مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد۱۸، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۳، صفحه ۲۴-۱۳

آرایش‌بندی دوبخشی زمان‌متناهی سیستم‌های چندعاملی غیرخطی ناهمگن

محمدرضا مهرابی کوشکی[۱]، جواد عسکری[۲]، مرضیه کمالی[۳]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان،اصفهان،ایران، m_mehrabi@alumni.iut.ac.ir
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، اصفهان،ایران، j-askari@iut.ac.ir
[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، اصفهان،ایران، m.kamali@iut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۱۵ ویرایش: ۱۴۰۲/۱۲/۰۵ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵

چکیده: به دلیل کاربرد گسترده‌ی سیستم‌های چندعاملی، در سال‌های اخیر این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته‌اند. از جمله مسائلی که در زمینه‌ی سیستم‌های چندعاملی مطرح شده، آرایش‌بندی دوبخشی در این سیستم‌ها است. از این رو در این تحقیق آرایش‌بندی توزیع‌شده‌ی دوبخشی سیستم‌های چندعاملی غیرخطی مرتبه دو، با رویکرد رهبر-پیرو، مورد بررسی قرار گرفته است. در رویکرد ارایه شده، عامل‌ها غیرهمگن در نظر گرفته شده‌اند و گراف ارتباطی بین عامل‌ها نیز جهت‌دار است . با توجه به عدم ارتباط همه‌ی عامل‌ها با رهبر گروه، به منظور بازسازی اطلاعات رهبر، در هر عامل از یک مشاهده‌گر زمان‌متناهی، جهت تخمین دینامیک رهبر استفاده شده است. همچنین با توجه به اینکه استفاده از رویکرد زمان‌متناهی در بسیاری از کاربردهای عملی منجر به افزایش عملکرد و کارایی سیستم می‌شود، از کنترل‌کننده مود لغزشی ترمینال استفاده شده که منجر به زمان‌متناهی بودن آرایش‌بندی می‌گردد. در انتها، نتایج تئوری با استفاده از شبیه‌سازی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته تا صحت روابط به دست آمده نیز بررسی شود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های چندعاملی، آرایش‌بندی دوبخشی، پایداری زمان‌متناهی، کنترل مود لغزشی ترمینال.

Finite-Time Bipartite Formation of Nonlinear Heterogeneous Multi-Agent Systems

Mohammad Reza Mehrabi Koushki, Javad Askari, Marzieh Kamali

Abstract: Due to their extended use, nowadays, Multi-Agent Systems have attracted the attention of many researchers. Bipartite formation is one of the interesting fields of Multi-Agent Systems that has been raised within a decade. In this research, the distributed bipartite formation of Multi-Agent Systems was investigated by a leader-follower approach. Heterogeneous agents in this approach have second-order nonlinear dynamics, and the communication graph between the agents is also a structurally balanced signed directed graph. Because of the distributed approach of the controller and the lack of existing communication between the leader and all of the followers, a finite-time observer is used to estimate the leader's dynamic in finite time. Also, because a finite-time approach increases performance and efficiency in many practical applications, a terminal sliding mode controller provides finite-time formation. Finally, the validity of the theoretical results is illustrated by simulation examples.

Keywords: Multi-Agent Systems, Bipartite formation, Finite-time stability, Terminal sliding mode control.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

۱- مقدمه

سیستم‌های چندعاملی[۱] در محدوده‌ی وسیعی از زمینه‌های مهندسی همچون شبکه‌های هوشمند الکتریکی، شبکه‌های کامپیوتری، محیط شهری، سیستم‌های بیولوژیکی و هواپیماهای بدون سرنشین، مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند [۱-۳]. یک سیستم چندعاملی متشکل از چندین عامل هوشمند است و قادر به انجام اهدافی که برای یک عامل و یا حتی یک سیستم یکپارچه امری دشوار و یا غیرممکن است، می‌باشد.

در بین اهداف مرتبط با سیستم‌های چندعاملی، آرایش‌بندی، که در آن گروهی از عامل‌ها برای دستیابی به شکل هندسی مورد نظر اقدام و با یکدیگر همکاری می‌کنند، به دلیل کاربرد گسترده در مواردی کاربردی همچون رباتیک، هوافضا، شبکه‌های سنسوری و حمل و نقل هوشمند، از اهمیت خاصی برخوردار است [۳-۵]. به رغم تلاش‌های فراوان محققین در زمینه‌ی سیستم های چند عاملی، چالش های فراوانی در کنترل آرایش‌بندی این سیستم‌ها وجود دارد. از جمله‌ی این چالش‌ها می‌توان به زمان لازم برای رسیدن به هدف کنترلی، که در برخی از سیستم‌های کاربردی بایستی در زمان متناهی[۲] انجام شود، اشاره نمود. همچنین همگرایی عامل‌ها به خروجی مطلوب در زمان متناهی، منجر به افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها شده و حساسیت سیستم را نیز در برابر اغتشاش کاهش می‌دهد [۶, ۷].

آرایش‌بندی دوبخشی، نوع خاصی از آرایش‌بندی است که در آن عامل‌ها با حفظ ارتباط و پیوستگی، به دو دسته تقسیم شده و هر دسته در نقاطی قرینه نسبت به مرکز مختصات، آرایش از پیش تعیین شده را به خود می‌گیرند. این نوع آرایش‌بندی در مواردی همچون سیستم رای‌گیری دو حزبی، سیستم‌های بیولوژیکی، گشت‌زنی و تقسیم پهپادها در دو گروه و همچنین عدم برخورد با مانع در حرکت عامل‌ها مطرح می‌شود [۸-۱۱].

