

تخمین پارامترهای سیگنال سینوسی میرا با استفاده از شناساننده تطبیقی

محمد علی قدیری مدرس^۱، محسن مجیری^۲، بهرام کریمی^۳

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، ma.ghadirimodarres@ec.iut.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، mohsen.mojiri@cc.iut.ac.ir

^۳ استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، bahram-karimi@aut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۱۰/۲۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۲/۲۳)

چکیده: در این مقاله، یک الگوریتم تطبیقی، جهت تخمین بهنگام فرکانس و ضریب میرایی سیگنال‌های سینوسی میرا ارائه شده است. الگوریتم ارائه شده مبتنی بر مفهوم شناساننده تطبیقی به عنوان روشی برای تخمین پارامترهای یک سیستم خطی می‌باشد. الگوریتم پیشنهادی از یک فیلتر خطی مرتبه دو به همراه دو قانون تنظیم تشکیل شده است که به طور غیر مستقیم تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال سینوسی میرا را بدست می‌دهند. پایداری مجانبی محلی الگوریتم پیشنهادی با استفاده از قضیه معدل گیری از نظریه سیستم‌های دینامیکی اثبات شده است. نتایج شبیه سازی مؤید تحلیل‌های تئوری و عملکرد مطلوب الگوریتم ارائه شده می‌باشد.

کلمات کلیدی: سیگنال سینوسی میرا، فرکانس، ضریب میرایی، شناساننده تطبیقی، قضیه معدل گیری.

Parameter Estimation of an Exponentially Damped Sinusoidal Signal Using Adaptive Identifier

Mohammad Ali Ghadiri-Modarres, Mohsen Mojiri, Bahram Karimi

Abstract: This paper presents an adaptive identifier based algorithm for online estimation of damping factor and frequency of an exponentially damped sinusoidal signal. The algorithm is based on an adaptive identifier which is a theoretical tool for the estimation of the parameters of an unknown linear system. The governing equations of the proposed algorithm are composed of a second order linear filter and two update laws that provide indirect estimation of the frequency and damping factor. Local stability analysis of the proposed method is presented using averaging theory. Simulation results confirm the analytical derivations and also the desirable performance of the proposed algorithm.

Keywords: Exponentially damped sinusoidal signal, Frequency, Damping factor, Adaptive identifier, Averaging theory.

۱- مقدمه

آن‌ها به وسیله سیگنال سینوسی با دامنه‌ی ثابت، کارآمد نیست [۱]. همچنین همان‌طور که از تئوری سیستم‌های خطی می‌دانیم پاسخ ضربه یک سیستم فیزیکی را که توسط معادلات دیفرانسیل معمولی (با ضرایب ثابت) توصیف می‌شود می‌توان به صورت مجموعی از نمایی‌های مختلط توصیف نمود. بنابراین شناسایی پارامترهای سیگنال‌های سینوسی میرا می‌تواند در شناسایی سیستم‌ها نیز حائز اهمیت باشد [۲]. از کاربردهای

تخمین پارامترهای سیگنال سینوسی میرا، از مسائل قدیمی است که به شکل‌های گوناگون در زمینه‌های متفاوتی از علوم کاربردی ظاهر می‌شود. به عنوان نمونه یکی از کاربردهای سیگنال‌های سینوسی میرا در پردازش سیگنال، مدل‌سازی سیگنال‌های صوتی و گفتار است. این دسته از سیگنال‌ها دارای تغییرات سریع در دامنه می‌باشند و بنابراین مدل‌سازی

فرکانس و ضریب میرایی سیگنال ورودی را به دست می‌دهد. برای اثبات پایداری و همگرایی الگوریتم تطبیقی ارائه شده از قضیه معدل گیری استفاده شده است. جنبه‌های مختلف الگوریتم پیشنهادی با استفاده از شبیه سازی بررسی می‌شود. شبیه سازی‌های انجام داده شده نشان می‌دهند الگوریتم پیشنهادی توانایی تعقیب تغییرات آرام پارامترها را نیز دارد. بر مبنای مطالب گفته شده، ادامه این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است. در بخش دوم، معادلات ریاضی یک الگوریتم تطبیقی برای تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال سینوسی میرا و بازسازی آن (مبتنی بر شناساننده تطبیقی) معرفی شده است. در بخش سوم با استفاده از قضیه معدل گیری پایداری الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم با ارائه شبیه سازی‌های متعدد عملکرد الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام بخش پنجم به نتیجه گیری مقاله اختصاص یافته است.

۲- ساختار الگوریتم پیشنهادی

سیگنال سینوسی میرا با معادله

$$y(t) = k_0 e^{-\sigma t} \sin(\omega_0 t + \delta_0) \quad (1)$$

غالباً برای مدل سازی سیگنال سینوسی که دامنه آن با زمان تغییر می‌کند، به کار می‌رود. در این مدل k_0 ، σ_0 ، ω_0 ، δ_0 ثابت‌های مثبت حقیقی و نامعلوم می‌باشند. هدف یافتن یک الگوریتم تطبیقی برای تخمین بهنگام فرکانس و ضریب میرایی سیگنال می‌باشد. وابستگی غیر خطی $y(t)$ به پارامترهای نامعلوم آن و همچنین غیرایستایی بودن سیگنال، باعث ناکارآمدی استفاده از روش‌های متداول تخمین پارامترهای سیگنال‌های ایستاد گردیده است.

