

## طراحی یک کنترل کننده مبتنی بر رؤیتگر برای یک سیستم مرتبه کسری غیر خطی

حمید دهقانی فیروزآبادی<sup>۱</sup>، علی اکبرزاده کلات<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری کنترل، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شاهرود، Hamid\_firouzabadi@shahroodut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و رباتیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شاهرود، akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۰۲ ویرایش اول: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹ ویرایش دوم: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷ ویرایش سوم: ۱۴۰۲/۰۱/۱۵ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۱

**چکیده:** در این مقاله یک کنترل کننده مبتنی بر رؤیتگر برای یک کلاس از سیستم‌های غیر خطی مرتبه کسری ارائه می‌گردد. ابتدا با در نظر گرفتن یک سیستم مرتبه کسری پایدار که به عنوان مدل مرجع شناخته می‌شود، کنترل کننده به گونه‌ای طراحی می‌گردد که سیستم حلقه بسته، حالت‌های سیستم مرجع را تعقیب کند. با توجه به غیرقابل اندازه‌گیری بودن تعدادی از حالت‌های سیستم مرتبه کسری، طراحی کنترل کننده، مبتنی بر رؤیتگر انجام می‌گیرد. رؤیتگر پیشنهادی در این تحقیق با استفاده از رویکرد تئوری مقدار میانگین مشتقی، دینامیک خطای غیر خطی رؤیتگر را به دینامیک خطی و متغیر با پارامتر تبدیل می‌کند به طوری که تحلیل پایداری آن با استفاده از تابع لیاپانوف و نامساوی ماتریسی خطی به راحتی انجام می‌گیرد. در ادامه تحلیل پایداری کنترل کننده مبتنی بر رؤیتگر نیز با استفاده از قضیه لیاپانوف انجام می‌گیرد. در خاتمه برای نشان دادن کارایی و مؤثر بودن کنترل کننده پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی دو سیستم مرتبه کسری غیر خطی با در نظر گرفتن کنترل کننده طراحی شده نشان داده می‌شود.

**کلمات کلیدی:** سیستم مرتبه کسری، نامساوی ماتریسی خطی، تئوری مقدار میانگین مشتقی، رؤیتگر، قضیه لیاپانوف.

## Observer-based controller design for a nonlinear fractional order system

Hamid Dehghani Firouzabadi, Ali Akbarzadeh Kalat

**Abstract:** In this paper, an observer-based controller is introduced for a class of nonlinear fractional order systems. First of all, considering a stable linear fractional order system known as the reference model, the controller is designed so that the closed loop system tracks the states of the reference system. In most systems, some states are unmeasurable or unreachable, so the controller must be designed based on the observer. The observer has been suggested in this research, using the well-known differential mean value theorem approach, converts the nonlinear error dynamics of the observer into linear and parameters-varying, so that the stability analysis is done simply using the Lyapunov quadratic function and linear matrix inequality. The stability analysis of the observer-based controller is also performed using the Lyapunov theorem in the following section. Finally, the efficiency and effectiveness of the proposed controller are shown through the simulation results of two nonlinear fractional order systems.

**Keywords:** Fractional-order system, Linear matrix inequality, Differential mean value theorem, Observer, Lyapunov theory.

## ۱- مقدمه

مطالعه و تحقیق در مورد سیستم‌های کنترل مرتبه کسری و توصیف تعدادی از سیستم‌های بین رشته‌ای با استفاده از این سیستم‌ها به یک موضوع جذاب بین محققان و پژوهشگران تبدیل شده است [۱ و ۲]. مدلسازی این سیستم‌ها توسط دینامیک مرتبه کسری با دقت بالاتری نسبت به دینامیک مرتبه صحیح انجام می‌گیرد. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های آشوبناک [۳]، بازارهای مالی و بیولوژیکی [۴]، سیستم‌های چند عامله [۵] و ... اشاره نمود.

طراحی کنترل کننده و تحلیل پایداری آن از مسائل اولیه در تمامی سیستم‌های کنترل مرتبه صحیح و کسری می‌باشد. به طوریکه تاکنون مقالات زیادی در این زمینه تدوین گردیده است [۶-۹]. از آنجایی که مشتقات مرتبه کسری غیرمحللی هستند و هسته‌های تکین ضعیفی<sup>۱</sup> دارند، تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری پیچیده‌تر از سیستم‌های مرتبه صحیح است. با این حال توجه به پایداری سیستم‌های مرتبه کسری روز به روز افزون‌تر می‌گردد. تاکنون روش‌های زیادی برای اثبات پایداری سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی توسط محققان پیشنهاد شده است. از جمله مراجعی که به این موضوع پرداخته است، [۱۰] می‌باشد. در این مرجع یک مدل خطی‌سازی شده<sup>۲</sup> و روش پایداری‌سازی بر اساس کنترل مود لغزشی<sup>۳</sup> برای همزمان‌سازی<sup>۴</sup> سیستم‌های آشوبناک<sup>۵</sup> ارائه گردیده است. علاوه بر آن نویسندگان مراجع [۱۱ و ۱۲] توانستند با استفاده از روش پایداری میتگ لفلر<sup>۶</sup>، پایداری سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی را تضمین نمایند. همچنین در [۱۳] برای تضمین پایداری یک سیستم مرتبه کسری غیرخطی همسان<sup>۸</sup>، علاوه بر شرط کافی نامساوی ماتریسی خطی، شرط لازم دیگری نیز پیشنهاد شده است. یکی از ابزارهای شناخته شده و بنیادی برای تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی روش لیاپانوف می‌باشد. این روش اگرچه مورد استقبال وسیعی از پژوهشگران قرار گرفته است [۱۴-۱۶] اما نحوه ساخت توابع مستقیم لیاپانوف همچنان یک مسأله باز می‌باشد. همچنین از رویکرد تلفیق روش لیاپانوف با نامساوی ماتریسی خطی نیز برای تحلیل پایداری سیستم‌ها بهره‌گیری شده است [۱۷-۱۹].

عملکرد حلقه بسته خوب را می‌توان با استفاده از کنترل فیدبک حالت به دست آورد. اما مسأله طراحی کنترل کننده فیدبک حالت نیازمند در دسترس بودن تمامی حالت‌های سیستم می‌باشد. با این وجود در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی بدلائیل فنی یا اقتصادی برخی از حالت‌های سیستم قابل اندازه‌گیری نیستند و آنچه طراح می‌داند ورودی و خروجی سیستم می‌باشند. همچنین خروجی سیستم نیز می‌تواند حاوی نویز باشد. در این حالت روتینگر حالت و روش کنترلی مبتنی بر روتینگر حالت به تدریج به عنوان یک ابزار خوب برای کنترل سیستم‌های مرتبه کسری حلقه بسته بسط

داده شدند. به عنوان مثال در [۲۰] دو رویکرد کنترل مقاوم مبتنی بر روتینگر و کنترل فیدبک خروجی استاتیک برای سیستم‌های نامعین خطی مرتبه کسری با مرتبه همسان کسری  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \alpha < 2$  بسط داده شده است. همچنین کنترل مقاوم مبتنی بر روتینگر برای سیستم‌های مرتبه کسری در چندین پژوهش از جمله [۲۱ و ۲۲] ارائه گردیده است. از میان پژوهش‌های جدید انجام گرفته می‌توان به [۲۳] اشاره نمود به طوری که یک کنترل کننده مبتنی بر روتینگر برای سیستم‌های مرتبه کسری از نوع خشی<sup>۹</sup> با استفاده از روش لیاپانوف همراه با قانون کنترل فیدبک حالت طراحی شده است. همچنین با استفاده از معیار پایداری‌سازی از منظر نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی وجود کنترل کننده مبتنی بر روتینگر استنتاج گردیده است. برای حل نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی گفته شده و تبدیل آن‌ها به نامساوی‌های ماتریسی خطی نیز از الگوریتم تکرار استفاده شده است.

موضوع طراحی کنترل کننده مبتنی بر روتینگر همچنان جزء موضوعات باز در علم کنترل هم از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عملی می‌باشد. در این مقاله طراحی کنترل کننده مبتنی بر روتینگر حالت برای کلاسی از سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی از نوع مستوی<sup>۱۰</sup> انجام می‌گیرد. کنترل نسبتاً ساده سیستم‌های مستوی موجب استفاده گسترده این سیستم‌ها در صنعت شده و کنترل کننده‌های گوناگونی تاکنون برای این سیستم‌ها ارائه گردیده است [۲۴ و ۲۵]. برای پیش‌بینی حالت‌های سیستم غیرخطی و طراحی روتینگر از رویکرد قضیه مقدار میانگین مشتقی<sup>۱۱</sup> استفاده می‌شود. با استفاده از روش مقدار میانگین مشتقی می‌توان دینامیک غیرخطی خطای روتینگر را به دینامیک خطی پارامتر متغیر<sup>۱۲</sup> تبدیل نمود. در حالت خطی تحلیل پایداری سیستم به کمک روش لیاپانوف بسیار ساده شده و در نهایت تحلیل پایداری، منجر به یک شرط کافی برای پایداری سیستم در قالب یک نامساوی ماتریسی خطی می‌گردد. با حل این نامساوی ماتریسی، بهره روتینگر بدست می‌آید. در طراحی کنترل کننده از یک سیستم خطی پایدار مرتبه کسری به عنوان سیستم مرجع استفاده می‌گردد و طراحی کنترل کننده به گونه‌ای انجام می‌گیرد تا حالت‌های سیستم حلقه بسته، حالت‌های سیستم مرجع را تعقیب نمایند. در این روش برای طراحی کنترل کننده از تخمین حالت‌های سیستم استفاده گردیده و همچنین هیچگونه محدودیتی بر روی بخش غیرخطی سیستم  $(f(X))$  وجود ندارد. در این پژوهش از یک ورودی جبران‌ساز برای جبران خطای تخمین استفاده می‌گردد و پارامتر آن به صورت برخط تنظیم می‌شود. در نهایت نیز، پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی حالت‌های سیستم کنترلی به مقدار مطلوب با استفاده از قضیه لیاپانوف اثبات می‌شود.

