مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله کاربردی
جلد۱۶، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۵۵-۳۹

معرفی رتبه‌بندی مجموعه‌های ف-انتقالی در منطق فازی توسعه‌یافته با رویکرد کاربردی تصمیم‌گیری در تشخیص بیماری

فرناز صباحی
دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه ارومیه ، ارومیه ، ایران f.sabahi@urmia.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۱۸ ویرایش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۴ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۰۷

چکیده: استدلال تقریبی در حوزه منطق فازی، برخلاف استدلال دقیق در منطق کلاسیک، یک‌راه شهودی برای حل بسیاری از مسائل پیچیده ارائه داده است. اما، آیا خود منطق فازی می‌تواند با آن نوعی از عدم قطعیت که در حوزه مسائل باز وجود دارد مقابله کند؟ اخیراً، زاده گسترشی از منطق فازی را پیشنهاد داده است که نشان‌دهنده انعطاف‌پذیر بودن در برابر دیدگاه‌ها درحالی‌که در جستجوی راه‌حل‌های نوین است می‌باشد. در معرفی منطق فازی توسعه‌یافته، مفهوم ف- انتقالی یکی از مفاهیم اساسی است. مجموعه ف- انتقالی شده را ف-مجموعه می‌نامیم. از طرف دیگر، برای ترجمه رتبه‌بندی در یک فرایند استدلال تقریبی در منطق فازی توسعه‌یافته نیاز به رتبه‌بندی ف-مجموعه‌ها می‌باشیم. ف-مجموعه‌ها، در اکثر موارد، در دو فضای متفاوت (فضای اعتبار و فضای امکان) ممکن است باهم همپوشانی داشته باشند درحالی‌که رتبه‌بندی فقط در فضای امکان انجام می‌شود. این ویژگی ف-مجموعه‌ها پرسش‌های زیادی را ایجاد می‌کند: وقتی یک ف-مجموعه دارای مجموعه امکان یکسان باشند ولی مجموعه اعتبار فازی یکی از آن‌ها مجموعه اعتبار فازی دیگری را پوشش می‌دهد کدام بزرگ‌تر است؟ این سؤال و سؤالات دیگر مسائل چالش‌برانگیزی را مطرح می‌کنند. برای روبه‌رو شدن با این چالش‌ها و برای یک رتبه‌بندی مناسب به همراه ایجاد تعامل در دو فضای موازی اعتبار و امکان، مفهوم تعادل بر اساس بهینگی مقید به اعتبار را برای اولین بار در رتبه‌بندی وارد کرده‌ایم. روش پیشنهادی رتبه‌بندی به مثال‌های برگرفته از سایر مقاله‌ها اعمال‌شده است و با نتایج این مقاله‌ها مقایسه شده است. همچنین، برای نشان دادن کارایی ، رویکرد پیشنهادی در کاربرد تشخیص بیماری که یکی از درخواست‌های علمی امروزه است با مطالعه موردی سندروم آفازیا مورد ارزیابی قرارگرفته است.

کلمات کلیدی: اعتبار، رتبه‌بندی، ف-مجموعه، تشخیص بیماری آفازیا.

Introducing Ranking for *f*-transformed Set in Extended Fuzzy Logic Application to Decision Making in Disease Diagnosis

Farnaz Sabahi

Abstract: The sense of approximate reasoning within fuzzy logic, in contrast to precise reasoning within classical logic, provided an intuitive way of handling many of the world's difficult problems. But can fuzzy logic, by itself, handle the sort of uncertainty that we find in the class of *open* world problems? Recently, Zadeh introduced an extension of fuzzy logic that means being flexible while looking for new solutions. The concept of *f*-transformation is one of the fundamental concepts in extended fuzzy logic, it is important to define *f*-transformed set up to develop extended fuzzy logic. This *f*-transformed set is named as *f*-set. On the other hand, in order to translate the hierarchy into an approximated argument process in extended fuzzy logic, it is necessary to rank the *f*-sets. In fact, *f*-sets, in most cases, may overlap in two their parallel spaces of possibility and validity, while their ranking is done in possibility space. This property of *f*-sets raises further questions: how would *f*-sets be ranked when their fuzzy validity set of one covers another? These and other questions surrounding the ranking of *f*-set numbers raise challenging issues. To meet these challenges and to have a proper ranking and to interact with the two parallel spaces of validity and possibility, we have incorporated the concept of equilibrium in the form of validity constrained optimality in ranking for the first time. The proposed ranking approach is applied to examples taken from previous comparative studies from the literature and compared with their results. In addition, to illustrate efficiency, the proposed approach has been evaluated through the help of disease diagnosis, which is one of the scientific today requests by a case study of aphasia diagnosis.

Keywords: Validity, Ranking, *f*-set, Diagnosis Aphasic Syndromes.

نویسنده عهده دار مکاتبات: فرناز صباحی

[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.4.2]

۱- مقدمه

اعتقاد به نظام دو ارزشی به یونان قدیم برمی‌گردد. اگرچه، قبل از ارسطو نوعی ذهنیت فلسفی که تقریباً مغایر با نظام دو ارزشی بود وجود داشت. بااین‌حال، نخستین کسی که قواعد ذهن آدمی را مدون کرد، ارسطو بود. ارسطو این قواعد را دانش تحلیل (تحلیلی‌ها) نامید [۱].

منطق ارسطویی به مدت دو هزار سال تنها منطق پذیرفته‌شده بود. در نظریه ارسطو، برای اولین بار تضاد به‌عنوان اصطلاح جداگانه تعریف و تبیین شد و تفاوت تقابل متضاد و تقابل متناقض مطرح شد. فارابی تضاد را دقیق‌تر از ارسطو تعریف کرده است. به گفته فارابی، تضاد میان دو امر با موضوع واحد روی می‌دهد. غزالی، علم منطق را به‌عنوان معیار در نظر می‌گرفت. در سال۱۸۵۴، جرج بول شالوده منطق ریاضی را که به جبر بول معروف است بنا نهاد. بعد از او، جرج کانتور با ابداع نظریه مجموعه‌ها ساختار محکمی برای نظریه‌های ریاضیات نوین پی‌ریزی نمود که منطبق با منطق ارسطویی و جبر بول می‌باشد [۲].

بااین‌حال، کم‌کم نواقص منطق ارسطویی آشکار شد. درواقع، در بسیاری از علوم نظیر ریاضیات فرض بر این است که محدوده‌های دقیقاً تعریف‌شده‌ای وجود دارد و یک موضوع خاص یا در آن محدوده می‌گنجد یا نمی‌گنجد. این توصیف کاملاً دقیق[۱]، نارسایی دارد زیرا پدیده‌های واقعی نادقیق هستند. درواقع، با افزایش دقت [۲] در نگاه، این حالت ابهام بیش‌ازپیش نمود پیدا می‌کند. پس، نیاز به منطقی که دنیا را به‌صورت حقایق صفر و یک صرف نبیند احساس می‌شد.

منطق‌دان لهستانی جان لوکاسویچ[۳] در سال ۱۹۳۰ منطق سه‌گانه‌ای را معرفی کرد و سپس مقادیر درستی سه‌گانه را به کل اعداد حقیقی در فاصله بین صفر و یک بسط داد. در سال ۱۹۳۷، ماکس بلک[۴] این منطق بین‌هایت ارزشی را روی مجموعه‌ها با معرفی توابع عضویت بکار برد. او عدم قطعیت[۵] در این ساختارها را ابهام[۶] نامید [۲]. در سال ۱۹۶۲ در مقاله [۳]، به‌طور خلاصه به مفهوم ریاضیات جدیدی که در ارتباط با مقادیر فازی که قابل‌بیان با توزیع‌های احتمال متعارف نیست به‌عنوان راه‌حلی برای تجزیه‌وتحلیل سیستم‌های پیچیده پرداخته شد. در سال ۱۹۶۴، در مقاله دیگری [۴]، از مفهوم مجموعه فازی در فرموله کردن دسته‌بندی الگو استفاده شد. نهایتاً منطق فازی در سال ۱۹۶۵توسط لطفی زاده شکل گرفت [۵].

منطق فازی، ارائه‌دهنده مبنایی جهت بررسی سیستم‌هایی با اطلاعات نادقیق است. به بیان موشکافانه، منطق فازی بیان می‌کند که معیارهای معمول دقت باعث محدودیت نظریه‌ها هستند؛ اگرچه، معیارهای معمول تقریباً ماحصل همگرایی آرای متفکران می‌باشند. اما اندیشه مستقل از نحوه تفکر است زیرا هدف‌دار است.

دیدگاه‌های مختلف در مورد منطق فازی وجود دارد. نگاه دسته اول کاملاً محض است، یک منطق فازی خاص که بر اساس یک نظریه صوری ریاضی ازجمله منطق‌های فازی نرم-t می‌باشد؛ مانند منطق پایه فازی[۷] (BL) [۶] که بر اساس نرم-t پیوسته تعریف‌شده است. در این گروه، منطق فازی بر اساس ساختار شبکه‌های مانده‌ای[۸] L تعریف می‌شود. دیدگاه دسته دوم کمتر محض است؛ آن‌ها نظریه امکان را با دو نظر متمایز منطق و نظریه مجموعه‌ها در نظر می‌گیرند و مفاهیم عدم قطعیت را پیش می‌کشند و تفاوت احتمال و امکان هم در این دیدگاه در نظر گرفته می‌شود [۷, ۸]. در دسته سوم، یک پل بین دودسته قبل و دسته بعدی ایجاد می‌شود و که به‌صورت هم‌زمان محض و کاربردی بررسی می‌شود. این دسته به مجموعه‌های فازی توجه دارند و مفاهیم امکان و احتمال را کامل‌کننده همدیگر می‌دانند. دیدگاه آن‌ها برگرفته از نحوه تفکر انسان است. دسته چهارم، یک دیدگاه کاربردی که برگرفته از دیدگاه‌های قبلی مخصوصاً دسته سوم است و روش‌های گوناگونی برای حل مسائل ارائه می‌دهد[۹, ۱۰].

انسان با استفاده از توصیف‌های نادقیق [۹]تصمیم‌های دقیق می‌گیرد. این کار، نشان‌دهنده جستجوی انسان برای سادگی است. بااین‌حال، این دقیق بودن درجه‌ای نشان‌دهنده نوعی نادقیقی است. اجازه دهید با نگاه کردن به یک مثال این دقیق بودن و درجه آن را توضیح دهیم. شما می‌توانید یک خودرو را با پرداخت همه یا بخشی از قیمت آن خریداری کنید. در هر دو مورد، شما قطعاً خودرو را خریده‌اید، اما بین این دو مورد تفاوت وجود دارد. این مثال بیان می‌کند در برخی شرایط، یک رتبه‌بندی از قرائن موردنیاز را ایجاد کنیم که گاهی اوقات ممکن است یکسان توصیف شوند مانند مثال خرید خودرو، برای تمایز در این شرایط، درجات احتمال و/ یا امکان جوابگو نیستند، ازآنجاکه قبلاً در مورد اصل قضیه، یعنی خرید خودرو اطمینان داریم. بیان تقریبی مانند «او خودرو را خریده است» اگرچه می‌تواند با درجه امکان یا احتمال مشخص در توصیف فرد موردنظر معنی‌دار به نظر برسد، اما نمی‌تواند به‌طور مناسب در یک رتبه‌بندی به کار رود.

به‌طورکلی، بیان دقیق بودن در هر چیزی نیاز به یک رتبه‌بندی دارد، اما این رتبه‌بندی نمی‌تواند میزان درستی [۱۰]را از طریق درجات امکان یا احتمال بیان کند. دلیل این امر، این است که از قبل اطمینان کافی در مورد درستی موضوع اصلی داریم. لازم به ذکر است که در استدلال روزمره، این رتبه‌بندی قابل‌دستیابی است. برای حل مشکل توضیح این رتبه‌بندی در یک فرایند استدلال تقریبی، نیاز است که مفهوم دیگری که با درجات

[1] Precision
[2] Precision
[3] John Lukasiewicz
[4] Max Black
[5] Uncertainty
[6] Vague

[7] Basic Fuzzy Logic (BL)
[8] Residuated Lattices
[9] Imprecision
[10] Trueness

امکان و احتمال فرق دارد را در تعریف مجموعه اضافه کنیم. این مفهوم می‌تواند اعتبار[1]باشد [۱۱]. اعتبار یکی از ملزومات کیفیت علمی است.

از سوی دیگر تعمیم‌های مختلفی برای منطق فازی ارائه‌شده است. شاید معروف‌ترین آن‌ها درجه‌ای کردن درجه عضویت است که به منطق فازی درجه‌دو، سه، ... درجه n معروف است. همچنین، تعمیم در سطوح درجات عضویت مثلاً مجموعه‌های فازی بازه‌ای و تعمیم از طریق ترکیبات با سایر مجموعه‌ها مانند مجموعه فازی ناهنجار[2] و یا مجموعه ناهنجار فازی[3] نیز در این دسته قرار می‌گیرند. علاوه براین، مجموعه‌های سایه‌دار[4]، که دانه‌های اطلاعاتی بر اساس مجموعه‌های فازی هستند که هم مفهوم فازی دارند و هم بار محاسباتی را به خاطر محدودیت سه مقداره بودن منطقشان به‌صورت معین با مقدار ۱، سایه‌دار در بازه [0,1]، و خارج از 0 بیان می‌شوند هم در این دسته قرار می‌گیرند. منطق پیشنهادی توسط گیلس[5] [۱۲] یک منطق سودمندی مقدار[6] است که مقادیر فازی را بر اساس توابع هزینه[7] تعیین می‌کند. یک نوع تعمیم برای رویارویی با عدم قطعیت‌ها، استفاده از منطق فازی مبتنی بر مجموعه فازی شهودی[8]است [۱۳]. می‌توان این منطق را به‌عنوان منطق فازی تعمیم‌یافته در نظر گرفت که عدم قطعیت با استفاده هم‌زمان تابع عضویت و تابع عدم عضویت با فرض اینکه آن‌ها مکمل همدیگر نباشند مدل می‌شود [۱۴].