ساختار الگوریتم پیشنهادی بر مبنای شناساننده مبتنی بر معادله‌ی خطا است. همان گونه که از تئوری سیستم‌های خطی می‌دانیم برای تولید سیگنال سینوسی میرا (۱) از معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده می‌توان استفاده نمود.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2\sigma_0 \dot{y}(t) + (\sigma_0^2 + \omega_0^2)y(t) &= 0 \\ y(0) &= k_0 \sin \delta_0 \\ \dot{y}(0) &= k_0(\omega_0 \cos \delta_0 - \sigma_0 \sin \delta_0) \end{aligned} \quad (2)$$

اگر از رابطه (۲) با صرف نظر نمودن از شرایط اولیه تبدیل لاپلاس گرفته شود، داریم

$$s^2 y(s) + \theta_2 s y(s) + \theta_1 y(s) = 0 \quad (3)$$

که در آن $\theta_1 = \sigma_0^2 + \omega_0^2$ و $\theta_2 = 2\sigma_0$ می‌باشند. با تعریف چندجمله‌ای هرویتز و مونیک دلخواه $\hat{\lambda}(s) = s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

دیگر می‌توان به سیستم‌های قدرت اشاره نمود. در این سیستم‌ها تعداد زیادی ژنراتور که در فرکانس‌های ۵۰ یا ۶۰ هرتز کار می‌کنند به یکدیگر متصل هستند. پس از رخ دادن یک خطا و یا پدایش اغتشاش در این سیستم‌ها چندین سیگنال سینوسی میرا ظاهر می‌شوند. بسیار حائز اهمیت است که این سیگنال‌ها مانیتور شوند تا در صورت نیاز بتوان به وسیله ساختارهای کنترلی موجود میرایی آن‌ها را افزود و از ایجاد ناپایداری در شبکه جلوگیری نمود [۳] و [۴].

تاکنون روش‌های تکراری^۱ و غیر تکراری متعددی برای تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال‌های سینوسی میرا ارائه شده‌اند. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش‌هایی تحت عنوان پنسل ماتریسی^۲ [۵] و [۶]، روش پیشگوی خطی^۳ و اصلاحات انجام گرفته بر روی آن [۲]، [۷] و [۸]، و روش‌های مبتنی بر حداقل مربعات^۴ اشاره نمود [۹] و [۱۰]. در روش‌های معرفی شده سیگنال‌ها به صورت نمایی مختلط در نظر گرفته شده و به دلیل حجم محاسباتی بالا، برای کاربردهای زمان حقیقی^۵ مناسب نمی‌باشند.

اخیراً بر مبنای استفاده از اصل مدل داخلی، یک روش تطبیقی برای شناسایی و کنترل سیگنال‌های سینوسی میرا ارائه شده است [۱۱] و [۱۲]. در این روش ابتدا یک کنترل کننده با توجه به اصل مدل داخلی ارائه و در فضای حالت پیاده سازی می‌شود. سپس به کمک یک نگاهت ارتباط میان حالت‌های کنترل کننده و خطای تخمین پارامترهای سیگنال تعیین می‌گردد. از این ارتباط به منظور تعیین قوانین تطبیق استفاده می‌شود. نتایج بدست آمده در این مراجع ذاتاً محلی بوده و مستلزم تنظیم دقیق پارامترها می‌باشد که بر آورده شدن آن برای سیستم‌های عملی آسان نیست. همچنین الگوریتم ارائه شده توانایی تخمین رنج وسیعی از ضریب میرایی را ندارد.

در این مقاله یک الگوریتم تطبیقی، مبتنی بر شناساننده تطبیقی، جهت تخمین بهنگام پارامترهای سیگنال‌های سینوسی میرا معرفی و خصوصیات و تحلیل پایداری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. این الگوریتم از تعمیم روش ارائه شده در [۱۳] و [۱۴] برای تخمین بهنگام فرکانس یک سیگنال سینوسی بدست می‌آید. از آنجا که بر خلاف سیگنال‌های سینوسی، سیگنال‌های سینوسی میرا با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کنند، استفاده از قوانین تنظیم ارائه شده در [۱۳] و [۱۴] تضمین کننده همگرایی پارامترها نمی‌باشد. بنابراین در این مقاله قوانین تنظیم ارائه شده در [۱۳] و [۱۴] بگونه‌ای اصلاح می‌شود که خطای تخمین پارامترهای سیگنال سینوسی میرا به صورت نمایی به سمت صفر میل کند. معادلات حاکم بر الگوریتم پیشنهادی از یک فیلتر خطی مرتبه دو و دو قانون تنظیم تشکیل شده است که به طور غیر مستقیم تخمین

¹ Iterative

² Matrix pencil

³ Linear prediction

⁴ Least square

⁵ Real time

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\lambda_1 x_1(t) - \lambda_2 x_2(t) + y(t) \\ \hat{y}(t) &= (\lambda_1 - \hat{\theta}_1)x_1 + (\lambda_2 - \hat{\theta}_2)x_2 \\ e(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\frac{\gamma_1}{x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2}\hat{\theta}_2 x_1)^2} x_1 e \quad (9) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\frac{\gamma_2}{x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2}\hat{\theta}_2 x_1)^2} x_2 e \end{aligned}$$

