

# به کارگیری فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر در تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت یاب جهانی

محمدجواد رجبی<sup>۱</sup>، سید محمد مهدی دهقان بنادکی<sup>۲</sup>، سعید محمدحسینی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری برق، کنترل، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، [mjrajabi@mut.ac.ir](mailto:mjrajabi@mut.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، [smmd@mut.ac.ir](mailto:smmd@mut.ac.ir)

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده الکتروسرام و مهندسی برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، [sm\\_hoseini@iust.ac.ir](mailto:sm_hoseini@iust.ac.ir)

پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۳

ویرایش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۹

دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲۷

**چکیده:** استفاده از روش های مرسوم تلفیق سیستم ناوبری اینرسی با یک سیستم کمک ناوبری مانند سیستم ماهواره ای ناوبری جهانی به کمک فیلتر کالمن توسعه یافته نیازمند صرف زمان زیاد برای تعیین مقادیر اولیه نسبتاً دقیق در فرآیند ترازبایی اولیه است. این فیلتر در صورت وجود خطای اولیه بزرگ به دلیل وابستگی ژاکوبی ها به متغیرهای حالت، همگرایی کندی داشته و ممکن است واگرا گردد. فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر با تغییر روش تعریف خطا و استفاده از تئوری تغییرناپذیری توانایی رفع این مشکل را داشته و همگرایی آن به خطای مقادیر اولیه وابستگی ندارد. در این مقاله با هدف حذف وابستگی ناوبری به ترازبایی اولیه، از این فیلتر برای تلفیق سیستم ناوبری اینرسی و سیستم موقعیت یاب جهانی استفاده شده است. بدین منظور با تعبیه کردن متغیرهای ناوبری به عنوان یک گروه لی ماتریسی و تعریف خطا به صورت ضرب ماتریسی، مستقل از حالت بودن دینامیک خطا اثبات و معادله آن ارائه می گردد. مقایسه نتایج تلفیق با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته استاندارد و توسعه یافته حالت خطا به کمک داده های واقعی و تحت خطاهای اولیه مختلف بیانگر کارایی قابل توجه فیلتر کالمن نامتغیر، توانایی آن برای رفع واگرایی یا همگرایی کند روش های مرسوم و امکان کاهش زمان آماده به کار سیستم با حذف ترازبایی اولیه است.

**کلمات کلیدی:** تلفیق، سیستم ناوبری اینرسی، سیستم موقعیت یاب جهانی، خطای ترازبایی اولیه بزرگ، فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر.

## Using invariant extended Kalman filter to integrate inertial navigation system and global positioning system

M. J. Rajabi, S. M. M Dehghan, S. Mohammad-Hosseini

**Abstract:** Using the conventional methods to integrate the inertial navigation system and the global navigation satellite system by the extended Kalman filter depends on a time consuming algorithm to determine relatively accurate initial values. In the presence of large initial error, EKF will diverge or converge slowly due to the dependence of the Jacobians on the state variables values. The invariant extended Kalman filter has the ability to solve this problem by changing the error definition method and using the theory of invariance, in which the convergence does not depend on the error of the initial values. In this paper, in order to remove the initial alignment phase, the IEKF is used to integrate the inertial navigation system and the global positioning system. Considering the navigation variables as elements of a Lie group, the error dynamics can be presented in such a way that the Jacobians are independent of the state variables. The comparison of the integration results using the invariant extended Kalman filter, the standard extended Kalman filter and the error state extended Kalman filter with experimental data set in different initial errors shows the significant

performance of the invariant Kalman filter than the other filters and its ability to resolve the divergence or slow convergence problem of the conventional methods. The results show, the dependence of the integration method on the time consuming initial alignment can be removed using this filter.

**Keywords:** integration, inertial navigation system, global positioning system, large initial Alignment error, invariant Extended Kalman filter.

## مقدمه

ناوبری فرآیند اندازه گیری و تعیین متغیرهای حرکت جسم شامل بردارهای موقعیت، سرعت و وضعیت است. وظیفه انجام ناوبری بر عهده سیستم ناوبری است که شامل انواع مختلفی از جمله سیستم ناوبری اینرسی<sup>۱</sup> (INS) است. به عنوان گزینه اصلی انجام ناوبری دقیق، متغیرهای حرکت را از حل معادلات دیفرانسیل ناوبری با استفاده از یک روش ناوبری کور<sup>۲</sup> تعیین می کند. ناوبری کور متغیرهای هر لحظه را با توجه به سرعت، موقعیت و وضعیت لحظه قبل تعیین می کند و نیازمند تعیین مقادیر اولیه قبل از شروع فرآیند ناوبری است. بنابراین تعیین دقیق مقادیر اولیه متغیرها امری حیاتی و بسیار تأثیرگذار در دقت خروجی ناوبری است. فرآیند تعیین مقادیر اولیه ناوبری، تنظیم اولیه<sup>۳</sup> نامیده می شود [۱-۳]. معمولاً تعیین مقادیر اولیه موقعیت و سرعت به راحتی و به کمک یک منبع خارجی مانند سیستم موقعیت یاب جهانی<sup>۴</sup> (GPS) یا سرعت سنج دوپلر<sup>۵</sup> (DVL) انجام می شود. چالش اساسی، تعیین مقادیر اولیه وضعیت است که هم راستایی یا ترازایی<sup>۶</sup> نامیده می شود [۴، ۵]. ترازایی اولیه دقیق معمولاً زمان بر است و باعث افزایش زمان آماده به کار و کاهش سرعت عملکرد سیستم می شود. به دلیل استفاده INS از ناوبری کور، خطای اندازه گیری حس گرهای اینرسی، ناشی از فرآیند ساخت و کالیبراسیون و یا خطای مقادیر اولیه، باعث انباشت خطا در طول زمان و کاهش دقت مخصوصاً در زمان طولانی می شود. به منظور مقابله با این مشکل می توان INS را با یک سیستم کمک ناوبری تلفیق کرد [۲]. دسترسی آسان و ارزان به داده های GPS انگیزه های زیادی را برای تلفیق INS/GPS ایجاد می کند [۳]. همگرایی تلفیق و کاهش خطای آن نیازمند استفاده از یک فیلتر مناسب است. فیلتر کالمن یکی از تلاش های موفقیت آمیز در زمینه طراحی فیلتر برای سیستم های خطی است که به طور گسترده در حوزه های مختلف از جمله ناوبری استفاده می شود. این فیلتر که متداول ترین الگوریتم تخمین حالت در زمان واقعی است، تخمین حداقل واریانس را برای سیستم های خطی با نویز گوسی فراهم می کند و از ویژگی های همگرایی مناسبی برخوردار است [۶]. در واقعیت اکثر سیستم ها و حسگرها رفتار غیرخطی دارند. فیلتر کالمن، با وجود ارائه یک تخمین بهینه، به دلیل استفاده از مدل

خطی برای سیستم و حس گرها کاربرد عملی بسیار محدودی دارد. فیلتر کالمن توسعه یافته<sup>۷</sup> (EKF) مرسوم ترین گسترش از فیلتر کالمن برای سیستم های غیرخطی است. این فیلتر از تکنیک های خطی سازی بهره می برد و ساختاری نسبتاً ساده با کارایی مناسب دارد. با این وجود، نه تنها هیچ تضمینی برای بهینه بودن تخمین ارائه نمی دهد، بلکه خاصیت همگرایی سرتاسری<sup>۸</sup> نیز نداشته و تنها همگرایی محلی آن با فرض خطای اولیه کاملاً کوچک اثبات شده است [۷]. EKF به علت انجام خطی سازی سیستم حول تخمین لحظه فعلی، در سیستم هایی با رفتار غیرخطی شدید تخمینی غیرقابل اعتماد و در برخی موارد واگرا ارائه می دهد. همچنین در صورت وجود حالت غیرقابل مشاهده، این حالت ها را مشاهده پذیر کاذب<sup>۹</sup> می کند [۶، ۸]. برای حل این مشکل که ناسازگاری<sup>۱۰</sup> نامیده می شود، راه کارهایی از جمله EKF با مشاهده پذیری مقید ارائه شده است که پیچیدگی محاسباتی دارد و به طور کلی نمی توان از ناسازگاری اجتناب کرد [۹، ۱۰]. فیلتر کالمن بی بو (UKF) نسخه ی غیرخطی دیگری از فیلتر کالمن است که برای مقابله با برخی از مشکلات EKF و بهبود عملکرد آن، به جای استفاده از ژاکوبی از مجموعه ای از نقاط وزن دار به نام نقاط سیگما<sup>۱۱</sup> استفاده می کند. مشکل اصلی این فیلتر حجم زیاد محاسبات است [۱۱]. به منظور مقابله با معایب فیلترهای فوق، معمولاً نسخه های ترکیبی و ابتکاری از آن ها استفاده می شود. از جمله این ابتکارات استفاده از مفاهیم هندسه دیفرانسیل<sup>۱۲</sup>، نظریه گروه<sup>۱۳</sup> و نظریه نامتغیر<sup>۱۴</sup> در مدل سازی سیستم و استخراج فیلتر کالمن است. مرجع [۱۲] با ارائه بینشی متفاوت در مورد مسئله ناسازگاری، نشان داده است که علت اصلی ناسازگاری، فضایی است که تخمین در آن انجام می شود و ژاکوبی بیش از آنکه علت ناسازگاری باشد، معلول آن است. در [۱۳] نوع جدیدی از EKF ارائه شده است که ریشه در تئوری طراحی رؤیت گر حفظ تقارن<sup>۱۵</sup> یا نامتغیر دارد که در آن به جای تخمین در فضای اقلیدسی که در فرمول بندی استاندارد فیلتر کالمن استفاده می گردد، تخمین روی منی فولد انجام می شود و خطای تخمین تحت عمل یک گروه لی، نامتغیر است. این عدم تغییر<sup>۱۶</sup> به عنوان یک تقارن<sup>۱۷</sup> برای سیستم در نظر گرفته می شود. هرچند که تا قبل از سال ۲۰۰۲ از ویژگی عدم تغییر یا حفظ تقارن برای اهداف کنترلی استفاده شده