تفاوت منطق فازی توسعه‌یافته با این دسته از تعمیم‌ها، ساختاری است، بدین‌صورت که منطق فازی توسعه‌یافته دارای دو پودمان است که مربوط به دو بعد متفاوت (عدم قطعیت و درستی) می‌باشد، درحالی‌که تمام تعمیم‌های بالا به درجه‌ای کردن فقط یک بعد(عدم قطعیت یا میزان درستی) اکتفا کرده‌اند. این نکته باید بیان شود که به هرکدام از این ابعاد (عدم قطعیت و درستی) تمام تعمیم‌های بالا قابل‌اعمال است.

درواقع، منطق فازی توسعه‌یافته جهان بینی واقع‌گرایانه‌ای است که به کامل شدن شالوده منطق فازی می‌تواند کمک شایانی بکند و بازتاب این نکته است که همه‌ی آنچه تحت عنوان موجودیت شناخته می‌شوند درجه‌ای و ترکیبی هستند؛ همه به‌نوعی کدرند. این منطق معرف سیال بودن تصمیمات، حاکمیت بازی‌های اعتباری، تعامل رابطه‌های نوعاً متفاوت، بی مرز شدن مفاهیم، ایجاد مخالفت‌ها، فروریزی ارتباطات بااعتبار مطلق، ورود به دنیای نانموده، واقعی پنداشتن کاراکترهای نامشخص، تبدیل هست‌ها به نیست‌ها و تا حدی نیست‌ها، و نیست‌ها به هست‌ها و تا حدی هست‌ها می‌باشد. به عبارت واضح‌تر، استفاده از منطق فازی توسعه‌یافته بر اساس این تفکر است که یافتن یک پاسخ اثبات‌پذیر[9] درجه‌ای از روی یک مدل واقعی خیلی کاربردی‌تر از یک پاسخ اثبات‌پذیر از روی یک مدل غیرواقعی است.

بنابراین، برای ترجمه رتبه‌بندی در اغلب فرایندهای دنیای واقعی، باید دو مجموعه تعریف کنیم: مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های اعتبار. این دو مجموعه در دو فضای متفاوت تعریف می‌شوند اما مفهوم واحدی را به‌عنوان مجموعه در منطق فازی توسعه‌یافته که آن را ف-مجموعه(ف-انتقالی[10] مجموعه) می‌نامیم تشکیل می‌دهند.

مفهوم ف- انتقالی یکی از مفاهیم اساسی در منطق فازی توسعه‌یافته است. درواقع، ف- انتقالی نگاشتی از «یک» به «زیاد» است [۱۱] که در طی آن اساس «یک» باید حفظ‌شده باشد، یعنی، «زیاد» ویژگی‌های «یک» را باید نگه دارد. درواقع، یک ف- انتقالی مربوط به C که توسط f-C نشان داده می‌شود یک مفهوم فازی است. برای شرح موضوع معیار اعتبار شکل ۱ را در نظر بگیرید. در تصویر بالایی، C نمی‌تواند با C' برابر باشد و بنابراین در مورد اعتبار آن نمی‌توان صحبت کرد. اما، بعد از ف- انتقالی C چون تعداد بسیاری C به دست می‌آوریم، می‌توان با اطمینان بالایی نتیجه گرفت که C' در میان Cها در f-C قرار دارد. درنتیجه، می‌توانیم در مورد رتبه‌بندی با استفاده از اندازه اعتبار صحبت کنیم [۱۵].

این مقاله، بعد از یک توصیف مقدماتی از منطق فازی توسعه‌یافته به فرموله کردن این مسئله‌ای رتبه‌بندی ف-مجموعه‌ها. همچنین، روشی برای فرموله کردن تشخیص پزشکی با استفاده از ف-مجموعه ها ارائه می‌دهد که از روش رتبه‌بندی پیشنهادی استفاده می‌کند.

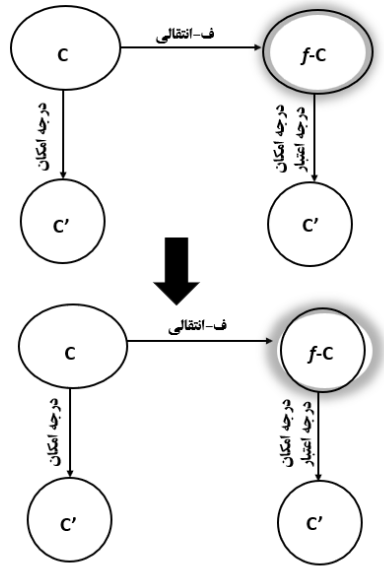
این مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. بخش دوم به روش‌های مطرح در رتبه‌بندی اعداد فازی می‌پردازد و بخش سوم نیز به تعریف و معرفی اصطلاحات اساسی از منطق فازی توسعه‌یافته مانند ف-مجموعه، برش-ϑ و برش- $\alpha\vartheta$ می‌پردازد. بخش چهارم رتبه‌بندی اعداد فازی توسعه‌یافته – شاخص f- S-A پیشنهادی را توضیح می‌دهد. همچنین، خصوصیات شاخص f- S-A نیز بیان می‌شود. بخش پنجم به مثال‌های شبیه‌سازی‌شده در مورد رتبه‌بندی می‌پردازد. بخش ششم نیز یک مطالعه موردی تشخیص پزشکی بیماری سندروم آفازیا برای ارزیابی کاربرد روش رتبه‌بندی پیشنهادی ارائه می‌دهد. درنهایت، در بخش هفتم جمع‌بندی مطالب آمده است.

۲- رتبه‌بندی

ساختار رتبه‌بندی اعداد فازی توسعه‌یافته در قالب ف-مجموعه‌ها، شبیه ساختار اعداد فازی است. برای رتبه‌بندی اعداد فازی، به‌طورکلی از یک تابع رتبه‌بندی استفاده می‌شود تا اعداد فازی به اعداد حقیقی تبدیل شود و پس‌ازآن بر اساس ترتیب اعداد حقیقی به‌دست‌آمده آن‌ها مرتب می‌شوند. بنابراین، برای رتبه‌بندی اعداد فازی توسعه‌یافته در قالب ف-مجموعه‌ها، می‌توان ف-مجموعه‌ها را به مجموعه‌های فازی با در نظر گرفتن مفهوم

[1] Validity
[2] Fuzzy rough sets
[3] Rough fuzzy sets
[4] Shadowed sets
[5] Giles
[6] Utility-valued
[7] Pay-off
[8] Intuitionistic Fuzzy Sets
[9] Provably Valid
[10] f-Transformation

امید فازی[1] [۱۶] تبدیل کرد و سپس با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی به اعداد حقیقی تبدیل و مرتب نمود. با توجه به اینکه بنا بر دانش نویسنده هنوز تابعی برای رتبه‌بندی ف-مجموعه‌ها یا اعداد در منطق فازی توسعه‌یافته به‌جز در [۱۷] ارائه نشده است و با توجه به اینکه روش پیشنهادی ارتباط مستقیمی با رتبه‌بندی اعداد فازی دارد در اینجا به ذکر مطالعات انجام‌شده در مورد اعداد فازی با ذکر کاستی‌های آن‌ها می‌پردازیم.



شکل ۱: شرط لازم معیار اعتبار[۲۸].

به‌طورمعمول در رتبه‌بندی اعداد فازی، اعداد فازی به حوزه اعداد حقیقی نگاشته می‌شوند، سپس با مرتب کردن این اعداد حقیقی می‌توان به مرتب کردن اعداد نگاشت یافته فازی پرداخت. از سال ۱۹۷۶، محققان بیش از ده‌ها روش رتبه‌بندی فازی را پیشنهاد داده‌اند. ادبیات مربوطه سه‌طبقه از رویکردهای رتبه‌بندی اعداد فازی را بر اساس غیر فازی سازی، مجموعه‌های مرجع و رابطه فازی گزارش داده‌اند[۱۸]. اولین بار جین[2] [۱۹] در مورد رتبه‌بندی اعداد فازی بحث کرد وی اظهار داشت که برای رتبه‌بندی اعداد فازی ، می‌توان از یک تابع رتبه‌بندی $F(R$) استفاده کرد.تا اعداد فازی را به اعداد حقیقی تبدیل کرده و سپس آن‌ها را مرتب نمود. در سال ۱۹۸۰، شاخص مرکز ثقل را برای رتبه‌بندی پیشنهاد شد[۲۰]. استفاده از مرکز ثقل جاذبه برای رتبه‌بندی در[۲۱] نیز به‌کاررفته است. از مفاهیم احتمالی مانند میانگین و انحراف معیار نیز برای رتبه‌بندی اعداد فازی در[۲۲] استفاده‌شده است. شبکه‌های عصبی مصنوعی برای رتبه‌بندی خودکار اعداد فازی پیشنهادشده است[۲۳]. محاسبه مساحت روش دیگری برای رتبه‌بندی اعداد فازی است که در[۲۴] پیشنهادشده است.

علاوه بر این، در [۲۵] یک شاخص بر مبنای مرکز ثقل پیشنهادشده است که در آن فاصله نقاط مرکزی از نقاط اصلی اعداد فازی نیز در محاسبه مرکز ثقل استفاده‌شده است. همچنین برای رتبه‌بندی از واریانس ضرایب استفاده شده است. استفاده از مفهوم برشα برای رتبه‌بندی در [۲۶] معرفی‌شده است. با در نظر گرفتن مساحت بین نقاط مرکزی و اصلی، رویکردی برای رتبه‌بندی در [۲۷] معرفی‌شده است. بااین‌حال ، رویکرد آن‌ها منجر به نتایج نقیضی شد که توسط [۲۸] گزارش‌شده است. روشی مبتنی بر مجموعه‌های برشα و نسبت سیگنال به نویز در [۲۹] ارائه‌شده است. روشی مبتنی بر مرکز ثقل [۳۰] و یک شاخص مرکز ثقل مبتنی برتاپسیس[3] [۳۱] برای رتبه‌بندی اعداد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهادشده است. توجه به ویژگی باور برای رتبه‌بندی در [۳۲] بحث شده است. رتبه‌بندی بر اساس غربالگری روش واژگانی در [۳۳] پیشنهاد شد، اما این رویکرد نمی‌توانست بین اعداد با مرکز یکسان تفاوت قائل شود. این اشکال بعداً در [۳۴] با استفاده از شاخص تعریف‌شده بر اساس درجه انحراف حل شد [۳۵]. استفاده از شعاع همپوشانی برای رتبه‌بندی اعداد فازی در [۳۶] پیشنهادشده است که به دلیل چندین نتیجه غیرشهودی بعداً مورد تجدیدنظر قرار گرفت[۳۷]. همچنین از به حداقل رساندن فاصله غیر فازی شده در روش رتبه‌بندی ارائه‌شده در[۳۸] استفاده‌شده است. بااین‌حال، این رویکرد برای تعداد خاصی که به‌طور شهودی با یکدیگر متفاوت بودند ، نتیجه یکسانی می‌داد. این رویکرد بعداً با استفاده از فن همسایگی- ε مورد تجدیدنظر قرار گرفت[۳۹]. علاوه بر این ، برای حل اشکال ذکرشده ، مرجع [۴۰] رویکردی را بر اساس اندازه اعداد فازی ذوزنقه‌ای پیشنهاد کرده است. بااین‌حال ، روش آن‌ها منجر به برابری چندین عدد مختلف شد. نویسندگان در [۴۱]متوجه ضعف رویکرد در[۴۰] شدند و تعریف معیار اندازه را اصلاح کردند.

تأثیر شکل‌های اعداد فازی نیز برای رتبه‌بندی در نظر گرفته‌شده است[۴۲]. رویکردی مبتنی بر ارتفاعات و گسترش اعداد فازی در [۴۳] موردبررسی قرارگرفته است. دو شاخص بر اساس نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک و همچنین مساحت سمت چپ و راست بین نقاط میانی و اعداد فازی برای رتبه‌بندی اعداد فازی در [۴۴] تعریف‌شده است. نویسندگان در [۴۵] مساحت سمت‌های مثبت و منفی اعداد فازی و ارتفاعات اعداد فازی برای ارزیابی رتبه‌بندی در نظر گرفتند. بااین‌حال، هنگامی‌که نتیجه صفر می‌شد، نتایج به نظر غیرمنطقی می‌رسید. بنابراین، این رویکرد بعداً اصلاح شد[۴۶]. یک رویکرد که از ترکیب محدب گرانش مرکزی بالا و پایین در سطح α در محاسبه فاصله استفاده می‌کند در [۴۷] موردبررسی قرارگرفته است. در[۴۸] ، روشی بر اساس محاسبه مساحت در سمت چپ و راست اعداد فازی برای رتبه‌بندی ارائه‌شده است. در نظر گرفتن عدد فازی ذوزنقه‌ای که از دو مثلث و یک مستطیل تشکیل‌شده است ، محاسبه مرکز ثقل آن‌ها رویکرد پیشنهادی دیگری است که در همین راستا ، در [۴۹] از فاصله اقلیدسی بین نقطه مرکز ثقل تا نقطه اصلی برای تعیین رتبه اعداد فازی استفاده‌شده است ، درحالی‌که در [۵۰]، نویسندگان با در نظر گرفتن مرکز ثقل و عوامل گسترش و مد برای رتبه‌بندی استفاده کرده‌اند . رویکرد رتبه‌بندی بر اساس مساحت ، مد ،

[1] Fuzzy Expectation
[2] Jain

گسترش و وزن برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای ارائه‌شده است[۵۱]. یک رویکرد مبتنی بر برش α برای غلبه بر کاستی‌ها در رویکردهای رتبه‌بندی فازی ارائه‌شده است[۵۲].

