

کنترل و تخمین غیرخطی لغزش طولی تایر جهت استفاده در سیستم ترمز ضدقفل

مهدی میرزائی^۱، حسین میرزائی نژاد^۲، سیاوش وحیدی^۳، داود حیدریان^۴، محمد جواد خسروجردی^۵

^۱ استادیار، آزمایشگاه تحقیقاتی میکاترونیک و ارتعاشات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، mirzaei@sut.ac.ir

^۲ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، h_mirzaeinejad@sut.ac.ir

^۳ دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، siavash.vahidi@yahoo.com

^۴ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه سهند، d_heidarian@sut.ac.ir

^۵ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی سهند، khosrowjerdi@sut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۱۹)

چکیده: سیستم ترمز ضدقفل (ABS) به عنوان یکی از مهم ترین سیستم های ایمنی خودرو در طول ترمزگیری های شدید می باشد. در این سیستم با کنترل لغزش طولی تایر در مقدار بهینه، حداکثر نیروی ترمزی در چرخ ها ایجاد شده و در نتیجه فاصله توقف خودرو به حداقل می رسد. وجود اثرات غیرخطی موجود در دینامیک خودرو که عمدتاً مربوط به اشباع نیروهای تایر می باشد و همچنین وجود نامعینی های مدل و قابل اندازه گیری نبودن حالت های سیستم یعنی سرعت طولی خودرو و لغزش طولی تایر، از مهمترین مشکلات در طراحی این سیستم کنترلی می باشد. در این مقاله یک کنترل کننده غیرخطی مبتنی بر بهینه سازی برای سیستم ABS به صورت تحلیلی طراحی شده و در ترکیب با یک تخمین گر غیرخطی مبتنی بر فیلتر آکسنسد (UKF) استفاده شده است. الگوریتم تخمین UKF بر خلاف فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) به صورت مستقیم از معادلات غیرخطی استفاده کرده و نیاز به خطی سازی و مشتق گیری ندارد. در ادامه اثر خطی ناشی از تخمین در عملکرد کنترل کننده طراحی شده به صورت تحلیلی بررسی می گردد. نتایج تحلیل و شبیه سازی ها نشان دهنده ی عملکرد مناسب و مقاوم سیستم کنترلی پیشنهادی در ردیابی لغزش طولی بهینه در حضور تخمین پارامترها می باشد.

کلمات کلیدی: سیستم ترمز ضدقفل - کنترل کننده غیرخطی - تخمین گر غیرخطی - بهینه سازی - لغزش طولی تایر.

Nonlinear Control and Estimation of Tire Longitudinal Slip for using in Anti-lock Braking System

M. Mirzaei, H. Mirzaeinejad, S. Vahidi, D. Heidarian, M. J. Khosrowjerdi

Abstract: Anti lock braking system (ABS) is one of the most important safety devises in vehicles during the severe braking. In this system, by regulating the wheel longitudinal slip at its optimum value, the maximum braking force is generated and therefore the minimum stopping distance for the vehicle is achieved. The hard nonlinearity due to the saturation of tire forces and modeling uncertainties are the main difficulties arising in the design of ABS. Also, the system states including the longitudinal speed and the wheel slip are not directly measurable and have to be estimated. In this paper, a nonlinear optimization based controller is analytically designed for ABS and is combined with a nonlinear estimator based on Unscented Kalman Filter (UKF). This estimation algorithm directly uses nonlinear equations of the system and does not require the linearization and differentiation. Here, the performance of the designed controller in the presence of states estimation and parametric uncertainties is analytically investigated. The simulation results indicate the efficiency of the proposed controller in tracking the optimal longitudinal wheel slip.

Keywords: Anti lock braking system (ABS), Nonlinear controller, Nonlinear estimator, optimization, tire longitudinal slip.

۱- مقدمه

سیستم ترمز ضدقفل (ABS) یکی از مهمترین سیستم‌های ایمنی فعال می‌باشد که به عنوان یک وسیله ضروری برای ارتقاء ایمنی خودرو و سرنشینان آن در حین ترمزگیری‌های شدید استفاده می‌گردد. هدف اصلی این سیستم، جلوگیری از قفل شدن چرخ و نگهداشتن لغزش طولی آن در یک محدوده مطلوب می‌باشد تا بتواند حداکثر نیروی ترمزی را تولید کرده و فاصله توقف خودرو را به حداقل برساند. در این راستا فرمانپذیری خودرو در موقع گردش نیز به صورت غیرمستقیم کنترل می‌گردد.

مشکل اصلی در طراحی کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مدل برای سیستم ترمز ضدقفل ناشی از غیرخطی‌های شدید در دینامیک خودرو می‌باشد که عمدتاً به اشباع نیروهای تایر در ترمزگیری‌های شدید مربوط می‌شود. روش‌های کنترل مد لغزشی^۱ با توجه به خاصیت غیرخطی و مقاوم بودن به دفعات برای کنترل لغزش طولی به کار رفته‌اند [۱، ۲]. اما یکی از اثرات نامطلوب روش مد لغزشی وجود پدیده‌ی چترینگ^۲ است [۳]. نویسندگان مقاله حاضر در کارهای قبلی خود، کنترل‌کننده‌هایی مبتنی بر مدل غیرخطی به صورت تحلیلی برای سیستم ترمز ضدقفل ارائه نموده‌اند [۴، ۵]. در این قانون کنترلی غیرخطی، سیگنال کنترلی که همان گشتاور ترمزی اعمال شده به چرخ می‌باشد بر اساس حداقل کردن خطا بین پاسخ‌های لغزش پیش‌بینی شده و مطلوب چرخ بدست آمده است. البته در آنجا فرض شده است که حالت‌ها و پارامترهای مورد نیاز برای طراحی کنترل‌کننده در دسترس می‌باشد. این در حالی است که حالت‌های سیستم یعنی سرعت طولی خودرو و لغزش طولی تایر یا توسط سنسور قابل اندازه‌گیری نیستند و یا اندازه‌گیری آنها مقرون به صرفه نمی‌باشد. لذا مقادیر آنها باید از روی اطلاعات موجود و قابل اندازه‌گیری مثل سرعت زاویه‌ای چرخ تخمین زده شود.

فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) تاکنون به عنوان گسترده‌ترین الگوریتم برای تخمین پارامترها و حالت‌های سیستم‌های خودرو بکار رفته است [۸، ۷، ۶]. اما این روش به دلیل فرآیند خطی‌سازی به خصوص در سیستم‌های با دینامیک غیرخطی شدید و مرتبه‌ی بالا دارای محاسبات زیاد می‌باشد. به منظور غلبه بر مشکل مذکور، در مقاله حاضر از الگوریتم غیرخطی UKF برای تخمین سرعت طولی و لغزش طولی خودرو جهت استفاده در طراحی کنترل‌کننده استفاده می‌شود. الگوریتم تخمین UKF بر خلاف EKF به صورت مستقیم از مدل غیرخطی دینامیک چرخ استفاده کرده و نیاز به خطی‌سازی و مشتق‌گیری ندارد. بنابراین در پایین آوردن حجم محاسبات مورد نیاز نیز تاثیر بسزایی دارد [۹]. البته مزیت این روش در تخمین مدل‌های با مرتبه‌ی بالاتر خود را بیشتر نشان می‌دهد.

به طور خلاصه در این مقاله، یک کنترل‌کننده غیرخطی که بر اساس یک فرایند بهینه‌سازی طراحی شده است در ترکیب با تخمین‌گر غیرخطی UKF مورد استفاده قرار می‌گیرد. به این ترتیب که تخمین‌گر مورد نظر با استفاده از اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای چرخ، تخمینی برای لغزش طولی چرخ و سرعت طولی خودرو ارائه می‌نماید. پس از آن کنترل‌کننده با استفاده از اطلاعات تخمین‌گر، گشتاور ترمزی مطلوب را به سیستم اعمال می‌کند. این گشتاور به نحوی محاسبه شده است که لغزش طولی خودرو را در حد مطلوب حفظ نموده و از قفل شدن چرخ‌ها جلوگیری نماید. در ادامه اثر خطای ناشی از تخمین در عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد. نتایج تحلیل و شبیه‌سازی‌ها نشان دهنده‌ی عملکرد مناسب و مقاوم سیستم کنترلی پیشنهادی در ردیابی لغزش طولی بهینه در حضور تخمین پارامترها می‌باشد.

۲- مدل‌سازی

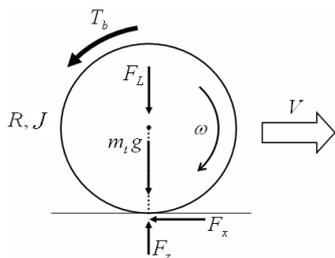
۲-۱- مدل یک چهارم خودرو

مطابق با شکل (۱) مدل غیرخطی یک چهارم خودرو با دو درجه آزادی برای طراحی کنترل‌کننده لغزش طولی چرخ بکار گرفته می‌شود. این مدل که دربرگیرنده رفتار غیرخطی نیروهای تایر در حین ترمزگیری‌های شدید می‌باشد برای طراحی کنترل‌کننده مناسب بوده و در بسیاری از مراجع مورد استفاده قرار گرفته است [۱، ۲، ۱۰، ۴]. سرعت طولی خودرو و سرعت زاویه‌ای چرخ، درجات آزادی این مدل را تشکیل می‌دهند. بر اساس این مدل، معادلات حاکم برای خودرو به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\dot{V} = \frac{-F_x}{m_t} \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(RF_x - T_b) \quad (2)$$

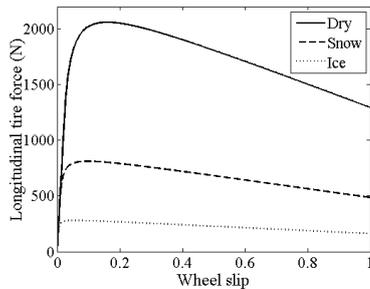
که در روابط فوق، R شعاع چرخ، J ممان اینرسی چرخ، ω سرعت زاویه‌ای چرخ، V سرعت طولی خودرو، T_b گشتاور ترمزی، F_x نیروی طولی تایر و m_t جرم یک چهارم خودرو می‌باشند.



شکل ۲: دیاگرام جسم آزاد مدل یک چهارم خودرو

بار قائم متشکل از دو عامل استاتیکی مربوط به توزیع جرم خودرو و عامل دینامیکی مربوط به انتقال بار در حین ترمزگیری است. بنابراین بار قائم در این مدل عبارت است از:

¹ Sliding mode
² Chattering



شکل ۳: نیروی طولی تایر بر حسب لغزش چرخ برای سطوح مختلف

بنابراین سیستم مرتبه اول زیر به عنوان مدل مطلوب لغزش طولی چرخ در نظر گرفته می‌شود [۴، ۳]:

$$\lambda_t(t) = 0.15 - 0.15e^{-at} \quad (۸)$$

که در آن $a = 20$ ثابت زمانی می‌باشد.

۳- طراحی کنترل کننده:

در این قسمت یک قانون کنترلی غیرخطی برای کنترل لغزش طولی چرخ بر اساس معادلات (۷) طراحی می‌گردد تا مدل مرجع لغزش (۸) را ردیابی کند. با باز نویسی معادلات (۷) به صورت زیر داریم:

$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) \quad (۹)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}) + \frac{R}{Jx_1} T_b \quad (۱۰)$$

$$y = x_2 \quad (۱۱)$$

به طوری که $\mathbf{x} = [V \ \lambda]^T$ بردار حالت و y به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شده است. T_b نیز ورودی کنترلی است. توابع غیرخطی f_1 و f_2 در برگرفته مدل نیروهای غیرخطی تایر با خاصیت اشباع می‌باشند. حال یک قانون کنترلی غیرخطی پیش‌بین بر پایه بهینه‌سازی برای طراحی کنترل کننده‌ای که لغزش چرخ مطلوب را ردیابی می‌کند، ارائه می‌شود. به طور خلاصه، ابتدا در هر لحظه پاسخ غیرخطی لغزش چرخ برای بازه زمانی بعدی، $\lambda(t+h)$ ، توسط بسط سری تیلور پیش‌بینی شده و سپس دستور کنترل فعلی $T_b(t)$ بر اساس حداقل کردن خطای پیش‌بینی شده، بدست می‌آید. در اینجا h زمان پیش‌بینی بوده و یک عدد مثبت حقیقی می‌باشد.