<sup>9</sup> False Observability

<sup>10</sup> Inconsistency

<sup>11</sup> Sigma Points

<sup>12</sup> Differential Geometry

<sup>13</sup> Group Theory

<sup>14</sup> Invariant Theory

<sup>15</sup> Symmetry-Preserving Observers

<sup>16</sup> Invariance

<sup>17</sup> Symmetry

<sup>1</sup> Inertial Navigation System

<sup>2</sup> Dead Reckoning

<sup>3</sup> Initialization

<sup>4</sup> Global Positioning System

<sup>5</sup> Doppler Velocity Log

<sup>6</sup> Alignment

<sup>7</sup> Extended Kalman Filter

<sup>8</sup> Global

بود [۱۴]، اما توجه به تقارن های سیستم برای طراحی رُویت گر، اولین بار در این سال با ایده استفاده از یک خطای نامتغیر<sup>۱</sup> در [۱۵] شروع شد. این مرجع به طراحی رُویت گر برای یک فرآیند شیمیایی که خروجی آن نسبت غلظت ها است و بنابراین تحت تبدیل مقیاس گذاری<sup>۲</sup> نامتغیر است، پرداخته است که منجر به ایجاد رُویت گر نامتغیر شد. یک چارچوب کلی برای طراحی رُویت گر حفظ تقارن در [۱۶، ۱۷] ارائه شده است. این رویکرد، به دلیل استفاده از یک خطای نامتغیر، یک چارچوب هندسی برای طراحی رُویت گر غیرخطی با خواص همگرایی جالب ارائه می دهد. از ویژگی های این نوع رُویت گر ها می توان به عدم وابستگی به اطلاعات نویز حسگر، امکان تنظیم پارامترها با الگوریتم پایداری لیاپانوف، مقاومت بالا نسبت به خطای تخمین اولیه و پیچیدگی کمتر اشاره کرد. استفاده از این دسته رُویت گر ها این مزیت را دارد که معادلات خطا مستقل از مسیر حالت سیستم و تخمین آن یا اصطلاحاً خودمختار<sup>۳</sup> شده و بررسی همگرایی می تواند با سهولت بیشتری انجام پذیرد. به منظور بهره برداری از ویژگی همگرایی فیلتر کالمن خطی، [۱۸] با استفاده از ایده رُویت گر حفظ تقارن، رُویت گر EKF حفظ تقارن<sup>۴</sup> را ارائه کرده است که در مقایسه با رُویت گر EKF از خطی سازی مستقیم مدل فرایند غیرخطی و مدل اندازه گیری استفاده نمی کند و دارای چندین ویژگی هایی برجسته، از جمله حفظ تقارن و امکان همگرایی در بسیاری از شرایط است [۱۸-۲۰]. موفقیت EKF حفظ تقارن منجر به ادامه تحقیقات در مورد استفاده از ویژگی تقارن سیستم های غیرخطی و نحوه بهره برداری از آن ها برای طراحی فیلتر شده است [۱۲، ۱۳]. مرجع [۱۳] با استفاده از ابزارهای هندسه دیفرانسیل، فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر<sup>۵</sup> (IEKF) را پیشنهاد کرده است. ایده اصلی IEKF تغییر روش تعریف خطا و استفاده از تئوری تغییرناپذیری برای ارائه معادله دیفرانسیل خطا است. این مرجع نشان می دهد که اگر حالت بر روی یک گروه لی تعریف و دینامیک سیستم ویژگی گروه افاین<sup>۶</sup> را برآورده کند، خطای تخمین که به صورت ضرب ماتریسی دو عنصر در فضای گروه لی تعریف می شود، تحت عمل گروه نامتغیر و دارای یک معادله دیفرانسیل خودمختار است که لگاریتم لی آن از یک رابطه خطی تبعیت می کند. به عبارت دیگر، خطی شدن سیستم به حالت های تخمینی بستگی ندارد. خطای تخمین خودمختار نتیجه اصلی تغییرناپذیری خطای تخمین تحت عمل گروه است که به عنوان تقارن سیستم در نظر گرفته می شود. این تقارن منجر به خطی شدن با حداقل خطای تقریب، عدم وابستگی به تخمین حالت و همگرایی سریع و دقت مناسب می شود و بر بسیاری از کاستی های خطی سازی مبتنی بر ژاکوبی که در EKF استفاده می شود، غلبه می کند. اخیراً برخی از مراجع به دنبال استفاده از IEKF به منظور تلفیق مبتنی بر INS بوده اند. در [۲۱] به منظور مقابله با دقت ضعیف و همگرایی کند EKF تحت خطای تراز یابی اولیه بزرگ، استفاده از IEKF برای سیستم ناوبری

پیشنهاد شده است. [۲۲] تخمین زاویه لغزش جانبی یک وسیله نقلیه را به کمک تلفیق اطلاعات حسگرهای سرعت، واحد اندازه گیری اینرسی<sup>۷</sup> (IMU) و سیستم ماهواره ای ناوبری جهانی<sup>۸</sup> (GNSS) با استفاده از IEKF انجام داده است. مرجع [۲۳] به مقایسه نتایج تلفیق IMU/DVL با استفاده از IEKF و EKF مبتنی بر کوارترینون در مکان یابی زیر آب پرداخته است. در [۲۴] موقعیت یابی یک خودرو به کمک تلفیق INS/GNSS مبتنی بر IEKF و بدون در نظر گرفتن رانش و سوگیری حسگرها انجام شده است. کار مشابهی نیز در [۲۵] با استفاده از یک مجموعه داده به منظور موقعیت یابی یک پرنده بدون سرنشین ارائه شده است. مرجع [۲۶] نیز مدل خطای تراز یابی SINS را با استفاده از تعریف خطای خودمختار و قضایای ارائه شده برای آن استخراج و از فیلتر کالمن خطی برای تراز یابی SINS تحت خطای اولیه بزرگ استفاده کرده است. مقاله حاضر، به منظور کاهش زمان آماده به کار سیستم ناوبری، به دنبال حذف مرحله تراز یابی اولیه است. با این هدف و بر اساس ویژگی های فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر از IEKF برای تلفیق INS/GPS استفاده می شود. بدین منظور در ادامه ی مقاله، در بخش دوم مبانی نظری مورد نیاز بیان شده است. این بخش به توصیف سیستم های دارای ویژگی خطای خودمختار و ارائه معادلات فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر اختصاص داده شده است. در بخش سوم با تعبیه کردن حالت ها به عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، برقراری شرط گروه افاین بررسی و ضمن اثبات مستقل از حالت خطای نامتغیر، معادله دینامیک آن ارائه شده است. در ادامه با استفاده از مدل ارائه شده، معادلات IEKF برای INS/GPS ارائه شده است. در بخش چهارم عملکرد سیستم ناوبری تلفیقی ارائه شده به کمک مجموعه داده های واقعی حاصل از آزمون خودروبی مرجع و تحت خطای هم راستایی اولیه مختلف ارزیابی و با فیلتر کالمن توسعه یافته استاندارد و فیلتر کالمن توسعه یافته حالت خطا مقایسه می شود. در انتها، مقاله با جمع بندی و نتیجه گیری به پایان رسانده می شود.

## ۲- مبانی نظری

### ۲-۱- معرفی گروه و جبر لی

فضای توپولوژیکی که به طور موضعی اقلیدسی است، منیفولد<sup>۹</sup> نامیده می شود. گروه نیز مجموعه ای به همراه یک عمل ترکیب است که دارای خواص بسته بودن، شرکت پذیری، عضو خنثی و عضو وارون می باشد. منیفولد دیفرانسیل پذیری که دارای ساختار گروه باشد و برای آن دو نگاشت ضرب و نگاشت وارون قابل تعریف باشد، یک گروه لی تشکیل می دهد. متناظر با هر گروه لی یک فضای برداری مجهز به یک عملگر براکت لی وجود دارد که جبر لی نامیده می شود. همچنین گروه ماتریسی زیرمجموعه ای از ماتریس های مربعی است که با عمل ضرب ماتریسی یک گروه را تشکیل می دهند. یک گروه لی که هم زمان یک گروه ماتریسی

<sup>6</sup> Group Affine

<sup>7</sup> Inertial Measurement Unit

<sup>8</sup> Global Navigation Satellite System

<sup>9</sup> Manifold

<sup>1</sup> Invariant Error

<sup>2</sup> Scaling

<sup>3</sup> Autonomous

<sup>4</sup> Symmetry Preserving EKF

<sup>5</sup> Invariant EKF

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_t}(\chi_t) \quad (5)$$

که  $\chi \in G$  بیانگر متغیرهای حالت و  $u_t$  ورودی سیستم است. خطای بین دو مسیر متمایز  $\chi_t$  و  $\bar{\chi}_t$  از حالت های سیستم (۵) را می توان با استفاده از ضرب آن ها تعریف کرد. در این صورت خطاهای چپ نامتغیر<sup>۱</sup> و راست نامتغیر<sup>۲</sup> به ترتیب به صورت (۶) و (۷) تعریف می شود.

$$\eta_t^L = \chi_t^{-1} \bar{\chi}_t \quad (6)$$

$$\eta_t^R = \bar{\chi}_t \chi_t^{-1} \quad (7)$$

اصطلاح خطای نامتغیر به عدم تغییر خطا (تقارن) در اثر ضرب (از چپ یا از راست) یک عنصر از گروه در مسیر حالت اشاره دارد. در صورتی که خطای نامتغیر از یک معادله دیفرانسیل به فرم  $\frac{d}{dt} \eta_t = g_{u_t}(\eta_t)$  پیروی کند، دارای انتشار خودمختار<sup>۳</sup> یا مستقل از مسیر حالت نامیده می شود. به طور کلی مشتق زمانی  $\eta_t$  تابعی پیچیده از  $u_t, \chi_t, \bar{\chi}_t$  است که به سادگی در تابعی از  $\eta_t$  خلاصه نمی شود و بنابراین بررسی خودمختار بودن خطا، کار مشکلی است. مرجع [۱۳] به منظور حل این مشکل قضیه ۱ را که در ادامه معرفی می گردد، ارائه کرده است.

## ۲-۴- قضیه ۱- شرط گروه افاین

سیستم (۵) دارای خطای چپ یا راست نامتغیر خودمختار است، اگر برای  $a, b \in G$  و  $t > 0$  شرط زیر را برقرار سازد [۱۳].

$$f_{u_t}(ab) = f_{u_t}(a)b + af_{u_t}(b) - af_{u_t}(I_d)b \quad (8)$$

این شرط، شرط گروه افاین نامیده می شود. در این صورت دینامیک خطاهای خودمختار چپ و راست نامتغیر به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L), g_{u_t}^L(\eta) = f_{u_t}(\eta) - f_{u_t}(I_d)\eta \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \eta_t^R = g_{u_t}^R(\eta_t^R), g_{u_t}^R(\eta) = f_{u_t}(\eta) - \eta f_{u_t}(I_d) \quad (10)$$

سیستم های به فرم (۵) که ویژگی گروه افاین (۸) را برقرار می سازند، خصوصیات قابل توجهی دارند که سیستم های خطی را در حوزه گروه و جبر لی تعمیم می دهد. یکی از این ویژگی ها، ویژگی لگاریتم خطی خطا است که به صورت زیر تعریف می شود [۱۳].

## ۲-۵- قضیه ۲- خطی بودن لگاریتم خطا

خطای چپ یا راست نامتغیر  $\eta$  بین دو مسیر از حالت های سیستم (۵) را در نظر بگیرید. فرض شود  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{\dim g}$  به گونه ای است که  $\exp(\xi_0^\wedge) = \eta_0$ . نیز ماتریسی  $A$   $\dim g \times \dim g$  است که رابطه  $g_{u_t}(\exp(\xi^\wedge)) = (A\xi)^\wedge + O(\|\xi\|^2)$  را برقرار می کند. در این صورت اگر  $\xi_t^\wedge$  برای  $t > 0$  با معادله دیفرانسیل خطی زیر در  $\mathbb{R}^{\dim g}$  مشخص می شود [۱۳].

نیز باشد، گروه لی ماتریسی است که جبر لی آن فضای مماس حول عنصر همانی می باشد [۱-۳]. نگاشت بین عناصر گروه لی ماتریسی  $G \subset \mathbb{R}^{N \times N}$ ، جبر لی متناظر با آن از مرتبه  $\dim g$  و فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^{\dim g}$  توسط عملگرهای زیر انجام می شود.