از جمله مزایای روش کنترلی به کار رفته در این مقاله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

7 Mittag-Leffler stability

8 Commensurate

9 Fractional-order neutral-type

10 Affine

11 Differential Mean Value Theorem (DMVT)

12 Linear Parameter-Varying (LPV)

1 Multi agent systems

2 weakly singular kernels

3 Linearized model

4 Sliding Mode Control

5 Synchronization

6 Chaos Systems

$V(\xi) > 0$  بتوان یافت به طوریکه برای کل بازه زمانی  $t \geq 0$  ،  
 $D^q V(\xi) < 0$  باشد، می توان گفت سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۳)  
پایدار مجانبی است.

**قضیه ۲ [۲۹]:** فرض کنید  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ ، بردار تابع مشتق پذیر بوده و  
 $q \in (0,1], t \geq t_0$  باشد. در اینصورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{2} D^q (\xi^T(t) P \xi(t)) \leq \xi^T(t) P (D^q \xi(t)) \quad (۴)$$

که در آن  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس ثابت معین مثبت متقارن می باشد.

### نمادگذاری:

در سرتاسر این مقاله از نمادگذاری و اصطلاحات فنی زیر استفاده  
می گردد:

۱. مجموعه محدب<sup>۱</sup>  $\{\xi, \theta\} \in \mathbb{R}^n$ ، که با عبارت  $Conv(\xi, \theta)$

نشان داده می شود به صورت  $Conv(\xi, \theta) = \{\lambda \xi + (1-\lambda)\theta, 0 \leq \lambda \leq 1\}$  تعریف می گردد.

۲. بردار  $\zeta_n(i) = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, i = 1, \dots, n$

به عنوان بردار پایه کانونیکی شناخته می شود.

**لم ۱ [۳۰-۳۳].** (روش DMVT) فرض کنید  $x, y \in \mathbb{R}^n$  و

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  بطوریکه  $f(z)$  بر روی  $Conv(x, y)$  مشتق پذیر باشد. در این صورت برای  $i = 1, \dots, m$  بردارهای ثابت

$w_1, \dots, w_m \in Conv(x, y), w_i \neq x, w_i \neq y$  وجود دارند  
بطوریکه رابطه زیر برقرار می باشد:

$$f(x) - f(y) = \left( \sum_{i,j=1}^{m,n} \zeta_m(i) \zeta_n^T(j) \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(w_i) \right) (x - y) \quad (۵)$$

$\zeta_m(i)$  بردار پایه کانونیکی در  $\mathbb{R}^m$  می باشد.

در فرمول زیر یک کلاس مستوی از سیستم های دینامیکی مرتبه  
کسری غیرخطی به شکل فضای حالت بیان شده است:

$$\begin{cases} D^q \xi = \Lambda(\xi) + \Sigma u \\ y = C \xi \end{cases} \quad (۶)$$

که در آن،  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $u \in \mathbb{R}^m$

بردار ورودی و  $y \in \mathbb{R}^p$  بردار متغیرهای خروجی قابل اندازه گیری

سیستم،  $C$  ماتریس با ابعاد مناسب،  $\Lambda(\xi) \in \mathbb{R}^n$  بردار تابع غیرخطی،

معلوم و مشتق پذیر بوده و  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ماتریس ثابت معلوم می باشد.

سیستم مرتبه کسری غیرخطی (۶) از نوع همسان فرض می شود به طوری

که مرتبه سیستم عبارتست از:  $q \in (0, 1), [q_1, q_2, \dots, q_n]$ .

• تضمین ردیابی حالت های مدل مرجع به صورت مجانبی توسط  
حالت های سیستم غیرخطی حلقه بسته.

• دستیابی به حالت های سیستم مرتبه کسری غیرخطی از طریق  
طراحی یک رُویتگر برای سیستم مورد نظر با استفاده از رویکرد  
تئوری مقدار میانگین مشتقی و بهره گیری از قضیه لیاپانوف و  
نامساوی ماتریسی جهت اثبات پایداری آن و به دست آوردن  
بهره رُویتگر.

• طراحی کنترل کننده با استفاده از تخمین حالت های به دست آمده  
از رُویتگر و قابلیت تعقیب حالت های یک سیستم مرجع

• مقاوم بودن کنترل کننده پیشنهادی نسبت به خطای تخمین با  
اضافه کردن ترم جبران ساز به آن

ادامه مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، تعاریف

پایه، مفروضات و بیان مسأله طراحی کنترل کننده ارائه شده است. رُویتگر

پیشنهاد شده و اثبات پایداری آن در بخش ۳ بیان شده است. بخش ۴ به

طراحی کنترل کننده مبتنی بر رُویتگر و تحلیل پایداری آن اختصاص یافته

است. مثال های شبیه سازی عددی که اثربخشی و کارایی کنترل کننده را

نشان می دهد در بخش ۵ آورده شده اند. در نهایت، بخش ۶ با نتیجه گیری

به پایان می رسد.

## ۲- تعاریف پایه، مفروضات و بیان مسأله

در این بخش ابتدا به بیان مقدمات و تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری  
پرداخته می شود.

تعریف ۱: مشتق مرتبه کسری کپوتو با مرتبه  $q \in \mathbb{R}^+$  از تابع  $\Lambda(t)$   
به صورت زیر محاسبه می گردد [۲۶]:

$${}_a^c D_t^q \Lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t \frac{\Lambda^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau \quad n-1 < q < n \quad (۱)$$

به طوری که تابع  $\Gamma(\cdot)$  به صورت  $\Gamma(\tau) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\tau-1} dt$  تعریف می گردد.

در حالت خاص اگر  $0 < q < 1$  باشد:

$${}_a^c D_t^q \Lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q} \Lambda^{(1)}(\tau) d\tau \quad (۲)$$

**قضیه ۱ [27 و 28]:** (پایداری لیاپانوف در سیستم های مرتبه کسری)  
سیستم دینامیکی مرتبه کسری زیر مفروض است:

$$D^q \xi = \Psi(\xi) \quad (۳)$$

در این سیستم  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $\Psi(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

تابع غیر خطی هموار به صورت برداری می باشد. همچنین

مرتبه سیستم کسری با  $q \in (0, 1]$  بیان می گردد. در صورتی که تابع

<sup>1</sup> Convex hull

$$\lambda_{ij} \leq \frac{\partial \Lambda_i(\xi(t))}{\partial \xi_j(t)} = \lambda_{ij} \leq \bar{\lambda}_{ij}, \quad (11)$$

$$\forall \xi \in R^n \quad \text{and} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

در معادله بالا  $\Lambda_i(\xi)$ ،  $i$  امین سطر بردار تابع  $\Lambda(\xi)$  می باشد. همچنین  $\lambda_{ij}$ ،  $\bar{\lambda}_{ij}$  به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\lambda_{ij} = \min_{\xi \in R^n} \left( \frac{\partial \Lambda_i(\xi)}{\partial \xi_j} \right), \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_{ij} = \max_{\xi \in R^n} \left( \frac{\partial \Lambda_i(\xi)}{\partial \xi_j} \right)$$

روتینگر پیشنهادی برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۶) به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} D^q \xi = \Lambda(\xi) + \Sigma u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\xi \end{cases} \quad (13)$$

که در آن، تخمین حالت  $\xi$  با  $\hat{\xi}$  نشان داده می شود. هدف از این بخش تعیین بردار یا ماتریس بهره  $L$  است به طوری که خطای مشاهده یعنی  $\xi - \hat{\xi}$  به صورت مجانبی به صفر همگرا شود. دینامیک خطای روتینگر را می توان با توجه به تعریف خطای  $\xi$  و معادلات (۶) و (۱۳) به صورت زیر نوشت:

$$D^q \xi = [\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})] - LC\xi \quad (14)$$

در اینجا، برخی از مقدمات قبل از آغاز بررسی پایداری روتینگر پیشنهادی ارائه می شود. ابتدا، بر اساس فرض ۱، مجموعه  $D_{n,n}$  به صورت زیر معرفی می شود [۳۰ و ۳۱]:

$$D_{n,n} = \{ \lambda = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{nn}) : \lambda_{ij} \leq \lambda_{ij} \leq \bar{\lambda}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \} \quad (15)$$

مجموعه  $D_{n,n}$ ، مجموعه محدب با  $2^{(n^2)}$  رأس می باشد. این رئوس به صورت زیر معرفی می گردند:

$$V_{D_{n,n}} = \{ \alpha = \{ \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn} \}; \alpha_{ij} \in \{ \lambda_{ij}, \bar{\lambda}_{ij} \} \} \quad (16)$$

با توجه به  $\Lambda(\xi)$  در معادله (۶) و همچنین (۱۱)، (۱۲) و (۱۶) ماتریس  $A(\alpha)$  به صورت زیر تعریف می گردد [۳۰ و ۳۱].

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\alpha_{ij} \in \{ \lambda_{ij}, \bar{\lambda}_{ij} \}; \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

عصر غیرخطی در معادله دینامیکی خطای روتینگر (۱۴) با استفاده از روش تئوری مقدار میانگین مشتقی (۵) به صورت زیر قابل نوشتن است.