هدف سیستم کنترلی این است که مقدار لغزش چرخ، $\lambda = x_2$ ، را نزدیک پاسخ مطلوب حفظ کند. این متغیر حالت به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا $\lambda(t+h)$ به وسیله سری تیلور مرتبه k ام در زمان t به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h\dot{\lambda}(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\lambda}(t) + \dots + \frac{h^k}{k!}\lambda^{(k)}(t) \quad (۱۲)$$

$$F_z = m_t g - \frac{m_s h_{cg}}{2l} \ddot{x} = m_t g - F_L \quad (۳)$$

به گونه‌ای که در رابطه فوق، l فاصله محور جلو تا عقب، h_{cg} ارتفاع از مرکز گرانش خودرو، F_L نیروی انتقال بار در حین ترمزگیری، m_s جرم فنربندی شده خودرو می‌باشند. در طول ترمزگیری، لغزش طولی چرخ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \frac{V - R\omega}{V} \quad (۴)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴) نسبت به زمان و استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{V} \left[\frac{F_x}{m_t} (1-\lambda) + \frac{R^2 F_x}{J} \right] + \left(\frac{R}{VJ} \right) T_b \quad (۵)$$

معادلات (۱) و (۵) معادلات حاکم بر حرکت خودرو را نشان می‌دهند. در استخراج معادلات فرض شده که ترمزگیری بر روی مسیر مستقیم و بدون زاویه فرمان انجام می‌گیرد. در این مقاله، به منظور در نظر گرفتن خواص اشباع نیروهای تایر، از مدل تایر غیرخطی داگوف (Dugoff) استفاده شده است [۱۱].

با تعریف سرعت خودرو V و لغزش طولی چرخ λ به عنوان متغیرهای حالت داریم:

$$x_1 = V, \quad x_2 = \lambda \quad (۶)$$

بدین ترتیب مدل فضای حالت معادلات (۱) و (۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-F_x}{m_t} \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{x_1} \left[\frac{F_x}{m_t} (1-x_2) + \frac{R^2 F_x}{J} \right] + \left(\frac{R}{x_1 J} \right) T_b \end{cases} \quad (۷)$$

در معادلات فوق گشتاور ترمزی T_b نشان دهنده ورودی کنترلی سیستم می‌باشد که از قانون کنترلی بدست خواهد آمد. در واقع T_b باید طوری اعمال گردد که لغزش طولی چرخ، رفتار مدل مرجع را دنبال کند تا ضمن جلوگیری از قفل شدن چرخ‌ها، مقدار بیشینه نیروی ترمزی نیز به چرخ‌ها اعمال گردد.

مدل مرجع مطلوب برای لغزش طولی که توسط کنترل کننده ردیابی می‌شود باید طوری انتخاب شود که مقدار نیروی ترمزی در طول ترمزگیری در شرایط مختلف جاده بهینه باشد. همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود مقدار بهینه لغزش طولی مقداری بین ۰/۱ تا ۰/۲ می‌باشد. در این مقاله مقدار بهینه ۰/۱۵ در نظر گرفته شده است که در مراجع نیز این مقدار استفاده شده است.

$$\frac{\partial J}{\partial T_b} = 0 \quad (19)$$

که پس از ساده سازی منجر به رابطه ای صریح برای ورودی کنترلی می شود:

$$T_b(t) = -\frac{VJ}{Rh} [e + h(f_2 - \dot{\lambda}_d)] \quad (20)$$

که e خطای ردیابی در لحظه فعلی می باشد:

$$e = \lambda - \lambda_d \quad (21)$$

مشاهده می شود که قانون کنترلی (۲۰) به شکل تحلیلی بوده و برای حل و پیاده سازی مناسب می باشد.

با جایگذاری قانون کنترلی در معادلات اصلی سیستم می توان دینامیک خطای لغزش چرخ را محاسبه نمود. در صورتی که هیچگونه نامعینی و خطای تخمین نداشته باشیم، دینامیک خطای لغزش چرخ به فرم زیر بدست می آید:

$$\dot{e} + \frac{1}{h} e = 0 \quad (22)$$

واضح است که دینامیک خطای (۲۲)، خطی و مستقل از زمان است. مشاهده می شود که در این مورد قانون کنترلی منجر به حالت خاصی از خطی سازی ورودی - خروجی می شود. بدین ترتیب سیستم حلقه بسته خطی و به ازای هر $h > 0$ پایدار نمایی است. با توجه به دینامیک خطا، هنگامی که خطای ردیابی لغزش چرخ صفر است، ردیابی کامل لغزش چرخ برای تمامی زمانها حفظ می شود.

مشاهده می شود که سیستم بدون اغتشاش و نامعینی توصیف شده در معادله (۲۲) به صورت مجانبی پایدار است. از آنجایی که درجه نسبی سیستم یک است و مرتبه سیستم دو می باشد بنابراین سیستم دارای یک دینامیک داخلی می باشد. بنابراین برای پایداری تمام حالتها باید پایداری دینامیک داخلی نیز بررسی شود. این دینامیک داخلی مربوط به سرعت طولی خودرو می باشد. اما از آنجایی که می دانیم در هنگام ترمزگیری، با کنترل لغزش چرخ مطابق با معادله (۲۲)، سرعت خودرو به تدریج کاهش می یابد تا زمانی که خودرو متوقف شود، در نتیجه پایداری دینامیک داخلی سیستم هم تضمین می شود. در بخش پنجم عملکرد سیستم حلقه بسته در حضور نامعینی های پارامتریک و همچنین در ترکیب با تخمینگر بررسی خواهد شد.

۴- طراحی تخمین گر

قانون کنترلی (۲۰) بر اساس فیدبک حالت می باشد. بنابراین برای محاسبه مقدار گشتاور ترمزی در هر لحظه نیاز به اطلاعات همزمان از حالت های سیستم می باشد. به دلیل عدم امکان اندازه گیری حالت های سیستم، سرعت طولی و لغزش چرخ، لازم است تا تخمین گر غیرخطی برای سیستم طراحی شود.

حال مسئله اصلی، انتخاب مرتبه بسط k برای خروجی است به طوری که با اهداف طراحی کنترل کننده بر اساس پیش بینی متناسب باشد. معمولاً مرتبه بسط که مشخص کننده بالاترین مرتبه مشتق خروجی استفاده شده در پیش بینی است، به جمع درجه نسبی سیستم غیرخطی و مرتبه کنترلی انتخاب شده محدود می گردد [۱۳، ۱۲]. درجه نسبی از معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی قابل حصول بوده و برابر با پایین ترین مرتبه مشتق خروجی است که در آن ورودی کنترلی برای اولین بار به طور صریح در معادلات ظاهر می شود [۱۴]. با توجه به معادلات (۹) تا (۱۱)، دینامیک سیستم دارای درجه نسبی، $\rho = 1$ ، نسبت به خروجی می باشد. از طرف دیگر برای رسیدن به یک انرژی کنترلی پایین و جلوگیری از پیچیدگی قانون کنترلی، مرتبه کنترلی در اینجا به حداقل ممکن یعنی صفر محدود می شود. این انتخاب، یعنی مرتبه کنترلی صفر، باعث می شود که انرژی کنترلی در یک بازه پیش بینی ثابت مانده و مشتقات ورودی کنترلی در پیش بینی خروجی ظاهر نشود.

$$\frac{d}{d\tau} T_b(t+\tau) = 0 \quad \text{for } \tau \in [0, h] \quad (13)$$

انتخاب مرتبه کنترلی صفر برای سیستم های غیرخطی با درجات نسبی پایین مناسب می باشد [۱۲]. به طور معمول، مرتبه کنترلی به عنوان یک پارامتر آزاد بوده و متناسب با مشخصات سیستم کنترلی و محدودیت های انرژی کنترلی توسط طراح تعیین می گردد.