در روابط (۹)، $y(t)$ سیگنال ورودی به فرم (۱) می‌باشد.
توجه ۱. همانگونه که گفته شد الگوریتم پیشنهادی به صورت غیر مستقیم تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال سینوسی میرا را به دست می‌دهد. بنابراین با در دست داشتن مقادیر تخمینی $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ، مقادیر تخمینی ضریب میرایی و فرکانس با استفاده از روابط (۱۰) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0 &= \frac{1}{2}\hat{\theta}_2 \\ \hat{\omega}_0 &= \sqrt{(\hat{\theta}_1 - \frac{1}{4}\hat{\theta}_2^2)} \quad (10) \end{aligned}$$

۳- تحلیل پایداری

در این بخش، به بررسی پایداری الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. بدین منظور ابتدا یک پاسخ شبه ماندگار از دینامیک ارائه شده بدست آورده و سپس پایداری مجانبی قوانین تنظیم را بر روی این پاسخ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱- سیستم دینامیکی (۵) به همراه خروجی شناساننده (۷) و خطای شناساننده با معادله $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ را در نظر بگیرید، که در آن $y(t)$ سیگنال سینوسی میرا به فرم (۱) می‌باشد. فرض کنید قوانین تنظیم پارامترها به صورت (۸) باشند. با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1$ و λ_2 نقطه تعادل دستگاه دینامیکی (۸) پایدار مجانبی محلی است یعنی هنگامیکه $t \rightarrow \infty$ ، $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ به ترتیب به مقادیر نامی $\sigma_0^2 + \omega_0^2$ و $2\sigma_0$ میل می‌کنند.

اثبات. فرض کنید λ_1 و λ_2 به گونه‌ای انتخاب شوند که ریشه‌های $s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1 = 0$ به اندازه کافی دور از $-\sigma_0 \pm j\omega_0$ در سمت چپ صفحه s باشند. بنابراین پاسخ گذرای سیستم (۵) که ناشی از سیگنال ورودی و شرایط اولیه می‌باشد به سرعت میرا شده و در حالت شبه ماندگار داریم

$$\begin{aligned} x_1^o(t) &= A e^{-\sigma_0 t} \sin \alpha \\ x_2^o(t) &= \dot{x}_1^o(t) = A e^{-\sigma_0 t} (-\sigma_0 \sin \alpha + \omega_0 \cos \alpha) \quad (11) \end{aligned}$$

$$y(s) = \frac{(\lambda_2 - \theta_2)s + (\lambda_1 - \theta_1)}{\hat{\lambda}(s)} y(s) \quad (4)$$

نمایش فضای حالت معادله (۴) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\lambda_1 x_1(t) - \lambda_2 x_2(t) + y(t) \quad (5) \end{aligned}$$

$$y(t) = (\lambda_1 - \theta_1)x_1(t) + (\lambda_2 - \theta_2)x_2(t) \quad (6)$$

دستگاه معادلات (۵) و (۶) ساختار شناساننده را مشخص می‌کند. این معادلات تنها در صورتی سیگنال سینوسی میرا را در خروجی $y(t)$ تولید می‌کنند که شرایط اولیه آن به درستی انتخاب شود. در حالت کلی، سمت راست معادله (۶) با $y(t)$ در عباراتی که به صورت نمایی میرا می‌شوند تفاوت دارد که ناشی از صرف نظر کردن از شرایط اولیه می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود در ساختار جدید، سیگنال $y(t)$ به صورت خطی به پارامترهای مجهول θ_1 و θ_2 وابسته است. مشابه با معادله خروجی (۶) می‌توان برای سیگنال $y(t)$ یک مشاهده‌گر به فرم زیر ارائه نمود.

$$\hat{y}(t) = (\lambda_1 - \hat{\theta}_1)x_1 + (\lambda_2 - \hat{\theta}_2)x_2 \quad (7)$$

که در آن $\hat{\theta}_i, i=1,2$ تخمین‌های $\theta_i, i=1,2$ می‌باشند. هرچند جهت ارائه قانون تنظیم برای پارامترهای $\hat{\theta}_i, i=1,2$ ، می‌توان از الگوریتم استاندارد گرادیان برای کمینه سازی تابع مربع خطا با تعریف

$$\begin{aligned} e^2(t) &= (y(t) - \hat{y}(t))^2 \\ &= (y(t) - (\lambda_1 - \hat{\theta}_1)x_1 - (\lambda_2 - \hat{\theta}_2)x_2)^2 \end{aligned}$$

استفاده نمود، اما با توجه اینکه سیگنال سینوسی میرا با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کند تضمینی جهت همگرایی مقادیر تخمینی پارامترها توسط این الگوریتم به مقادیر نامی پارامترها وجود ندارد [۱۵] و [۱۶]. جهت تضمین پایداری، قوانین تنظیم حاصل شده از الگوریتم گرادیان را به صورت مناسب نرمالیزه می‌کنیم. بدین ترتیب داریم

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\frac{\gamma_1}{x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2}\hat{\theta}_2 x_1)^2} x_1 e \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\frac{\gamma_2}{x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2}\hat{\theta}_2 x_1)^2} x_2 e \quad (8) \end{aligned}$$