علاوه بر این، با استفاده از شبیه‌سازی عددی، یک مطالعه مقایسه‌ای در مورد رویکردهای مختلف رتبه‌بندی فازی در [۵۳] ارائه شده است. نویسندگان در [۵۴] سعی کردند با در نظر گرفتن اطلاعات مساحت چپ و راست بین اعداد فازی و همچنین نقاط مرکزی، راه‌حلی برای غلبه بر کاستی‌های رویکردهای مبتنی بر درجه انحراف ارائه دهند. اندازه‌گیری شباهت مبتنی بر فاصله در [۵۵] برای مقایسه اعداد فازی استفاده‌شده است. در[۵۶]، نتیجه مقایسه اعداد فازی به‌عنوان یک مجموعه فازی برای غلبه برعدم قطعیت بیشتر بیان‌شده است. در [۵۷] روش‌های مختلف رتبه‌بندی فازی با در نظر گرفتن گسترش فازی ارزیابی‌شده‌اند. ثابت‌شده است که با در نظر گرفتن یک کلاس خاص از شاخص‌های رتبه‌بندی ، می‌توان رتبه‌بندی اعداد فازی را به‌طور مؤثر انجام داد[۵۸]. علاوه بر این، در [۵۶] رویکردی ارائه‌شده است که مفاهیم مختلفی ازجمله بهینگی تصمیم‌گیرنده را برای رتبه‌بندی اعداد فازی در نظر می‌گیرد. همچنین، شکل لبه اعداد فازی در [۵۹] استفاده‌شده است. استفاده از مفهوم شباهت نیز در [۶۰] برای رتبه‌بندی پیشنهادشده است. استفاده از گسترش، مرکز، و چولگی نیز مورد بررسی قرارگرفته است [۶۱]. استفاده از مرکز و شعاع دایره میانی در مجموعه فازی [۶۲] نیز از روش‌های دیگر می‌باشد. در[۶۳]، یک روش رتبه‌بندی بر مبنای خصوصیات شکلی اعداد فازی پیشنهاد شده است. استفاده از ایده ساخت لگوها نیز در رتبه بندی اعداد فازی در [۶۴] استفاده شده است. بررسی رتبه بندی قابل قبول برای اعداد فازی با ترتیب جزئی نیز از جمله کارهای انجام شده می‌باشد[۶۵]. در [۶۶]، نیز مطالعه ای در مورد رتبه بندی بر مبنای غیر فازی سازی انجام شده است و در تصمیم گیری مورد ارزیابی قرار گرفته است.

یک مشکل پیش رو در توسعه کاربردی اکثر روش‌های ذکرشده، در نظر نگرفتن طبیعت نامعین اعداد فازی است. با توجه به مسئله نامعینی اثبات‌پذیری این قضیه در ف-مجموعه ها خیلی بغرنج‌تر می‌شود. روش‌های مختلف بیان‌شده بالا در بیشتر موارد به مسئله یکسانی جواب‌های متفاوتی داده‌اند. اکثر این روش‌ها، بعد از مدت کوتاهی از معرفی با مثال‌های نقضی روبرو شدند که کارایی آن‌ها را زیر سؤال برده است. بنابراین، در اینجا، یک روش سریع و ساده محاسباتی جدید با رویکردی متفاوت و با در نظر گرفتن ویژگی‌های مختلف مؤثر در ساختار اعداد ف-انتقالی در منطق فازی توسعه‌یافته باهدف غلبه بر کاستی‌های روش‌های رتبه‌بندی به نام شاخص f-S-A ارائه و پیشنهاد می‌شود. در این شاخص، رتبه‌بندی اعداد به‌وسیله تعامل عوامل گسترش، چولگی، مرکز و درک شهودی اعتبار بررسی می‌شود. بعد از تبدیل ف-مجموعه به عدد فازی و مقایسه با روش‌های دیگر، کارایی روش نشان از کاربردی بودن روش پیشنهادی می‌دهد. با در نظر گرفتن اعتبار کامل روش پیشنهادی قابل‌اعمال به اعداد فازی نیز می‌باشد.

۳- مجموعه ف- انتقالی

برای مدل کردن بهتر واقعیت، همان‌طور که بیان شد باید دو مجموعه داشته باشیم: مجموعه‌های فازی/احتمال و مجموعه‌های اعتبار. این دو مجموعه باهم ترکیب می‌شوند و مفهوم مجموعه در منطق فازی توسعه‌یافته که آن را ف-مجموعه می‌نامیم را تشکیل دهند. اما موضوع مهم تعیین مجموعه اعتبار هست. ابهام موجود در تعیین اعتبار به دلیل ماهیت تدریجی آن است [۱۵]، ابهام آن به همان صورتی نمود پیدا می‌کند که درجه معین بودن از درجه درستی [۶۷] متمایز است. درواقع، در بیشتر مواقع، در مورد کل موضوع اظهارنظر می‌کنیم، درحالی‌که تنها بخشی از کل واقعاً وجود دارد و بنابراین طبیعتاً تنها می‌توانیم در مورد اعتبار همان بخش موجود صحبت کنیم[۶۸]. برای مثال، فرض کنید مجموعه X شامل عناصری با خاصیت ϱ باشد و ϖ یک شیء با خاصیت ϱ باشد. اگر مطمئن باشیم که ϖ در مجموعه X است، آن‌وقت می‌توانیم درجه اعتبار $\varpi \in X$ را به دست بیاوریم. بااین‌حال، زمانی که معین نیست که آیا ϖ در مجموعه X وجود دارد یا نه، تنها در مورد امکان یا احتمال موجود بودن $\varpi \in X$ می‌شود صحبت کرد و نمی‌توانیم در مورد اعتبار $\varpi \in X$ صحبت کنیم.

۳-۱ ف-مجموعه

تعریف زیر برای ف-مجموعه انتقالی ارائه‌شده است.

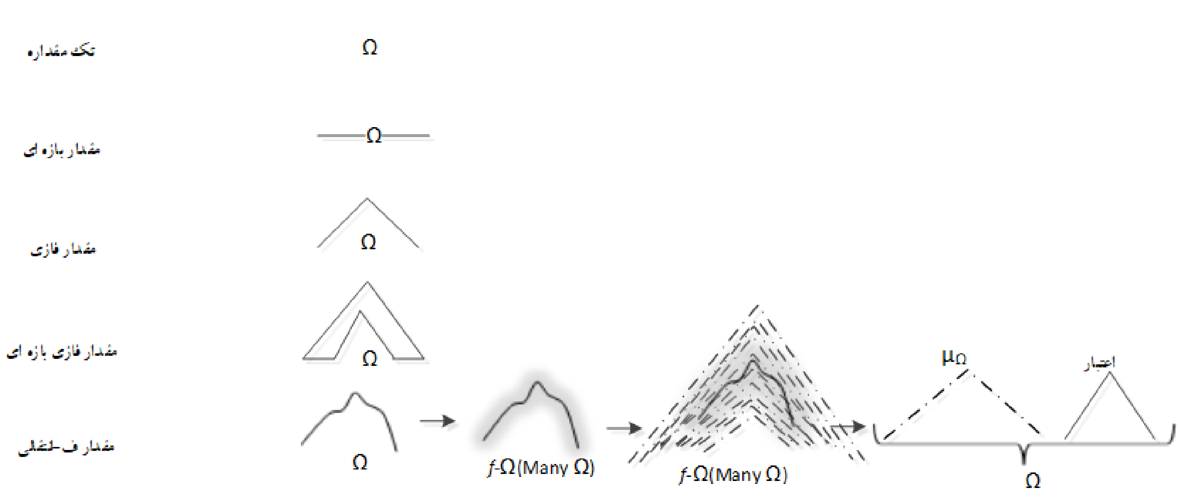
تعریف ۱[۱۵]- فرض کنید X یک مجموعه جهانی، x یک عنصر عمومی از X و A مجموعه‌ای فازی یا کلاسیک باشد، پس‌ازآن ف-مجموعه با عبارت زیر:

$$f\text{-}A = A(x, \mu_{f\text{-}A}) \subset X \quad (1)$$

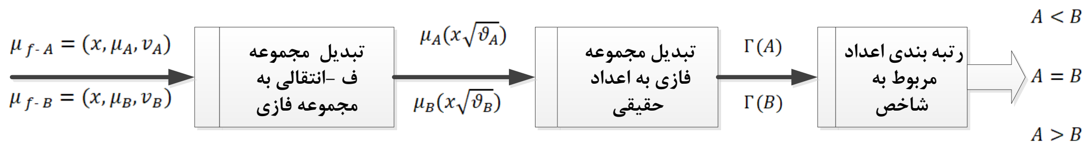
به‌عنوان یک گزاره مدرج به فرم یک جفت متشکل از یک گزاره فازی و یک عنصر اعتبار تعریف می‌شود که در آن $\mu_{f\text{-}A}$ با توابع عضویت امکان و اعتبار به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A: X \to [0,1] \quad (2)$$
$$\nu_A: X \to [0,1]$$

لازم به ذکر است که $A(x, \mu_{f\text{-}A})$ را توانیم به‌صورت $A(x, \mu_A, \nu_A)$ بازنویسی کنیم. این فرمول‌بندی ف-مجموعه، مبین دو حوزه موازی است که در فضاهای جداگانه‌ی امکان و اعتبار کار می‌کنند. تفاوت بین ف-مجموعه و مجموعه فازی مربوط به تابع عضویت اعتبار است. درواقع، با توجه به مفهوم ف- انتقالی [۱۵]، اگر عدم قطعیت مربوط به اعتبار از بین برود، f-C به C تبدیل می‌شود. توصیفات مختلف از شیء دلخواه Ω در شکل ۳ نشان داده‌شده است.



شکل ۲: نمایش‌های متفاوت المان Ω [۶۹]



شکل ۳: ساختار کلی روند رتبه‌بندی پیشنهادی

۲-۳ برش- ϑ

به‌عنوان درجه امکان، مفاهیم جدیدی μ_Aدر این بخش، با در نظر گرفتن ϑ یا را که به کمک آن‌ها می‌توانیم مجموعه را در قالب مجموعه‌های فازی قطعی[1] بیان کنیم را معرفی می‌کنیم. فرض کنید که نماد A_ϑ مبین برش- ϑ ف-مجموعه $f\text{-}A$ باشد.

تعریف ۲- فرض کنید X یک مجموعه جهانی، x یک عنصر عمومی از X و $f\text{-}A$ ف-مجموعه باشد، یک برش- ϑ، ف-مجموعه $f\text{-}A$، یک مجموعه فازی از همه x هایی است که درجات اعتبار آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی با ϑ باشد [۶۹]:

$$A_\vartheta = [(x,\mu_A,v_A)|(x,\mu_A,\vartheta), v_A \ge \vartheta, \vartheta \in [0,1]] \quad (۳)$$

را نیز برای ف-مجموعه αتوجه داشته باشید که می‌توانیم مفهوم برش- که درجه مجموعه‌ای است [۶۹]$f\text{-}A$مجموعه - ف- α-برش. تعریف کنیم باشد. به‌عبارت‌دیگر: αعضویت فازی آن بزرگ‌تر از یا برابر با

$$A_\alpha = [(x,\mu_A,v_A)|(x,\alpha,v_A), \mu_A \ge \alpha, \alpha \in [0,1]] \quad (۴)$$

بنابراین، در هر دو فضا می‌توان عملگر برش را اعمال کرد و این عمل در صورت اعمال همزمان منجر به تولید مجموعه قطعی می‌شود.

۳-۳ اصل P/I[2]

اصل P/I می‌گوید که $g(f\text{-C})$ تقریباً برابر ف- انتقالی $g(C)$ است [۱۱]. به‌عبارت‌دیگر:

$$g(f\text{-C})\ f\text{=}\ f\text{-}g(\text{C}) \quad (۵)$$

که f=- به معنی تساوی فازی است. به‌عبارت‌دیگر رابطه بالا به‌صورت $g(f\text{-C})$ تقریباً برابر با ف- انتقالی $g(C)$ بیان می‌شود.

٤- ساختار رتبه‌بندی پیشنهادی f-S-A

برای رتبه‌بندی ف-مجموعه‌ها، پیشنهاد می‌کنیم که ابتدا ف-مجموعه‌ها را به مجموعه‌های فازی با در نظر گرفتن مفهوم امید فازی [۱۶] تبدیل شوند و سپس با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی به اعداد حقیقی نگاشته شوند. ساختار کلی روش پیشنهادی در شکل ۳ مشخص‌شده است.