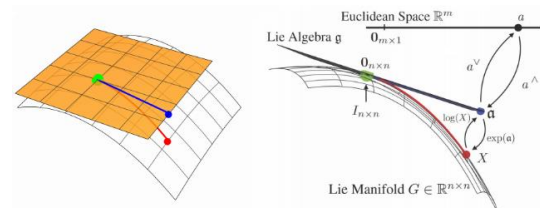
$$(\cdot)^\wedge : \mathbb{R}^{\dim g} \rightarrow g \quad (1)$$

$$(\cdot)^\vee : g \rightarrow \mathbb{R}^{\dim g} \quad (2)$$

$$\exp : g \rightarrow G \quad (3)$$

$$\log : G \rightarrow g \quad (4)$$

نگاشت نمایی (۳) که یک عنصر از جبر لی را دقیقاً به عنصر متناظر در گروه لی نگاشت می کند، برای گروه های لی ماتریسی همان ماتریس نمایی است. ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱- ارتباط گروه لی، جبر لی و فضای اقلیدسی [۴]

در نظر گرفتن متغیرهای حالت سیستم به عنوان عناصر گروه لی ماتریسی، معادلات دینامیک خطا را به گونه ای ارائه می دهد که ویژگی های حرکتی جسم را به صورت دقیق تر توصیف می کند، لیکن انجام محاسبات بر روی گروه لی با پیچیدگی همراه است. به منظور حل این پیچیدگی می توان از ارتباط گروه و جبر لی بهره برد و محاسبات را در فضای جبر لی انجام داد.

## ۲-۲- تقارن

در فیزیک و ریاضیات، عدم تغییر بعضی از خواص یک سیستم دینامیکی تحت اثر مجموعه معینی از اعمال تقارن نامیده شده است. رؤیت گر نامتغیر با استفاده از تقارن به دنبال بهبود عملکرد تخمین است. به عنوان مثال فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر از خطایی استفاده می کند که تحت عمل یک گروه لی تقارن دارد و به همین دلیل مدل دینامیکی آن مستقل از حالت است. در ادامه به منظور بهره گیری از تقارن برای طراحی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر، خطای خودمختار تعریف و دو قضیه اساسی نیز معرفی می گردد [۵].

## ۲-۳- خطای خودمختار

گروه لی ماتریسی  $G \subset \mathbb{R}^{N \times N}$  با جبر لی متناظر  $g$  از مرتبه  $\dim g$  و عضو خنثی  $(I_d)$  را در نظر بگیرید.  $I_d$ ، ماتریس همانی با ابعاد  $N \times N$  است. یک کلاس از سیستم های دینامیکی بر روی گروه لی را می توان به فرم زیر در نظر گرفت [۱۳].

<sup>3</sup> Autonomous Propagation

<sup>1</sup> Left Invariant

<sup>2</sup> Right Invariant

$$\frac{d}{dt} \eta_t^L = g_{u_t}^L(\eta_t^L) - w_t \eta_t^L \quad (16)$$

همانند EKF معمولی، با فرض کوچک بودن خطا می توان بهره  $L_n$  را به کمک خطی سازی خطا محاسبه کرد. طبق تعریف، جبر لی نشان دهنده تغییرات بی نهایت کوچک یک عنصر گروه حول عضو خنثی گروه است. بنابراین مطابق قضیه ۲ روش تعریف یک متغیر خطا  $\xi_t$  در  $\mathbb{R}^{\dim g}$  به صورت زیر است.

$$\eta_t = \exp(\xi_t^\wedge) \quad (17)$$

با تعریف  $\hat{w}_t \in \mathbb{R}^{\dim g}$ ،  $(\hat{w}_t)^\wedge = -w_t$ ، معادله خطی خطا در  $\mathbb{R}^{\dim g}$  به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \xi_t = A \xi_t + \hat{w}_t \quad (18)$$

که  $A$  توسط  $g_{u_t}(\exp(\xi_t^\wedge)) = (A \xi_t)^\wedge + O(\|\xi_t\|^2)$  تعریف و از جملات مرتبه بالا صرف نظر شده است. در EKF نیز با فرض  $\hat{w}_t$  به عنوان نویز سفید از تقریب مشابهی استفاده شده است. طبق قضیه ۲ با فرض  $\xi_t$  به عنوان یک حل برای سیستم خطی (۱۸) و  $\eta_t$  به عنوان یک حل برای معادله خطای غیر خطی (۱۶)، اگر در زمان  $t_{n-1}$  رابطه  $\eta_{n-1} = \exp(\xi_{n-1}^\wedge)$  برقرار باشد، آنگاه تساوی  $\eta_t = \exp(\xi_t^\wedge)$  در هر زمان  $t_{n-1} \leq t \leq t_n$  و برای خطاهای اولیه دلخواه به صورت دقیق و نه تقریبی برقرار است. جمله ابداع<sup>۳</sup> (خطای پیش بینی خروجی) فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر متناسب با مشاهدات چپ نامتغیر به صورت زیر است.

$$Z_{t_n}^L = \hat{\chi}_{t_n}^{-1} (Y_{t_n} - \hat{Y}_{t_n}) \quad (19)$$

که تخمین اندازه گیری با استفاده از تخمین حالت و  $Z_{t_n}$  ابداع است. با استفاده از (۱۷) به روزرسانی خطای چپ نامتغیر، برای مشاهدات چپ نامتغیر نویزی به کمک رابطه (۱۹) به صورت زیر است.

$$(\eta_{t_n}^L)^+ = \chi_{t_n}^{-1} \hat{\chi}_{t_n}^+ = \quad (20)$$

$$\eta_{t_n}^L \exp \left( L_n \left( (\eta_{t_n}^L)^{-1} d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1} v_{t_n} \right) \right)$$

برای خطی سازی آرگومان تابع نمایی رابطه (۲۰) با استفاده از بسط

$$\exp(\xi_{t_n}^\wedge) = I_d + \xi_{t_n}^\wedge \quad \text{به صورت زیر عمل می شود.}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{t_n}^L)^{-1} d - d + (\eta_{t_n}^L)^{-1} v_{t_n} &= \\ \exp(\xi_{t_n}^\wedge)^{-1} (d + v_{t_n}) - d &= \\ (I_d - \xi_{t_n}^\wedge)(d + v_{t_n}) - d + O(\|\xi_{t_n}\|^2) &= \\ -\xi_{t_n}^\wedge d + v_{t_n} + O(\|\xi_{t_n}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}\| \|v_{t_n}\|) \end{aligned} \quad (21)$$

با کمک رابطه (۲۱) و استفاده از بسط تیلور مرتبه اول ماتریس نمایی، معادله (۲۰) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} \xi_t = A \xi_t \quad (11)$$

آنگاه برای خطای غیر خطی واقعی  $\eta$ ، در همه زمان ها و به ازای خطاهای به اندازه دلخواه بزرگ، رابطه زیر برقرار است.

$$\forall t \geq 0 \quad \eta_t = \exp(\xi_t^\wedge) \quad (12)$$

این نتیجه بیان می کند که بسیاری از مسائل غیر خطی با انتخاب مناسب متغیر خطا، منجر به معادلات خطی برای خطا می شوند.

## ۲-۶- فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر

برای سیستم های به فرم (۵) با ویژگی گروه افاین (۸)، دو نوع مشاهده مختلف چپ نامتغیر و راست نامتغیر تعریف می شود که به ازای مشاهدات چپ نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر<sup>۱</sup> (LIEKF) و برای مشاهدات راست نامتغیر، فیلتر کالمن توسعه یافته راست نامتغیر<sup>۲</sup> (RIEKF) ارائه شده است [۱۳]. در ناوبری نیز از دو نوع اندازه گیری محلی و جهانی استفاده می شود. اندازه گیری محلی مانند اندازه گیری های اینرسی، بینایی و کیلومتر شمار مربوط به دستگاه بدنی و قابل بیان به صورت راست نامتغیر است. اندازه گیری جهانی مانند GPS نیز که اطلاعاتی در مورد دستگاه جهانی (دستگاه اینرسی) ارائه می کند، قابل بیان به صورت چپ نامتغیر است [۳۰]. بنابراین فیلتر نامتغیر مناسب برای تلفیق INS/GPS، LIEKF است که روابط آن در ادامه ارائه شده است [۱۳]. بدین منظور فرض می شود که  $G$  یک گروه لی ماتریسی با جبر لی متناظر  $g$  از مرتبه  $\dim g$  و عنصر خنثی  $I_d$  است. یک کلاس از سیستم های دینامیکی به فرم زیر را در نظر بگیرد.

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_t}(\chi_t) + \chi_t w_t \quad (13)$$

که  $\chi \in G$  متغیرهای حالت،  $u_t$  ورودی سیستم و  $w_t \in g$  نویز سفید با ماتریس کوواریانس  $Q_t$  است. مشاهدات چپ نامتغیر نویزی نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$Y_{t_n} = \chi_{t_n} d + v \quad (14)$$

که  $d$  برداری شناخته شده و  $v$  نویز با مشخصات شناخته شده است.

## ۲-۶-۱- مرحله پیش بینی

با توجه به رابطه (۱۳)، مرحله پیش بینی در فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt} \hat{\chi}_t = f_{u_t}(\hat{\chi}_t) \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n \quad (15)$$

## ۲-۶-۲- مرحله بروز رسانی

در صورتی که سیستم (۱۳) شرط گروه افاین را برقرار سازد، خطای چپ نامتغیر بین حالت واقعی  $\chi_t$  و حالت تخمینی  $\hat{\chi}_t$  مستقل از مسیر حالت است و دینامیک آن به صورت رابطه (۱۶) می باشد.

<sup>3</sup> Innovation

<sup>1</sup> Left-Invariant Extended Kalman Filter

<sup>2</sup> Right-Invariant Extended Kalman Filter

$$\tilde{\omega}_t = \omega_t + b_t^g + w_t^g \quad (27)$$

که  $\omega_t$  و  $a_t$  نرخ دوران و شتاب ورودی،  $\tilde{\omega}_t$  و  $\tilde{a}_t$  خروجی حسگرها،  $w_t^g$  و  $w_t^a$  بردار نویز سفید ژيروسکوپ و شتاب سنسور و  $b_t^g$  و  $b_t^a$  نیز بردار رانش ژيروسکوپ و سوگیری شتاب سنسور می باشد که به صورت زیر مدل شده است.

$$\dot{b}_t^g = w_t^{bg} \quad (28)$$

که  $w_t^{bg}$  و  $w_t^{ba}$  بردارهای نویز سفید است. در این صورت معادله دیفرانسیل وضعیت به صورت زیر است.

$$\dot{C}_b^i(t) = C_b^i(t) \left( \omega_{ib}^b(t) + w_t^g(t) \right) \quad (29)$$

که  $(.) \times$  ماتریس پادمتقارن یک بردار سه بعدی و  $\omega_{ib}^b$  سرعت دوران دستگاه بدنه نسبت به دستگاه اینرسی است و توسط ژيروسکوپها اندازه گیری می شود. معادله دیفرانسیل موقعیت و سرعت نیز به صورت زیر است.

$$\dot{v}_{ib}^i(t) = C_b^i(t) (a(t) + w_t^a) + g(t) \quad (30)$$

که  $g$  بردار گرانش و  $a$  نیز شتاب وارد بر جسم است که توسط شتاب سنسورها اندازه گیری می شود.