مسئله کنترلی شامل یافتن سیگنال کنترلی  $u$  به گونه ای است که حالت  $\xi_d$ ، تراژکتوری مطلوب مدل مرجع زیر یا به عبارت دیگر  $\xi_d = [\xi_{d1}, \xi_{d2}, \dots, \xi_{dn}]^T$  را تعقیب کند.

$$D^q \xi_d = A_d \xi_d + B_d r \quad (7)$$

در معادله (۷) ماتریس های  $A_d$  و  $B_d$  ماتریس های معلوم ثابت هستند. هم ورودی مدل مرجع می باشد. خطای ردیابی حالت های سیستم اصلی نسبت به سیستم مرجع به صورت زیر تعریف می گردد.

$$e = \xi - \xi_d \quad (8)$$

در صورتی که تمامی حالت های سیستم غیرخطی ( $\xi$ ) و همچنین ماتریس  $\Lambda(\xi)$  معلوم بوده و  $D^q \xi_d$  نیز در دسترس باشد، سیگنال کنترلی زیر می تواند همگرایی مجانبی خطای تعقیب  $e$  مربوط به سیستم (۶) به صفر را تضمین نماید:

$$u = \Sigma^+ (-\Lambda(\xi) + B_d r + A_d \xi) \quad (9)$$

ماتریس شبه معکوس  $\Sigma^+$  به صورت زیر تعریف می گردد:

تعریف ۲: با فرض اینکه  $D \in R^{n \times m}$  یک ماتریس با رنک کامل باشد، ماتریس شبه معکوس  $D^+ \in R^{m \times n}$  به صورت زیر تعریف می گردد:

$$D^+ = \begin{cases} D^T (DD^T)^{-1}, & n < m \\ D^{-1}, & n = m \\ (D^T D)^{-1} D^T, & n > m \end{cases} \quad (10)$$

### ۳- طراحی روتینگر و تحلیل پایداری آن

از آنجایی که در اغلب موارد بردار حالت  $\xi$  در دسترس نمی باشد سیگنال کنترلی (۹) نیز قابل دستیابی نمی باشد. بنابراین ابتدا در این بخش یک روتینگر برای تخمین بردار حالت  $\xi$  برای سیستم غیرخطی (۶) پیشنهاد می گردد. سپس برای تحلیل پایداری روتینگر پیشنهادی از روش تئوری مقدار میانگین مشتقی و قضیه لیاپانوف استفاده می گردد. ویژگی روش تئوری مقدار میانگین مشتقی، تبدیل دینامیک غیرخطی خطای روتینگر به یک سیستم خطی با پارامترهای متغیر می باشد. با این کار اثبات همگرایی مجانبی خطای روتینگر پیشنهادی به صفر با استفاده از تابع لیاپانوف خطی امکان پذیر می باشد که کاری ساده می باشد. تجزیه و تحلیل پایداری دینامیک خطای خطی شده روتینگر، منجر به یک مسئله نامساوی ماتریسی خطی می شود. یافتن یک حل برای مسئله نامساوی ماتریسی خطی منجر به دستیابی به ماتریس یا بردار بهره روتینگر می گردد. قبل از پرداختن به مسئله طراحی روتینگر، فرضیات زیر معرفی می گردند.

فرض ۱: ماتریس ژاکوبین مربوط به  $\Lambda(\xi)$  شرایط زیر را برآورده می نمایند:

$$D^q V(t) \leq 2\tilde{\xi}^T(t)P(D^q \tilde{\xi}(t)) \quad (25)$$

سمت راست نامساوی (۲۵) به صورت زیر نوشته می شود:

$$2\tilde{\xi}^T(t)P(D^q \tilde{\xi}(t)) = \tilde{\xi}^T(t)P(D^q \tilde{\xi}(t)) + (D^q \tilde{\xi}(t))^T P \tilde{\xi}(t) \quad (26)$$

با جایگزین کردن (۲۱) در سمت راست معادله (۲۶) داریم:

$$2\tilde{\xi}^T(t)P(D^q \tilde{\xi}(t)) = \tilde{\xi}^T \left[ (A(\lambda(t)) - LC)^T P + P(A(\lambda(t)) - LC) \right] \tilde{\xi}$$

بنابراین با توجه به نامساوی (۲۵)، می توان نوشت:

$$D^q V(t) \leq \tilde{\xi}^T \frac{[(A(\lambda(t)) - LC)^T P + P(A(\lambda(t)) - LC)]}{s(\gamma(t))} \tilde{\xi} \quad (27)$$

بر اساس فرض ۱ و رابطه (۲۰)، پارامتر  $\lambda_{ij}$  برای هر  $i$  و  $j$  محدود می باشد. بنابراین  $\lambda(t)$  در یک دامنه محدود قرار می گیرد. در رابطه (۲۷) تابع ماتریسی  $S(\cdot)$  نسبت به  $\lambda(t)$  مستوی است. بنابراین با استفاده از اصل محدب بودن [۳۴] اگر بوسیله ماتریس  $A(\alpha)$  تابع ماتریسی  $S(\cdot)$  در  $\mathcal{V}_{D_{n,n}}$  (همانند (۱۶)) بر آورده گردد می توان نتیجه گرفت برای تمام مقادیر  $\lambda(t)$ ، تابع ماتریسی  $S(\cdot)$  در دامنه محدود  $D_{n,n}$  (همانند (۱۵)) قرار می گیرد. بنابراین با توجه به (۲۷) می توان نتیجه گرفت:

$$D^q V(t) \leq \tilde{\xi}^T \frac{[(A(\alpha) - LC)^T P + P(A(\alpha) - LC)]}{s(\alpha)} \tilde{\xi} \quad (28)$$

بنابراین با توجه به (۲۸) می توان مشاهده کرد که اگر (۲۳) بر آورده گردد، می توان گفت:

$$D^q V(t) < 0$$

و این به معنی پایداری مجانبی روتینگر و همگرایی خطای آن ( $\tilde{\xi}$ ) به صفر می باشد و اثبات تکمیل می گردد.

توضیح ۱: روش پیشنهادی را می توان با ایجاد یک تغییر ناچیز در روش اثبات، برای کلاس مستوی عمومی سیستم های دینامیکی مرتبه صحیح غیرخطی اعمال کرد.

#### ۴- طراحی کنترل کننده مبتنی بر روتینگر

##### پیشنهادی

سیستم مرتبه کسری مستوی (۶) را در نظر می گیریم. با فرض در نظر گرفتن تخمین حالت سیستم، به عبارت دیگر  $\tilde{\xi}$ ، قانون کنترلی (۹) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$u = \Sigma^+(-\Lambda(\tilde{\xi}) + B_d r + A_d \tilde{\xi} + u_s) \quad (29)$$

$$\Lambda(\xi) - \Lambda(\tilde{\xi}) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \zeta_n(i) \zeta_n^T(j) \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \xi_j}(\xi(t)) \right) (\xi(t) - \tilde{\xi}(t)) \quad (18)$$

در معادله بالا،  $\zeta_n(i)$  قبلا در نمادگذاری شماره ۲ معرفی گردیده است. همچنین  $v_i(t) \in \text{Conv}(\xi, \tilde{\xi})$  می باشد.

با استفاده از (۱۸) دینامیک خطای روتینگر یا به عبارت دیگر (۱۴) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$D^q \tilde{\xi} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \xi_j}(\xi(t)) \zeta_n(i) \zeta_n^T(j) \right) \tilde{\xi} - LC \tilde{\xi} \quad (19)$$

با استفاده از نمادهای زیر

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \xi_j}(\xi(t)) \Rightarrow \quad (20)$$

$$\lambda(t) = (\lambda_{11}(t), \dots, \lambda_{1n}(t), \dots, \lambda_{nn}(t))$$

دینامیک خطای (۱۹) به صورت زیر نوشته می شود.

$$D^q \tilde{\xi} = (A(\lambda(t)) - LC) \tilde{\xi} \quad (21)$$

به طوریکه در معادله (۲۱) داریم.

$$A(\lambda(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(t) & \dots & \lambda_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1}(t) & \dots & \lambda_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

دینامیک خطای (۲۱) یک سیستم خطی تغییرپذیر با پارامتر (LPV) می باشد. در حقیقت با استفاده از تئوری مقدار میانگین مشتقی دینامیک خطای غیرخطی روتینگر به یک سیستم خطی تغییرپذیر با پارامتر تبدیل شد. **قضیه ۳:** سیستم دینامیکی (۶) و روتینگر (۱۳) را در نظر می گیریم. برای هر ماتریس  $R, P = P^T > 0$  و همچنین  $A(\alpha)$  که در معادله (۱۷) تعریف شده است، خطای روتینگر  $\tilde{\xi}$  به ازاء  $\alpha \in \mathcal{V}_{D_{n,n}}$  به صورت مجانبی به صفر همگرا می گردد اگر LMI زیر بر آورده گردد.

$$A^T(\alpha)P - C^T R + PA(\alpha) - R^T C < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{D_{n,n}} \quad (23)$$

ماتریس  $L$  با توجه به  $L = P^{-1}R^T$  بدست می آید.

