- [7] M. Dahleh, A. Peirce, and H. Rabitz, "Optimal control of uncertain quantum systems," *Physical Review A*, vol. 42, p. 1065, 1990.
- [1] M. Planck, "On the law of distribution of energy in the normal spectrum," *Annalen der Physik*, vol. 4, p. 1, 1901.
- [2] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, 3 ed.: John Wiley & Sons, 2003.
- [3] E. R. M. and R. R., *Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles*: John Wiley & Sons, 1974.
- [4] R. T. Weidner and R. L. Sells, *Elementary Modern Physics*, 2 ed.: Allyn and Bacon, 1973.

- [25] W. Nagourney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, "Shelved optical electron amplifier: observation of quantum jumps," *Physical Review Letters*, vol. 56, pp. 2797-2799, 1986.
- [26] J. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. Wineland, "Observation of quantum jumps in a single atom," *Physical Review Letters*, vol. 57, pp. 1699-1702, 1986.
- [27] J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, "Wavefunction approach to dissipative processes in quantum optics," *Physical Review Letters*, vol. 68, pp. 580-583, 1992.
- [28] H. Carmichael, "An open systems approach to quantum optics," 1993.
- [29] A. C. Doherty, S. Habib, K. Jacobs, H. Mabuchi, and S. M. Tan, "Quantum feedback control and classical control theory," *Physical Review A*, vol. 62, 2000.
- [30] H. Wiseman, "Quantum theory of continuous feedback," *Physical Review A*, vol. 49, p. 2133, 1994.
- [31] H. Wiseman and G. Milburn, "Quantum theory of optical feedback via homodyne detection," *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 548-551, 1993.
- [32] J. P. Dowling and G. J. Milburn, "Quantum technology: the second quantum revolution," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 361, p. 1655, 2003.
- [33] H. Mabuchi and N. Khaneja, "Principles and applications of control in quantum systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 15, pp. 647-667, 2005.
- [34] R. M. Murray, K. J. Astrom, S. P. Boyd, R. W. Brockett, and G. Stein, "Future directions in control in an information-rich world," *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 23, pp. 20-33, 2003.
- [35] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [36] D. Dong and I. R. Petersen, "Quantum control theory and applications: a survey," *Iet Control Theory and Applications*, vol. 4, pp. 2651-2671, 2010.
- [37] P. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics, (Revised)," ed: Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [38] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*: Oxford University Press, USA, 2002.
- [39] K. Jacobs and D. A. Steck, "A straightforward introduction to continuous quantum measurement," *Contemporary Physics*, vol. 47, pp. 279-303, 2006.
- [40] V. P. Belavkin and M. Guta, *Quantum Stochastics and Information Statistics, Filtering and Control*: World Scientific Publishing, 2008.
- [41] V. Belavkin, "Continuous non-demolition observation quantum filtering and optimal estimation," *Quantum Aspects of Optical Communications*, pp. 151-163, 1991.
- [8] R. S. Judson and H. Rabitz, "Teaching lasers to control molecules," *Physical Review Letters*, vol. 68, pp. 1500-1503, 1992.
- [9] W. S. Warren, H. Rabitz, and M. Dahleh, "Coherent control of quantum dynamics: the dream is alive," *Science*, vol. 259, p. 1581, 1993.
- [10] F. Albertini and D. D'Alessandro, "Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 1399-1403, 2003.
- [11] D. D'Alessandro, "Constructive Decomposition of the Controllability Lie Algebra for Quantum Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 1416-1421, Jun 2010.
- [12] D. D'Alessandro and M. Dahleh, "Optimal control of two-level quantum systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 866-876, 2001.
- [13] V. Ramakrishna, M. V. Salapaka, M. Dahleh, H. Rabitz, and A. Peirce, "Controllability of molecular systems," *Physical Review A*, vol. 51, p. 960, 1995.
- [14] S. G. Schirmer, H. Fu, and A. I. Solomon, "Complete controllability of quantum systems," *Physical Review A*, vol. 63, 2001.
- [15] G. Turinici and H. Rabitz, "Quantum wavefunction controllability," *Chemical Physics*, vol. 267, pp. 1-9, 2001.
- [16] G. Turinici and H. Rabitz, "Wavefunction controllability for finite-dimensional bilinear quantum systems," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, p. 2565, 2003.
- [17] N. Khaneja, R. Brockett, and S. J. Glaser, "Time optimal control in spin systems," *Physical Review A*, vol. 63, p. 032308, 2001.
- [18] Y. Yamamoto, N. Imoto, and S. Machida, "Amplitude squeezing in a semiconductor laser using quantum nondemolition measurement and negative feedback," *Physical Review A*, vol. 33, p. 3243, 1986.
- [19] H. Haus and Y. Yamamoto, "Theory of feedback-generated squeezed states," *Physical Review A*, vol. 34, p. 270, 1986.