بدین ترتیب با توجه به دلایل فوق، سری تیلور مرتبه اول متناسب با درجه نسبی سیستم برای بسط λ کافی می باشد.

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h\dot{\lambda}(t) \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در (۱۴) داریم:

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h(f_2 + \frac{R}{VJ} T_b) \quad (15)$$

حال شاخص عملکرد به نحوی که ترکیبی از خطای ردیابی در لحظه بعدی و انرژی کنترلی در لحظه فعلی را جریمه کند به صورت زیر نوشته می شود:

$$J = \frac{1}{2} [\lambda(t+h) - \lambda_d(t+h)]^2 \quad (16)$$

مشابه با معادله (۱۴) مقدار لغزش مطلوب نیز می تواند به صورت زیر بسط داده شود:

$$\lambda_d(t+h) = \lambda_d(t) + h\dot{\lambda}_d(t) \quad (17)$$

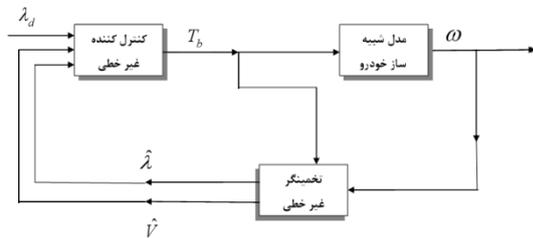
حال شاخص عملکرد بسط داده شده را می توان به صورت تابعی از انرژی کنترلی، با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۷) در (۱۶) به صورت زیر بدست آورد:

$$\lambda_d(t+h) = \lambda_d(t) + h\dot{\lambda}_d(t) \quad (18)$$

شرط لازم برای بهینه بودن عبارت است از:

است. با توجه به مدل مورد استفاده، سیستم دارای دو متغیر حالت می‌باشد. بنابراین در الگوریتم تخمین UKF، $n=2$ بوده و ضرایب وزنی مورد استفاده در این روش $(w^{(i)}=1/2n=1/4)$ می‌باشند که $i=1,2,3,4$ در نظر گرفته می‌شود.

در ادامه تخمین گر طراحی شده در ترکیب با کنترل کننده (۲۰) مورد استفاده قرار خواهد گرفت. قبل از انجام مطالعات شبیه سازی ابتدا عملکرد کنترل کننده در حضور تخمین گر و همچنین نامعینی‌های مدل‌سازی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد.



شکل ۴: شمای کلی تخمین گر به همراه کنترل کننده

۵- تحلیل خطای ناشی از نامعینی‌ها و تخمین در عملکرد کنترل کننده

در این قسمت ویژگی‌های اصلی قانون کنترلی (۲۰) در حضور تخمین گر و نامعینی‌های پارامتریک مدل تحلیل می‌شود. برای استخراج معادله دینامیکی خطا، قانون کنترلی (۲۰) را که بر اساس لغزش تخمینی $\hat{\lambda}$ تعریف شده است را در مدل واقعی (۲۳) به صورت زیر اعمال می‌کنیم. دقت شود که حالتها و پارامترهای استفاده شده در کنترل کننده، مقادیر تخمینی بوده و با نشان $(\hat{\cdot})$ بر روی آنها شناخته می‌شوند.

$$\dot{\lambda} = f_2 - \frac{g}{hg} [(\hat{\lambda} - \lambda_d) + h(\hat{f}_2 - \dot{\lambda}_d)] + w_2, \quad g = \frac{R}{VJ} \quad (25)$$

معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} (\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_d) + \frac{1}{h} \left(\frac{g}{\hat{g}} \right) [(\hat{\lambda} - \lambda + \lambda - \lambda_d)] &= (f_2 - \hat{f}_2) + \\ (1 - \frac{g}{\hat{g}})(f_2 - \dot{\lambda}_d) + w_2 & \end{aligned} \quad (26)$$

در معادله فوق $e = \lambda - \lambda_d$ خطای ردیابی کنترل کننده و $\hat{e} = \lambda - \hat{\lambda}$ خطای تخمین می‌باشد. بدین ترتیب دینامیک خطای ردیابی لغزش چرخ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{e} + \frac{1}{h} \left(\frac{g}{\hat{g}} \right) e &= (f_2 - \hat{f}_2) + (1 - \frac{g}{\hat{g}})(f_2 - \dot{\lambda}_d) + \\ \frac{1}{h} \left(\frac{g}{\hat{g}} \right) \hat{e} + w_2 & \end{aligned} \quad (27)$$

انحراف f_2 از مقدار تخمینی \hat{f}_2 ناشی از نامعینی‌های موجود در مدل خودرو، شرایط جاده و خطای تخمین لغزش طولی و سرعت می‌باشد. اگر خطای تخمین نیروی تایلر F_x کراندار باشد، خطای تابع f_2 می‌تواند به

به منظور تخمین سرعت طولی خودرو و لغزش طولی چرخ، با در نظر گرفتن سرعت زاویه ای به عنوان خروجی سیستم که توسط سنسور اندازه گرفته می‌شود، معادلات (۷) را همراه با نویز فرآیند و نویز اندازه گیری به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) + w_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + \frac{R}{Jx_1} T_b + w_2 \\ y &= \omega + v \end{aligned} \quad (23)$$

با استفاده از رابطه (۴) برای سرعت زاویه ای می‌توان نوشت:

$$\omega = \frac{(1-x_2)x_1}{R} \quad (24)$$

در معادلات فوق $x = [V \ \lambda]^T$ بردار حالت، $w = [w_1 \ w_2]$ بردار نویز فرآیند، v نویز اندازه گیری و y به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شده است.