##### اثبات.

تابع لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می گردد.

$$V(t) = \tilde{\xi}^T(t)P\tilde{\xi}(t) \quad (24)$$

که در آن  $P$  یک ماتریس معین مثبت متقارن می باشد. با مشتق مرتبه کسری گرفتن از تابع لیاپانوف انتخابی (۲۴) نسبت به زمان و با توجه به (۴) داریم:

خطای تعقیب به نزدیکی صفر میل می نماید اگر قانون تطبیق پارامتر زیر برقرار باشد:

$$D^q l = \gamma_l \|\hat{\Xi}^T(t)P\| \quad (39)$$

که در آن ماتریس  $P > 0$ ، معادله لیاپانوف زیر را برای برخی از ماتریس های معین مثبت  $Q$  برآورده می نماید.

$$(A_d)^T P + P^T(A_d) = -Q \quad (40)$$

**اثبات.**

تابع کاندید لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می گردد:

$$V(t) = \frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)P\hat{\Xi}(t) + \frac{1}{2\gamma_l} \tilde{l}^2 \quad (41)$$

در معادله (۴۱)،  $\tilde{l} \triangleq l_m - l$ ، به گونه ای که پارامتر  $l$  تخمینی از یک ثابت مثبت نامعلوم  $l_m$  بوده و  $\gamma_l$  یک ثابت مثبت باشد. مشتق کسری معادله (۴۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} D^q V(t) &\leq \frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)P(D^q \hat{\Xi}(t)) + \\ &\frac{1}{2} (D^q \hat{\Xi}(t))^T P \hat{\Xi}(t) - \frac{1}{\gamma_l} \tilde{l} (D^q l) = \\ &\frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)P[A_d \hat{\Xi}(t) + \omega + u_s] + \\ &\frac{1}{2} [A_d \hat{\Xi}(t) + \omega + u_s]^T P \hat{\Xi}(t) - \\ &\frac{1}{\gamma_l} \tilde{l} (D^q l) = \frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)[(A_d)^T P + \\ &P^T(A_d)] \hat{\Xi}(t) + \hat{\Xi}^T(t)P(\omega + u_s) - \\ &\frac{1}{\gamma_l} \tilde{l} (D^q l) \end{aligned} \quad (42)$$

معادله (۴۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} D^q V(t) &\leq \frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)[(A_d)^T P + \\ &P^T(A_d)] \hat{\Xi}(t) + \hat{\Xi}^T(t)P(\omega + u_s) - \\ &\frac{1}{\gamma_l} \tilde{l} (D^q l) \end{aligned} \quad (43)$$

از (۴۰) و (۴۳) داریم:

$$\begin{aligned} D^q V(t) &\leq -\frac{1}{2} \hat{\Xi}^T(t)Q\hat{\Xi}(t) \\ &+ \hat{\Xi}^T(t)P(\omega + u_s) \\ &- \frac{1}{\gamma_l} \tilde{l} (D^q l) \end{aligned} \quad (44)$$

با فرض  $\|\omega\| \leq l_m$  اسکالر  $\hat{\Xi}^T(t)P\omega$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}^T(t)P\omega &\leq \|\hat{\Xi}^T(t)P\| \|\omega\| \\ &\leq l_m \|\hat{\Xi}^T(t)P\| \end{aligned} \quad (45)$$

با استفاده از (۴۴)، (۴۵) و با توجه به تعریف  $u_s$  در (۳۸) و همچنین رابطه (۳۹) و نامساوی زیر [۳۵]:  $|x| - x \tanh(x) \leq \mu_0$  که در آن  $\mu_0 \approx 0.2785$ ، می توان نوشت:

$u_s \in \mathbb{R}^n$  سیگنال کمکی جهت جبران خطای تخمین می باشد که باید به شکل مناسبی انتخاب گردد.

معادله خطای سیستم با حالت تخمین زده شده نسبت به سیستم مرجع به صورت زیر بیان می گردد:

$$\dot{\Xi} = \hat{\xi} - \xi_d \quad (30)$$

با نوشتن دینامیک خطای  $\Xi$  و جایگذاری معادله (۲۹) در آن می توان نوشت:

$$\begin{aligned} D^q \Xi &= A_d \Xi + \Lambda(\xi) + \Sigma u - A_d \xi - \\ &B_d r = A_d \Xi + \Lambda(\xi) + \Sigma \Sigma^\dagger (-\Lambda(\hat{\xi})) + \\ &B_d r + A_d \hat{\xi} + u_s - A_d \xi - B_d r \end{aligned} \quad (31)$$

با بازنویسی معادله (۳۱) داریم:

$$\begin{aligned} D^q \Xi &= A_d \Xi + \Lambda(\xi) + I(-\Lambda(\hat{\xi})) + \\ &B_d r + A_d \hat{\xi} + u_s - A_d \xi - B_d r \Rightarrow \\ D^q \Xi &= A_d \Xi + [\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})] + \\ &A_d (\hat{\xi} - \xi) + u_s \end{aligned} \quad (32)$$

در اینجا دینامیک خطای حالت های روتینگر نسبت به حالت های سیستم اصلی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\dot{\Xi} = \xi - \hat{\xi} \quad (33)$$

با در نظر گرفتن معادله (۳۳)، دینامیک خطای (۳۲) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} D^q \Xi &= A_d \Xi + [\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})] + u_s \\ &- A_d \hat{\Xi} \end{aligned} \quad (34)$$

با توجه به معادلات خطای قید شده در (۸) و (۳۰) داریم

$$\Xi - \hat{\Xi} = \xi - \hat{\xi} = \hat{\Xi} \quad (35)$$

با در نظر گرفتن (۳۵)، معادله (۳۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} D^q \hat{\Xi} + D^q \hat{\Xi} &= A_d \hat{\Xi} + [\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})] \\ &+ u_s \end{aligned} \quad (36)$$

با فرض  $\omega_1 = [\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})]$  معادله (۳۶) به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} D^q \hat{\Xi} &= A_d \hat{\Xi} + \omega_1 + D^q \hat{\Xi} + u_s \\ &= A_d \hat{\Xi} + \omega + u_s \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن  $\omega = D^q \hat{\Xi} + \omega_1$  است.

**قضیه ۲:** سیستم (۶) مفروض است. قانون کنترل (۲۹) و سیگنال جبرانی کمکی زیر پایداری سیستم (۶) را تضمین نموده و

$$u_s = -l \tanh(P\hat{\Xi}(t)) \quad (38)$$

$$\begin{cases} D^q \xi(t) = \Lambda(\xi) + \Sigma u \\ y = C\xi \end{cases}$$

$$\Lambda(\xi) = \begin{bmatrix} -a\xi_1(t) + \xi_1(t)\xi_2(t) + \xi_3(t) \\ -\xi_1^3(t) - b\xi_2(t) + 1 \\ -\xi_1(t) - c\xi_3(t) \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

سیستم مدل مرجع در این شبیه سازی به صورت زیر انتخاب می گردد:

$$D^q \xi_d(t) = A_d \xi_d + B_d r$$

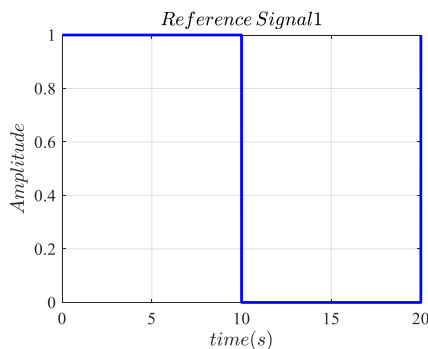
$$A_d = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & -3.0 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad (۵۰)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ورودی سیستم مرجع همانند شکل ۲ شامل دو ورودی می باشد. هر دو ورودی به صورت مربعی با دامنه واحد و دوره تناوب ۱۰ ثانیه می باشد. ورودی دوم نسبت به ورودی اول با تأخیر ۴ ثانیه ای اعمال می گردد. انتخاب ماتریس  $Q = 40 \times I_{3 \times 3}$  و حل معادله ریکاتی  $(A_d)^T P + P^T(A_d) = -Q, Q > 0$  ماتریس معین مثبت متقارن  $P = \begin{bmatrix} 20.0 & -10.0 & 0 \\ -10.0 & 13.33 & 0 \\ 0 & 0 & 20.0 \end{bmatrix}$  به دست می آید. ماتریس بهره روتینگر با حل نامساوی ماتریسی خطی (۲۳) به صورت زیر به دست می آید:

$$L = \begin{bmatrix} 28.5315 & -0.4237 \\ -0.7287 & 25.7227 \\ -0.8721 & -0.0036 \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

شرایط اولیه به ترتیب برای سیستم مالی، روتینگر، مدل مرجع و ورودی جبران ساز به صورت  $\xi(0) = [1 \ 1 \ 2]^T, \xi_d(0) = [2 \ 2 \ 3]^T, l(0) = 0$  و  $\xi_d(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  می گردند



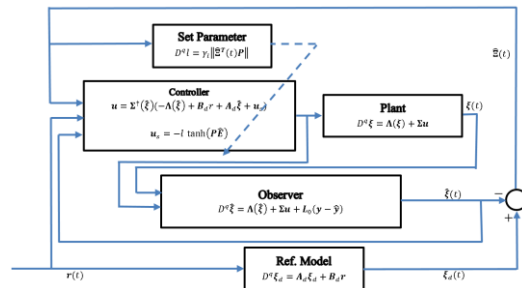
$$D^q V(t) \leq -\frac{1}{2} \xi^T(t) Q \xi(t) + l \| \xi^T(t) P \| - l \xi^T(t) P \tanh(P \xi(t)) - \frac{1}{2} \xi^T(t) Q \xi(t) + l \mu_0 \quad (۴۶)$$

حال با توجه به اینکه  $\lambda_{\min}(Q) \| \xi \|^2 \leq \xi^T(t) Q \xi(t)$  در داخل ناحیه ای که در آن  $\lambda_{\min}(Q)$  مقدار ویژه کمینه  $Q$  است، رابطه (۴۶) به صورت زیر نوشته می شود:

$$D^q V(t) \leq -\lambda_{\min}(Q) \| \xi \|^2 + l \mu_0 \quad (۴۷)$$

این بدین معنی است که تا زمانی که  $\| \xi \| > \sqrt{\frac{l \mu_0}{\lambda_{\min}(Q)}}$  می توان گفت  $D^q V(t) < 0$ . این نشان می دهد که خطای  $\xi$  در داخل ناحیه ای به شعاع  $r_{\xi} = \left\{ \xi \mid \| \xi \| \leq \sqrt{\frac{l \mu_0}{\lambda_{\min}(Q)}} \right\}$  در حقیقت به طور یکنواخت کراندار به مقدار نهایی<sup>۱</sup> می باشد. از طرفی با توجه به  $\xi = \xi - \xi$  و پایداری روتینگر ( $\xi \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ ) می توان گفت خطای  $\xi$  نیز در داخل دایره با شعاع  $r_{\xi} = r_{\xi}$  کراندار می ماند و  $\xi$  نیز به طور یکنواخت کراندار به مقدار نهایی می گردد.