که در آن γ_1 و γ_2 ثابت‌های مثبت و پارامترهای طراحی می‌باشند. لازم بذکر است که قوانین تنظیم ارائه شده توسط (۸) به جز در عامل نرمالیزه، مشابه قوانین تنظیم بدست آمده توسط فرم استاندارد الگوریتم گرادیان می‌باشند. بدین ترتیب یک رویکرد جدید با پایداری نمایی تضمین شده ارائه می‌گردد. به طور خلاصه دینامیک الگوریتم پیشنهادی عبارت است از

سیستم دینامیکی (۱۳) در قالب قضیه معدل گیری $\dot{\phi} = \mathcal{E}f(\phi, t, \varepsilon)$ قرار دارد (معادله ی (ض-۱) در بخش ضمیمه)، که تابع برداری $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$: فطبق رابطه (۱۵)، متعلق به $C^r, r \geq 2$ ، کراندار بر روی مجموعه های کراندار و متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است. حال طبق قضیه معدل گیری پایداری سیستم (ض-۲) در بخش ضمیمه) است. با استفاده از رابطه ی زیر از جدول انتگرال ها

$$\int \frac{\sin^2 \tau}{a^2 \cos^2 \tau + \sin^2 \tau} d\tau = \frac{1}{1-a^2} (\tau - a \tan^{-1} \tau) \quad (16)$$

سیستم معدل گیری شده سیستم (۱۳)، با معادلات زیر مشخص می شود

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{1,av} &= -\gamma_1 \left(\frac{1}{\omega_0 + 1} \phi_{1,av} - \frac{\sigma_0}{\omega_0 + 1} \phi_{2,av} \right) \\ \dot{\phi}_{2,av} &= -\gamma_2 \left(-\frac{\sigma_0}{\omega_0 + 1} \phi_{1,av} + \frac{\sigma_0^2 + \omega_0}{\omega_0 + 1} \phi_{2,av} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷) زیر نویس 'av' بیانگر مقادیر معدل می باشد. چندجمله ای مشخصه سیستم (۱۷) عبارت است از

$$s^2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 (\sigma_0^2 + \omega_0)}{\omega_0 + 1} s + \frac{\gamma_1 \gamma_2 \omega_0}{(\omega_0 + 1)^2} = 0 \quad (18)$$

همان گونه که دیده می شود چندجمله ای مشخصه یک چندجمله ای هرویتز بوده، بنابراین مبدا نقطه تعادل پایدار مجانبی برای سیستم (۱۷) می باشد. همچنین با توجه به قضیه معدل گیری نتیجه می شود که مبدا و نقاط تعادل پایدار مجانبی برای دینامیک های (۱۳) و (۱۲) می باشند و اثبات قضیه کامل می شود. توجه داشته باشیم که مبدا نقطه تعادل سیستم اولیه (۱۱) و سیستم معدل گیری شده (۱۷) است و بنابراین جمله $O(\varepsilon)$ در قضیه معدل گیری حذف می شود.

توجه ۲. همانطور که از معادله (۸) دیده می شود، ممکن است در لحظاتی عامل نرمالیزه کننده صفر بوده و قوانین بروز رسانی تعریف نشده باشند. برای پیشگیری از این مشکل، می توان یک ثابت کوچک به عامل نرمالیزه کننده در مخرج قوانین بروز رسانی افزود [۱۲].

۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش عملکرد الگوریتم پیشنهادی با معادلات دینامیکی (۹) توسط شبیه سازی های کامپیوتری مورد بررسی قرار می گیرد. بدین منظور ابتدا با فرض ثابت بودن پارامترهای سیگنال عملکرد الگوریتم در حالت گذرا را مورد بررسی قرار می دهیم. نتایج شبیه سازی در این حالت به ازای دو مقدار ضریب میرایی، ضریب میرایی کوچک و بزرگ، ارائه می شوند. سپس عملکرد الگوریتم در تعقیب تغییرات نوسانی ضریب میرایی را مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت به مقایسه الگوریتم پیشنهادی در

که در آن $x_1^\circ(t)$ و $x_2^\circ(t)$ پاسخ های شبه ماندگار ناشی از سیگنال ورودی می باشند و

$$\begin{aligned} A &= k_0 |H(-\sigma_0 + j\omega_0)| \\ \alpha &= \omega_0 t + \delta_0 + \angle H(-\sigma_0 + j\omega_0) \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1}$$

اکنون به بررسی پایداری قوانین تنظیم (۸) روی مسیر جواب شبه ماندگار (۱۱) می پردازیم. با توجه به این که معادلات (۱۱) در رابطه $\dot{x}_1^\circ + \lambda_2 x_1^\circ + \lambda_1 x_1^\circ = y(t)$ صدق می کنند قوانین تنظیم را روی این جواب شبه ماندگار به فرم زیر می توان نوشت

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\frac{\gamma_1}{x_1^{\circ 2} + (x_2^\circ + \frac{1}{2} \hat{\theta}_2 x_1^\circ)^2} x_1^\circ (\ddot{x}_1^\circ + \hat{\theta}_2 \dot{x}_1^\circ + \hat{\theta}_1 x_1^\circ) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\frac{\gamma_2}{x_1^{\circ 2} + (x_2^\circ + \frac{1}{2} \hat{\theta}_2 x_1^\circ)^2} x_2^\circ (\ddot{x}_1^\circ + \hat{\theta}_2 \dot{x}_1^\circ + \hat{\theta}_1 x_1^\circ) \end{aligned} \quad (12)$$