به منظور تخمین حالت‌های سیستم از روش فیلتر کالمن آنستد (UKF) استفاده می‌گردد. بطور کلی فیلتر کالمن با استفاده از بروزسانی‌های زمانی و اندازه گیری، تخمینی از میانگین و کوواریانس سیستم مورد بررسی را ارائه می‌نماید. در صورتی که سیستم خطی باشد، میانگین و کوواریانس توسط فیلتر کالمن بطور دقیق به‌روز می‌شوند. در صورت غیرخطی بودن سیستم، میانگین و کوواریانس توسط فیلتر کالمن تعمیم یافته بطور تقریبی به‌روز می‌شوند. در سیستم‌های پیچیده تر بدست آوردن تبدیل دقیق میانگین و کوواریانس کار بسیار پیچیده ای می‌باشد. روش تبدیل آنستد می‌تواند در اینگونه موارد بسیار موثر باشد. این روش بر اساس دو اصل استوار می‌باشد. اول اینکه بدست آوردن تبدیل غیرخطی برای یک نقطه بسیار آسانتر از پیدا کردن آن برای کل دامنه است. دوم اینکه پیدا کردن مجموعه ای از نقاط فضای حالت که توزیع آنها تقریبی از توزیع واقعی سیستم باشد، کار سختی نمی‌باشد. برای بدست آوردن تبدیل غیرخطی مناسب، مجموعه ای از نقاط بنام سیگما^۱ را که میانگین مجموعه آنها برابر با میانگین حالت‌های تخمینی و کوواریانس مجموعه برابر با کوواریانس خطای تخمین است را پیدا می‌کنیم. پس از آن معادله غیر خطی مورد نظر را بر روی هر یک اعمال می‌نماییم. میانگین و کوواریانس مجموعه نقاط تبدیل یافته، تخمین خوبی از میانگین و کوواریانس واقعی خواهد بود.

جهت استفاده از الگوریتم UKF، از معادلات (۲۳) استفاده می‌شود. با قرار دادن مقادیر اولیه حالت‌ها و کوواریانس خطای آنها، پارامترهای مورد نیاز برای کاربرد الگوریتم UKF بدست می‌آید. جزئیات الگوریتم فیلتر UKF به صورت مرحله به مرحله در پیوست الف آمده است.

برای بررسی دقت تخمین و تامین اطلاعات مورد نیاز سنسور، سیستم مورد نظر نیز شبیه سازی می‌شود تا با مقایسه نتایج حاصل از تخمین و نتایج حاصل از شبیه سازی، بتوان برآوردی از خطای تخمین بدست آورد. شمای کلی سیستم ترکیبی کنترل کننده و تخمین گر در شکل ۳ نشان داده شده

^۱ Sigma point

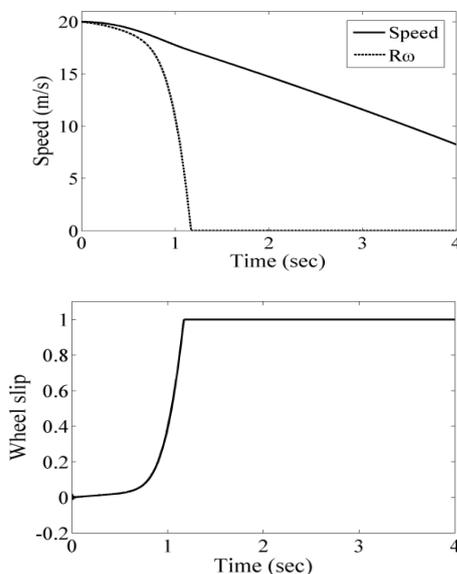
۶- نتایج شبیه‌سازی

مطالعات شبیه‌سازی برای ارزیابی عملکرد کنترل کننده و تخمین گر انجام شده است. مقادیر نامی پارامترهای مدل مورد استفاده در شبیه سازی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر نامی پارامترهای مورد استفاده در مدل یک چهارم خودرو

R	۰/۳۲۶ m	شعاع چرخ
l	۲/۵ m	فاصله محور جلو تا عقب
h_{cg}	۰/۵ m	ارتفاع مرکز جرم
m_w	۴۰ kg	جرم چرخ
$1/4m_{vs}$	۴۱۵ kg	جرم فربندی شده ۱/۴
J	۱/۷ kg.m ²	ممان اینرسی چرخ

شکل ۵ نمودارهای سرعت و لغزش طولی را بدون استفاده از کنترل-کننده و بدون تخمین نشان می‌دهد. در اینجا فرض شده است که مقادیر واقعی حالت‌ها در دست می‌باشد. شبیه‌سازی‌ها بر روی سطح مرطوب با ضریب اصطکاک $\mu = 0.4$ انجام شده است و مقدار سرعت اولیه خودرو 20 (m/s) می‌باشد. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود هنگامی که یک گشتاور ترمزی شدید به خودرویی که به سیستم ترمز ضدقفل مجهز $-e_m \leq e(t) \leq e_m$ (۳۰) نمی‌باشد اعمال می‌شود، چرخ‌ها قفل شده و سرعت محیطی آنها $(R\omega)$ در زمان تقریباً یک ثانیه به صفر می‌رسد. این در حالی است که طی این مدت سرعت خطی مرکز تایر نه تنها صفر نشده، بلکه تنها از 20 m/s به حدود 15 m/s کاهش یافته است. بنابراین در این حالت خودرو شروع به لغزیدن کرده و در نتیجه در شرایط نامطلوبی از نظر ایمنی قرار خواهد گرفت.



شکل ۵: نتایج حالت‌های واقعی خودروی بدون کنترل کننده

وسيله ثابت مشخص F که کران بالای نامعینی سیستم را نشان می‌دهد، محدود شود [۱].

از طرفی برای مشتق لغزش مطلوب نیز میتوان کران بالای η را در نظر گرفت و با طراحی یک تخمین گر پایدار، کراندار بودن خطای تخمین نتیجه شده و میتوان کران بالای ξ را برای خطای تخمین و کران بالای W را برای نویز فرآیند در نظر گرفت. بنابراین با توجه به توضیحاتی که داده شد می‌توان نتیجه گرفت که ثابت‌های مثبت F و η و ξ و W وجود دارند، به گونه‌ای که می‌توان نوشت:

$$|\hat{f}_2 - \lambda_d| \leq \eta, |f_2 - \hat{f}_2| \leq F, |\hat{e}| \leq \xi, |w_2| \leq W \quad (28)$$

از طرفی تخمین سرعت نیز باعث اختلاف g با \hat{g} به صورت زیر می‌گردد:

$$g = \hat{g} \pm p\hat{g} \Rightarrow \frac{g}{\hat{g}} = 1 \pm p \quad (29)$$

که در آن $1 \pm p$ نسبت g به \hat{g} در اثر خطای ناشی از تخمین سرعت می‌باشد.