ساختار سیستم کنترل مبتنی بر روتینگر پیشنهادی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. ساختار سیستم کنترل مبتنی بر روتینگر

## ۵- شبیه سازی

دو مثال مختلف در این بخش برای نشان دادن درستی و سودمندی روش طراحی پیشنهادی ارائه می گردد. برای نشان دادن اعتبار طرح پیشنهادی، شبیه سازی های عددی از طریق محیط های Matlab و Simulink انجام شده اند.

### مثال اول.

مثال اول یک سیستم مالی از مرتبه کسری می باشد [۳۶-۳۸]. دینامیک سیستم به صورت معادلات فضای حالت زیر می باشد.

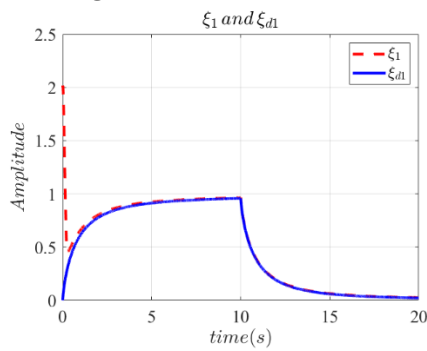
$$\begin{cases} D^q \xi_1(t) = \xi_3(t) + (\xi_2(t) - a)\xi_1(t) + u_1(t) \\ D^q \xi_2(t) = 1 - b\xi_2(t) - \xi_1^3(t) + u_2(t) \\ D^q \xi_3(t) = -\xi_1(t) - c\xi_3(t) \end{cases} \quad (۴۸)$$

که در آن  $q = 0.8$  و  $(a, b, c) = (2.5, 2, 1.5)$  می باشد.

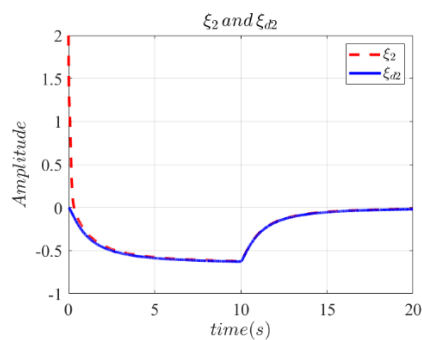
معادله (۴۸) به صورت زیر بازنویسی می گردد.

<sup>۱</sup> Uniformly Ultimately Bounded (UUB)

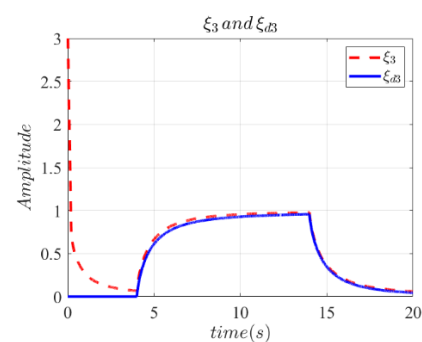
همانطور که در نمودارهای شکل ۴ (الف، ب و ج) مشاهده می گردد هر سه حالت سیستم گفته شده به حالت های سیستم مرجع همگرا شده اند.



(الف)



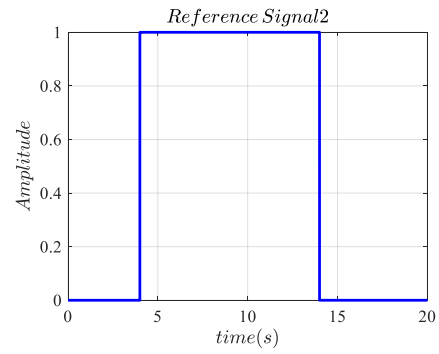
(ب)



(ج)

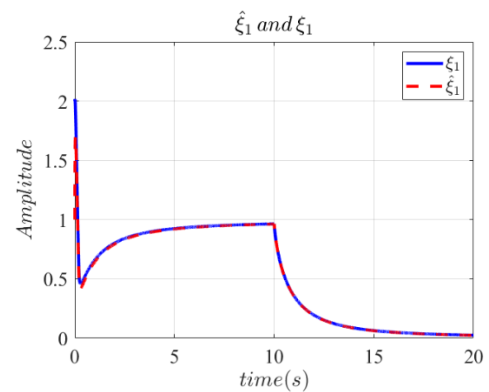
شکل ۴. منحنی های همگرایی حالت های سیستم مالی به سیستم مرجع (الف، ب و ج)

نمودارهای سیگنال های کنترلی نیز در شکل ۵ نشان داده شده اند. این نمودارها نشان می دهند که ورودی های کنترلی پس از همگرا شدن سیستم اصلی به سیستم مرجع، مناسب و محدود می باشند.

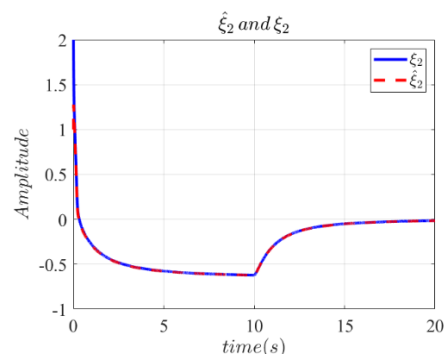


شکل ۲. نمودارهای سیگنال های مرجع ورودی سیستم مالی

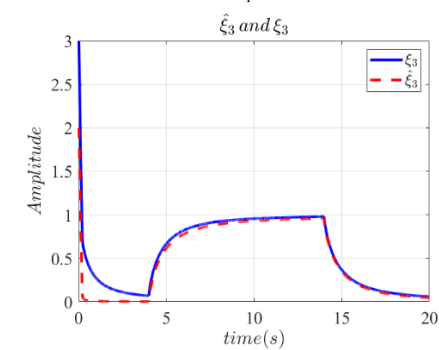
عملکرد سیستم رویبنگر در نمودارهای شکل ۳ دیده می شود. مطابق این شکل ها رویبنگر به خوبی توانسته است حالت های سیستم را تخمین بزند.



(الف)



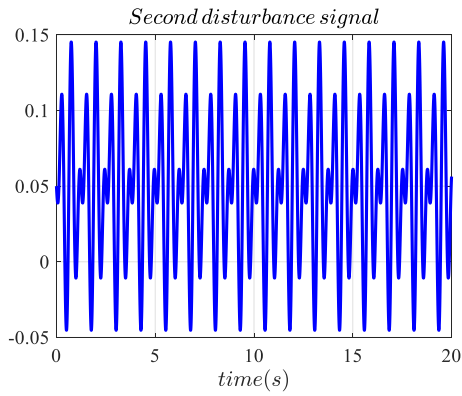
(ب)



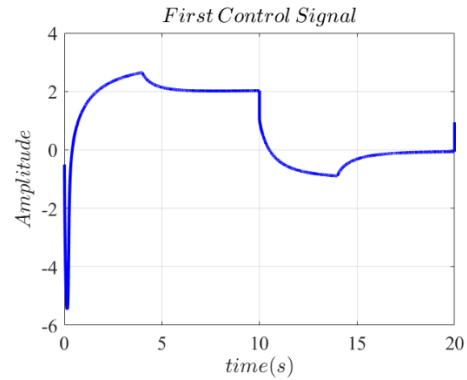
(ج)

شکل ۳. تخمین حالت های سیستم مالی توسط رویبنگر (الف، ب و ج)

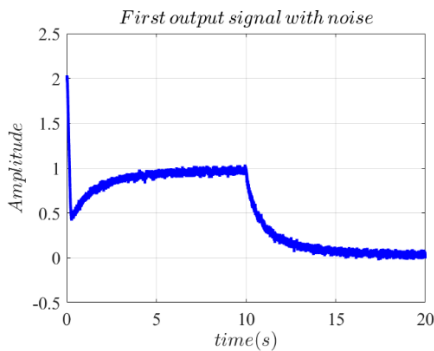




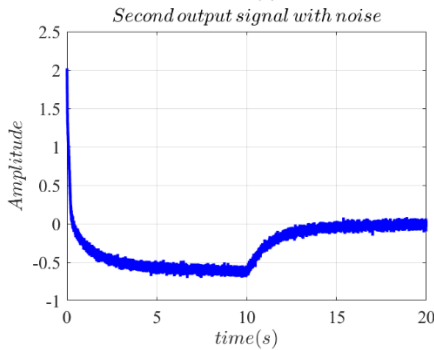
شکل ۶: نمودارهای اغتشاش ورودی در کانال‌های ۱ و ۲



شکل ۵: نمودارهای ورودی‌های کنترلی سیستم مالی

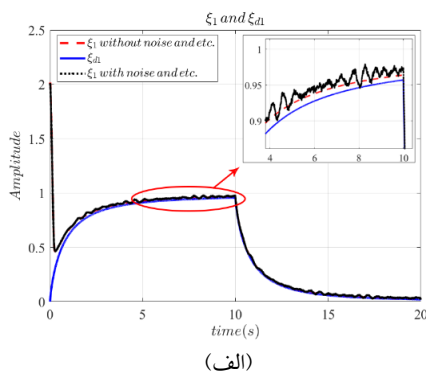


شکل ۷: نمودارهای خروجی‌های سیستم مالی در حضور نویز

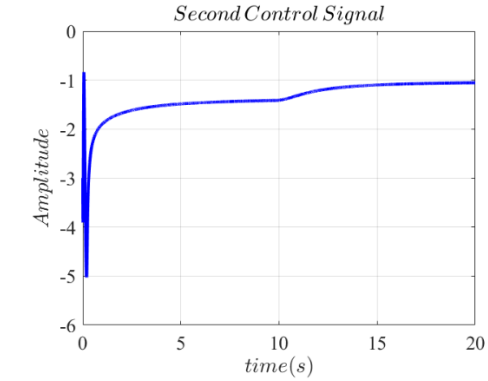


اندازه گیری

نمودارهای شکل ۸، مقایسه همگرایی حالت‌های سیستم اصلی به سیستم مرجع در حضور و بدون حضور نویز، اغتشاش و عدم قطعیت را نشان می‌دهند که نشان دهنده کارایی کنترل کننده می‌باشد.