باید اشاره شود که مفهوم امید فازی بیان می‌کند که با گسترش افقی یک مجموعه فازی به‌اندازه مقدار حقیقی مثبت میزان اطلاعات مجموعه فازی تغییر نمی‌کند [۱۶]. امید فازی یک مجموعه فازی $(D\ ,\mu_D)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$E_D = \int_Z z\mu_D(z)dz \quad (۶)$$

اگر گسترش افقی آن‌ها را با D' نشان دهیم آنگاه تابع عضویت آن به‌صورت $(D'\ ,\mu_D(\sqrt{\vartheta}\text{z}))$ بیان می‌شود. می‌توان گفت:

[2] Precisiation/Imprecisiation Principle

[1] Crisp

$$E_{D'}(z) = E_{D_{\sqrt{\vartheta}}}(z), \tag{۷}$$

بنابراین، برای رتبه‌بندی دو ف-مجموعه ی زیر :

$$\mu_{f\text{-}B} = (x, \mu_B, v_B) \tag{۸}$$
$$\mu_{f\text{-}A} = (x, \mu_A, v_A)$$

با اعمال اعتبار روی مجموعه‌های μ_A, μ_B به میزان $\sqrt{\vartheta_A}, \sqrt{\vartheta_B}$ توابع $\sqrt{\vartheta_A}\mu_A$ ، $\sqrt{\vartheta_B}\mu_B$ را به دست می‌آوریم. بعدازآن با استفاده از مفهوم امید فازی از معادل‌های آن‌ها

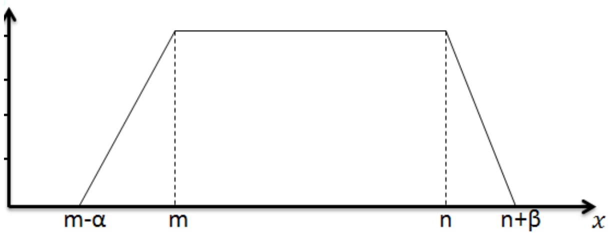
$$\mu_B(x\sqrt{\vartheta_B}) \tag{۹}$$
$$\mu_A(x\sqrt{\vartheta_A})$$

که مجموعه‌های فازی متناظر می‌باشند استفاده می‌کنیم. بنابراین، شاخصی برای تبدیل اعداد فازی به اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم و سپس آنرا با میزان اعتبار تحت نظارت می‌گیریم. آن‌وقت این مجموعه‌های فازی توسط یک تابع رتبه‌بندی به فضای اعداد حقیقی نگاشته می‌شوند و رتبه‌بندی انجام می‌شود. برای تعریف این تابع رتبه‌بندی توجه کنید که عناصر مؤثر در رتبه‌بندی را می‌توان در دو گروه اصلی دسته‌بندی نمود: گروه اول معرف محوریت مرکز است درحالی‌که گروه دوم شامل عواملی مانند گسترش و چولگی هست. همچنین دسته سومی وجود دارد که اثر درک شهودی انسان در آن محوریت دارد.

برای رسیدن به یک مبنای یکسان برای رتبه‌بندی، اعداد با تابع عضویت ذوزنقه‌ای انتخاب‌شده‌اند. اعداد فازی ذوزنقه‌ای به‌وسیله چهار عدد حقیقی که به‌صورت $A(m,n,\alpha,\beta)_{LR}$ می‌باشند، تعریف می‌گردد. یک عدد فازی ذوزنقه‌ای در شکل ۴ نمایش داده‌شده است. این عدد فازی شامل دو بخش خطی چپ و راست است. تابع عضویت آن به‌صورت زیر است [۳۳]:

$$L(0) = 1، R(0) = 1 \tag{۱۰}$$
$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & -\infty < x < m \\ 1 & [m,n] \\ R(\frac{x-n}{\beta}) & n < x < +\infty \end{cases}$$

اگر $m = n$ باشد، تابع عضویت مثلثی به وجود می‌آید.



شکل ۴: شمای کلی عدد فازی ذوزنقه‌ای.

در حالت کلی، عامل مهم در رتبه‌بندی، مرکز می‌باشد. در مواردی که ما با مراکز مختلف روبه‌رو هستیم، مرکز یک مفهوم شهودی برای افزایش میزان اطمینان از درستی رتبه به‌دست‌آمده است. اما از طرف دیگر، زمانی که اعداد دارای مراکز یکسانی باشند رتبه‌بندی دچار مشکل می‌شود. عامل بعدی مربوط به میزان گسترش عدد فازی است. این عامل، عامل تأثیرگذار دریافتن رتبه درزمانی که اعداد فازی دارای مراکز یکسان می‌باشند است.

یک گروه از اعداد فازی به‌صورت $A_1, A_2,\dots, A_q$ فرض کنید که

$$A_i(m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR}, i = 1,\dots, q \tag{۱۱}$$

که $m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i \in R$ و $m_i \le n_i$ و $\alpha_i, \beta_i \ge 0$ می‌باشد. برای اندازه‌گیری عامل گسترش از لبه‌های اعداد فازی و طول تکیه‌گاه یعنی فاصله بین $m_i - \alpha_i$ و $n_i + \beta_i$ که با $D(Supp(A_i))$ نشان می‌دهیم استفاده می‌شود.

عامل مهم بعدی عامل چولگی می‌باشد. برای تعریف کردن این عامل، فرض کنید

$$G_i = \big((n_i + \beta_i) + (m_i - \alpha_i)\big)/2 \tag{۱۲}$$

مرکز تکیه‌گاه A_i باشد. چولگی که طبیعتاً معرف انحراف از مرکز تکیه‌گاه است را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$G_{si} = G_i - C_i \tag{۱۳}$$

که C_i مرکز عدد فازی است که دارای بالاترین درجه عضویت است. همچنین، با در نظر گرفتن عبارت زیر:

$$G_{avg} = \sum_{i}^{q} G_i/q \tag{۱۴}$$

چولگی نسبی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{G_{Rs_i}} = \boldsymbol{G_{avg}} - \boldsymbol{G_{s_i}} \tag{۱۵}$$

حالا شاخص f-S-A با ترکیب کردن سه عامل مرکز، گسترش، و چولگی نسبی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\Gamma(A_i)} = \frac{|\boldsymbol{m_i}|^\lambda + |\boldsymbol{n_i}|^\lambda}{\boldsymbol{G_{Rs_i}}\sqrt[\lambda]{\boldsymbol{D(Supp(A_i))}}} \tag{۱۶}$$

که $|.|$ مبین قدر مطلق است. توان λ یک عدد صحیح مثبت است که مبین میزان اطمینان تصمیم‌گیرنده در مورد یک عدد خاص می‌باشد. درروش پیشنهادی آن‌ها از طریق یک روش بهینه و با واردکردن مفهوم تعادل در منطق فازی توسعه‌یافته به دست می‌آوریم.

برای توضیح بیشتر، اجازه بدهید فرض کنیم که می‌خواهیم اعداد فازی در $D = \{A_1,\dots A_q\}$ را مرتب کنیم و $\boldsymbol{A_{f-S-A}}$ بالاترین رتبه را بر اساس شاخص $f\text{-}S\text{-}A$ داشته باشد. آنگاه مجموعه حداقل A_{min} و مجموعه حداکثر A_{max} به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۳۴]:

$$\mu_{A_{min}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_{max}-x}{x_{max}-x_{min}} & x\in Supp\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۱۷)$$

و

$$\mu_{A_{max}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{min}}{x_{max}-x_{min}} & x\in Supp\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۱۸)$$

که

$$\mathrm{Supp}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Supp}(A_i) \qquad (۱۹)$$

تکیه‌گاه D است و x_{min} مینیمم و x_{max} حداکثر $Supp$ است. فرض کنید که شاخص‌های f-S-A مرتبط با آن‌ها به ترتیب $\Gamma_{A_{min}}$ و $\Gamma_{A_{max}}$ باشند. حالا رتبه‌بندی را به‌صورت(($\Gamma_{A_{f-S-A}}$ باید هر چه نزدیک‌تر به $\Gamma_{A_{max}}$ و هر چه دورتر از $\Gamma_{A_{min}}$ باشد)) تفسیر می‌کنیم. حال برای توصیف و ترجمه این جمله در شاخص پیشنهادی ابتدا اصل مکمل در منطق فازی توسعه‌یافته را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم که برمبنای اصل P/I بیان می‌شود و با $\overset{f--}{A}$ نمایش داده می‌شود که معرف ف-مکمل A است [۱۵]:

$$F(\bar{A})=1-F(A) \qquad (۲۰)$$

سپس،

$$F(\overset{f--}{A}) \overset{using\ P/I}{\cong} f\text{-}F(\bar{A}) \overset{using\ P/I}{\cong} f\text{-}F(\bar{A}) = f\text{-}(1-F(A)) \overset{using\ P/I}{\cong} f\text{-}1-f\text{-}F(A)) \qquad (۲۱)$$

درواقع، اصل مکمل کاربرد زیادی برای بیان ادراک انسانی دارد. یکی از مصادیق این اصل کاربرد در مفاهیم مطرح زبان طبیعی که به‌صورت زوج‌های متضاد مانند «کم‌وبیش» بیان می‌شوند و تلویحاً تضاد را به‌عنوان میزان بی‌خبری بیان می‌کنند می‌باشد. این عبارات بدون بیان معنای ویژه‌ای مبین شکل «هر چه بیشتر یکی، هر چه کمتر دیگری» می‌باشند. در شاخص پیشنهادی نیز این تفسیر به‌وضوح دیده و فرموله شده است. در حقیقت، این تفسیر را در سطح متفاوتی از مسئله اصلی پردازش می‌کنیم. این سطح با استفاده از اصل مکمل و بر مبنای کنش هر دو بخش‌بر حسب اعتبار یعنی درستی بیشتر یکی، درستی کمتر دیگری می‌باشد. رابطه میزان اعتبار هر چه A بیشتر درست باشد، مکمل $\bar{A}$ کمتر درست است می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$H(\bar{A}|P) = -log_2[1-2^{-H(A|P)}] \qquad (۲۲)$$

بیان شود که $H(A|P)$ معرف رابطه شرطی بین A و P است [۷۰]. بنابراین، رابطه

$$v(\bar{A}) = -log_2[1-2^{-v(A)}] \qquad (۲۳)$$

را برای میزان اعتبار مکمل در نظر می‌گیریم.

از طرف دیگر، در فرایندی که برای رتبه‌بندی پیشنهاد دادیم (شکل ۳) از این موضوع استفاده کردیم که اصولاً با پایین آوردن استانداردهای منطق فازی ازلحاظ دقت و میزان تطبیق در نتایج می‌توان به نتایج منطق فازی توسعه‌یافته که نزدیک به جواب درست می‌باشند رسید. این توانایی وقتی ارزشش بیشتر می‌شود که تلاش‌های مکرر جهت ایجاد یک نظریه دقیق به نتیجه نمی‌رسد. اما این مسئله درزمانی که دقت لازم داریم مانند رتبه‌بندی موجب بغرنج شدن شرایط می‌شود. برای حل این موضوع، در این مقاله ما موضع بهینگی مقید شاخص پیشنهادی را مربوط به موضوعی کردیم که آن را به‌عنوان مفهوم تعادل در پیش‌بینی تصمیم‌گیری‌های هم‌زمان می‌شناسیم.

مفهوم تعادل، یکی از مهم‌ترین مفاهیم است [۷۱]. مفهوم تعادل برای تجزیه‌وتحلیل نتایج ناشی از اثر متقابل چندین عنصر استفاده می‌شود. یک دید ساده این است که اگر تصمیم‌های مختلف را به‌صورت جداگانه بررسی کنیم نمی‌توانیم پیش‌بینی درست از نتیجه انتخاب‌های آنان را ارایه دهیم؛ بلکه، باید آنچه هریک از آنان انجام می‌دهند را با در نظر گرفتن تعامل تصمیم‌های افراد دیگر بررسی کنیم. حال بیاییم این مطلب را به‌صورت ریاضی بیان کنیم.

فرض کنید که یک مجموعه Ψ که غیر تهی است وجود دارد. هر جواب تقریبی با میزان اعتبار قابل قبولی به یک عضو از آن میل می‌کند. مجموعه Ψ را مرکز ف-انتقالی تعادل در فضای C که خود مجموعه‌ای ماکزیمال نسبت به مفهوم تعادل است تعریف می‌کنیم. حالا تعریف زیر را که S فاصله جواب تقریبی از جواب واقعی است به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

تعریف۳ - نگاشت ρ را یک تابع فاصله تعریف می‌کنیم:

اگر $\rho(x) \geq 0$ وقتی x یک جواب تقریبی باشد.

اگر $\rho(x^*) = 0$ وقتی x^* متعلق به مجموعه Ψ باشد.