دستگاه معادلات (۱۲) دارای نقطه تعادل

$(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*) = (\sigma_0^2 + \omega_0^2, 2\sigma_0)$ است. از نظریه سیستم های غیرخطی می دانیم که نقطه تعادل یک سیستم غیر خودگردان، پایدار نمایی است اگر و تنها اگر نقطه تعادل پایدار نمایی سیستم خطی شده متناظر باشد [۱۸]. با خطی سازی دستگاه معادلات (۱۲) حول این نقطه تعادل داریم

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\frac{\gamma_1}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \times ((\sin^2 \alpha) \phi_1 + (\frac{\omega_0}{2} \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha) \phi_2) \\ \dot{\phi}_2 &= -\frac{\gamma_2}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \times ((\frac{\omega_0}{2} \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha) \phi_1 + (\omega_0 \cos \alpha - \sigma_0 \sin \alpha)^2 \phi_2) \end{aligned} \quad (13)$$

که $\phi_1 = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_1^*$ و $\phi_2 = \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_2^*$ خطای پارامترها است.

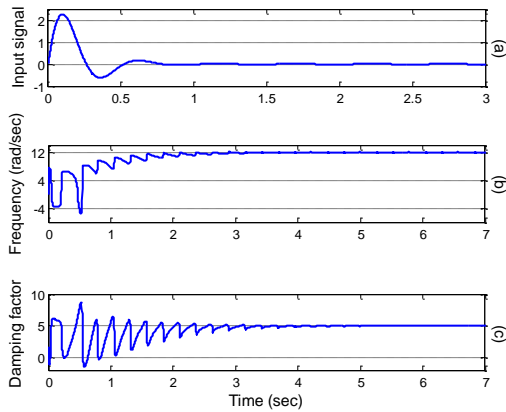
فرض کنید $0 < \varepsilon \ll 1$ یک عدد حقیقی ثابت باشد، با تعریف $\gamma_1 = \varepsilon \hat{\gamma}_1$ و $\gamma_2 = \varepsilon \hat{\gamma}_2$ ، سیستم دینامیکی (۱۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \varepsilon (-\hat{\gamma}_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_1 - \hat{\gamma}_1 \frac{\omega_0 \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_2) \\ \dot{\phi}_2 &= \varepsilon (-\hat{\gamma}_2 \frac{\omega_0 \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_1 - \hat{\gamma}_2 \frac{(\omega_0 \cos \alpha - \sigma_0 \sin \alpha)^2}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_2) \end{aligned} \quad (14)$$

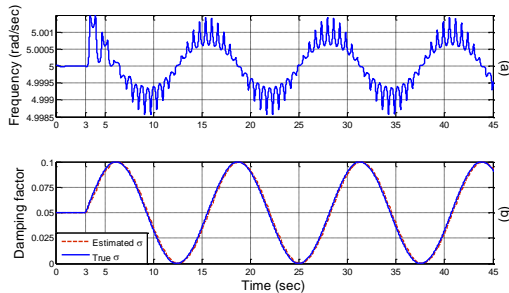
به وضوح دیده می شود که با تعریف

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ f(\phi, t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} -\hat{\gamma}_1 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_1 - \hat{\gamma}_1 \frac{\omega_0 \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_2 \\ -\hat{\gamma}_2 \frac{\omega_0 \sin 2\alpha - \sigma_0 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_1 - \hat{\gamma}_2 \frac{(\omega_0 \cos \alpha - \sigma_0 \sin \alpha)^2}{\sin^2 \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha} \phi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

عملکرد الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور مقادیر اولیه فرکانس و ضریب میرایی را برابر $\omega_0 = 5 \text{ rad/sec}$ و $\sigma_0 = 0.05$ در نظر گرفته‌ایم. فرض کرده‌ایم در لحظه $t = 3 \text{ sec}$ مقدار ضریب میرایی با رابطه $\sigma_0 = 0.05(1 - \cos 0.5t)$ شروع به نوسان می‌کند. بهره‌های تطبیقی در این حالت $\gamma_1 = 100$ و $\gamma_2 = 50$ انتخاب شده‌اند. تعقیب ضریب میرایی و تاثیر آن بر روی تخمین فرکانس در شکل ۳ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود در حالت ماندگار مقدار تخمینی فرکانس به صورت نوسانی با دامنه‌ای کمتر از 0.0015 rad/sec و با فرکانسی برابر فرکانس ضریب میرایی می‌باشد.