### ۳-۲- استخراج مدل نامتغیر

با توجه به معادلات (۳۰) و (۳۱)، ماتریس حالت سیستم به عنوان عنصری از گروه لی ماتریسی  $SE_2(3)$  که در پیوست الف معرفی شده است، به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\chi_t = \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

مطابق پیوست ب معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dt} \chi_t = f_{u_i}(\chi_t) + \chi_t w_t \quad (32)$$

که

$$f_{u_i}(\chi_t) = \begin{bmatrix} C_b^i(t) \left( \omega_{ib}^b(t) \right) \times & C_b^i(t) (a(t) + g(t)) & v_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین در پیوست ب با استفاده از شرط گروه افاین اثبات شده است که (۳۲) دارای خطای نامتغیر خودمختار است. در ادامه بر اساس هدف این مقاله که تلفیق SINS/GPS است و با توجه به اینکه مدل اندازه گیری GPS

$$I_d + (\xi_{t_n}^+)^{\wedge} = I_d + \left( L_n \left( -(\xi_{t_n}^{\wedge}) d + v_{t_n} \right) \right)^{\wedge} + O(\|\xi_{t_n}^{\wedge}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}^{\wedge}\| \|v_{t_n}\|) \quad (22)$$

با صرف نظر از جملات  $O(\|\xi_{t_n}^{\wedge}\|^2) + O(\|\xi_{t_n}^{\wedge}\| \|v_{t_n}\|)$  در نهایت معادله خطی خطا در  $\mathbb{R}^{\dim g}$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\xi_{t_n}^+ = \xi_{t_n} + L_n (H \xi_{t_n} + v_{t_n}) \quad (23)$$

که  $H$  به گونه ای در نظر گرفته شده است که رابطه زیر برقرار گردد.

$$H \xi_{t_n} = -(\xi_{t_n}^{\wedge}) d \quad (24)$$

با توجه به اینکه معادلات (۱۸) و (۲۳) همانند فیلتر کالمن برای سیستم

خطی کمکی  $\frac{d}{dt} x_t = A_{u_i} x_t + \hat{w}_t$  با اندازه گیری های گسسته

$y_n = H x_{t_n} + v_{t_n}$  طراحی شده است، بهره  $L_n$  را می توان از طریق معادله ریکاتی به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t &= A_{u_i} P_t + P_t A_{u_i}^T + \hat{Q}_t \\ P_{t_n}^+ &= (I - L_n H) P_{t_n} \end{aligned} \quad (25)$$

$$S_n = H P_{t_n} H^T + \hat{N}_n$$

$$L_n = P_{t_n} H^T S^{-1}$$

که  $\hat{Q}_t$  کوواریانس نویز  $\hat{w}_t$  و  $\hat{N}_n$  کوواریانس نویز اندازه گیری  $v_{t_n}$  است. در این صورت، به روزرسانی ماتریس حالت توسط فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر به صورت زیر است.

$$\hat{\chi}_{t_n}^+ = \hat{\chi}_{t_n} \exp \left( L_n \left( \hat{\chi}_{t_n}^{-1} Y_{t_n} - d \right) \right) \quad (26)$$

در ادامه مسئله INS/GPS در چارچوب اینرسی زمین مرکز<sup>۱</sup> (ECI) مدنظر قرار گرفته است [۲].

### ۳-۲ تلفیق INS/GPS در چارچوب ECI با IEKF

در این بخش ضمن ارائه معادلات دیفرانسیل ناوبری در چارچوب ECI، گروه لی مناسب معرفی و خطای نامتغیر محاسبه می شود. همچنین با برقراری شرط گروه افاین، خودمختار بودن خطا اثبات و معادله دینامیکی خطای نامتغیر و مدل مشاهدات نامتغیر نیز ارائه می گردد. در ادامه مراحل پیش بینی و بروز رسانی IEKF برای INS/GPS ارائه شده است.

#### ۳-۱- معادلات دیفرانسیل ناوبری [۳-۱]

به منظور تسهیل بیان کمیت های فیزیکی مانند وضعیت، سرعت و موقعیت چارچوب اینرسی زمین-مرکز به عنوان دستگاه اینرسی و چارچوب جلو-راست - پایین به عنوان دستگاه بدنی در نظر گرفته شده است.  $C_b^i$  بیانگر ماتریس وضعیت،  $v_{ib}^i$  بیانگر بردار سرعت و  $p_{ib}^i$  بیانگر بردار موقعیت دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی است. مدل ژيروسکوپ و شتاب سنسور نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

<sup>2</sup> Drift

<sup>3</sup> Bias

<sup>1</sup> Earth-Centered Earth-Fixed Coordinate System

نکته قابل توجه در مورد سوگیری و رانش حس گرها این است که در نظر گرفتن آن‌ها به عنوان عناصر ماتریس حالت شرط گروه افاین را نقض و بسیاری از ویژگی‌های IEKF را غیرقابل استفاده می‌کند [۳۳]. به منظور حل این مشکل می‌توان سوگیری و رانش را از روش EKF استاندارد تخمین زد. در این صورت یک فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر ناقص<sup>۱</sup> حاصل می‌گردد که همچنان عملکرد بهتری نسبت به EKF استاندارد دارد [۳۴]. بدین منظور بردار  $\gamma_t$  شامل سوگیری شتاب سنسورها و رانش ژيروسکوپ‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۵].

$$\gamma_t \triangleq \begin{bmatrix} b_t^g \\ b_t^a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (37)$$

در این صورت حالت جدید شامل ماتریس حالت سیستم که از قبل تعریف شده است و بردار پارامترهای سوگیری و رانش است و به صورت  $(\chi_t, \gamma_t) \in SE_2(3) \times \mathbb{R}^6$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین خطا نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$e_t^i \triangleq (\chi_t^{-1} \hat{\chi}_t, \hat{\gamma}_t - \gamma_t) \triangleq (\eta_t^i, \xi_t^i) \quad (38)$$

که بردار  $\xi_t^i$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\xi_t^i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{b}_t^g - b_t^g \\ \hat{b}_t^a - b_t^a \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_t^g \\ \xi_t^a \end{bmatrix} \quad (39)$$

مطابق پیوست د، با صرف نظر از جملات مرتبه دوم، معادله دیفرانسیل خطای حالت‌های (۳۵) را می‌توان به صورت زیر را نوشت [۳۱].

$$\frac{d}{dt}(\xi_t^C) \approx -\xi_t^g + w_t^g - (\tilde{\omega}_t)_\times (\xi_t^C) \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt}\xi_t^v \approx -(\tilde{\omega}_t)_\times \xi_t^v - (\tilde{a}_t)_\times \xi_t^C + (\xi_t^a - w_t^a) \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt}\xi_t^p \approx -(\tilde{\omega}_t)_\times \xi_t^p + \xi_t^v \quad (42)$$

نکته قابل توجه این است که صرف نظر کردن از جملات مرتبه دوم، آسیبی به کلیت مسئله نمی‌رساند و خطای غیرخطی چپ نامتغیر را می‌توان به صورت دقیق از معادله دیفرانسیل خطای حالت متغیر با زمان بازیابی کرد [۳۶]. فرم ماتریسی معادلات خطای فوق را می‌توان به صورت رابطه زیر بیان کرد [۳۱].

$$\frac{d}{dt}\xi = A\xi + Gw \quad (43)$$

که  $G$  بردار حالت خطای سیستم ناوبری اینرسی،  $A$  ماتریس سیستم، ماتریس نویز و  $W$  نیز بردار نویز سفید گاوسی با ماتریس کوواریانس  $Q = E[ww^T]$  است و به شرح زیر تعریف می‌شوند.

$$\xi = \begin{bmatrix} (\xi^C)^T & (\xi^v)^T & (\xi^p)^T & (\xi^g)^T & (\xi^a)^T \end{bmatrix}^T$$

$$w = \begin{bmatrix} (w_t^g)^T & (w_t^a)^T & 0_{1 \times 3} & (w_t^{bg})^T & (w_t^{ba})^T \end{bmatrix}^T$$

چپ نامتغیر است، خطای حالت چپ نامتغیر به صورت (۳۳) قابل بیان خواهد بود. جزئیات این رابطه در پیوست ج ارائه شده است.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) & C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله (۳۳) در (۹) معادله دیفرانسیل خطای چپ نامتغیر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}\eta_t^L = f_{u_i}(\eta_t^L) - f_{u_i}(I_d)\eta_t^L \quad (34)$$

$$= \eta_t^L W_1 + W_2 \eta_t^L - (W_1 + W_2)\eta_t^L = \eta_t^L W_1 - W_1 \eta_t^L$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} (\omega_{ib}^b(t))_\times & a(t) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & g(t) & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 1 & -1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱) بیانگر مستقل از مسیر بودن خطای نامتغیر آن است که معادله دینامیک این خطا در رابطه (۳۴) بیان شده است. درواقع این رابطه به این معنی است که حتی اگر تغییر حالت خطا غیرخطی باشد، انتشار آن خطی می‌ماند. در ادامه و به منظور طراحی IEKF نیاز به محاسبه دینامیک خطی شده خطای نامتغیر است. در مورد خطای چپ نامتغیر (۳۳)، خطای مربوط به حالت‌های وضعیت، سرعت و موقعیت در گروه لی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۳۱].

$$C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) = \exp\left(\left(\xi_t^C\right)_\times\right) \approx I + \left(\xi_t^C\right)_\times$$

$$\xi_t^v = C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) = C_i^b(t)(\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) \quad (35)$$

$$\xi_t^p = C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) = C_i^b(t)(\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^i(t))$$

که  $\xi_t^C$  خطای وضعیت بین دستگاه بدنی و دستگاه اینرسی،  $\xi_t^v$  خطای جدید سرعت،  $\xi_t^p$  خطای جدید موقعیت و  $\exp$  نیز نگاشت نمایی ماتریسی از جبر لی به گروه لی است. در مقایسه با تعریف مرسوم خطا که تفاوت مستقیم بردارها در مختصات محاسباتی و مختصات واقعی است، خطاهای جدید در یک چارچوب مختصات مشترک تعریف می‌شود و هم‌زمان تفاوت بزرگی و تفاوت جهت دو بردار را در نظر می‌گیرد. این نحوه تعریف خطا ضمن توصیف دقیق‌تر ویژگی‌های حرکت، به همگرایی قابل اثبات فیلتر کالمن منجر می‌شود [۳۲]. با توجه به رابطه (۳۵)، خطای چپ نامتغیر  $\eta^L$  را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\eta_t^L = \begin{bmatrix} \exp\left(\left(\xi_t^C\right)_\times\right) & \xi_t^v & \xi_t^p \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

<sup>1</sup> Imperfect Invariant Extended Kalman Filter

$$\begin{aligned} Z &= \hat{\chi}^{-1}(Y - \hat{Y}) = \hat{\chi}^{-1}Y - \hat{\chi}^{-1}\hat{Y} = \\ &\hat{\chi}^{-1}(\chi d + v) - \hat{\chi}^{-1}(\hat{\chi}d) \\ &= \hat{\chi}^{-1}\chi d + \hat{\chi}^{-1}v - \hat{\chi}^{-1}\hat{\chi}d = \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \eta d + \hat{\chi}^{-1}v - d &= \exp(\zeta) d + \hat{\chi}^{-1}v - d \\ &\approx (I + \zeta^{\wedge}) d + \hat{\chi}^{-1}v - d = \end{aligned}$$

$$\zeta^{\wedge} d + \hat{\chi}^{-1}v = H\zeta + \hat{v}$$

که  $\hat{v} = \hat{\chi}^{-1}v$  و  $H$  ماتریس ژاکوبی اندازه گیری به صورت زیر است.

$$H = \begin{bmatrix} -(l_{IA}^b)_x & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ -((w_{ib}^b)_x & l_{IA}^b)_x & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (47)$$

واضح است که  $H$  به حالت های تخمینی بستگی ندارد و به همین دلیل نسبت به عدم قطعیت حالت ها حساس نیست.