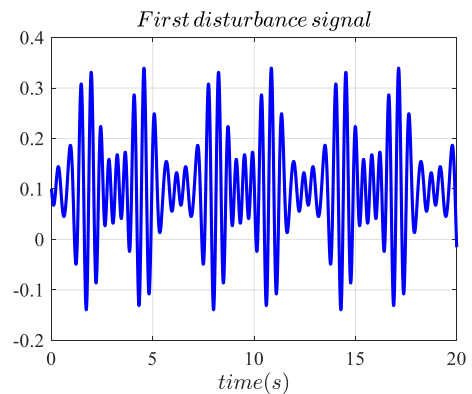


(الف)



شکل ۵: نمودارهای ورودی‌های کنترلی سیستم مالی

حال کارآیی روش ارائه شده در حضور نویز، اغتشاش و عدم قطعیت بررسی می‌گردد. برای این منظور فرض می‌شود ورودی‌های اغتشاش اعمال شده به کانال‌های اول و دوم سیستم (۴۸) مطابق نمودارهای شکل ۶ بوده و کانال سوم فاقد ورودی اغتشاش باشد. خروجی سیستم همانگونه که در شکل‌های ۷ نشان داده شده است، در کانال  $y_1$  حاوی نویز اندازه گیری با میانگین صفر و انحراف معیار ۰.۰۲ و در کانال  $y_2$  نیز شامل نویز با میانگین صفر و انحراف معیار ۰.۰۳ می‌باشد. همچنین پارامتر  $a$  (ضریب  $\xi_1$  در معادله اول) از مقدار ۲.۵ به ۳ تغییر یافته است.



$$D^q \xi_d(t) = A_d \xi_d + B_d r$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 7.6747 & 6.1352 & 6.5461 & -5.9516 \\ 27.0190 & 10.0021 & 14.4778 & -12.8857 \\ -1.4617 & -1.3214 & -4.2947 & 1.2299 \\ 52.6030 & 26.8158 & 29.4299 & -29.3821 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

انتخاب با

$$Q = \begin{bmatrix} 2.8947 & -0.4737 & 0.2632 & -0.6842 \\ 1.1579 & 2.2105 & -0.8947 & -0.4737 \\ 1.5263 & 0.3684 & 0.6842 & -0.5789 \\ 2.2632 & -1.3158 & 0.8421 & 0.2105 \end{bmatrix}$$

و حل معادله

$$Rikayati (A_d)^T P + P^T (A_d) = -Q, \quad Q > 0$$

ریکاتی

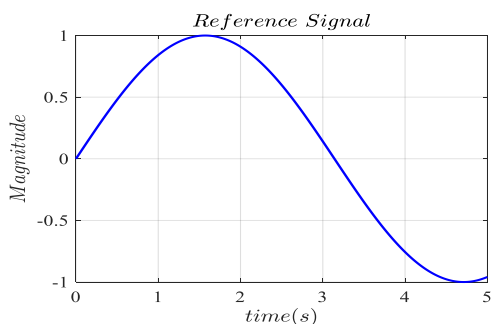
مقارن P به صورت زیر بدست می آید.

$$P = \begin{bmatrix} 2.7518 & 5.8080 & -0.0153 & 9.7678 \\ 6.1896 & 15.2888 & -0.1755 & 24.6617 \\ 0.6783 & 1.4372 & 0.1356 & 2.4774 \\ 10.9126 & 25.8193 & 0.0569 & 42.8209 \end{bmatrix}$$

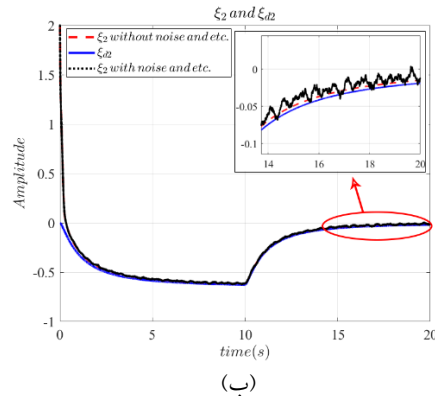
برای یافتن ماتریس های بهره رویتگر می توان نامساوی های ماتریسی خطی (۲۳) را حل نمود. از حل این نامساوی، ماتریس بهره به صورت زیر به دست می آید.

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & -43.9402 \\ -3.9285 & 0.2852 \\ 0.8840 & 46.2829 \\ 0.0362 & 18.3162 \end{bmatrix} \quad (54)$$

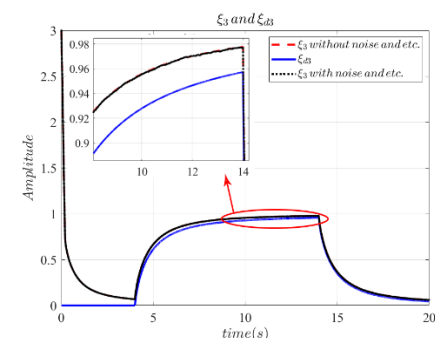
شرایط اولیه به ترتیب برای سیستم بازوی روبات، رویتگر، سیستم مرجع و متغیر l به صورت  $\xi(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T * \frac{\pi}{180}$  ،  $\xi_d(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  ،  $\xi(0) = [3 \ 3 \ 3 \ 3]^T * \frac{\pi}{180}$  و  $l(0) = 0$  در نظر گرفته می شوند. شبیه سازی در محیط سیمولینک متلب و با استفاده از تولباکس FOMCON انجام می گردد. نتایج شبیه سازی گویای همگرایی خوب حالت های سیستم بازوی روبات انعطاف پذیر با حالت های سیستم مرجع می باشد. نمودارهای (الف تا د) در شکل ۱۰ نشان دهنده این موضوع می باشد.



شکل ۹. نمودار سیگنال مرجع ورودی به سیستم بازوی روبات انعطاف پذیر



(ب)



(ج)

شکل ۸ مقایسه منحنی های همگرایی حالت های سیستم مالی به سیستم مرجع در حضور و عدم حضور اغتشاش ورودی، نویز اندازه گیری و عدم قطعیت مدل سیستم (الف، ب و ج)

## مثال ۲

سیستم غیر خطی از نوع مرتبه کسری یک بازوی روبات مفصلی انعطاف پذیر<sup>۱</sup> که در [۳۹] معرفی شده است در نظر گرفته می شود. معادلات فضای حالت مرتبه کسری غیرخطی این سیستم به صورت زیر بیان می گردد.

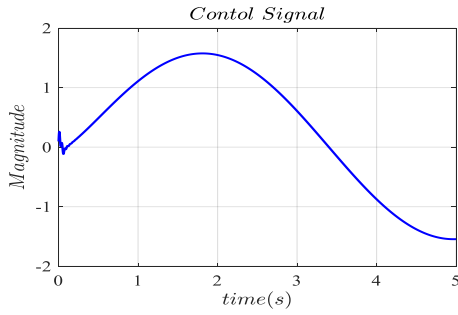
$$D^q \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_2 \\ -48.6\xi_1 - 1.25\xi_2 + 48.6\xi_3 \\ \xi_4 \\ 19.5\xi_1 - 19.5\xi_3 - 3.33 \sin \xi_3 \end{bmatrix}}_{\Lambda(\xi)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} u \quad (52)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi$$

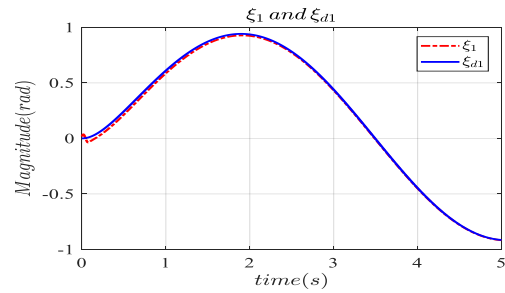
که در آن  $q = 0.8$  و سیگنال ورودی سیستم مرجع  $r = \sin t$  انتخاب می گردد. نمودار این سیگنال ورودی در شکل ۹ نشان داده شده است.