شکل ۲. تخمین پارامترها در حالت بزرگ بودن ضریب میرایی، (a) سیگنال ورودی $y(t) = 4e^{-5t} \sin(12t)$ (b) فرکانس تخمینی (c) ضریب میرایی تخمینی



شکل ۳. بررسی عملکرد الگوریتم هنگام تغییرات نوسانی ضریب میرایی، (a) فرکانس تخمینی (b) ضریب میرایی تخمینی

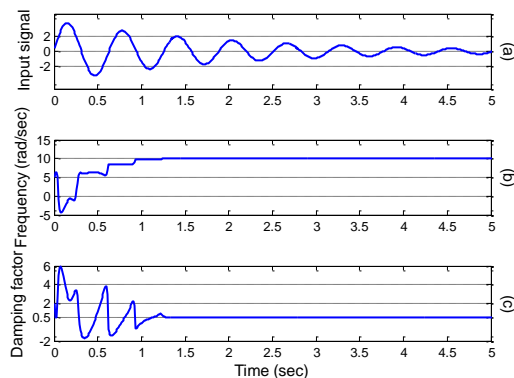
۳-۴- مقایسه با الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی

در این بخش روش پیشنهادی در این مقاله و روش مبتنی بر اصل مدل داخلی [۱۱] مقایسه می‌شوند. به این منظور سیگنال سینوسی میرا با معادله $y(t) = 4e^{-0.05t} \sin(2.5t)$ استفاده شده است. پارامترهای الگوریتم پیشنهادی خود را به صورت $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (4, 2)$ و $(\gamma_1, \gamma_2) = (10, 1.25)$ انتخاب کرده‌ایم. شکل‌های ۴-۵ و ۴-۵-۲ نشان می‌دهند. برای مقایسه سرعت همگرایی دو روش، بازه زمانی ۵ تا ۲۵ ثانیه از شکل‌های ۴-۵ (b) و ۴-۵-۲ (b) نشان داده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود سرعت

این مقاله با الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی می‌پردازیم. کلیه شبیه سازی‌ها در محیط *Matlab / Simulink* انجام گرفته‌اند.

۴-۱- عملکرد اولیه

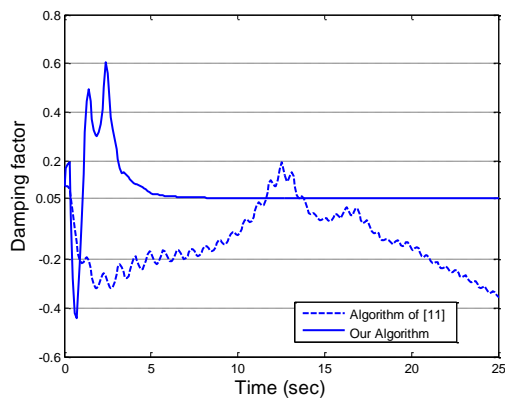
در این بخش عملکرد اولیه الگوریتم را توسط دو شبیه سازی، برای ضریب میرایی کوچک و بزرگ مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقادیر $\lambda_1 = 200$ ، $\lambda_2 = 30$ ، $\gamma_1 = 80$ و $\gamma_2 = 20$ برای شبیه سازی اختیار شده‌اند. در شبیه سازی اول سیگنال $y(t) = 4e^{-0.5t} \sin(10t)$ ، که یک سیگنال سینوسی میرا با ضریب میرایی کوچک است را در نظر گرفته‌ایم. سیگنال ورودی در شکل ۱ (a) نشان داده شده است. مقادیر تخمینی فرکانس و ضریب میرایی نیز به ترتیب در شکل‌های ۱ (b) و ۱ (c) نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی در مدت زمان کمتر از ۲ ثانیه به مقادیر نامی همگرا شده است. در شبیه سازی دوم سیگنال $y(t) = 4e^{-5t} \sin(12t)$ که یک سیگنال سینوسی میرا با ضریب میرایی بزرگ است را در نظر گرفته‌ایم. سیگنال ورودی در شکل ۲ (a) نشان داده شده است. مقادیر تخمینی فرکانس و ضریب میرایی نیز به ترتیب در شکل‌های ۲ (b) و ۲ (c) نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود هرچند سیگنال به سرعت میرا می‌شود اما الگوریتم قادر به شناسایی پارامترهای سیگنال می‌باشد. لازم بذکر است که ریشه‌های معادله $s^2 + \lambda_2 s + \lambda_1 = 0$ عبارتند از $s_1 = -10$ و $s_2 = -20$ ، که در هر دو حالت به اندازه کافی از $-\sigma_0 \pm j\omega_0$ دور می‌باشند.



شکل ۴. تخمین پارامترها در حالت کوچک بودن ضریب میرایی، (a) سیگنال ورودی $y(t) = 4e^{-0.5t} \sin(10t)$ (b) فرکانس تخمینی (c) ضریب میرایی تخمینی

۴-۲- بررسی عملکرد الگوریتم نسبت به تغییرات نوسانی پارامترها

هرچند در بدست آوردن الگوریتم پیشنهادی فرکانس و ضریب میرایی سیگنال ورودی ثابت فرض شدند اما با توجه به ساختار تطبیقی الگوریتم، انتظار می‌رود الگوریتم پیشنهادی توانایی تعقیب تغییرات آرام پارامترها را نیز داشته باشد. در این بخش تاثیر تغییرات نوسانی ضریب میرایی را بر