### ۳-۴- خلاصه روابط تلفیق INS/GPS با استفاده از IEKF

اگرچه در نظر گرفتن سوگیری و رانش حس گرها، ویژگی گروه افاین را نقض می کند و سیستم دیگر خاصیت خطای خودمختار را ندارد، اما هنوز هم می توان ثابت کرد که IEKF ناقص، مزایای اصلی IEKF را حفظ کرده و دارای استحکام بیشتر و همگرایی سریع تری نسبت به EKF است [۱۳]. بنابراین، با گسسته سازی مدل ارائه شده در رابطه (۴۳) مراحل پیش بینی و به روزرسانی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر ناقص به منظور تلفیق SINS/GPS را می توان به صورت زیر انجام داد.

| مرحله پیش بینی                                                                                                                                                 |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\frac{d}{dt} \hat{\chi} = f_{v_i}(\hat{\chi})$                                                                                                                |      |
| $\frac{d}{dt} \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \hat{b}^g = 0 \\ \frac{d}{dt} \hat{b}^a = 0 \end{bmatrix}$                                           | (۴۸) |
| $P = \Phi P \Phi^T + \Phi Q \Phi^T \Delta t, \Phi = \exp(A \Delta t)$                                                                                          |      |
| مرحله به روزرسانی                                                                                                                                              |      |
| $L = P H^T (H P H^T + N)^{-1}$                                                                                                                                 | (۴۹) |
| $N = \text{cov}(\hat{v}) = \hat{\chi}^{-1} \text{cov}(v) \hat{\chi}^{-T}$                                                                                      |      |
| $\zeta^+ = L \times Z = [\zeta^{C+} \quad \zeta^{v+} \quad \zeta^{p+} \quad \zeta^{g+} \quad \zeta^{a+}]$                                                      | (۵۰) |
| $\hat{\chi}^+ = \hat{\chi} \exp([\zeta^{C+} \quad \zeta^{v+} \quad \zeta^{p+}]^T)$                                                                             |      |
| $\hat{\gamma}^+ = \begin{bmatrix} \hat{b}^{g+} \\ \hat{b}^{a+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}^g + \zeta^{g+} \\ \hat{b}^a + \zeta^{a+} \end{bmatrix}$ | (۵۱) |
| $P^+ = (I - LH) P (I - LH)^T + LNL^T$                                                                                                                          | (۵۲) |

$$A = \begin{bmatrix} -(\tilde{\omega}_l)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ -(\tilde{\omega}_l)_x & -(\tilde{\omega}_l)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & -(\tilde{\omega}_l)_x & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که  $A$  به حالت های تخمین زده شده بستگی ندارد، بلکه فقط به ورودی سیستم مربوط می شود.

### ۳-۳- مدل مشاهدات

در این بخش سرعت و موقعیت اندازه گیری شده توسط GPS به منظور استفاده در INS/GPS به صورت چپ نامتغیر مدل می شود [۲۲]. این مدل سازی با در نظر گرفتن بازوی اهرم<sup>۱</sup> انجام می گردد. در عمل GPS موقعیت و سرعت مربوط به مرکز آنتن و INS نتایج ناوبری مرکز IMU را ارائه می دهد که از نظر فیزیکی منطبق نیستند. فاصله بین مرکز آنتن GPS و مرکز IMU با عنوان بازوی اهرم شناخته می شود که در نظر نگرفتن آن موجب کاهش دقت ناوبری تلفیقی می شود. اندازه گیری های سرعت و موقعیت را می توان با در نظر گرفتن بازوی اهرم به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} p_{gps}^i(t) &= p_{ib}^i + l_{IA}^i + w_{Gp} \\ &= p_{ib}^i + C_b^i(t) l_{IA}^b + w_{Gp} \end{aligned} \quad (44)$$

$$v_{gps}^i(t) = v_{ib}^i + C_b^i(t) (w_{ib}^b \times l_{IA}^b) + w_{Gv}$$

که  $p_{gps}^i$  و  $v_{gps}^i$  سرعت و موقعیت محاسبه شده توسط GPS است که در دستگاه اینرسی بیان می شود. بردار بازوی اهرم بیان شده در دستگاه بدنی و  $w_{Gp}$  و  $w_{Gv}$  نویز اندازه گیری سرعت و موقعیت GPS است. نمایش ماتریسی مدل های اندازه گیری موقعیت و سرعت GPS در فرم چپ نامتغیر (۱۴) را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$Y = \begin{bmatrix} p_G^i & v_G^i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{IA}^b & (w_{ib}^b)_x & l_{IA}^b \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$+ \begin{bmatrix} w_{Gp} & w_{Gv} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه (۱۹)، ابداع LIEKF یعنی خطای بین اندازه گیری GPS و تخمین آن را می توان به صورت زیر به دست آورد.

<sup>1</sup> Lever Arm

فرکانس خروجی حس گرهای اینرسی ۱۰۰ هرتز و GPS نیز ۱۰ هرتز در نظر گرفته شده است. سرعت و موقعیت اولیه به طور مستقیم با استفاده از اندازه گیری های GPS تنظیم می شود. با توجه به اینکه معمولاً چالش اساسی ترازایی در تعیین زاویه سمت است، به منظور ارزیابی الگوریتم ها، خطای اولیه زوایای غلت و فراز به صورت ثابت و معادل  $5^\circ$  فرض شده است. خطای اولیه زاویه سمت مختلف نیز به صورت  $[0^\circ \ 30^\circ \ 60^\circ \ 90^\circ]$  در نظر گرفته شده است. مقادیر مورد استفاده در شبیه سازی به صورت زیر است.

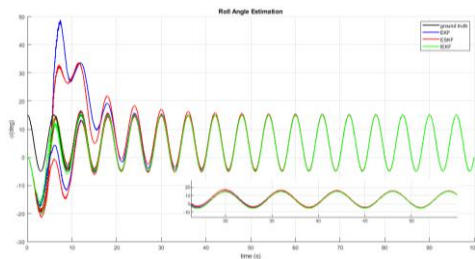
$$R = \text{blkdiag}(5^2 \times I_{3 \times 3}), \varphi_0 = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ, \psi_0 = 0^\circ$$

$$v_0 = v_{0, GPS}, x_0 = x_{0, GPS}, b^g = b^a = [0, 0, 0]$$

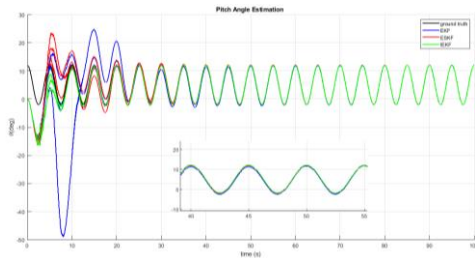
$$Q = \text{diag}\left([0.001 \sqrt{h} \times I_{3 \times 3}, 0.03 \frac{m}{s\sqrt{h}} \times I_{3 \times 3}, 0_{9 \times 9}, I^2\right) * 0.01^2$$

$$P_0 = \text{diag}\left([\text{diag}(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{90}{3}), 5\% \times I_{3 \times 3}, 2.5m \times I_{3 \times 3}, 0.01 \sqrt{h} \times I_{3 \times 3}, 50 \mu g \times I_{3 \times 3}\right]^2$$

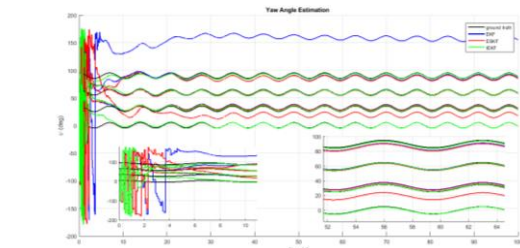
که منظور از blkdiag ماتریس قطری بلوکی است. نتیجه تخمین زوایا وایر و نیز خطای تخمین آن ها در شکل های زیر نشان داده شده است.



شکل ۲- تخمین زاویه غلت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت



شکل ۳- تخمین زاویه فراز به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت



شکل ۴- تخمین زاویه سمت به ازای زاویه ناهمراستایی اولیه غلت و فراز ۵ درجه و ناهمراستایی های اولیه مختلف زاویه سمت

همان گونه که مشاهده می شود، در مرحله به روزرسانی خطای حس گرها، طبق روش EKF سنتی به روزرسانی می شوند. اما وضعیت، سرعت و موقعیت با توجه به ابداع LIEKF به روز می شوند. ذکر این نکته ضروری است که روش ارائه شده برای سیستم هایی که زمان عملکرد کوتاهی دارند و محدودیت های دینامیکی در مانورهای مورد نیاز برای جبران سازی خطای زیرسیستم هدایت و کنترل به دلیل ناترازی اولیه نباشند، احتمالاً مناسب نیست. در ادامه کارایی INS/GPS مبتنی بر LIEKF ارزیابی می شود.