حال این تابع را بر اساس اصل توسعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(x) = \sup_{S\ \text{اعضای}}(\text{اعتبارها}) - \sup_{\Psi\ \text{اعضای}}(\text{اعتبارها})$$

برای اینکه همگرایی تعادل تضمین شود، تابع بهینه‌سازی مقید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(p)\begin{cases}\min \rho(x)\\ subject\ to\ \ x\ is\ an\ approximate\ solution\end{cases}$$

حالا با توجه به موارد توضیح داده‌شده در مورد تعامل اصل مکمل و تعادل با به کار بردن شاخص بهینگی [۷۲] برای ترکیب کردن $\Gamma_{A_{min}}$ و

$\Gamma_{A_{max}}$، مسئله بهینگی بر اساس پارامتر آزاد λ که به اعتبار تعریفی آن بستگی پیدا می‌کند به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Min\left(\Gamma_{A_{max}}\right) \quad \text{subject to } (\max v_A(\lambda) - \min v_{\overline{A}}(\lambda)) \tag{۲۴}$$

که منجر به λ_1 با اعتبار $v_A(\lambda_1)$ و $v_{\overline{A}}(\lambda_1)$ می‌شود . همچنین:

$$Min\left(\Gamma_{A_{min}}\right) \quad \text{subject to } (\max v_A(\lambda) - \min v_{\overline{A}}(\lambda)) \tag{۲۵}$$

که منجر به λ_2 با اعتبار $v_A(\lambda_2)$ و $v_{\overline{A}}(\lambda_2)$ می‌شود. k_λ شاخص اعتبار را که در فاصله $[0,1]$ تعریف می‌کنیم و مبین دیدگاه اعتبار تصمیم‌گیرنده است با استفاده از t-norm محاسبه می‌شود. به‌صورت پیش‌فرض در اینجا از تابع مینیمم استفاده می‌کنیم و رابطه زیر را ارائه می‌دهیم.

$$k_\lambda = (\min(v_A(\lambda_1), v_A(\lambda_2)) + \min(v_{\overline{A}}(\lambda_1), v_{\overline{A}}(\lambda_2)))/2 \tag{۲۶}$$

نوآوری اصلی روش پیشنهادی در محاسبه این شاخص این است که در مقاله حاضر از تعامل بهینگی و تعادل در تعیین k_λ در تابع رتبه‌بندی استفاده‌شده است تا درجه اعتبار نتیجه افزایش پیدا کند. حالا، مقدار λ را می‌توان با ترکیب محدب λ_1 و λ_2 به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\lambda = k_\lambda \lambda_1 + (1 - k_\lambda)\lambda_2} \tag{۲۷}$$

بر طبق این شاخص پیشنهادی، رتبه‌بندی بر اساس قوانین زیر انجام می‌شود:

قانون اول :

$$A_i \succ A_j \quad \text{if and only if} \quad \Gamma(A_i) > \Gamma(A_j) \tag{۲۸}$$

قانون دوم :

$$A_i \prec A_j \quad \text{if and only if} \quad \Gamma(A_i) < \Gamma(A_j)$$

قانون سوم :

$$A_i \sim A_j \quad \text{if and only if} \quad \Gamma(A_i) = \Gamma(A_j)$$

که ~ نشان‌دهنده علامت تساوی فازی است.

ملاحظه ۱: اگر اعداد فازی بااعتبار کامل که باید رتبه‌بندی شوند دارای یکی از شرایط زیر باشند:

الف) دارای مرکز صفر باشند ب) زمانی که حداقل یک C_i صفر و حداقل یک مرکز مثبت وجود داشته باشد، ج) حداقل یک $D(S(A_i))$ صفر باشد، د) حداقل یک G_{Rs_i} صفر باشد آن‌وقت *f-S-A* به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(A_i) = \frac{|m_i|^\lambda + |n_i|^\lambda + \varepsilon}{G_{Rs_i} + sgn(G_i)\sqrt[\lambda]{D(S(A_i))}} \tag{۲۹}$$

که sgn تابع علامت و ε عدد مثبت کوچک است. معادله (۲۹) را *شاخص* *f- S-A-e* می‌نامیم.

برای روش پیشنهادی ترتیب $\succeq(\preceq)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_1 \succeq A_2 \quad (A_1 \preceq A_2) \quad \text{if and only if} \quad A_1 \succ A_2 \text{ or } A_1 \sim A_2 \; (A_1 \prec A_2 \text{ or } A_1 \sim A_2) \tag{۳۰}$$

چهار مجموعه ف-انتقالی و شاخص‌های *f- S-A* و *f- S-A-e* را در نظر بگیرید. به‌راحتی قابل‌اثبات است که خواص زیر (برگرفته از [۷۳] و [۱۷]) در مورد شاخص پیشنهادی صادق هستند:

جدول ۱: خواص رتبه‌بندی روش ***f- S-A***

خاصیت اول : $A_1 \succeq A_1$.	خاصیت دوم: اگر $A_1 \succeq A_2$ و $A_1 \preceq A_2$ آن‌وقت $A_2 \sim A_1$.	خاصیت سوم: اگر $A_1 \succeq A_2$ و $A_2 \succeq A_3$ آن‌وقت $A_1 \succeq A_3$.
خاصیت پنجم: با فرض اینکه S و S' دو مجموعه فازی اختیاری و محدود برای دو عدد فازی A_1 و A_2 در $S \cap S'$ باشند؛ آن‌وقت $A_1 \succ A_2$ روی S' است اگر و فقط اگر $A_1 \succ A_2$ روی S باشد.		
خاصیت چهارم: اگر $\inf \text{supp}(A_1) > \sup \text{supp}(A_2)$ آن‌وقت $A_1 \succ A_2$.	خاصیت ششم: اگر $A_1 \succeq A_2$ آن‌وقت $A_1 \oplus A_3 \succeq A_2 \oplus A_3$.	خاصیت هفتم: اگر $A_1 \succeq A_2$ آن‌وقت $A_1 A_3 \succeq A_2 A_3$ وقتی $A_3 \succeq 0$.
خاصیت هشتم: اگر $A_1 \preceq A_2$ آن‌وقت $-A_1 \succeq -A_2$.	خاصیت نهم: اگر $A_1 \sim -A_1$ و $A_2 \sim -A_2$ آن‌وقت $A_1 \preceq A_2$ $-A_1 \preceq -A_2$.	

چهار ف-مجموعه را با استفاده از امید ریاضی تبدیل به مجموعه‌های فازی می‌کنیم. حالا، اگر Ψ مجموعه‌ای که شامل رتبه درست باشد و x رتبه به‌دست‌آمده با شاخص پیشنهادی باشد، قضیه زیر را که بیان می‌کند شاخص به سمت رتبه درست همگرا می‌شود را در نظر می‌گیریم و اثبات می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.4.2]

قضیه ۱- برای هر جواب تقریبی x، شاخص پیشنهادی همگرا به رتبه درست است اگر و فقط اگر (p) همگرا باشد.

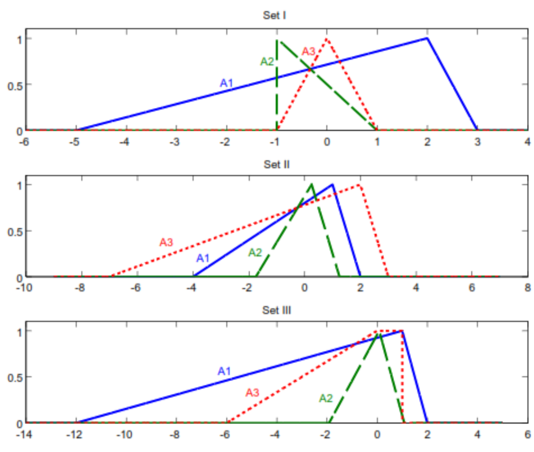
اثبات-*بخش اگر*: چون فرض کردیم مجموعه Ψ تهی نیست کافی است ثابت کنیم که x^* متعلق به مجموعه Ψ یک جواب (p) است که $\rho(x^*) = 0$ است. جواب تقریبی x دارای اعتبار غیر صفر است پس متعلق به مجموعه ماکزیمال S می‌باشد. میل کردن جواب‌های تقریبی به سمت جواب‌های مجموعه Ψ، ازلحاظ معنی معادل حداقل کردن $\rho(x)$ هست. بنابراین، (p) هم دارای جواب x^* خواهد بود. درنتیجه، همگرایی شاخص همسو با همگرایی (p) است که معادل روابط (۱۰) و (۱۱) می‌باشد .

بخش آنگاه: فرض کنید x جواب تقریبی برای (p) باشد، آنگاه می‌توان یک ε در نظر گرفت طوری که $\rho(x) < \varepsilon$ باشد. این یعنی، تفاوت اعتباری x با مجموعه اعتبار حداکثر Ψ در حد ε است. پس x متعلق به مجموعه ماکزیمال S است و به مجموعه Ψ میل می‌کند. ■

۵- مثال‌هایی برای ارزیابی روش رتبه‌بندی

مثال ۱: سه دسته اعداد فازی [۳۲] در معادله (۱۹) را که در شکل ۵ نمایش داده‌شده‌اند در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{Set I: } A_1(2,2,7,1)_{LR},\\ &A_2(-1,-1,0,2)_{LR},\ A_3(0,0,1,1)_{LR}.\\ &\text{Set II: } A_1(1,1,5,1)_{LR},\\ &A_2(1/4,1/4,2,1)_{LR},\ A_3(2,2,9,1)_{LR}.\\ &\text{Set III: } A_1(1,1,13,1)_{LR},\\ &A_2(1/12,1/12,2,1)_{LR},\ A_3(0,1,6,0)_{LR}.\end{aligned} \tag{۳۱}$$

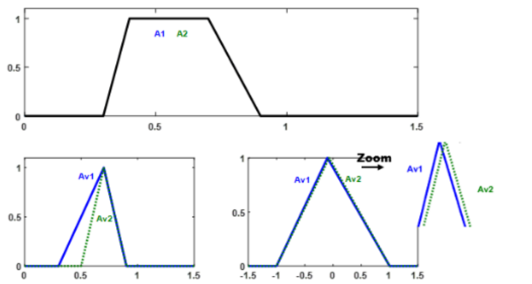


شکل ۵: اعداد فازی مثال ۲.

جدول ۲ نتایج را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کند. برای Set I، نتایج اغلب روش‌ها شبیه هم است، اما روش پیشنهادی هم ازلحاظ محاسباتی ساده‌تر است و هم دقت بیشتری دارد. تفاوت اصلی نتیجه‌ها مربوط به Set III است، که اغلب نتایج به‌صورت $A_1 \prec A_3 \prec A_2$ است درحالی‌که روش پیشنهادی و روش [۱۷] نتیجه $A_2 \prec A_1 \prec A_3$ را ایجاد کرده‌اند. اگر به شکل ۸ نگاه کنیم با توجه به بازه $[m-\alpha, n+\beta]$ نتیجه روش پیشنهادی منطقی‌تر به نظر می‌رسد.

در مثال‌های بعدی، ما تأثیر تعیین k_λ با روش پیشنهادی و روش بیان‌شده در مرجع [۱۷] مقایسه می‌کنیم.

مثال ۲: در این مثال دو مجموعه ف-انتقالی که دارای مجموعه فازی یکسان و اعتبار مختلف می‌باشند را رتبه‌بندی می‌کنیم. مجموعه فازی را به‌صورت $A_{1,2}(0.3,0.4,0.7,0.9)_{LR}$ و مجموعه اعتبار اول را به‌صورت مجموعه اعتبار $A_{V1}(-1/14,-1/14,0.93,1.07)_{LR}$ دوم را به‌صورت $A_{V2}(-1/10,-1/10,0.93,1.07)_{LR}$ در نظر بگیرید. این مجموعه‌ها در شکل ۶ مشخص‌شده‌اند. نتایج در جدول ۳ آمده است. در حالت a دیده می‌شود هر دو روش نتایج یکسانی دارند اما در حالت b نتایج درست متعلق به روش پیشنهادی می‌باشد و روش‌های دیگر رأی به یکسانی ف-مجموعه ها می‌دهند که با توجه به تفاوت مجموعه اعتبار منطقی نیست.



شکل ۶: مجموعه فازی (بالا) مجموعه اعتبار فازی (پایین).

باوجودی که دو مجموعه اعتبار به هم نزدیک‌اند ولی شاخص به‌دست‌آمده درروش پیشنهادی فاصله کافی دارند که باعث می‌شود تأثیر تقریب در محاسبه به حداقل برسد و تفاوت در اعتبار درنتیجه تأثیر بگذارد. این موضوع در مواردی که دو شکل بسیار به هم نزدیک‌اند طوریِ که تفکیک آن‌ها مشکل می‌شود بسیار کارساز است.

جدول ۳: مقایسه نتایج رتبه‌بندی مثال ۲

نتیجه	A_2	A_1	مرجع	حالت a
$A_1 \prec A_2$	۲/۴۴۶۷	۱/۷۵۳۰	[۱۷]	
$\boldsymbol{A_1 \prec A_2}$	۳/۱۳۵۲	۱/۰۲۰۱	$f\text{-}S-A$	
نتیجه	A_2	A_1		حالت b
$A_1 \sim A_2$	-۰/۱۰۱۰	-۰/۱۰۱۰	[۱۷]	
$\boldsymbol{A_1 \prec A_2}$	-۰/۱۹۰۴	-۰/۱۰۰۷	$f\text{-}S-A$	

جدول ۲: مقایسه نتایج رتبه‌بندی روش ***f- S-A*** با سایر روش‌ها.