حال با اعمال معادلات (۲۸) و (۲۹) به معادله خطای (۲۷) و حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه صفر، مشابه با [۴]، نتیجه می‌شود که خطای ردیابی را میتوان به صورت کراندار نوشت:

به طوری که

$$e_m = \left(\frac{F+W}{1 \pm p} \mp \frac{p\eta}{1 \pm p} \right) h + \xi \quad (31)$$

معادله فوق حاکی از این است که خطای ردیابی، ناشی از نامعینی‌های مدل-سازی و خطای تخمین می‌باشد. همچنین معادله مزبور نشان می‌دهد که خطای ردیابی می‌تواند به وسیله پارامتر آزاد h که همان زمان پیش‌بینی می‌باشد، کنترل شود. به طوری که به ازای مقدار مشخصی از نامعینی و خطای تخمین با کاهش مقدار h خطا کم می‌شود. اثر دیگر h در جمله ثابت زمانی سیستم حلقه بسته نیز دیده می‌شود. عملکرد سیستم به ازای مقادیر مختلف h در نتایج شبیه سازی آمده است.

در بخش سوم نشان داده شد که سیستم بدون اغتشاش و نامعینی توصیف شده در معادله (۲۲) به صورت مجانبی پایدار بوده و همچنین پایداری دینامیک داخلی سیستم هم تضمین می‌شود. در حضور اغتشاش و نامعینی نیز با توجه به کراندار بودن سیگنال خطای لغزش که در بالا نشان داده شد و همچنین پایداری بودن دینامیک داخلی سیستم که مربوط به سرعت طولی می‌باشد میتوان گفت که سیستم پایدار کلی^۱ خواهد بود. مفهوم پایداری کلی توانایی یک سیستم را در برابر اغتشاش‌های کراندار دائمی مشخص می‌کند [۱۴].

^۱ Total stability

برای مقایسه بهتر خطاهای تخمین حاصل از دو روش، مقدار جذر میانگین مربعات (RMS) خطای تخمین به ازای مقادیر مختلفی از سرعت‌های اولیه‌ی تخمین و همچنین به ازای نویزهای اندازه‌گیری مختلف در جدول-های ۲ و ۳ مقایسه شده است. مشاهده می‌شود این مقادیر که از میانگین ۵۰ بار اجرای برنامه محاسبه شده‌است برای روش UKF به ازای حالت‌های مختلف کمتر می‌باشد.

جدول ۲: مقدار جذر میانگین مربعات خطای تخمین به ازای

مقادیر مختلفی از سرعت‌های اولیه‌ی تخمین

Root mean square of estimation error over 50 runs $R=0.01, Q=diag\{10^{-5}, 10^{-5}\}$				
State	x_1		x_2	
Method	EKF	UKF	EKF	UKF
$V_0 = 15 m/s$	1.200	0.348	0.062	0.019
$V_0 = 25 m/s$	1.173	0.477	0.042	0.018
$V_0 = 30 m/s$	2.277	0.798	0.075	0.025

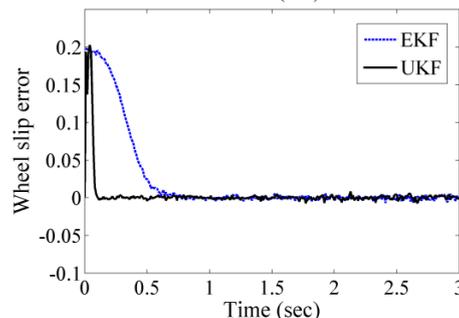
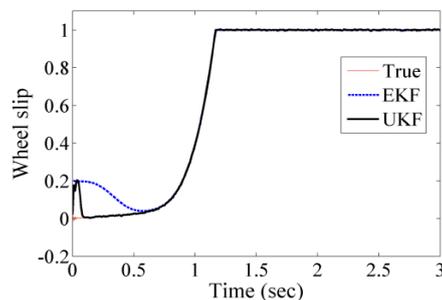
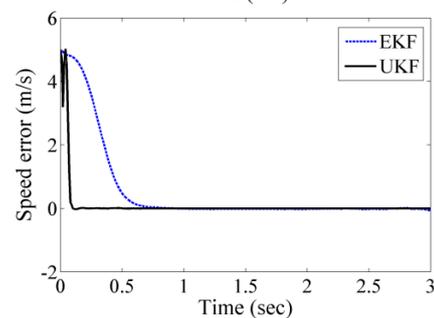
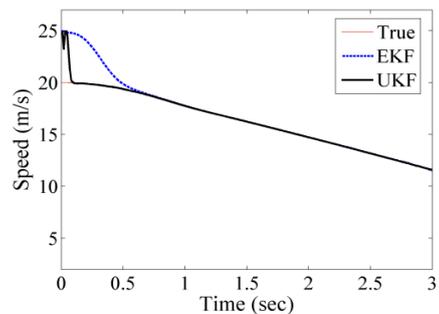
جدول ۳: مقدار جذر میانگین مربعات خطای تخمین به ازای

نویزهای مختلف

Root mean square of estimation error over 50 runs $V_0 = 25 m/s, Q = diag\{10^{-5}, 10^{-5}\}$				
State	x_1		x_2	
Method	EKF	UKF	EKF	UKF
$R = 0.01$	1.210	0.477	0.042	0.018
$R = 0.1$	1.655	0.585	0.063	0.030
$R = 1$	4.106	0.850	0.103	0.059

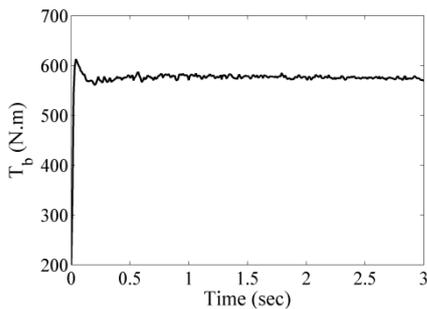
قبل از نشان دادن نتایج حاصل از ترکیب کنترل کننده با تخمین گر ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که مقادیر واقعی حالت‌های سیستم در دسترس می‌باشد. شکل ۷ نمودارهای سرعت و لغزش طولی با استفاده از کنترل کننده در حضور نامعینی را نشان می‌دهد. در اینجا فرض شده است که ۱۰ درصد نامعینی در جرم خودرو وجود دارد. شکل ۷ در مقایسه با شکل ۵ کارایی خودروی مجهز به سیستم ترمز ضدقفل را نشان می‌دهد که در آن سرعت محیطی چرخ بدون قفل شدن نزدیک سرعت طولی خودرو می‌باشد. به عبارتی آهنگ کاهش سرعت مرکز چرخ و سرعت محیطی آن در خودروی مجهز به سیستم ترمز ضدقفل تقریباً یکسان است. همانطور که ملاحظه می‌شود مقدار لغزش طولی در مقدار بهینه خود حفظ شده است. فاصله توقف در حالت با کنترل ۵۳/۲۴ متر و در حالت بدون کنترل ۷۴/۶۴ متر محاسبه شده است.