#### ۴- ارزیابی با استفاده از شبیه سازی و داده های

##### تجربی

در این بخش، ابتدا به منظور نشان دادن توانایی فیلتر کالمن توسعه یافته نامتغیر در مقابله با ناهمراستایی زاویه ای اولیه بزرگ، به کمک داده های حاصل از شبیه سازی، عملکرد IEKF با عملکرد EKF استاندارد و فیلتر کالمن توسعه یافته حالت خطا<sup>۱</sup> (ESKF)، بازای خطای زاویه ای اولیه مختلف مقایسه می شود. بدین منظور حرکت یک کشتی در اثر امواج متلاطم دریا شبیه سازی شده است. فرض می شود که حرکت دورانی به دلیل تغییرات زوایای غلت، فراز و سمت ناشی از امواج دریا به صورت زیر است.

$$\phi = 10^\circ \cos\left(\frac{2\pi}{6}t\right)$$

$$\theta = 7^\circ \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \quad (53)$$

$$\psi = 5^\circ \cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right)$$

که  $\phi, \theta, \psi$  زوایای غلت، فراز و سمت است. همچنین فرض می گردد حرکت انتقالی ناشی از تغییرات سرعت به صورت است.

$$V_i = A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}t\right), \quad i = x, y, z$$

$$A_x = 10m/s, A_y = 10m/s, A_z = 1m/s \quad (54)$$

$$T_x = 7s, T_y = 6s, T_z = 8s$$

مشخصات IMU و گیرنده GPS مورد استفاده، مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱- مشخصات حس گرهای مورد استفاده برای شبیه سازی

| شتاب سنج ها                |                     |
|----------------------------|---------------------|
| 50 $\mu g$                 | سوگیری ثابت         |
| 0.03 $\frac{m}{s\sqrt{h}}$ | گام تصادفی سرعت     |
| ژیروسکوپ                   |                     |
| 0.01 $\%h$                 | رائش ثابت           |
| 0.001 $\% \sqrt{h}$        | گام تصادفی زاویه ای |
| گیرنده GPS                 |                     |
| 2.5 m                      | دقت موقعیت          |
| 5 $\frac{m}{s}$            | دقت سرعت            |

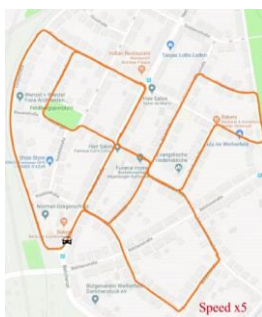
<sup>1</sup> Error State Extended Kalman Filter

جدول ۲- مشخصات کلی حس گر OXTS RT3003 GPS/IMU

|                              |               |
|------------------------------|---------------|
| IMU Update rate              | 100 Hz        |
| Gyro Bias Stability          | 2 %/hr        |
| Gyro Random Walk             | 0.2 %/√hr     |
| Accelerometer Bias Stability | 2 μg          |
| Accelerometer Random Walk    | 0.005 m/s/√hr |
| GPS Update rate              | 10 Hz         |
| GPS Velocity Accuracy        | 0.05 km/hr    |
| GPS Position Accuracy        | 0.01 m        |

در ادامه داده های 2011\_10\_03\_drive\_0027\_sync از مجموعه داده های KITTI استفاده شده است. این آزمایش در مدت زمان ۴۶۹ ثانیه با پیمایش مسیر نشان داده شده در

شکل ۸ انجام شده است. در این مجموعه داده، به منظور انجام شبیه سازی داده های GPS با نرخ ۱ هرتز در اختیار است. نتایج تخمین حالت های ناوبری به ازای خطای ناهمراستایی اولیه صفر و مقادیر واقعی متناظر آنها در شکل ۸ تا شکل ۱۴ مقایسه شده است.



شکل ۸- مسیر پیمایش شده [۴۰]

ماتریس های کوواریانس نویز مدل دینامیکی و اندازه گیری که معمولاً با توجه به دقت حسگرهای اینرسی و اندازه گیری های خارجی تعیین می شوند و نیز حدس اولیه مورد استفاده در انجام شبیه سازی ها به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$R = \text{blkdiag}(0.01^2 \times I_{3 \times 3})$$

$$\varphi_0 = 0.9067^\circ, \theta_0 = 0.0463^\circ, \psi_0 = 61.6036^\circ$$

$$v_0 = [0, 0, 0] \frac{m}{s}, x_0 = [1.0811, 1.3375, 0.7956] m$$

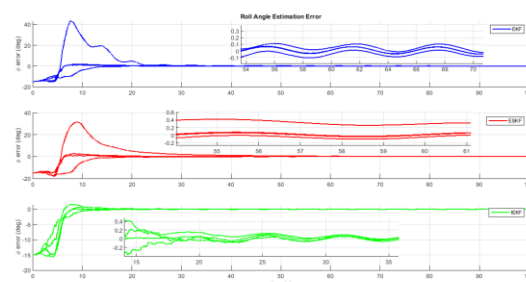
$$b^g = b^a = [0, 0, 0]$$

$$Q = \text{diag}\left(\left[0.2 \sqrt{\frac{1}{\text{hr}}} \times I_{3 \times 3}, 0.005 \sqrt{\frac{1}{\text{hr}}} \times I_{3 \times 3}, 0_{9 \times 9}\right]^2\right) * 0.01^2$$

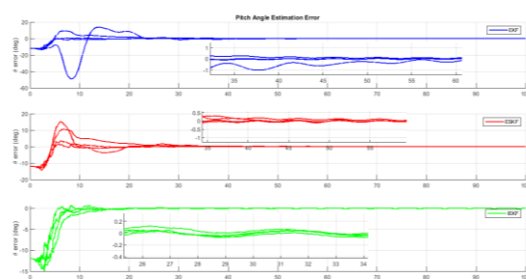
$$P_0 = \text{diag}\left(\left[\text{diag}\left[\left(\frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}\right), \left(\frac{90}{3}\right)\right], 0.05 \sqrt{\frac{1}{\text{hr}}} \times I_{3 \times 3}, 0.01 m \times I_{3 \times 3}, 2 \sqrt{\frac{1}{\text{hr}}} \times I_{3 \times 3}, 2 \mu g \times I_{3 \times 3}\right]^2\right)$$

در

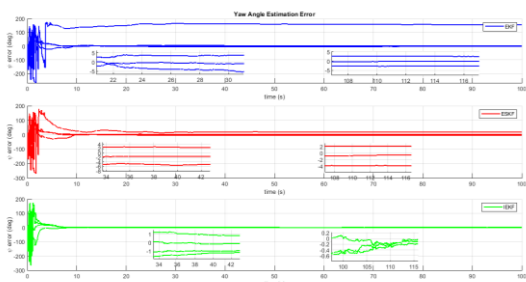
شکل ۹ و شکل ۱۰ به ترتیب نتایج تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه x- و y تخمین موقعیت در راستای محورهای ECI نشان داده شده است.



شکل ۵- خطای تعیین زاویه غلت در سناریوهای شبیه سازی شده



شکل ۶- خطای تعیین زاویه فراز در سناریوهای شبیه سازی شده



شکل ۷- خطای تعیین زاویه سمت در سناریوهای شبیه سازی شده

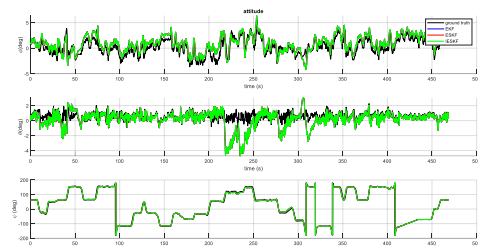
همانگونه که مشخص است IEKF از نظر دقت و سرعت همگرایی عملکرد بهتری را نسبت به ESKF و EKF دارد. این برتری در حضور ناهمراستایی اولیه زیاد، محسوس تر است. در ادامه این بخش تلفیق INS/GPS با استفاده از داده های واقعی بررسی می شود. با توجه به اینکه به دلیل ماهیت نویزی حس گر ها و اغتشاشات محیط، استفاده از داده های شبیه سازی شده، نتایج منصفانه ای را ارائه نمی دهد. به همین دلیل از یک مجموعه داده واقعی با عنوان KITTI<sup>۱</sup> که کاربرد گسترده ای در کیلومتر شماری بصری<sup>۲</sup> (VO)، INS/VO و INS/GPS دارد، استفاده می شود [۳۷، ۳۸]. این مجموعه داده با استفاده از حس گرهای نصب شده بر روی یک خودرو شامل دوربین، GPS/IMU و LiDAR جمع آوری شده است. داده ها شامل خروجی خام حسگرها و داده های واقعیت زمینی<sup>۳</sup> است که با ترکیب خروجی های GPS/IMU و LiDAR محاسبه شده است. حسگر GPS/IMU از نوع OXTS RT 3003 GPS/IMU است که مشخصات آن مطابق دفترچه راهنما در جدول ۲ ارائه شده است [۳۹].

<sup>2</sup> Visual Odometry

<sup>3</sup> Ground Truth

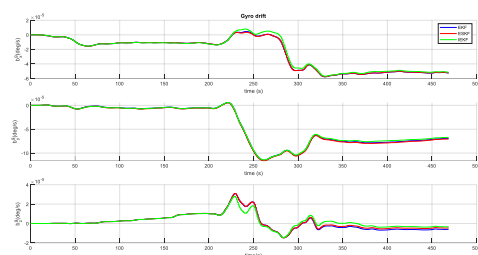
<sup>1</sup> Karlsruhe Institute of Technology and Toyota Technological Institute

شیبه سازی می توان بیان داشت که در طول مسیر طی شده، زوایا مشاهده پذیر هستند.

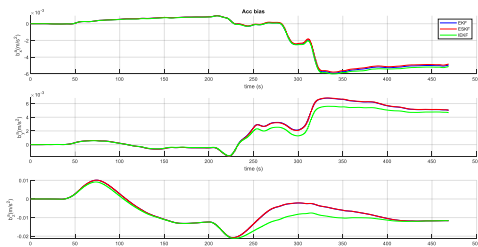


شکل ۱۲- تخمین زاویه غلت، فراز و سمت

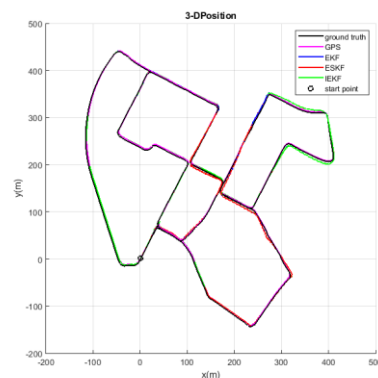
شکل ۱۳ و شکل ۱۴ نیز به ترتیب بیانگر نتایج تخمین رانش ژيروسکوپها و سوگیری شتاب سنجه ها در راستای محورها ی دستگاه ECI است.



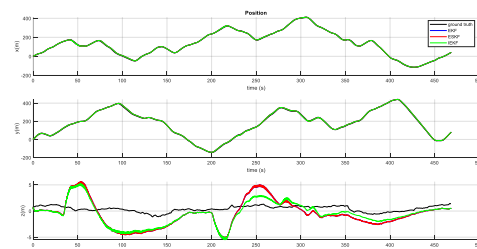
شکل ۱۳- تخمین رانش ژيروسکوپها در راستای محورها ی دستگاه ECI



شکل ۱۴- تخمین سوگیری شتاب سنجه ها در راستای محورها ی دستگاه ECI  
همچنین مجذور میانگین مربعات خطای تخمین<sup>۱</sup> (RMSE) حالت های ناوبری برای روش های EKF، ESKF و IEKF در جدول ۳ ارائه شده است. این نتایج فوق با فرض معلوم بودن شرایط اولیه به صورت دقیق به دست آمده است که بیانگر عملکرد یکسان فیلترها در تلفیق INS/GPS می باشد. بر اساس داده های حقیقت زمین، زوایای اولیه واقعی به ترتیب برابر  $\varphi = 0.9067^\circ$ ،  $\theta = 0.0463^\circ$  و  $\psi = 61.6036^\circ$  است. در ادامه به منظور ارزیابی کار آیی IEKF و مقایسه با EKF و ESKF، اثر خطای ناهمراستایی زوایای اولیه بر دقت خروجی بررسی شده است. خطای موقعیت یابی این فیلترها تحت زوایای ناهمراستایی اولیه مختلف در جدول ۴ ارائه شده است. همان گونه که مشاهده می شود، در صورت عدم وجود زاویه ناهمراستایی، هر سه فیلتر دقت موقعیت یابی نسبتاً بالا دارند و تفاوت کمی بین آنها وجود دارد. با افزایش زاویه ناهمراستایی، خطاهای موقعیت یابی هر سه افزایش می یابد. با این حال، IEKF دقت موقعیت یابی بالاتری از EKF و ESKF دارد و هر چه زاویه ناهمراستایی بیشتر باشد، مزیت

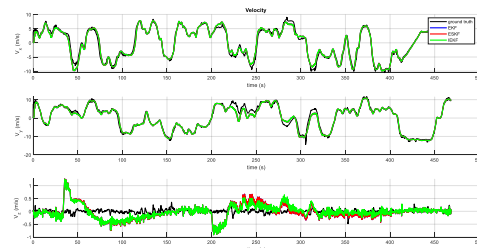


شکل ۹- تخمین مسیر پیمایش شده در صفحه X-Y دستگاه ECI



شکل ۱۰- تخمین موقعیت در راستای X، Y و Z دستگاه ECI

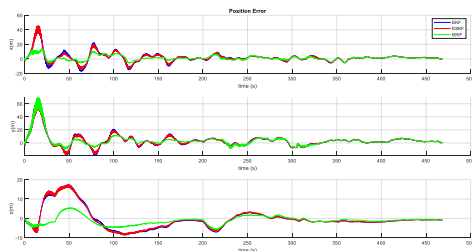
در  
شکل ۱۱ نیز تخمین سرعت در راستای محورها ی دستگاه ECI نشان داده شده است.