مجموعه	مرجع	A1	A_2	A_3	نتیجه
Set I	[۳۴]	۱/۸۶۷	0	۳/۱۱۱	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۲۸]	محاسبه نمی‌شود	محاسبه نمی‌شود	محاسبه نمی‌شود	-
	[۳۸]	۰/۵	-۰/۵	۰	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۳۹]	۰/۵	-۰/۵	۰	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۴۰]	۳	-۱/۶۶۷	۰	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۴۹]	۲/۱۶۲	۰/۷۸۶	۰/۰۸۳	$A_3 \prec A_2 \prec A_1$
	[۴۱]	۳	-۱/۶۶۷	۰	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۵۰]	۰/۵۱۸	-۰/۳۰۲	۰	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۱۷]	۱/۰۶۱	-۱/۰۶۱	۰	$\boldsymbol{A_2 \prec A_3 \prec A_1}$
	***f*-S-A**	**۳/۰۰۹**	**-۲/۳۱۰**	**۰**	$\boldsymbol{A_2 \prec A_3 \prec A_1}$
Set II	[۳۴]	۱/۲۲۹	۴/۰۵۹۹	۰	$A_3 \prec A_1 \prec A_2$
	[۲۸]	-۰/۰۳۳	-۰/۰۶۵	-۰/۶۶۷	$A_3 \prec A_2 \prec A_1$
	[۳۸]	۰	۰	۰	$\sim A_2 \sim A_3\ A_1$
	[۳۹]	ε^2	$\varepsilon^2/2$	$2\varepsilon^2$	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۴۰]	۰/۶۶۶	۰/۱۶۷	۱/۳۳۳	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۴۹]	۱/۲۹۴	۰/۲۶۳	۲/۶۶۸	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۴۱]	۰/۶۶۶	۰/۱۶۷	۱/۳۳۳	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۵۰]	۰/۲۱۶	۰/۰۵۴	۰/۴۳۲	$A_2 \prec A_1 \prec A_3$
	[۱۷]	۰/۸۹۱	-۰/۱۲۴	۰/۸۶۷	$\boldsymbol{A_2 \prec A_3 \prec A_1}$
	***f*-S-A**	**۲/۰۶۱**	**-۱/۰۵۰**	**۱/٤۷۱**	$\boldsymbol{A_2 \prec A_3 \prec A_1}$
Set III	[۳۴]	۰	۶/۵۲۱	۲/۵۱۹	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
	[۲۸]	-۳	-۰/۲۵	-۱/۳۷	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
	[۳۸]	-۲	-۰/۱۶۷	-۱/۳۳۳	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
	[۳۹]	۲	-۰/۱۶۷	-۱/۳۳۳	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
	[۴۰]	۰	۰	۰	$\sim A_2 \sim A_3\ A_1$
	[۴۹]	۴/۰۴۲	۰/۲۶۳	۳/۳۷۱	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۴۱]	۷	۱/۵	۳	$A_2 \prec A_3 \prec A_1$
	[۵۰]	-۰/۱۲۹۶	-۰/۰۱۱	-۰/۲۱۶	$A_3 \prec A_1 \prec A_2$
	[۱۷]	۰/۱۵۹	-۰/۰۰۴	۱/۰۴۷	$\boldsymbol{A_2 \prec A_1 \prec A_3}$
	***f*-S-A**	**۱/۰۷۳**	-۰/۱۰۰	**۲/۸۲۶**	$\boldsymbol{A_2 \prec A_1 \prec A_3}$

مثال ۳: در این مثال سه مجموعه ف-انتقالی که دارای مجموعه فازی و اعتبار متمایز می‌باشند را رتبه‌بندی می‌کنیم. مجموعه‌های ف-انتقالی با مجموعه های فازی

$$A_1(0.4,0.6,0.4,0.2)_{LR}$$
$$A_2(0.5,0.5,0.3,0.4)_{LR} \qquad (۳۲)$$
$$A_3(0.6,0.7,0.5,0.1)_{LR}$$

و مجموعه های اعتبار فازی زیر

$$A_{v1}(0.5,0.5,0.1,0.5)_{LR}$$
$$A_{v2}(0.7,0.7,0.3,0.3)_{LR} \qquad (۳۳)$$
$$A_{v3}(0.9,0.9,0.5,0.1)_{LR}$$

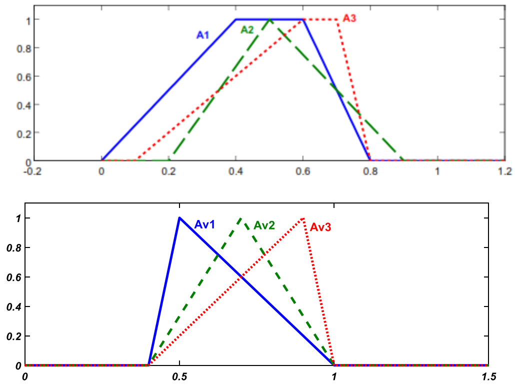
می‌باشند که درشکل ۷ نشان داده‌شده‌اند.

اگر سه مجموعه فازی را با فرض اعتبار کامل با شاخص پیشنهادی رتبه‌بندی کنیم به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\Gamma(A_1) = 1.2301$$
$$\Gamma(A_2) = 2.8170 \qquad (۳۴)$$
$$\Gamma(A_3) = 4.8201$$

[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.4.2]

که منجر به $A_1 \prec A_2 \prec A_3$ می‌شود که متناسب با مراجع [۱۷, ۲۷, ۳۴, ۳۸, ۳۹, ۴۱, ۴۴, ۵۰-۴۸, ۶۱, ۷۴, ۷۵] می‌باشد.



شکل ۷: مجموعه فازی (بالا) مجموعه اعتبار فازی (پایین).

حالا اگر رتبه‌بندی مجموعه‌های اعتبار فازی را انجام دهیم می‌بینیم که رتبه‌بندی آن‌ها هم به همان صورت $A_{v1} \prec A_{v2} \prec A_{v3}$ است. بنابراین ، این سه مجموعه اعتبار فازی طبق خاصیت هفتم نباید تغییری در رتبه‌بندی بااعتبار یک ایجاد کنند و نباید رتبه را تغیر دهد اما دیده می‌شود مرجع [۱۷] رتبه را تغییر می‌دهد. اما روش پیشنهادی نتیجه درست را می‌دهد یعنی رتبه را تغییر نمی‌دهد. به‌عبارت‌دیگر، این مجموعه‌های اعتبار فازی اگر در محاسبه رتبه وارد شوند به‌صورت خنثی عمل می‌کنند زیرا تأثیری که روی مجموعه‌های فازی بر اساس اصل امید فازی می‌گذارند به‌صورت نظری و عقلی یکسان است پس تغییری در رتبه‌بندی نمی‌گذارند. نتایج محاسبه‌شده در جدول ۴ آورده شده است. نتایج نشان از تائید نقش واردکردن عامل اعتبار در تعیین ضریب بهینگی در رتبه‌بندی است.

جدول ۴: مقایسه نتایج رتبه‌بندی مثال ۳

مرجع	A_1	A_2	A_3	نتیجه
[۱۷]	۰/۶۵۱	۲/۰۱۴	۱/۹۹۷	$A_1 \prec A_3 \prec A_2$
$f\text{-}S - A$	۱/۵۳۸	۲/۶۰۷	۳/۰۵۸	$A_1 \prec A_2 \prec A_3$

به‌طور خلاصه، در ف-مجموعه ها عدم قطعیت در دو بخش مجموعه فازی و مجموعه اعتبار مدل می‌شود. بدیهی است که وقتی عدم قطعیت وجود دارد تقریب وجود خواهد داشت. روش پیشنهادی برای غلبه بر این میزان اضافی تقریب مفهوم تعادل را در قالب بهینگی مقید به اعتبار به وجود آورده است که زمانی که تقریب اضافی باعث گذر از جواب درست می‌شود آن را تصحیح کند.

۶-مطالعه موردی: تشخیص بیماری

تشخیص بیماری یکی از درخواست‌های علمی امروزه است. گفتار راه اصلی ارتباطات انسان است. مشکل در گفتار به‌عنوان یک نقص در نظر گرفته می‌شود. یک مشکل از گفتار در بیماری سندروم آفازیا مشاهده می‌شود. در این بخش به‌منظور نشان دادن اثربخشی رویکرد پیشنهادی، آن‌را به مورد مطالعاتی تشخیص بیماری آفازیا اعمال می کنیم.

چهار نوع عمده آفازیا را می‌توان به‌صورت زیر مشخص کرد:

- بروکا: در این دسته جملات بیماران به چند کلمه جزئی تقلیل می‌یابد.
- ورنیک: در این دسته، یا صدا تغییر می‌کند یا کلمات به شکل مبهم و اشتباه بیان می‌شود.
- گلوبال: در این دسته هیچ پیام منسجمی در ذهن بیمار باقی نمانده است.
- آنومیک: این مسئله مربوط به بازیابی کلمات است.

بیماران آفازیا بر اساس معاینه تشخیصی بوستون[۱] [۷۶] و یا آزمون آخن آفازیا[۲][۷۷] می‌باشد. در آزمون به پرسش‌های تحقیق آفازیا پاسخ داده می‌شود و پاسخ‌های تعداد زیادی از بیماران جمع‌آوری‌شده است. روش‌های متنوع یادگیری ماشین در تشخیص‌های آفازیا مانند منطق فازی [۷۸]، برنامه‌نویسی ژنتیکی [۷۹] و شبکه‌های عصبی [۸۰, ۸۱] اعمال‌شده است. پایگاه داده اعمال‌شده در اینجا بر اساس آزمون آخن است. این پایگاه داده توسط اکسر *و همکاران* گزارش‌شده است [۸۲]. پایگاه شامل پروفایل ۲۶۵ بیمار: ۲۴ آنومیک, ۳۳ گلوبال, ۴۲ بروکا, ۴۷ ورنیک می‌باشد. این پایگاه از شش زیر- آزمون تشکیل‌شده است: آزمون توکن[۳]، تکرار، نوشتن و خواندن، نام‌گذاری رویارویی، گفتار اسپونتنیوس [4] ، و درک[۵].

آزمون آخن مورداستفاده در پایگاه داده در جدول (۵) ذکرشده است. بخش اول ارزیابی گفتار اسپونتنیوس است. در آزمون توکن، از مجموعه نشانه‌هایی که از نظر شکل، رنگ یا اندازه متفاوت هستند، بیمار باید نشانه مناسب را انتخاب کند. در آزمون تکرار، بیمار باید کلمات، جملات یا صداهای مختلف را تکرار کند. در آزمون نوشتاری، خواندن و نوشتن ارزیابی می‌شود. در آزمون نام‌گذاری رویارویی، توصیف کافی بیمار از اعمال، موقعیت‌ها یا اشیا موردبررسی قرار می‌گیرد. آزمون درک توانایی بیمار از درک صحیح کلمات/جملات را نشان می‌دهد. در پایگاه داده،۲۴،۴۲،۳۳،۴۷ بیمار برای آنومیک، بروکا، گلوبال و ورنیک به ترتیب وجود دارند.

علاوه بر این، توابع عضویت گاوس که به صورت زیر هستند :

$$\mu_{\tilde{h}_i^k}(x_i) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i^k - \bar{x}_i^k}{\sigma_i^k}\right)^2} \qquad (۳۵)$$

برای هر ویژگی آفازیا برای هر دسته k در نظر می‌گیریم. تابع عضویت

[۱] Boston Diagnostic Aphasia Examination
[۲] Aachen Aphasia Test
[۳] Token
[۴] Spontaneous
[۵] Comprehension

امکانی و اعتبار برای هر ویژگی $\tilde{h}_i^k$ بر اساس داده‌های یادگیری به دست می‌آید. $\bar{x}_i$ میانگین و σ_i^k انحراف معیار را به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

جدول ۵: نتایج آزمون آخن [۸۲]

کد	آزمون	محدوده
	Spontaneous Speech	
P0(F_1)	Communication Behavior	0 – 5 [Points]
P1(F_2)	Articulation and Prosody	0 – 5 [Points]
P2(F_3)	Automatized Language	0 – 5 [Points]
P3(F_4)	Semantic Structure	0 – 5 [Points]
P4(F_5)	Phonologic Structure	0 – 5 [Points]
P5(F_6)	Syntactic Structure	0 – 5 [Points]
T0(F_7)	***Token Test***	[%]0 – 100
T1-T5 (F_8-F_12)	Token Subtests	0 – 10 [Points]
N0(F_13)	***Repetition***	[%]0 – 100
N1(F_14)	Single Phonemes	0 – 30 [Points]
N2(F_15)	Monosyllabic Nouns	0 – 30 [Points]
N3(F_16)	Loan and Foreign Words	0 – 30 [Points]
N4(F_17)	Compound Words	0 – 30 [Points]
N5(F_18)	Sentences	0 – 30 [Points]
C0(F_19)	***Written Language***	[%]0 – 100
C1(F_20)	Reading Aloud	0 – 30 [Points]
C2(F_21)	Selecting/Combining on Dictation	0 – 30 [Points]
C3(F_22)	Writing on Dictation	0 – 30 [Points]
B0(F_23)	***Confrontation Naming***	[%]0 – 100
B1(F_24)	Nouns	0 – 30 [Points]
B2(F_25)	Color terms	0 – 30 [Points]
B3(F_26)	Compound nouns	0 – 30 [Points]
$B4(F_{27})$	Sentences	0 – 30 [Points]
$V0(F_{28})$	***Comprehension***	[%]0 – 100
$V1(F_{29})$	Auditory for Words and Sentences	0 – 60 [Points]
$V2(F_{30})$	Reading for Words and Sentences	0 – 60 [Points]

$$\bar{x}_i^k = \frac{1}{n_i^k}\sum_{j=1}^{n_i^k} x_{ij}^k, \tag{۳۶}$$

$$\sigma_i^k = \frac{1}{n_i^k - 1}\sum_{j=1}^{n_i^k}(x_{ij}^k - \bar{x}_i^k)^2$$

که x_{ij}^k شاخص بیمار بودن است، $j = 1, \dots, n_i^k$ ویژگی است، و n_i^k تعداد کل بیماران مربوط به هر دسته ویژگی در مجموعه آموزش است.