در ادامه با توجه به عدم دسترسی حالت‌های سیستم از دو روش UKF و EKF برای تخمین آنها استفاده شده است. برای انجام شبیه‌سازی، مقدار سرعت طولی اولیه در مدل واقعی برابر $20 (m/s)$ و در مدل تخمینی برابر $21 (m/s)$ فرض شده است. لغزش طولی مدل واقعی و تخمینی نیز 0.1 اختلاف دارند که این مقدار به عنوان خطای تخمین اولیه می‌باشد. شکل ۶ مقایسه نتایج تخمین روش UKF را با روش EKF و همچنین خطای تخمین توسط دو روش مذکور را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در این مورد هر دو روش به خوبی حالت‌های سیستم را تخمین زده اما سرعت همگرایی در روش UKF به مراتب بیشتر می‌باشد.



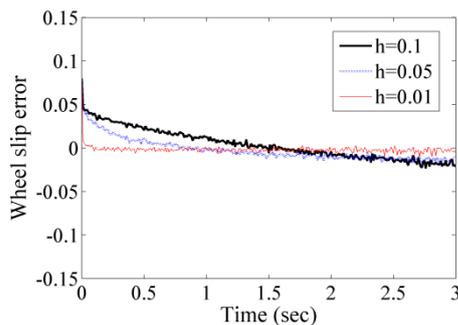
شکل ۶: مقایسه نتایج تخمین توسط روش UKF با EKF برای خودروی بدون کنترل

شکل ۹ گشتاور ترمزی را نشان می‌دهد که به عنوان ورودی کنترلی به سیستم اعمال می‌گردد.



شکل ۹: گشتاور ترمزی (سیگنال کنترلی) محاسبه شده

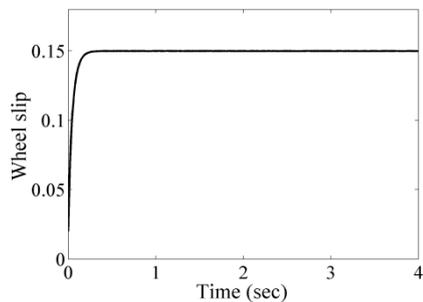
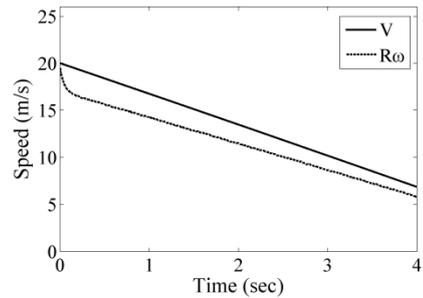
در ادامه به بررسی اثر زمان پیش بینی h بر روی سیستم حلقه بسته می‌پردازیم. برای این منظور نتایج مربوط به ردیابی مدل مرجع توسط کنترل-کننده به ازای مقادیر مختلفی از زمان پیش‌بین h در شکل ۱۰ آورده شده است. این نتایج تاثیر زمان پیش‌بینی در حضور خطای تخمین و نامعینی را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که در حضور تخمین و نامعینی، می‌توان با کاهش زمان پیش‌بینی، دقت ردیابی مدل مرجع لغزش طولی را افزایش داد. نتایج شکل ۱۰ نشان می‌دهد که با کمتر کردن زمان پیش‌بین h ، خطای ردیابی لغزش چرخ کاهش می‌یابد که این مسئله برای مقادیر مختلفی از زمان پیش‌بین بررسی شده است. بنابراین زمان پیش‌بین یک پارامتر طراحی است که می‌توان با تنظیم آن دقت ردیابی را افزایش داد.



شکل ۱۰: افزایش دقت کنترل کننده لغزش طولی به ازای کاهش زمان پیش‌بین h

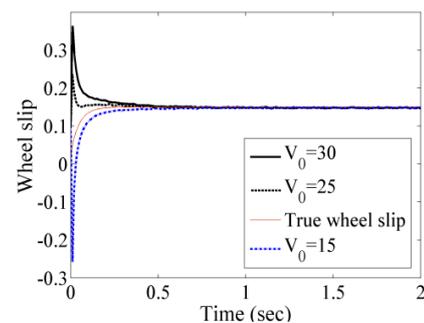
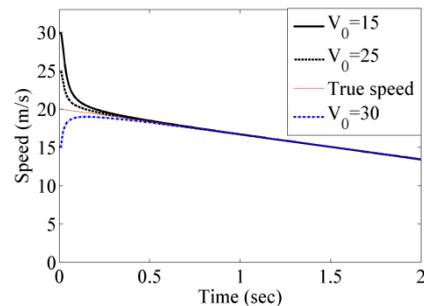
۷- نتیجه گیری

در این مقاله یک کنترل کننده غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی به صورت تحلیلی برای سیستم ترمز ضدقفل طراحی شده و در ترکیب با تخمین گر غیرخطی UKF مورد استفاده قرار گرفت. ویژگی‌های اصلی قانون کنترلی (۲۰) در حضور تخمین گر و نامعینی‌های پارامتریک مدل مورد تحلیل قرار گرفت. همچنین عملکرد تخمین به روش UKF با روش EKF نیز مقایسه گردید. ملاحظه شد که روش UKF علاوه بر سرعت همگرایی بیشتر، دارای



شکل ۷: نتایج حالت‌های واقعی سیستم با کنترل کننده

در ادامه به بررسی ترکیب کنترل کننده با تخمین گر UKF خواهیم پرداخت. شکل ۸ دقت تخمین سرعت طولی و لغزش طولی را در ترکیب تخمین گر با کنترل کننده به ازای مقادیر مختلفی از سرعت‌های اولیه تخمین را نشان می‌دهد. نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب تخمین گر در سیستم کنترلی می‌باشد. مشاهده می‌شود که حالت‌های تخمینی با شرایط اولیه مختلف خیلی سریع به مقدار واقعی همگرا می‌گردند.



شکل ۸: نتایج تخمین توسط الگوریتم UKF با ترکیب کنترل کننده به ازای مقادیر مختلفی از سرعت‌های اولیه تخمین

and comparison,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 24, pp. 163-181, 1995.

- [12] W. H. Chen, D. J. Balance, and P. J. Gawthrop, “Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach,” *Automatica*, vol. 39 no.4, pp. 633-641, 2003.
- [13] M. Eslamian G. Alizadeh, and M. Mirzaei “Optimization-based non-linear yaw moment control law for stabilizing vehicle lateral dynamics, Proc. IMechE Part D: J. Automobile Engineering,”, vol. 221, pp. 1513-1523, 2007.
- [14] J J. E. Slotine and W. Li, “Applied Nonlinear Control,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.