سیستم مرجع در این شبیه سازی به صورت زیر انتخاب می گردد:

<sup>1</sup> The flexible joint robot manipulator

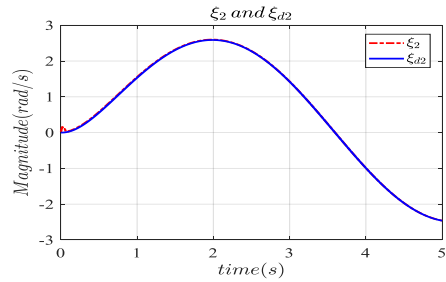


شکل ۱۱. نمودار سیگنال کنترل سیستم بازوی روبات انعطاف پذیر

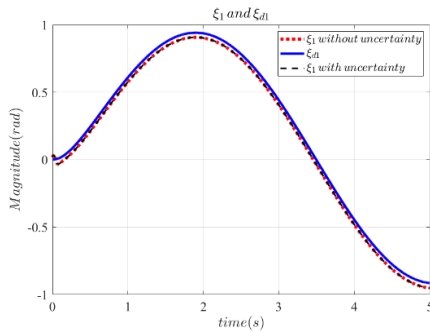


(الف)

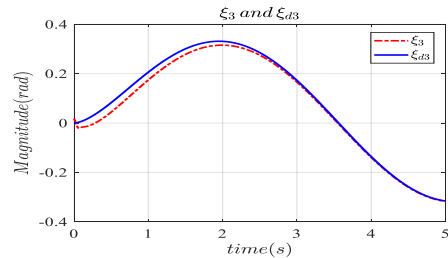
برای بررسی میزان حساسیت روش ارائه شده به تغییر پارامترهای سیستم (۵۲) فرض می شود ضریب  $\xi_1$  در معادله دوم از -48.6 به -50 و ضریب  $\xi_3$  در معادله چهارم از -19.5 به -17 تغییر یابد. با در نظر گرفتن شرایط اولیه به صورت پیش فرض های سابق، شبیه سازی نشان می دهد علی رغم عدم قطعیت گفته شده در پارامترهای مدل نامی سیستم، روش ارائه شده کارآیی خوبی دارد. نمودارهای رسم شده در شکل ۱۲ مقایسه همگرایی بین حالت های سیستم اصلی و سیستم مرجع را در دو حالت با عدم قطعیت و بدون عدم قطعیت مدل نشان می دهند.



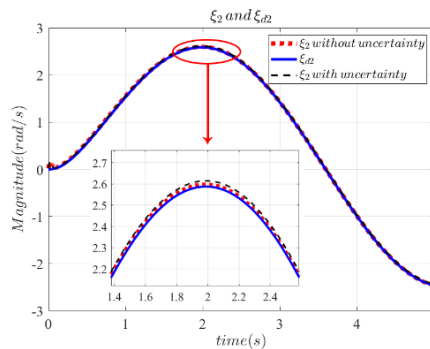
(ب)



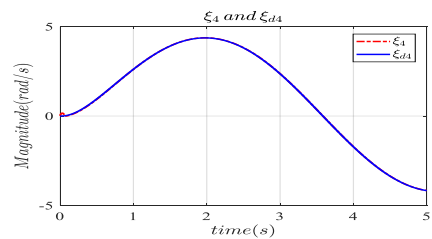
(الف)



(ج)



(ب)



(د)

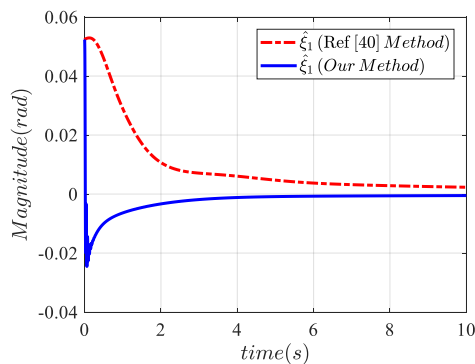
شکل ۱۰. منحنی های همگرایی حالت های سیستم بازوی روبات انعطاف پذیر به سیستم مرجع (الف تا د)  
محدود بودن ورودی کنترلی شرط بسیار مهم در طراحی یک کنترل کننده می باشد. این مهم در شکل ۱۱ به تصویر کشیده شده است.

همچنین ورودی کنترلی سیستم (۵۵) به صورت  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\xi$  در نظر گرفته می شود به گونه ای که ماتریس  $\mathbf{K}$  بهره فیدبک حالت می باشد. مطابق [۴۰] در صورت وجود عدد حقیقی مثبت  $\varepsilon_1$  و ثابت اسکالر مثبت  $\beta$ ، با حل پذیر بودن نامساوی ماتریسی زیر ضرایب  $\mathbf{L}$  و  $\mathbf{K}$  بدست آمده و علاوه بر پایدار بودن روتینگر و کنترل کننده، حالت های تخمین زده شده به حالت های واقعی همگرا می گردند.

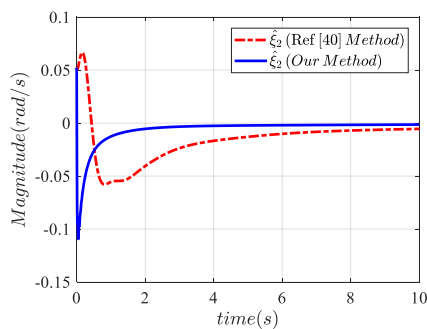
$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\theta}) + (\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{BK} \\ -\mathbf{K}^T \mathbf{B}^T & (\mathbf{A}_2 + \boldsymbol{\theta}) + (\mathbf{A}_2 + \boldsymbol{\theta})^T \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

که در آن  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$ ،  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$  و  $\boldsymbol{\theta} = \varepsilon_1^{-1} \boldsymbol{\gamma}$  می باشد.

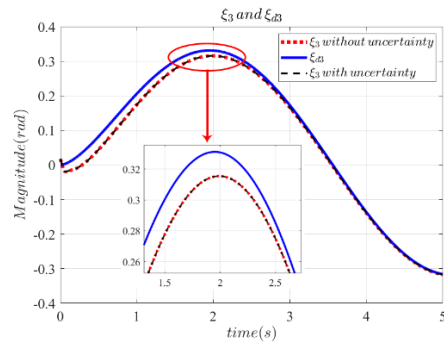
در اینجا نتایج شبیه سازی مثال دوم برای هر دو روش در نمودارهای شکل ۱۳ و ۱۴ دیده می شود. نمودارهای شکل ۱۳، نمایانگر مقایسه حالت های روتینگر و نمودارهای شکل ۱۴، نشان دهنده مقایسه حالت های واقعی سیستم (۵۲) برای روش حاضر و روش مرجع [۴۰] می باشد. مطابق با این نتایج کارآیی روش حاضر به خوبی دیده می شود. علاوه بر این در روش حاضر هیچگونه شرطی روی تابع غیرخطی  $\mathbf{A}(\xi)$  وجود ندارد.



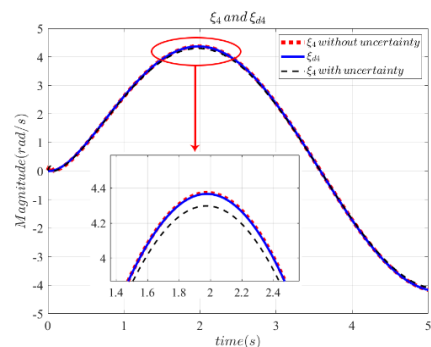
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۲. منحنی های همگرایی حالت های سیستم بازوی روبات  
انعطاف پذیر به سیستم مرجع (الف تا د)

حال به مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با روش های موجود می پردازیم. در اینجا با در نظر گرفتن روش موجود در [۴۰]، به بررسی دو روش پرداخته می شود.

مطابق [۴۰] معادله دینامیکی سیستم غیرخطی مرتبه کسری به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

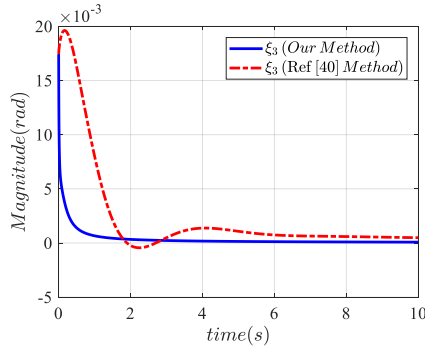
$$\begin{cases} D^q \xi = \mathbf{A}(\xi) + \mathbf{B}u + \boldsymbol{\phi}(\xi, u) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\xi \end{cases} \quad (55)$$

که در آن،  $\xi \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $u \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی و  $y \in \mathbb{R}^p$  بردار متغیرهای خروجی قابل اندازه گیری سیستم،  $\mathbf{C}$  ماتریس با ابعاد مناسب،  $\boldsymbol{\phi}(\xi) \in \mathbb{R}^n$  بردار تابع غیرخطی، معلوم و مشتق پذیر می باشد. تابع  $\boldsymbol{\phi}(\xi)$  لپ شیتز در  $\xi$  و با ثابت لپ شیتز  $\gamma$  می باشد به گونه ای که:

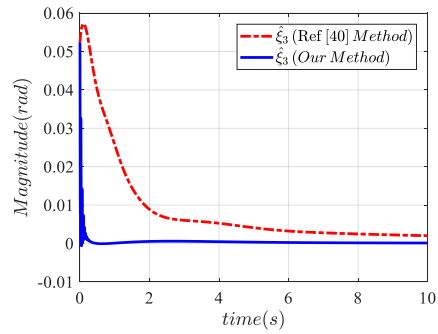
$$\|\boldsymbol{\phi}(\xi_1, u) - \boldsymbol{\phi}(\xi_2, u)\| < \gamma \|\xi_1 - \xi_2\| \quad (56)$$

یک روتینگر مرتبه کسری غیرخطی به صورت زیر برای سیستم (۵۵) ارائه می شود:

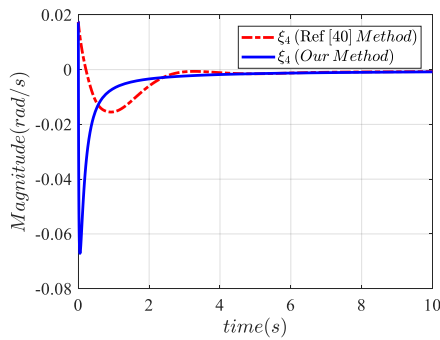
$$\begin{cases} D^q \hat{\xi} = \mathbf{A}(\hat{\xi}) + \mathbf{B}u + \boldsymbol{\phi}(\hat{\xi}, u) + \mathbf{L}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \mathbf{C}\hat{\xi} \end{cases} \quad (57)$$