برای به دست آوردن تابع عضویت اعتبار فازی از یک سطح اطمینان برای برآورد آن استفاده می‌شود که می‌تواند اختیاری به اندازه ۹./، ۹۵./ و ۹۹./ انتخاب شود. برای حل این مسئله اختیاری بودن، یک راه‌حل در نظر گرفتن تمام خانواده این سطوح اطمینان می‌باشد. برای تعیین اعتبار، توجه کنید که تمامی عناصر مربوطه که در فضای متفاوتی نسبت به همدیگر هستند باید با هم به تعادل برسند. برای رسیدن به این اصل، روش ما تحلیل منطقی و شهودی مشاهدات بر اساس نظرات متخصصان در موقعیت‌های مشابه است. درواقع، برای محاسبه اعتبار، ما قیود مسئله را بر اساس معنای ضمنی[۱] آن شناسایی می‌کنیم. به‌طور مثال، عبارت «اغلب L» مبین «L اغلب درست است» می‌باشد. بنابراین، موضوع فرموله کردن «اغلب L» با معنی و نحو[۲] می‌باشد. در این صورت، مفهوم «اغلب» می‌تواند به برحسب درجه فازی در بازه $[0,1]$ تعریف شود.

حالا توجه کنید در خرد جمعی، هر نظر دو عنصر منفی و مثبت را که معرف اطلاعات درست و غلط است را در درون خود دارد. اطلاعات درست هم‌جهت‌اند و بر روی یکدیگر انباشته می‌شوند اما خطاها در جهات مختلف و غیرهمسو عمل می‌کنند لذا موجب حذف یکدیگر می‌شوند که پس از جمع نظرات، آنچه می‌ماند طبیعتاً اطلاعاتی است که همبستگی زیادی با اطلاعات درست دارند.

بنابراین، مجموع عوامل بیان شده در جدول ۵ در اختیار کارشناسان گذشته شده است از پاسخگویان خواسته شد که نظرات خود را در مورد تأثیر این ویژگی‌ها در چهار دسته بیماری به‌صورت کلامی با کلمات بالا، متوسط، و پایین بیان کنند. برای هرکدام از این کلمات یک تابع عضویت فازی مثلثی در نظر می‌گیریم.

نکته مهم در مقوله تصمیم‌گیری، ترکیب[۳] نظریات متفاوت از افراد متخصص متفاوت می‌باشد. برای ترکیب، روش‌هایی گوناگونی ارائه‌شده، که اغلب بر اساس نظریه دمپستر-شافر [۸۳] می‌باشند. در این روش‌ها بین نظریه دمپستر-شافر و نظریه امکان از طریق مفهوم توابع باور پایه‌ای[۴] ارتباط برقرارشده است. اما اگر توابع جرم پیوسته را در این روش ترکیب کنیم، تابع جرم نتیجه شده از قانون دمپستر [۸۴]، هیچ مفهوم شهودی ندارد. برای حل این مشکل، ما از روش ارائه‌شده در [۸۵] استفاده می‌کنیم

[1] Connotation
[2] Syntax and Semantic
[3] Aggregate
[4] Basic Belief Basses

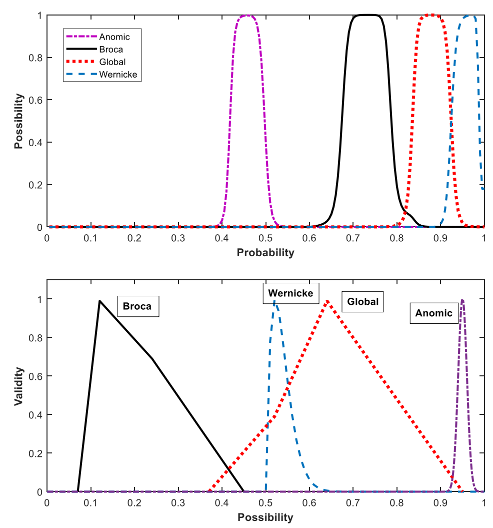
[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.4.2]

که علاوه بر این برتری دارای سادگی بیشتری در مقایسه با روش‌های دیگر است. در روش مذکور، توابع عضویت مربوط به یک متغیر را به‌صورت نقطه‌ای در هم ضرب کرده و حاصل‌ضرب را نرمال می‌کنیم. البته، در این روش فرض شده است که توزیع‌های امکان که تک – مودال می‌باشند نزولی یکنواخت و مشتق‌پذیر بوده و در نقاط انتهایی خود صفرباشند. برای برآورده شدن این فرض‌ها، نقاط ماکزیمم و انتهایی را حد تابع مشتق‌پذیر که در این نقاط پیوسته‌اند در نظر می‌گیریم.

بعد از تعیین و تنظیم مجموعه‌های فازی برای هرکدام از چهار دسته بیماری، حالا آن‌ها باید برای هر پرونده بر اساس ویژگی هایی که در پرونده وجود دارد تابع عضویت های مرتبط با امکان و اعتبار با یکدیگر طبق روش توضیح داده شده ترکیب شوند.

حالا، برای تصمیم گیری در مورد هر پرونده توابع عضویت ویژگی ها و عوامل موجود در پرونده را با روش بیان شده ترکیب می کنیم که منجر به ایجاد دو تابع عضویت برای هر دسته بیماری می‌شود. سپس به ترتیب بزرگی به کوچکی آن‌ها را مرتب می کنیم تا بتوان تصمیم گیری کرد.

برای یک پرونده خاص ما به شکل ۸ برای چهار نوع عمده آفازیا رسیدیم.



شکل ۸: مجموعه اعتبار (پایین) مجموعه اعتبار فازی (بالا).

در صورت استفاده از روش پیشنهادی و با در نظر گرفتن اعتبار فازی نتیجه نهایی گلوبال خواهد شد. ولی اگراعتبار فازی در نظر گرفته نشود نتیجه ورنیک خواهد بود. نتیجه گزارش شده برای پرونده مذکور گلوبال بود.

برای ارزیابی بیشتر، ۵۰ پرونده بررسی شدند که با توجه به در اختیار بودن نتایج گزارش شده متوسط میزان موفقیت ۹۳/۱۲ درصد با میزان انحراف معیار ۳/۹۷ به دست آمد،که نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی تصمیم گیری و ساختار f-S-A است.

۷- نتیجه‌گیری

منطق فازی توسعه‌یافته یک شناخت است. در منطق فازی توسعه‌یافته، رسیدن به اجماع مطلق مطلوب است اما آنچه قابل‌قبول است این است که اجماع معتبر فازی باشد. بااین‌حال، هدف، رسیدن به درجه بالای اعتبار فازی بر اساس اصل اعتبار هست. در این مقاله، مسائل مربوط به رتبه‌بندی مجموعه‌ها در منطق فازی توسعه‌یافته با واردکردن مفهوم تعادل بر مبنای بهینگی مقید به اعتبار پیشنهادشده است. ف-مجموعه ترکیبی از مجموعه فازی و مجموعه اعتبار است. امید فازی، ف- مجموعه را تبدیل به یک مجموعه فازی می کند. در این مقاله، شاخص‌های رتبه‌بندی f- S-A و f- S-A-e برای رتبه‌بندی ف-مجموعه‌ها معرفی‌شده‌اند. در این شاخص‌ها، عدد A_1 نسبت به عدد دیگر A_2 به‌وسیله تعامل عوامل گسترش، چولگی، مرکز و درک شهودی از طریق مسئله بهینگی مقید به اعتبار بررسی‌شده‌اند. خواص شاخص پیشنهادی بررسی و نتیجه در قالب یک قضیه اثبات‌شده است. نتایج مثال‌های برگرفته از مقاله‌ای مرتبط دیگر نتایج روش پیشنهادی را تایید می کنند. به‌منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی یک مطالعه موردی روی تشخیص پزشکی بیماری آفازیا انجام‌شده است. نتایج عملکرد روش اعمالی پیشنهادی را تائید می کنند. برای کارهای پیشرو می‌توان به رتبه بندی مجموعه فازی نوع دو به همراه تابع عضویت اعتبار پرداخت.

مراجع

[1] A. Makovelski, Histoire de la Logique. Editions du Progres; (In Persian by F. Shaiani), 1978.
[2] M. Menhaj, B.,, Fuzzy Computations. Tehran: Daneshnegar, In presion, 2009, p. 639.
[3] L. Zadeh, A., "From Circuit Theory to System Theory," in Proceedings of the IRE, 1962, vol. 50, no. 5, pp. 856-865.
[4] R. Bellman, R. Kalaba, and L. A. Zadeh, "Abstraction and pattern classification," in Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems Inc. River Edge, NJ, USA: World Scientific Publishing Co., , pp. 44 - 50.
[5] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," Information and Control, vol. 8, no. 3, pp. 338-353, 1965/06/01/ 1965, doi: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
[6] P. Hájek, "What is mathematical fuzzy logic," Fuzzy Sets and Systems, vol. 157, no. 5, pp. 597-603, 2006, doi: 10.1016/j.fss.2005.10.004.
[7] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions," Fuzzy Sets and Systems, vol. 40, no. 1, pp. 143-202, 1991, doi: http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(91)90050-Z.
[8] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade, "Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: logical approaches," Fuzzy Sets and Systems, vol. 40, no. 1, pp. 203-244, 1991, doi: http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(91)90051-Q.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1401.16.4.4.2]

[9] H. Hagras and C. Wagner, "Towards the Wide Spread Use of Type-2 Fuzzy Logic Systems in Real World Applications," IEEE Computational Intelligence Magazine, vol. 7, no. 3, pp. 14-24, 2012, doi: 10.1109/MCI.2012.2200621.
[10] J. M. Mendel and W. Dongrui, "Challenges for Perceptual Computer Applications and How They Were Overcome," Computational Intelligence Magazine, IEEE, vol. 7, no. 3, pp. 36-47, 2012, doi: 10.1109/mci.2012.2200627.
[11] L. A. Zadeh, "Toward extended fuzzy logic—A first step," Fuzzy Sets Syst, vol. 160, pp. 3175–3181, 2009, doi: 10.1016/j.fss.2009.04.009.
[12] R. Giles, "A formal system for fuzzy reasoning," Fuzzy Sets and Systems, vol. 2, pp. 233-257, 1979.
[13] H.-W. Liu and G.-J. Wang, "Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets," European Journal of Operational Research vol. 179, pp. 220–233, 2007.
[14] K. Atanassov, "Intuitionistic fuzzy sets," Fuzzy Sets and Systems, vol. 20, pp. 87-96, 1986.
[15] F. Sabahi and M. R. Akbarzadeh-T, "A qualified description of extended fuzzy logic," Information Sciences, vol. 244, pp. 60-74, 2013/09/20/ 2013, doi: https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.020.
[16] B. Kang, D.Wei, Y.Li, and Y. Deng, "A method of converting Z-number to classical fuzzy number," J. Inform. Comput. Sci., vol. 9, pp. 703-709, 2012.
[17] F. Sabahi, "On the Theory of Imprecise Logic and Reasoning based on Extended Fuzzy Logic: Application to Judicial and Medical Decision Making," Faculty of Engineering Ferdowsi University of Mashhad, In Partial Fulfillment of the Requirements of the Degree DOCTOR OF PHILOSOPHY (Control Engineering), 2013.
[18] X. Wang and E. E. Kerre, "Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II)," Fuzzy Sets and Systems, vol. 118, no. 3, pp. 387-405, 2001, doi: 10.1016/s0165-0114(99)00063-9.
[19] R. Jain, "Decision-making in the Presence of Fuzzy Variables," Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, vol. 6, no. 10, pp. 698-703, 1976.
[20] R. R. Yager, "On a general class of fuzzy connectives," Fuzzy Sets and Systems, vol. 4, no. 3, pp. 235-242, 1980, doi: 10.1016/0165-0114(80)90013-5.
[21] S. Murakami and M. Maeda, "Fuzzy decision analysis in the development of centralized regional energy control systems," Journal Name: Energy Dev. Jpn.; (United States); Journal Volume: 6:4, pp. Medium: X; Size: Pages: 379-396, 1984.
[22] E. S. Lee and R. J. Li, "Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events," Computers & Mathematics with Applications, vol. 15, no. 10, pp. 887-896, 1988, doi: 10.1016/0898-1221(88)90124-1.
[23] I. Requena, M. Delgado, and J. L. Verdegay, "Automatic ranking of fuzzy numbers with the criterion of a decision-maker learnt by an artificial neural network," Fuzzy Sets and Systems, vol. 64, no. 1, pp. 1-19, 1994, doi: 10.1016/0165-0114(94)90002-7.
[24] P. Fortemps and M. Roubens, "Ranking and defuzzification methods based on area compensation," Fuzzy Sets and Systems, vol. 82, no. 3, pp. 319-330, 1996, doi: 10.1016/0165-0114(95)00273-1.
[25] C.-H. Cheng, "A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method," Fuzzy Sets and Systems, vol. 95, no. 3, pp. 307-317, 1998, doi: 10.1016/s0165-0114(96)00272-2.
[26] L.-H. Chen and H.-W. Lu, "An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance," Computers & Mathematics with Applications, vol. 41, no. 12, pp. 1589-1602, 2001, doi: 10.1016/s0898-1221(01)00124-9.
[27] T.-C. Chu and C.-T. Tsao, "Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point," Computers & Mathematics with Applications, vol. 43, no. 1-2, pp. 111-117, 2002, doi: 10.1016/s0898-1221(01)00277-2.
[28] Y.-J. Wang and H.-S. Lee, "The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points," Computers & Mathematics with Applications, vol. 55, no. 9, pp. 2033-2042, 2008, doi: 10.1016/j.camwa.2007.07.015.
[29] L. H. Chen and H. W. Lu "The Preference Order of Fuzzy Numbers," Computers and Mathematics with Applications, vol. 44, no. 10, pp. 105-114, 2002.
[30] S. J. Chen and S. M. Chen, "A new method for handling multicriteria fuzzy decision_making problems using FN-IOWA operators," Cybernetics and Systems, vol. 34, no. 2, pp. 109-197, 2003.
[31] D. Yong and L. Qi, "A TOPSIS-based centroid-index ranking method of fuzzy numbers and its application in decision-making," Cybernetics and Systems, vol. 36, no. 6, pp. 581-595, 2005, doi: 10.1080/01969720590961727.
[32] H. W. Lu and C. B. Wang, "An Index for Ranking Fuzzy Numbers by Belief Feature," Information and Management Sciences, vol. 16, no. 3, pp. 55-70, 2005.
[33] M. L. Wang, H. F. Wang, and C. L. Lin, "Ranking Fuzzy Number Based on Lexicographic Screening Procedure," International Journal of Information Technology and Decision Making, vol. 4, no. 4, pp. 663-678 2005.
[34] Z.-X. Wang, Y.-J. Liu, Z.-P. Fan, and B. Feng, "Ranking L-R fuzzy number based on deviation degree," Information Sciences, vol. 179, no. 13, pp. 2070-2077, 2009, doi: 10.1016/j.ins.2008.08.017.
[35] B. Asady, "The revised method of ranking LR fuzzy number based on deviation degree," Expert Systems with Applications, vol. 37, no. 7, pp. 5056-5060, 2010, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2009.12.005.
[36] Y. Deng, Z. Zhenfu, and L. Qi, "Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration," Computers & Mathematics with Applications, vol. 51, no. 6-7, pp. 1127-1136, 2006, doi: 10.1016/j.camwa.2004.11.022.
[37] S. Nasseri, H and M. Sohrabi, "Ranking fuzzy numbers by using radius of gration," Australian