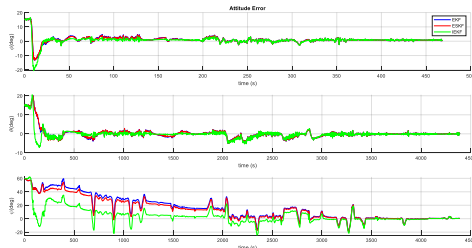
شکل ۱۱- تخمین سرعت در راستای X، Y و Z دستگاه ECI

شکل ۱۲ نیز نشان دهنده تخمین زوایا اوپلر است. نکته قابل توجه اینکه، در ناوبری وسایل نقلیه جاده ای، به دلیل اینکه سطح جاده ها نسبتاً صاف است، تخمین زاویه سمت، بیشتر مورد توجه قرار می گیرد. همچنین در فرایند تلفیق به دلیل وجود خطاهایی مانند بایاس سنسورها، سعی می گردد با تخمین و جبران این خطاها دقت بهبود داده شود. در نظر گرفتن خطای حس گرها به عنوان حالت های سیستم منجر به عدم مشاهده پذیری کامل سیستم در حالت سکون می شود [۴۱]. اما نکته قابل توجه این است که مانور وسیله حامل بر روی مشاهده پذیری حالت ها اثر گذار است. با توجه به نتایج

<sup>۱</sup> Root Mean Square Error



شکل ۱۵- خطای موقعیت یابی تحت زاویه نااهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و ۶۰ درجه در زاویه سمت



شکل ۱۶- خطای تخمین وضعیت تحت زاویه نااهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و نااهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت

IEKF آشکارتر است. شکل ۱۵ خطای موقعیت یابی تحت زاویه نااهمراستایی ۱۵ درجه در زوایای غلت و فراز و نااهمراستایی ۶۰ درجه در زاویه سمت را نشان می دهد. همچنین خطای تعیین وضعیت در این شرایط در شکل ۱۶ نشان داده شده است. می توان دریافت که IEKF هم از نظر سرعت همگرایی و هم از نظر دقت موقعیت یابی نسبت به EKF و ESKF برتر است.

جدول ۳- مجذور میانگین مربعات خطای تخمین حالت های ناوبری

| متغیر              | RMSE EKF | RMSE ESKF | RMSE IEKF |
|--------------------|----------|-----------|-----------|
| $\phi(^{\circ})$   | ۱,۰۳     | ۱,۰۳      | ۱,۰۳      |
| $\theta(^{\circ})$ | ۱,۰۸     | ۱,۰۸      | ۱,۰۸      |
| $\psi(^{\circ})$   | ۵,۹      | ۵,۹       | ۵,۹       |
| $V_x(m/s)$         | ۰,۸۱۶    | ۰,۸۱۹     | ۰,۸۱۷     |
| $V_y(m/s)$         | ۱,۲      | ۱,۲       | ۱,۱۹      |
| $V_z(m/s)$         | ۰,۲۷     | ۰,۲۷      | ۰,۲۶      |
| $x(m)$             | ۲,۵۷     | ۲,۵۷      | ۲,۵۶      |
| $y(m)$             | ۴,۱۴     | ۴,۱۴      | ۴,۱۲      |
| $z(m)$             | ۲,۴      | ۲,۴       | ۲,۱۸      |

جدول ۴- RMSE موقعیت یابی تحت خطای نااهمراستایی زاویه ای اولیه مختلف

| $[\delta\varphi_0 \quad \delta\theta_0 \quad \delta\psi_0]$ |      |      |                                         |      |      |                                            |      |      |                                            |      |      | زاویه              |
|-------------------------------------------------------------|------|------|-----------------------------------------|------|------|--------------------------------------------|------|------|--------------------------------------------|------|------|--------------------|
| $[0^\circ \quad 0^\circ \quad 0^\circ]$                     |      |      | $[5^\circ \quad 5^\circ \quad 5^\circ]$ |      |      | $[10^\circ \quad 10^\circ \quad 30^\circ]$ |      |      | $[15^\circ \quad 15^\circ \quad 60^\circ]$ |      |      | ناهمراستی<br>اولیه |
| x(m)                                                        | y(m) | z(m) | x(m)                                    | y(m) | z(m) | x(m)                                       | y(m) | z(m) | x(m)                                       | y(m) | z(m) |                    |
| ۲,۵                                                         | ۴,۱  | ۲,۴  | ۴                                       | ۴,۲  | ۳,۱  | ۶,۳                                        | ۵,۱  | ۳,۵  | ۷,۱                                        | ۱۰,۶ | ۵,۳  | RMSE<br>EKF        |
| ۲,۵                                                         | ۴,۱  | ۲,۴  | ۴                                       | ۴,۲  | ۳,۱  | ۶,۴                                        | ۴,۷  | ۳,۶  | ۶,۹                                        | ۱۰,۳ | ۵,۳  | RMSE<br>ESKF       |
| ۲,۵                                                         | ۴,۱  | ۲,۱  | ۳,۵                                     | ۴,۵  | ۲    | ۴,۴                                        | ۶,۵  | ۲,۲  | ۳,۳                                        | ۱۰,۱ | ۲,۳  | RMSE<br>IEKF       |

استفاده شده است. به کمک داده های شبیه سازی شده و نیز داده های واقعی روش پیشنهادی با تلفیق INS/GPS مبتنی بر دو الگوریتم EKF و ESKF مقایسه شده است. نتایج بیانگر آن است که IEKF توانایی غلبه بر بسیاری از کاستی های EKF از جمله وابستگی ژاکوبی ها به متغیرهای حالت را دارد. یکی دیگر از مزیت های IEKF، امکان استفاده از آن در صورت وجود زاویه نااهمراستایی اولیه بزرگ است. نتایج ارزیابی نشان می دهد که IEKF برخلاف دو روش دیگر که ممکن است با زاویه نااهمراستایی اولیه بزرگ واگرا شوند، از مزیت همگرایی سریع برخوردار است. با این قابلیت IEKF می توان مرحله تراز یابی اولیه را حذف و زمان لازم برای شروع فرآیند ناوبری را کاهش داد. در پژوهش های آتی می توان خطای سوگیری و رانش را به عنوان عناصر گروه به گونه ای در نظر گرفت که شرط گروه افاین نقض نشده و تلفیق INS/GPS و نیز تراز یابی اولیه را به صورت کامل

نتایج فوق مؤید این نکته است که دقت خروجی EKF و ESKF، به دلیل وابستگی مدل خطی سازی شده مورد استفاده این فیلترها به حالت ها، در اثر تغییر خطای اولیه تغییر می کند، اما دقت نتایج IEKF تحت خطای زاویه ای تفاوت چندانی نمی کند. به همین دلیل می توان ادعا کرد که IEKF تحت خطای اولیه زاویه ای بزرگ مقاوم است و حتی می تواند نیاز به تراز یابی اولیه دقیق را برطرف کند.

## ۸- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله، با تعبیه کردن وضعیت، سرعت و موقعیت جسم متحرک به عنوان عناصر یک گروه لی ماتریسی، مدل دینامیکی خطای مستقل از حالت برای تلفیق INS/GPS ارائه شده است. در ادامه به کمک مدل ارائه شده، از فیلتر کالمن توسعه یافته چپ نامتغیر برای تلفیق INS/GPS

- [15] N. Aghannan and P. Rouchon, "On invariant asymptotic observers," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, vol. 2, pp. 1479-1484: IEEE.
- [16] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Symmetry-preserving observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2514-2526, 2008.
- [17] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Non-linear symmetry-preserving observers on Lie groups," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1709-1713, 2009.
- [18] S. Bonnabel, P. Martin, and E. Salaün, "Invariant extended Kalman filter: theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, pp. 1297-1304: IEEE.
- [19] P. Martin and E. Salaün, "Generalized Multiplicative Extended Kalman Filter for Aided Attitude and Heading Reference System," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010.
- [20] S. Bonnabel, "Left-invariant extended Kalman filter and attitude estimation," in *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007, pp. 1027-1032: IEEE.
- [21] Y. Luo, M. Wang, C. Guo, and W. Guo, "Research on Invariant Extended Kalman Filter Based 5G/SINS Integrated Navigation Simulation," in *China Satellite Navigation Conference*, 2021, pp. 455-466: Springer.
- [22] Z. Zhang, J. Zhao, C. Huang, and L. Li, "Precise and robust sideslip angle estimation based on INS/GNSS integration using invariant extended Kalman filter," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2022.
- [23] E. R. Potokar, K. Norman, and J. G. Mangelson, "Invariant extended kalman filtering for underwater navigation," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 5792-5799, 2021.
- [24] A. Ibrahim, A. Abosekeen, A. Azouz, and A. Noureldin, "Enhanced Autonomous Vehicle Positioning Using a Loosely Coupled INS/GNSS-Based Invariant-EKF Integration," *Sensors*, vol. 23, no. 13, p. 6097, 2023.
- [25] X. Zhou, Y. Chen, Y. Liu, and J. Hu, "A Novel Sensor Fusion Method Based on Invariant Extended Kalman Filter for Unmanned Aerial Vehicle," in *2021 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2021, pp. 1111-1116: IEEE.
- [26] L. Chang, F. Qin, and J. Xu, "Strapdown inertial navigation system initial alignment based on group of double direct spatial isometries," *IEEE Sensors Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 803-818, 2021.
- از طریق LIEKF انجام داد. همچنین تحلیل مشاهده پذیری موضوع دیگری است که می تواند در پژوهش های آتی مورد توجه قرار گیرد.
- ### مراجع
- [1] D. H. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown inertial navigation technology*. Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [2] A. Noureldin, T. B. Karamat, and J. Georgy, *Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] M. S. Grewal, A. P. Andrews, and C. G. Bartone, *Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley & Sons, 2020.
- [4] P. G. Savage, *Strapdown analytics*. Strapdown Associates, 2000.
- [5] R. M. Rogers, *Applied mathematics in integrated navigation systems*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [6] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, *Probabilistic robotics*. The MIT Press, 2005.
- [7] A. J. Krener, "The convergence of the extended Kalman filter," in *Directions in mathematical systems theory and optimization*: Springer, 2003, pp. 173-182.
- [8] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches*. John Wiley and Sons, 2006.
- [9] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "Observability-based rules for designing consistent EKF SLAM estimators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 29, no. 5, pp. 502-528, 2010.
- [10] G. P. Huang, A. I. Mourikis, and S. I. Roumeliotis, "A quadratic-complexity observability-constrained unscented Kalman filter for SLAM," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, no. 5, pp. 1226-1243, 2013.
- [11] M. Raitoharju and R. Piché, "On computational complexity reduction methods for Kalman filter extensions," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 34, no. 10, pp. 2-19, 2019.
- [12] A. Barrau and S. Bonnabel, "An EKF-SLAM algorithm with consistency properties," *arXiv:1510.06263*, 2015.
- [13] A. Barrau and S. Bonnabel, "The invariant extended Kalman filter as a stable observer," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 4, pp. 1797-1812, 2016.
- [14] P. Rouchon and J. Rudolph, "Invariant tracking and stabilization: problem formulation and examples," in *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, vol. 246: Springer, 2000, pp. 261-273.