شکل ۷- مقایسه تخمین ضریب میرایی سیگنال در روش مبتنی بر شناساننده تطبیقی و روش مبتنی بر اصل مدل داخلی برای سیگنال

$$y(t) = 4e^{-0.05t} \sin(3.5t)$$

مشاهده می شود هرچند در الگوریتم پیشنهادی در این مقاله مقادیر تخمینی به مقادیر واقعی همگرا شده اند اما در الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی مقادیر تخمینی به مقادیر واقعی خود همگرا نشده اند. این مثال نشان می دهد الگوریتم ارائه شده در این مقاله حوزه جذب بیشتری نسبت به الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی دارد. مثال های شبیه سازی بیشتر نشان می دهد بر خلاف الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی، الگوریتم پیشنهادی در این مقاله توانایی تخمین رنج وسیعی از ضریب میرایی را دارد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک الگوریتم جدید مبتنی بر ایده شناساننده تطبیقی برای تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال های سینوسی میرا ارائه گردید و جنبه های مختلف آن مورد بررسی قرار گرفت. با ارائه یک قضیه و اثبات آن پایداری مجانبی محلی الگوریتم پیشنهادی بررسی شد. نتایج شبیه سازی نشان می دهند الگوریتم پیشنهادی توانایی تخمین رنج وسیعی از ضریب میرایی را دارد. ساختار تطبیقی الگوریتم به آن توانایی تعقیب تغییرات آرام پارامترها را می دهد این مسئله توسط شبیه سازی نشان داده شده است. در مقایسه با الگوریتم مبتنی بر اصل مدل داخلی، تنظیم پارامترها در روش معرفی شده ساده تر می باشد و نسبت به تغییرات پارامترها حساسیت کمتری دارد. همگرایی سریع پارامترها از دیگر مزایای الگوریتم پیشنهادی است.

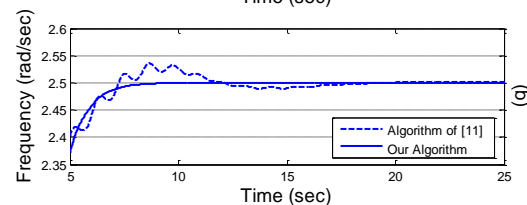
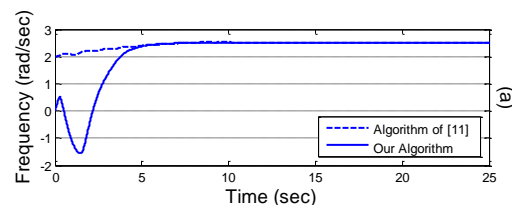
ضمیمه: تعریف [۱۷]. فرض کنید $x = p_0$ نقطه تعادل

سیستم $\dot{x} = f(x), x \in \mathbf{R}^n$ باشد. p_0 یک نقطه تعادل هذلولوی^۱ نامیده می شود هرگاه هیچ یک از مقادیر ویژه سیستم خطی شده حول نقطه تعادل p_0 دارای قسمت حقیقی صفر نباشند.

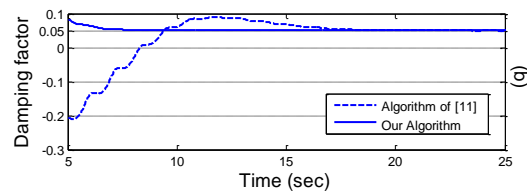
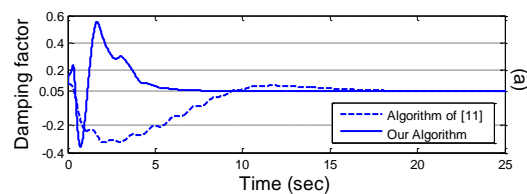
قضیه معدل گیری

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

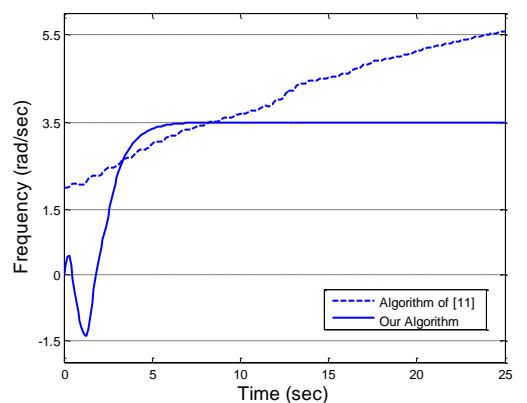
همگرایی در روش مبتنی بر شناساننده تطبیقی نسبت به روش مبتنی بر اصل مدل داخلی بهتر است. به عنوان آخرین مثال شبیه سازی به بررسی حساسیت دو الگوریتم نسبت به تنظیم پارامترها می پردازیم. بدین منظور سیگنال سینوسی میرا با معادله $y(t) = 4e^{-0.05t} \sin(3.5t)$ را در نظر می گیریم تمامی پارامترهای شبیه سازی را مشابه با قبل در نظر گرفته ایم. نتایج تخمین فرکانس و ضریب میرایی سیگنال به ترتیب در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده اند.