Spreads and Weights," International Journal of Applied Science and Engineering, vol. 10 no. 1, pp. 41-57, 2012.

[51] Y. L. P. Thorani, P. P. B. Rao, and N. R. Shankar, "Ordering Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers," Int. J. Contemp. Math. Sciences, vol. 7, no. 12, pp. 555 - 573, 2012.

[52] R. Abbasi Shureshjani and M. Darehmiraki, "A new parametric method for ranking fuzzy numbers," Indagationes Mathematicae, vol. In Press, Corrected Proof, no. 0, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.indag.2013.02.002.

[53] M. Brunelli and J. Mezei, "How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study," International Journal of Approximate Reasoning, vol. In Press,Corrected Proof, no. 0, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijar.2013.01.009.

[54] V. F. Yu, H. T. X. Chi, L. Q. Dat, P. N. K. Phuc, and C.-w. Shen, "Ranking generalized fuzzy numbers in fuzzy decision making based on the left and right transfer coefficients and areas," Applied Mathematical Modelling, In Press, Accepted Manuscript, no. 0, 2013, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.022.

[55] H. Deng, "Comparing and ranking fuzzy numbers using ideal solutions," Applied Mathematical Modelling, no. 0, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.09.012.

[56] H. T. X. Chi and V. F. Yu, "Ranking generalized fuzzy numbers based on centroid and rank index," Applied Soft Computing, vol. 68, pp. 283-292, 2018/07/01/ 2018, doi: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.03.050.

[57] T. W. Liao and P. Su, "Parallel machine scheduling in fuzzy environment with hybrid ant colony optimization including a comparison of fuzzy number ranking methods in consideration of spread of fuzziness," Applied Soft Computing, vol. 56, pp. 65-81, 2017/07/01/ 2017, doi: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.03.004.

[58] A. I. Ban and L. Coroianu, "Explicit analytical formulae of ranking indices without the requirement of multiplicative compatibility," International Journal of Approximate Reasoning, vol. 97, pp. 17-37, 2018/06/01/ 2018, doi: https://doi.org/10.1016/j.ijar.2018.03.009.

[59] H. Zhang, J. Xie, W. Lu, Z. Zhang, and X. Fu, "Novel ranking method for intuitionistic fuzzy values based on information fusion," Computers & Industrial Engineering, vol. 133, pp. 139-152, 2019/07/01/ 2019, doi: https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.05.006.

[60] M. Zhao, M.-Y. Liu, J. Su, and T. Liu, "A shape similarity-based ranking method of hesitant fuzzy linguistic preference relations using discrete fuzzy number for group decision making," Soft Computing, vol. 23, no. 24, pp. 13569-13589, 2019/12/01 2019, doi: 10.1007/s00500-019-03895-7.

[61] F. Sabahi and M.-R. Akbarzadeh–T, "A human-intuitive fuzzy ranking approach with spread and skewness factors," Journal of Intelligent & Fuzzy Journal of Basic & Applied Sciences, vol. 4, no. 4, pp. 658-664, 2010.

[38] B. Asady and A. Zendehnam, "Ranking fuzzy numbers by distance minimization," Applied Mathematical Modelling, vol. 31, no. 11, pp. 2589-2598, 2007, doi: 10.1016/j.apm.2006.10.018.

[39] B. Asady, "Revision of distance minimization method for ranking of fuzzy numbers," Applied Mathematical Modelling, vol. 35, no. 3, pp. 1306-1313, 2011, doi: 10.1016/j.apm.2010.09.007.

[40] S. Abbasbandy and T. Hajjari, "A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers," Computers & Mathematics with Applications, vol. 57, no. 3, pp. 413-419, 2009, doi: 10.1016/j.camwa.2008.10.090.

[41] R. Ezzati, T. Allahviranloo, S. Khezerloo, and M. Khezerloo, "An approach for ranking of fuzzy numbers," Expert Systems with Applications, vol. 39, no. 1, pp. 690-695, 2012, doi: 10.1016/j.eswa.2011.07.060.

[42] L.-W. Lee and S.-M. Chen, "Fuzzy risk analysis based on fuzzy numbers with different shapes and different deviations," Expert Systems with Applications, vol. 34, no. 4, pp. 2763-2771, 2008, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2007.05.009.

[43] S.-M. Chen and J.-H. Chen, "Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads," Expert Systems with Applications, vol. 36, no. 3, Part 2, pp. 6833-6842, 2009, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2008.08.015.

[44] Y.-M. Wang and Y. Luo, "Area ranking of fuzzy numbers based on positive and negative ideal points," Computers & Mathematics with Applications, vol. 58, no. 9, pp. 1769-1779, 2009, doi: 10.1016/j.camwa.2009.07.064.

[45] S.-M. Chen and K. Sanguansat, "Analyzing fuzzy risk based on a new fuzzy ranking method between generalized fuzzy numbers," Expert Systems with Applications, vol. 38, no. 3, pp. 2163-2171, 2011, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2010.08.002.

[46] P. Xu, X. Su, J. Wu, X. Sun, Y. Zhang, and Y. Deng, "A note on ranking generalized fuzzy numbers," Expert Systems with Applications, vol. 39, no. 7, pp. 6454-6457, 2012, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2011.12.062.

[47] N. Paradin, "Ranking of fuzzy numbers by using distance between convex combination of upper and lower central gravity of alpha-level and the origin of coordinate system," Applied mathematical Science, vol. 5-8, no. 7, pp. 327-335, 2011.

[48] A. M. Nejad and M. Mashinchi, "Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number," Computers & Mathematics with Applications, vol. 61, no. 2, pp. 431-442, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2010.11.020.

[49] P. P. B. Rao and N. R. Shankar, "Ranking Fuzzy Numbers with a Distance Method using Circum center of Centroids and an Index of Modality," Advances in Fuzzy Systems, vol. 2011 no. Article ID 178308, p. 7, 2011.

[50] P. P. B. Rao and N. R. Shankar, "Ranking Generalized Fuzzy Numbers using Area, Mode,

pp. 275-288, 2000, doi: 10.1016/s0165-0114(98)00122-5.

[75] S. Abbasbandy and B. Asady, "Ranking of fuzzy numbers by sign distance," Information Sciences, vol. 176, pp. 2405-2416, 2006.

[76] H. Goodglass and E. Kaplan, The Assessment of Aphasia and Related Disorders Philadelphia: Lea & Febiger, 1983.

[77] W. Huber, K. Poeck, and D. Weniger, "The Aachen aphasia test," in Advances in Neurology. Progress in Aphasiology,, vol. 42, F. C. R. (Ed.) Ed. New York, USA,: Raven, 1984, pp. 291–303.

[78] M.-R. Akbarzadeh-T and M. Moshtagh-Khorasani, "A hierarchical fuzzy rule-based approach to aphasia diagnosis," Journal of Biomedical Informatics, vol. 40, no. 5, pp. 465-475, 2007, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jbi.2006.12.005.

[79] A. Tsakonas, G. Dounias, J. Jantzen, H. Axer, B. Bjerregaard, and D. G. von Keyserlingk, "Evolving rule-based systems in two medical domains using genetic programming," Artificial Intelligence in Medicine, vol. 32, no. 3, pp. 195-216, 2004.

[80] H. Axer, J. Jantzen, V. Keyserlingk, and G. Berks, " Aphasia Classification Using Neural Networks," in European Symposium on Intelligent Techniques Aachen, 2000, pp. 111-115.

[81] A. Järvelin and M. Juhola, "Comparison of machine learning methods for classifying aphasic and non-aphasic speakers," Computer Methods and Programs in Biomedicine, vol. 104, no. 3, pp. 349-357, 2011, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2011.02.015.

[82] H. Axer, J. Jantzen, and V. K. Graf, "An aphasia database on the internet: a model for computer-assisted analysis in aphasiology,," Brain Lang, vol. 75, no. 390-398, 2000.

[83] G. Shafer, A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press., 1976.

[84] A. Dempster, P., "Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping," Annals of Mathematical Statistics, vol. 38, pp. 325–339, 1967.

[85] D. Yu and W. Park, S., "Combination and evaluation of expert opinions characterized in terms of fuzzy probabilities," Annals of Nuclear Energy, vol. 27 pp. 713-726, 2000.

Systems, vol. 40, pp. 10687-10701, 2021, doi: 10.3233/JIFS-201591.

[62] G. Atalik and S. Senturk, "A New Ranking Method for Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers," in Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making, Cham, C. Kahraman, S. Cebi, S. Cevik Onar, B. Oztaysi, A. C. Tolga, and I. U. Sari, Eds., 2020// 2020: Springer International Publishing, pp. 33-38.

[63] N. Van Hop, "Ranking fuzzy numbers based on relative positions and shape characteristics," Expert Systems with Applications, vol. 191, p. 116312, 2022/04/01/ 2022, doi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116312.

[64] S.-C. Ngan, "A user-configurable and explainable framework for ranking fuzzy numbers," Expert Systems with Applications, vol. 209, p. 118297, 2022/12/15/ 2022, doi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118297.

[65] N. Zumelzu, B. Bedregal, E. Mansilla, H. Bustince, and R. Diaz, "Admissible orders on fuzzy numbers," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, pp. 1-1, 2022, doi: 10.1109/TFUZZ.2022.3160326.

[66] B. Yatsalo, A. Korobov, A. Radaev, J. Qin, and L. Martínez, "Ranking of Independent and Dependent Fuzzy Numbers and Intransitivity in Fuzzy MCDA," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 30, no. 5, pp. 1382-1395, 2022, doi: 10.1109/TFUZZ.2021.3058613.

[67] D. Dubois and H. Prade, "Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets," Fuzzy Sets and Systems, vol. 192, no. 0, pp. 3-24, 2012, doi: 10.1016/j.fss.2010.11.007.

[68] V. Novák, "Which logic is the real fuzzy logic?," Fuzzy Sets and Systems, vol. 157, no. 5, pp. 635-641, 2006, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2005.10.010.

[69] F. Sabahi and M. R. Akbarzadeh-T, "Extended Fuzzy Logic: Sets and Systems," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 24, no. 3, pp. 530-543, 2016, doi: 10.1109/TFUZZ.2015.2453994.

[70] Y. Y. Golota, "On a certain formalization of antonyms logic," Fuzzy Sets and Systems, vol. 45, no. 3, pp. 335-340, 1992/02/10/ 1992, doi: https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90152-T.

[71] F. Sabahi, "Equilibrium Concept in Extended Fuzzy Logic Thinking," presented at the Forth National Computer, Information Technology, and Artificial Intelligent Conference, Ahvaz, Iran, 2020.

[72] K. Kim and K. S. Park, "Ranking fuzzy numbers with index of optimism," Fuzzy Sets and Systems, vol. 35, no. 2, pp. 143-150, 1990, doi: http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(90)90189-D.

[73] X. Wang and E. E. Kerre, "Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I)," Fuzzy Sets and Systems, vol. 118, no. 3, pp. 375-385, 2001, doi: 10.1016/s0165-0114(99)00062-7.

[74] J.-S. Yao and K. Wu, "Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance," Fuzzy Sets and Systems, vol. 116, no. 2,