پیوست الف: الگوریتم فیلتر UKF

الگوریتم فیلتر UKF بصورت زیر می‌باشد [۹]:

الف- سیستم غیرخطی با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, t_k) + w_k$$

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k$$

$$w_k \approx (0, Q_k)$$

$$v_k \approx (0, R_k)$$

که W نویز فرآیند با میانگین صفر و کوواریانس Q و v نویز اندازه-

گیری با میانگین صفر و کوواریانس R می‌باشند.

ب- فیلتر با مقادیر زیر آغاز می‌شود:

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0)$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T]$$

که P ماتریس کواریانس خطا و x_0 مقدار اولیه حالت می‌باشد.

ج- معادلات بروزرسانی زمانی زیر برای تخمین حالت و کوواریانس

آن بکار می‌روند.

ج-۱- ابتدا نقاط سیگما ($x_{k-1}^{(i)}$) را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که در

این مرحله بهترین حدس ما برای میانگین و کوواریانس، \hat{x}_{k-1}^+ و P_{k-1}^+ می-

باشد. چراکه در این مرحله، از زمان $k-1$ به زمان k می‌رسیم. در اینجا n

تعداد متغیرهای حالت می‌باشد.

$$\hat{x}_{k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k-1}^+ + \tilde{x}^{(i)} \quad i=1, \dots, 2n$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left(\sqrt{n P_{k-1}^+} \right)_i^T \quad i=1, \dots, n$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -\left(\sqrt{n P_{k-1}^+} \right)_i^T \quad i=1, \dots, n$$

ج-۲- معادلات غیرخطی سیستم را برای تبدیل نقاط سیگما به $\hat{x}_k^{(i)}$

بکار می‌بریم:

$$\hat{x}_k^{(i)} = f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}, u_k, t_k)$$

ج-۳- $\hat{x}_k^{(i)}$ را برای بدست آوردن تخمین اولیه در زمان k با یکدیگر

بر اساس معادله زیر ترکیب می‌نماییم:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_k^{(i)}$$

مقدار جذر میانگین مربعات خطای تخمین کمتری به ازای مقادیر مختلفی از سرعت‌های تخمین اولیه و همچنین به ازای نویزهای اندازه‌گیری مختلف می‌باشد. ضمناً کارایی این تخمین‌گر در سیستم‌های مرتبه بالاتر خود را بیشتر نشان می‌دهد چرا که محاسبه ماتریس ژاکوبین در روش EKF به‌ویژه برای سیستم‌های مرتبه بالا کار بسیار سخت و پیچیده‌ای است. همچنین در نتایج مشاهده گردید که کنترل‌کننده طراحی شده در حضور خطای تخمین و نامعینی‌های پارامتریک عملکرد مناسبی دارد. با کاهش زمان پیش‌بینی h به عنوان پارامتر آزاد کنترل‌کننده، خطای ردیابی لغزش چرخ کاهش یافته و ردیابی با دقت بیشتری انجام می‌شود.

مراجع

- [1] R. Kazemi, B. Hamed and B. Javadi, “A new sliding mode controller for four-wheel anti-lock braking system (ABS),” SAE paper 2000-01-1639.
- [2] S. Drakunov, U. Ozguner, P. Dix, and B. Ashrafi, “ABS control using optimum search via sliding modes”, IEEE Transactions on Control System Technology, vol. 22, no. 1, 1995.
- [3] A. Harifi, A. Aghagolzadeh, G. Alizadeh, and M. Sadeghi “Designing a sliding mode controller for slip control of antilock brake systems,” Transportation research Part C, vol.16, no. 6, pp. 731-741, 2008.
- [4] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, “A novel method for non-linear control of wheel slip in anti-lock braking systems” Elsevier, Journal of Control Engineering Practice, vol. 18 , no. 8, pp. 918-926, 2010.
- [5] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, “A new approach for modeling and control of two-wheel antilock brake systems”, Proc. IMechE, Part K: J. Multi-body Dynamics, vol. 225, pp. 179-192, 2010.
- [6] F. Gustafson, “Slip-based Tire-Road Friction Estimation,” *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1087-1099, 1997.
- [7] B. Samadi, R. Kazemi, K.Y. Nikravesh, and M. Kabganian, “Real-Time Estimation of Vehicle State and Tire-Road Friction Forces,” Proceedings of the American Control Conference, Arlington, 2001.
- [8] T. A. Wenzel, K. J. Burnham, R. A. Williams and M.V. “Blundell Hybrid Genetic Algorithms Extended Kalman Filter Approach for Vehicle State and Parameter Estimation,” University of Bath, UK, 2004.
- [9] D. Simon, “Optimal State Estimation,” John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- [10] K. R. Buckholtz, “Reference input wheel slip tracking using sliding mode control,” SAE paper 2002-01-0301.
- [11] D. E. Smith and J. M. Starky, “Effects of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers, model development, validation

ج-۴ کوواریانس خطا را برای این مرحله توسط معادله زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-)^T + Q_{k-1}$$

د- حال که معادلات بروزرسانی زمانی به اتمام رسیدند، معادلات بروزرسانی اندازه گیری را بکار می‌بریم:

د-۱ نقاط سیگما را برای این مرحله انتخاب می‌نماییم ($\hat{x}_k^{(i)}$). توجه کنید که در این مرحله بهترین حدس ما برای میانگین و کوواریانس، \hat{x}_k^- و P_k^- می‌باشد.

$$\hat{x}_k^{(i)} = \hat{x}_k^- + \tilde{x}^{(i)} \quad i=1, \dots, 2n$$

$$\tilde{x}^{(i)} = \left(\sqrt{nP_k^-} \right)_i^T \quad i=1, \dots, n$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -\left(\sqrt{nP_k^-} \right)_i^T \quad i=1, \dots, n$$

د-۲ معادلات غیرخطی اندازه گیری را برای تبدیل نقاط سیگما به $\hat{y}_k^{(i)}$ ، بکار می‌بریم:

$$\hat{y}_k^{(i)} = h(\hat{x}_k^{(i)}, t_k)$$

د-۳ $\hat{y}_k^{(i)}$ ها را برای بدست آوردن اندازه گیری در زمان k ، با یکدیگر بر اساس معادله زیر ترکیب می‌کنیم:

$$\hat{y}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_k^{(i)}$$

د-۴ کوواریانس خطا را برای این مرحله توسط معادله زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^T + R_k$$

د-۵ کوواریانس توام را بین \hat{x}_k^- و \hat{y}_k را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-)(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^T$$

د-۶ معادلات بروزرسانی اندازه گیری با معادلات زیر تکمیل می‌شود:

$$K_k = P_{xy} P_y^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k)$$

$$P_k^+ = P_k^- - K_k P_y K_k^T$$