- [20] J. Shapiro, G. Saplakoglu, S. T. Ho, P. Kumar, B. Saleh, and M. Teich, "Theory of light detection in the presence of feedback," *JOSA B*, vol. 4, pp. 1604-1620, 1987.
- [21] B. Qi, "On the quantum master equation under feedback control," *Science in China Series F: Information Sciences*, vol. 52, pp. 2133-2139, 2009.
- [22] B. Qi and L. Guo, "Is measurement-based feedback still better for quantum control systems?," *Systems & Control Letters*, vol. 59, pp. 333-339, 2010.
- [23] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement And Control* Cambridge University Press, 2010.
- [24] R. J. Cook and H. Kimble, "Possibility of direct observation of quantum jumps," *Physical Review Letters*, vol. 54, pp. 1023-1026, 1985.

- [58] M. R. James and J. E. Gough, "Quantum Dissipative Systems and Feedback Control Design by Interconnection," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, pp. 1806-1821, 2010.
- [59] C. D'Helon and M. R. James, "Stability, gain, and robustness in quantum feedback networks," *Physical Review A*, vol. 73, p. 053803, 2006.
- [60] V. Ramakrishna and H. Rabitz, "Relation between quantum computing and quantum controllability," *Physical Review A*, vol. 54, pp. 1715-1716, 1996.
- [61] C. B. Zhang, D. Y. Dong, and Z. H. Chen, "Control of non-controllable quantum systems: a quantum control algorithm based on Grover iteration," *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 7, p. S313, 2005.
- [62] D. D'Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*: Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [63] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 1st ed.: Cambridge University Press, 2000.
- [64] H. Fu, S. G. Schirmer, and A. I. Solomon, "Complete controllability of finite-level quantum systems," *Journal of Physics a-Mathematical and General*, vol. 34, pp. 1679-1690, 2001.
- [65] C. Altafini, "Controllability of quantum mechanical systems by root space decomposition of  $\mathfrak{su}(N)$ ," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, p. 2051, 2002.
- [66] R. V. Mendes and V. I. Man'ko, "On the problem of quantum control in infinite dimensions," *Journal of Physics a-Mathematical and Theoretical*, vol. 44, 2011.
- [67] R. B. Wu, T. J. Tarn, and C. W. Li, "Smooth controllability of infinite-dimensional quantum-mechanical systems," *Physical Review A*, vol. 73, p. 012719, 2006.
- [42] V. P. Belavkin, "Quantum Stochastic Calculus and Quantum Nonlinear Filtering," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 42, pp. 171-201, 1992.
- [43] V. P. Belavkin, "Measurement, filtering and control in quantum open dynamical systems," *Reports on Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 405-425, 1999.
- [44] R. van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi, "Feedback control of quantum state reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 768-780, 2005.
- [45] R. van Handel, J. K. Stockton, and H. Mabuchi, "Modelling and feedback control design for quantum state preparation," *Journal of Optics B-Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 7, pp. S179-S197, 2005.
- [46] R. v. Handel, "Filtering, Stability, and Robustness," PhD, California Institute of Technology, 2007.
- [47] P. E. Kloeden, E. Platen, and H. Schurz, *Numerical solution of SDE through computer experiments* vol. 1: Springer Verlag, 1994.
- [48] J. Temme, "Numerical solution of stochastic differential equations," M.Sc., Wien university, Wien, 2009.
- [49] K. Jacobs and P. Knight, "Linear quantum trajectories: Applications to continuous projection measurements," *Arxiv preprint quant-ph/9801042*, 1998.
- [50] M. R. James, H. I. Nurdin, and I. R. Petersen, "H-infinity control of linear quantum stochastic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, pp. 1787-1803, 2008.
- [51] V. Belavkin, "Quantum continual measurements and a posteriori collapse on CCR," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 146, pp. 611-635, 1992.
- [52] C. Gardiner and M. Collett, "Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation," *Physical Review A*, vol. 31, p. 3761, 1985.
- [53] M. Yanagisawa and H. Kimura, "Transfer function approach to quantum control - Part I: Dynamics of quantum feedback systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 2107-2120, 2003.
- [54] M. Yanagisawa and H. Kimura, "Transfer function approach to quantum control - Part II: Control concepts and applications," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 2121-2132, 2003.
- [55] J. E. Gough, R. Gohm, and M. Yanagisawa, "Linear quantum feedback networks," *Physical Review A*, vol. 78, p. 062104, 2008.
- [56] J. Gough and M. R. James, "The Series Product and Its Application to Quantum Feedforward and Feedback Networks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, pp. 2530-2544, Nov 2009.
- [57] J. Gough and M. R. James, "Quantum feedback networks: Hamiltonian formulation," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 287, pp. 1109-1132, 2009.