شکل ۴- (a) مقایسه تخمین ضریب میرایی سیگنال، (b) بازه زمانی ۵ تا ۲۵ ثانیه شکل ۴ (a)



شکل ۵- (a) مقایسه تخمین ضریب میرایی سیگنال، (b) بازه زمانی ۵ تا ۲۵ ثانیه شکل ۵ (a)



شکل ۶- مقایسه تخمین فرکانس سیگنال در روش مبتنی بر شناساننده تطبیقی و روش مبتنی بر اصل مدل داخلی برای سیگنال $y(t) = 4e^{-0.05t} \sin(3.5t)$

^۱ Hyperbolic equilibrium point

- sinusoids”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 53, pp. 3831–3846, 2005.
- [5] Hua, Y. and Sarkar, T. K., “Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise”, *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 38, no. 5, pp. 814–824, 1990.
- [6] Badeau, R., Boyer, R. and David, B., “EDS parametric modeling and tracking of audio signals”, *Fifth International Conference on Digital Audio Effects, Hamburg, Germany*, pp. 1-6, 2002.
- [7] Kumaresan, R. and Tufts, D. W., “Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise”, *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 30, no. 6, pp. 833-840, 1982.
- [8] Handel, P., “High-order Yule-walker estimation of the parameters of exponentially damped cisoids in noise”, *Signal Processing*, Vol. 32, pp. 315-328, 1993.
- [9] Liu, Z., Li, J. and Stoica, P., “RELAX-based estimation of damped sinusoidal signal parameters”, *Signal Processing*, Vol. 62, pp. 311-321, 1997.
- [10] Li, H. and Djuric, P. M., “An iterative MMSE procedure for parameter estimation of damped sinusoidal signals”, *Signal Processing*, Vol. 51, pp. 105-120, 1996.
- [11] Lu, J. and Brown, L. J., “Internal model principle-based control of exponentially damped sinusoids”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 24, no. 3, pp. 219-232, 2010.
- [12] Lu, J. and Brown, L. J., “Identification of exponentially damped sinusoidal signals”, *Seventeenth IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [13] Xia, X., “Global frequency estimation using adaptive identifiers”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 47, no. 7, pp. 1188-1193, 2002.
- [14] Hou, M., “Estimation of sinusoidal frequencies and amplitudes using adaptive identifier and observer”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 52, no. 3, pp. 493-499, 2007.
- [15] Sastry, S. and Bodson, M., *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [16] Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [17] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1983, Vol. 2, Texts in Applied Mathematics.
- [18] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.

$$\dot{x} = \mathcal{E}f(x, t, \varepsilon) \quad (\text{ض-۱})$$

که در آن $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ ، تابعی C^r ، $r \geq 2$ (تمامی مشتقات جزئی آن تا مرتبه r پیوسته‌اند)، کراندار بر روی مجموعه‌های کراندار و متناوب نسبت به زمان با دوره تناوب $T > 0$ است. سیستم معدل‌گیری شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\dot{x}_{av} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(x_{av}, t, 0) dt \triangleq \mathcal{E}f^-(x_{av}) \quad (\text{ض-۲})$$

که در آن متغیر جدید x_{av} نشان دهنده مقدار معدل x است. آنگاه تغییر متغیر $x = x_{av} + \varepsilon W(x_{av}, t, \varepsilon)$ وجود دارد به طوری که توسط آن سیستم (ض-۱) به

$$\dot{x}_{av} = \mathcal{E}f^-(x_{av}) + \varepsilon^2 f_1(x_{av}, t, \varepsilon) \quad (\text{ض-۳})$$

تبدیل می‌شود. که f_1 نسبت به t متناوب با دوره تناوب T است. همچنین نتایج زیر را داریم

اگر $x(t)$ و $x_{av}(t)$ به ترتیب پاسخ‌های معادلات (ض-۱) و (ض-۲) با شرایط اولیه $x(t_0) = x_0$ و $x_{av}(t_0) = x_{av0}$ باشند به طوری‌که $\|x_0 - x_{av0}\| = O(\varepsilon)$ ، آنگاه در مقیاس زمانی $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ $\|x(t) - x_{av}(t)\| = O(\varepsilon)$ خواهد بود.

اگر p_0 نقطه تعادل هذلولوی (ض-۲) باشد، آنگاه ε_0 ای وجود دارد که برای تمامی مقادیر $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ، (ض-۱) دارای یک مدار تناوبی هذلولوی یکتاست که نوع پایداری آن مشابه با P_0 می‌باشد و در $P_\varepsilon(t) = P_0 + O(\varepsilon)$ واقع شده است ($P_\varepsilon(t)$ می‌تواند برابر P_0 باشد). قضیه معدل‌گیری بیان می‌کند پاسخ‌های سیستم معدل‌گیری شده به پاسخ‌های سیستم اصلی همگرا می‌شوند. همچنین این قضیه ارتباط میان مدارهای تناوبی^۱ سیستم اصلی و نقاط تعادل سیستم معدل‌گیری شده را نشان می‌دهد [۱۷].

مراجع

- [1] Hermus, K., Verhelst, W., Lemmerling, P., Wambacq, P. and Huffel, S. V., “Perceptual audio modeling with exponentially damped sinusoids”, *Signal Processing*, Vol. 85, pp. 163-176, 2005.
- [2] Kannan, N., Kundu, D., “Estimating parameters in the damped exponential model”, *Signal Processing*, Vol. 81, pp. 2343-2351, Nov. 2001.
- [3] Peter, O., “A high-resolution spectral analysis algorithm for power system disturbance monitoring”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 17, pp. 676-680, 2002.
- [4] Lovisolo, L., da Silva, E. A. B., Rodrigues, M. A. M., and Diniz, P. S. R., “Efficient coherent adaptive representations of monitored electric signals in power systems using damped

¹ Periodic orbit