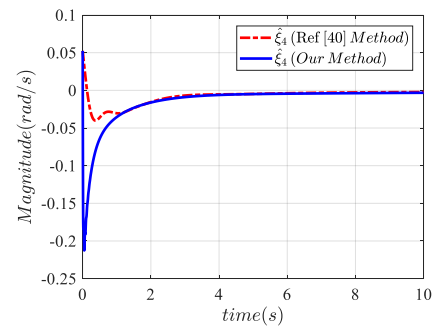
(ج)



(ج)



(د)



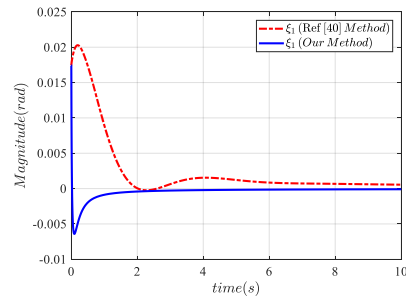
(د)

شکل ۱۴. مقایسه نمودارهای حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیت‌گر برای بازوی روبات از دو روش گفته شده

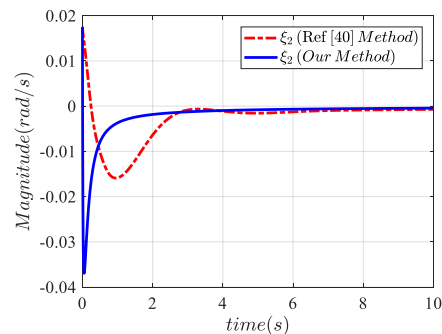
شکل ۱۳. مقایسه نمودارهای حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیت‌گر برای بازوی روبات از دو روش گفته شده

### ۸- نتیجه گیری

در این مقاله یک کنترل کننده مبتنی بر رؤیتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی از نوع مستوی و چند ورودی/چندخروجی طراحی شده است. کنترل کننده به گونه‌ای طراحی شده که سیستم حلقه بسته، حالت‌های یک سیستم مرجع پایدار را تعقیب کند. برای پیش‌بینی حالت‌های سیستم غیرخطی و طراحی رؤیتگر از رویکرد تئوری مقدار میانگین مشتقی استفاده شده و با یافتن شرط کافی برای پیدا کردن بهره‌های رؤیتگر از طریق یک نامساوی ماتریسی خطی و حل آن، رؤیتگر طراحی گردیده است. به منظور تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی حالت‌های سیستم به حالت‌های سیستم مرجع از قضیه لیاپانوف اثبات شده است. در نهایت، با استفاده از شبیه‌سازی عددی کارآیی و مفید بودن کنترل کننده مورد نظر علاوه بر سیستم نامی برای سیستم دارای عدم قطعیت مدل و در حضور اغتشاش ورودی و همچنین نویز اندازه‌گیری نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

## مراجع

- fractional differentiel equations", *Signal Processing*, vol. 91 no. 3, pp. 437-445.
- [15] D.Y. Chen, R.F. Zhang, X.Z. Liu, X.Y. Ma, 2014, "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, pp. 4105-4121.
- [16] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, R. Castro-Linares, 2015, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 22, no. 1-3, pp. 650-659.
- [17] S. Ibrir, M. Bettayeb, 2015, "New sufficient conditions for observer-based control of fractional-order uncertain systems", *Automatica*, vol. 59, pp. 216-223.
- [18] A. Mohammadzadeh, S. Ghaemi, 2018, "Robust synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time-varying delay", *Nonlinear Dynamics*, vol. 93, pp. 1809-1821.
- [19] T. Liu, F.Wang, W. Lu, X.Wang, 2019, "Global stabilization for a class of nonlinear fractional-order systems", *International Journal of Modeling, Simulation and Scientific Computing*, vol. 10, pp. 1-10.
- [20] Y. H. Lan, Y. Zhou, 2011, "Lmi-based robust control of fractional-order uncertain linear systems", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 62, no.3, pp. 1460-1471.
- [21] Y. H. Lan, H. X. Huang, Y. Zhou, 2012, "Observer-based robust control of  $\alpha$  ( $1 < \alpha < 2$ ) fractional-order uncertain systems: a linear matrix inequality approach", *IET Control Theory Application*. vol. 6, pp. 229-234.
- [22] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni, 2012, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems", *Signal Processing*.vol. 92, pp. 2365-2370,.
- [23] Z.S. Aghayan, A. Alfi, T. Machado, 2021, "Observer-based control approach for fractional-order delay systems of neutral type with saturating actuator". *Mathematical Methods in Applied Science*, vol. 44, no. 11, pp. 8554-8564.
- [24] H. F. Ghavidel, A. A Kalat, 2017, "Observer-based robust composite adaptive fuzzy control by uncertainty estimation for a class of nonlinear systems", *Neurocomputing*, vol. 230, pp.100-109.
- [25] H. F. Ghavidel, A. A Kalat, 2018, "Observer-based hybrid adaptive fuzzy control for affine and nonaffine uncertain nonlinear systems", *Neural*
- [1]I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [2]R. Hilfer, *Application of Fractional Calculus in Physics*, World Science Publishing, Singapore, 2000.
- [3]A. Boulkroune, A. Bouzerbia and T. Bouden, 2016, "Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control", *Neural Computing and Applications*, vol. 27, no. 5, pp. 1349-1360.
- [4]N. Laskin, 2000, "Fractional market dynamics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287, no. 3-4, pp. 482-492.
- [5]X. Yin, D. Yue and S. Hu, 2013, "Consensus of fractional Order heterogeneous multi-agent systems", *IET Control Theory and Applications*, vol.7, no. 2, pp. 314-322.
- [6]J.G. Lu, G. Chen, 2009, "Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: An LMI approach", *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1294-1299.
- [7]Y. Chen, Y. Wei, X. Zhou, Y. Wang, 2017, "Stability for nonlinear fractional order systems: an indirect approach", *Nonlinear Dynamics*. vol. 89, no. 2, pp. 1011-1018.
- [8]Z. Song, K. Sun, S. Ling, 2017, "Stabilization and synchronization for a mechanical system via adaptive sliding mode control". *ISA Transaction*, vol. 68, pp. 353-366.
- [9]N. Goléa, A. Goléa, K. Barra, T. Bouktir, 2008, "Observer-based adaptive control of robot manipulators: Fuzzy systems approach", *Applied Soft Computing*, vol. 8, no. 1, pp. 778-787.
- [10]M.P.Aghababa, 2012," Robust stabilization and synchronization of a class of fractional- order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol.17, pp. 2670-2681.
- [11] Y. Li, Y. Chen, I. Podlubny, 2010, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 5, pp. 1810-1821.
- [12] J. Yu, H. Hu, S. Zhou, X. Lin, 2013, "Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems", *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1798-1803.
- [13] C. Farges, M. Moze, J. Sabatier, 2010, "Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems", *Automatica*, vol. 46, pp. 1730-1734.
- [14]J.C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, A. Oustalo up, 2011, "A Lyapunov approach to the stability of

- Computing and Applications, vol. 30, pp. 1187–1202.
- [26] D. Valério, J.J. Trujillo, M. Rivero, J.T. Machado, D. Baleanu, 2013, "Fractional calculus: a survey of useful formulas". The European Physical Journal Special Topics, vol. 222, no. 8, pp. 1827-46.
- [27] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma, 2014, "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, pp. 4105-4121.
- [28] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, J. Gallegos, 2014, "Lyapunov functions for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, pp. 2951–7.
- [29] M-A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, R. Castro-Linares, 2014, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation vol. 22, no. 1-3, pp. 650–659.
- [30] V. Sharma, V. Agrawal, B. Sharma, R. Nath, 2016, "Unknown input nonlinear observer design for continuous and discrete time systems with input recovery scheme". Nonlinear Dynamics vol. 85, no. 1, pp. 645-658.
- [31] V. Sharma, M. Shukla, B.B. Sharma, 2018, "Unknown input observer design for a class of fractional order nonlinear systems", Chaos, Soliton and Fractal, vol. 115, pp. 96-107.
- [32] A. Zemouche, M. Boutayeb, 2009, "A unified  $H_\infty$  adaptive observer synthesis method for a class of systems with both Lipschitz and monotone nonlinearities", System and Control Letter, vol. 58, pp. 282- 288.
- [33] A. Zemouche, M. Boutayeb, G.I. Bara, 2005, "Observer design for nonlinear systems. An approach based on the differential mean value theorem". Proc CDC-ECC'05, 44th IEEE Conference on IEEE, pp.6353–6358.
- [34] S. Boyd, L. Vandenberghe, 2001, "Convex optimization with engineering applications", in: Lecture Notes, Stanford University, Stanford.
- [35] M. M. Polycarpous, P. A. Ioannou, 1996, "A Robust Adaptive Nonlinear Control Design", Automarica, vol. 32, pp. 423–427.
- [36] I. Petras, D. Bednarova, 2011, "Control of fractional-order nonlinear systems: a review", Acta Mechanica et Automatica, vol.5, no.2, pp. 96-100.
- [37] S. Dadras, H.R. Momeni, 2010, "Control of a fractional-order economical systems via sliding mode", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 389, pp. 2434–2442.
- [38] M. Bettayeb, S. Djennoune, 2016, "Design of sliding mode controllers for nonlinear fractional-order systems via diffusive representation", Nonlinear Dynamics. vol. 84, pp. 593–605.
- [39] A. Zemouche and M. Boutayeb, 2013, "On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems," Automatica, vol. 49, pp. 585-591.
- [40] E. A. Boroujeni, H. R. Momeni, 2012, "Observer Based Control of a Class of Nonlinear Fractional Order Systems using LMI", World Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 6 (1), pp. 81-84.