- filtering for robot state estimation," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 39, no. 4, pp. 402-430, 2020.
- [36] L. Chang and Y. Luo, "Log-linear Error State Model Derivation without Approximation for INS," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022.
- [37] A. Geiger, P. Lenz, and R. Urtasun, "Are we ready for autonomous driving? the kitti vision benchmark suite," in *2012 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2012, pp. 3354-3361: IEEE.
- [38] A. Geiger, P. Lenz, C. Stiller, and R. Urtasun, "Vision meets robotics: The kitti dataset," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 32, no. 11, pp. 1231-1237, 2013.
- [39] OxTS, "RTv2 GNSS-aided Inertial Measurement Systems User Manual," [Online]. Available: [www.oxts.com/app/uploads/2018/02/rtman.pdf](http://www.oxts.com/app/uploads/2018/02/rtman.pdf), 2018.
- [40] T. Qin, P. Li, and S. Shen, "Vins-mono: A robust and versatile monocular visual-inertial state estimator," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 4, pp. 1004-1020, 2018.
- [41] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of INS ground alignment through observability analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, 1992.
- [27] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press, 2003.
- [29] G. S. Chirikjian, *Stochastic models, information theory, and Lie groups, volume 2: Analytic methods and modern applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [30] S. C. Hsiung, "Toward Invariant Visual-Inertial State Estimation using Information Sparsification," Master's thesis, Carnegie Mellon University, 2018.
- [31] Y. Luo, C. Guo, S. You, J. Hu, and J. Liu, "SE2(3) based Extended Kalman Filtering and Smoothing Framework for Inertial-Integrated Navigation," *arXiv preprint arXiv:2102.12897*, 2021.
- [32] M. S. Andrieu and J. L. Crassidis, "Attitude estimation employing common frame error representations," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, no. 9, pp. 1614-1624, 2015.
- [33] A. Barrau, "Non-linear state error based extended Kalman filters with applications to navigation," Doctoral thesis, Mines Paristech, 2015.
- [34] A. Barrau and S. Bonnabel, "The geometry of navigation problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 68, no. 2, pp. 689-704, 2022.
- [35] R. Hartley, M. Ghaffari, R. M. Eustice, and J. W. Grizzle, "Contact-aided invariant extended Kalman

## ۶- پیوست‌ها

### ۱-۶ پیوست الف: گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم

گروه ایزو متری‌های دوتایی مستقیم<sup>۱</sup> که با  $SE_2(3)$  نمایش داده می‌شود، برای مدل‌سازی حالت‌های اینرسی به صورت زیر ارائه شده است [۱۳].

$$SE_2(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} C & v & p \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5} \mid C \in SO(3), v, p \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (55)$$

که  $SO(3)$  گروه متعامد ویژه است. جبر لی متناظر گروه  $SE_2(3)$  توسط  $se_2(3)$  نشان داده می‌شود و برای هر بردار  $\xi \triangleq \text{vec}(\phi, \vartheta, \rho) \in \mathbb{R}^9$  به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\xi^\wedge \triangleq \begin{bmatrix} \phi_x & \vartheta & \rho \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (56)$$

نگاشت نمایی از  $se_2(3)$  به  $SE_2(3)$  نیز به صورت زیر است.

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi_x) & J\vartheta & J\rho \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = I + \frac{1 - \cos\|\phi\|}{\|\phi\|^2} \phi_x + \frac{\|\phi\| - \sin\|\phi\|}{\|\phi\|^3} \phi_x^2 \quad (57)$$

### ۲-۶ پیوست ب: اثبات برقراری شرط گروه افاین برای ماتریس حالت (۳۱)

معادله دیفرانسیل ماتریس حالت (۳۱) را می‌توان بر اساس روابط (۲۹) و (۳۰) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \chi_t &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^i(t)(\omega_{ib}^b(t) + w_t^g)_x & C_b^i(t)(a(t) + w_t^a) + g(t) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_b^i(t)(\omega_{ib}^b(t))_x & C_b^i(t)(a(t) + g(t)) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b^i(t) & v_{ib}^i(t) & p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (w_t^g)_x & w_t^a & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= f_{u_t}(\chi_t) - \chi_t (w_t)^\wedge \end{aligned} \quad (58)$$

که  $w_t = \left[ (w_t^g)^T, (w_t^a)^T, 0_{1 \times 3} \right]^T$  است.  $f_{u_t}(\chi_t)$  قسمت قطعی دینامیک را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$f_{u_t}(\chi_t) = \begin{bmatrix} C_b^i(t)(\omega_{ib}^b(t))_x & C_b^i(t)(a(t) + g(t)) & v_b^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \chi_t W_1 + W_2 \chi_t \quad (59)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} (\omega_{ib}^b(t))_x & a(t) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & g(t) & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 1 & -1 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{که}$$

<sup>1</sup> double direct isometries

با استفاده از (۵۹) روابط  $f_{u_t}(\chi_A \chi_B) = \chi_A \chi_B W_1 + W_2 \chi_A \chi_B$  و  $f_{u_t}(I_d) = W_1 + W_2$  به دست می آید. بنابراین، برقراری شرط گروه افاین را می توان به صورت زیر بررسی کرد.

$$\begin{aligned} & f_{u_t}(\chi_A) \chi_B + \chi_A f_{u_t}(\chi_B) - \chi_A f_{u_t}(I_d) \chi_B \\ &= \chi_A W_1 \chi_B + W_2 \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_B W_1 + \chi_A W_2 \chi_B - \chi_A (W_1 + W_2) \chi_B \\ &= \chi_A \chi_B W_1 + W_2 \chi_A \chi_B \\ &= f_{u_t}(\chi_A \chi_B) \end{aligned} \quad (60)$$

پس ماتریس حالت (۳۱) شرط گروه افاین (۸) را برآورده می کند و دارای خطای نامتغیر مستقل از حالت است.

### ۳-۶- پیوست ج: خطای چپ نامتغیر برای ماتریس حالت (۳۱)

$$\begin{aligned} \chi_t^{-1} &= \begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\chi}_t = \begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \eta_t^L &= \chi_t^{-1} \hat{\chi}_t = \begin{bmatrix} C_i^b(t) & -C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & -C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_b^i(t) & \hat{v}_{ib}^i(t) & \hat{p}_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \eta_t^L &= \begin{bmatrix} C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) & C_i^b(t)\hat{v}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)v_{ib}^i(t) & C_i^b(t)\hat{p}_{ib}^i(t) - C_i^b(t)p_{ib}^i(t) \\ 0_{1 \times 3} & 1 & 0 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

### ۴-۶- پیوست د: محاسبه روابط (۴۰) تا (۴۲)

معادله دیفرانسیل خطای وضعیت به کمک تقریب مرتبه اول  $C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) = \exp\left(\left(\zeta_t^C\right)_\times\right) \approx I + \left(\zeta_t^C\right)_\times$  به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)\right) &\approx \frac{d}{dt}\left(I + \left(\zeta_t^C\right)_\times\right) = \frac{d}{dt}\left(\zeta_t^C\right)_\times \\ \frac{d}{dt}\left(C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t)\right) &= \dot{C}_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) + C_i^b(t)\dot{\hat{C}}_b^i(t) \\ &= -\left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g\right)_\times C_i^b(t)\hat{C}_b^i(t) + C_i^b(t)\dot{\hat{C}}_b^i(t)\left(\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g\right)_\times \\ &\approx -\left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g\right)_\times \left(I + \left(\zeta_t^C\right)_\times\right) + \left(I + \left(\zeta_t^C\right)_\times\right)\left(\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g\right)_\times \\ &= -\left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g\right)_\times - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times + \left(\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g\right)_\times + \left(\zeta_t^C\right)_\times \left(\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g\right)_\times \\ &= \left(b_t^g - \hat{b}_t^g + w_t^g\right)_\times - \left(\tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times + \left(\zeta_t^C\right)_\times \left(\tilde{\omega}_t - \hat{b}_t^g\right)_\times \\ &= \left(-\xi_t^g + w_t^g\right)_\times - \left(\tilde{\omega}_t - \xi_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times - \left(\xi_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times + \left(b_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times \\ &\quad + \left(w_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times + \left(\zeta_t^C\right)_\times \left(\tilde{\omega}_t - \xi_t^g\right)_\times - \left(\zeta_t^C\right)_\times \left(b_t^g\right)_\times \\ &= \left(-\xi_t^g + w_t^g\right)_\times + \left(-\left(\tilde{\omega}_t - \xi_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times\right) - \left(\xi_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times + \left(\left(b_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times\right) + \left(w_t^g\right)_\times \left(\zeta_t^C\right)_\times \end{aligned} \quad (62)$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید سرعت نیز به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \zeta_t^v &= \frac{d}{dt} \left( C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) \right) = \dot{C}_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) (\dot{\hat{v}}_{ib}^i(t) - \dot{v}_{ib}^i(t)) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) (\hat{C}_b^i(t) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) + g - C_b^i(t) (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) - g) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^i(t)) + C_i^b(t) \hat{C}_b^i(t) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) - C_i^b(t) C_b^i(t) (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times \zeta_t^v + \left( I + \left( \zeta_t^C \right)_\times \right) (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) - (\tilde{a}_t - b_t^a - w_t^a) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times \zeta_t^v + \left( \zeta_t^C \right)_\times (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a) + (b_t^a - \hat{b}_t^a + w_t^a) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times \zeta_t^v - (\tilde{a}_t - \hat{b}_t^a)_\times \zeta_t^C + (-\xi_t^a + w_t^a)
 \end{aligned} \tag{۶۳}$$

معادله دیفرانسیل خطای جدید موقعیت نیز به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \zeta_t^p &= \frac{d}{dt} \left( C_i^b(t) (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) \right) = \dot{C}_i^b(t) (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) + C_i^b(t) (\dot{\hat{p}}_{ib}^i(t) - \dot{p}_{ib}^b(t)) \\
 &= - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times C_i^b(t) (\hat{p}_{ib}^i(t) - p_{ib}^b(t)) + C_i^b(t) (\hat{v}_{ib}^i(t) - v_{ib}^b(t)) = - \left( \tilde{\omega}_t - b_t^g - w_t^g \right)_\times \zeta_t^p + \zeta_t^v
 \end{aligned} \tag{۶۴}$$