در بیشتر مراجع جهت تحلیل آرایش‌بندی دوبخشی از نمایش گراف علامت‌دار برای بیان گراف ارتباطی بین عامل‌ها استفاده می‌شود که شرط لازم برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی، متعادل بودن ساختار گراف علامت‌دار است [۱۲, ۱۳]. با این شرط آرایش‌بندی دوبخشی زمان‌متناهی برای عامل‌های خطی در [۹] بیان شده است. آرایش‌بندی دوبخشی برای دسته‌ای از عامل‌های چند ورودی چند خروجی غیرخطی و با دینامیک نامعین نیز بررسی شده است [۱۲]. همچنین در [۱۳]، آرایش‌بندی متغیر با زمان دوبخشی برای عامل‌های ناهمگن با دینامیک نامعین غیرخطی بررسی شده است. در [۱۳] از یک کنترل‌کننده تطبیقی تناسبی انتگرال‌گیر استفاده شده تا مقاوم بودن سیستم نسبت به اغتشاش خارجی افزایش یابد. [۱۴] با تخمین دینامیک عامل‌ها، آرایش‌بندی دوبخشی سیستم‌های خطی را برای شرایط در دسترس نبودن حالت‌های سیستم توسعه داده است. در کنترل‌کننده معرفی شده [۱۴]، به علت شیوه تخمین زدن دینامیک رهبر، از حالت توزیع‌شده خارج می‌شود. در [۱۵] نیز همگرایی مجانبی آرایش‌بندی دوبخشی برای عامل‌های غیرخطی توام با اغتشاش انجام شده است.

در روش پیشنهاد شده این مطالعه، برخلاف [۸, ۹, ۱۴] که آرایش‌بندی دوبخشی برای سیستم‌های خطی انجام شده است، عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی دارای نامعینی پارامتری در نظر گرفته شده است. همچنین در [۱۲, ۱۳, ۱۵] همگرایی آرایش‌بندی در زمان نامتناهی صورت می‌گیرد که ممکن است در برخی از سیستم‌های عملی کاربردی نباشد. بنابراین، از دستاوردها و یا نوآوری این پژوهش می‌توان به در نظر گرفتن همزمان عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی، آرایش‌بندی دوبخشی، همگرایی زمان‌متناهی سیستم چندعاملی و در نتیجه افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها و همچنین جبران اثر اغتشاش در ورودی و نامعینی پارامترهای مدل سیستم اشاره کرد.

تقسیم بندی محتوی مابقی مقاله به این صورت است: در بخش دوم مقدمه‌ای از نظریه‌ی گراف، لم‌های مورد استفاده، فرضیات و صورت مسئله‌ی آرایش‌بندی دوبخشی گفته شده است. نتایج اصلی در بخش سوم بیان شده‌اند که شامل معرفی کنترل‌کننده، مشاهده‌گر و اثبات زمان‌متناهی بودن آرایش دوبخشی می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی، صحت نتایج تئوری بررسی شده و در انتها هم به جمع‌بندی و ارائه پیشنهادات برای ادامه کار پرداخته شده است.

۲- مفاهیم اولیه و مسئله تحت بررسی

۲-۱- نظریه گراف

گراف جهت‌دار و علامت‌دار $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \xi, A)$، از سه‌تایی مجموعه رئوس $\mathcal{V} = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_N\}$، مجموعه یال‌های ξ و ماتریس وزن‌های گراف A تشکیل شده است. در گراف $\mathcal{G}$، $\mathbb{v}_{ij} = (\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_j) \in \xi$ یعنی یالی از راس j خارج و به راس i وارد شده است و بیانگر ارسال اطلاعات از راس j به راس i می‌باشد. در گراف مذکور، هر یک از یال‌ها دارای وزن a_{ij} می‌باشند که برای بیان ارتباط همکاری بین رئوس گراف، یال با وزن مثبت و برای بیان ارتباط رقابتی بین آن‌ها، یال با وزن منفی بین عامل‌ها متصل است. همچنین $a_{ii} = 0$ می‌باشد. ماتریس لاپلاسین گراف علامت‌دار $\mathcal{G}$، با $\mathcal{L} = [l_{ij}]$ نمایش داده می‌شود که در آن

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}| & \forall i = j \\ -a_{ij} & \forall i \neq j \end{cases} \quad (۱)$$

و N تعداد رئوس گراف می‌باشد.

[۱] Multi-Agent Systems

[۲] Finite time

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

تعریف ۱- گراف $\mathcal{G}$ دارای ساختاری متعادل است هرگاه بتوان رئوس گراف را به دو دسته‌ی $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ تقسیم کرد که $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ و $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$، به نحوی که

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 & \forall\, \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_j \in \mathcal{V}_q (q \in \{1,2\}) \\ a_{ij} \leq 0 & \forall\, \mathbb{v}_i \in \mathcal{V}_q, \mathbb{v}_j \in \mathcal{V}_r, q \neq r (q, r \in \{1,2\}) \end{cases} \quad (۲)$$

باشد [۱۶].

با تعریف ماتریس قطری D به صورت

$$D = diag(d_1, \dots, d_N) \quad (۳)$$

که در آن $d_i = 1$ اگر $\mathbb{v}_i \in \mathcal{V}_1$ و $d_i = -1$ اگر $\mathbb{v}_i \in \mathcal{V}_2$، می‌توان نشان داد که اگر گراف $\mathcal{G}$ دارای ساختاری متعادل باشد، آنگاه در ماتریس DAD تمامی عناصر نامنفی و در ماتریس $D\mathcal{L}D$ عناصر قطری نامنفی و عناصر غیرقطری نامثبت هستند [۱۶].

تذکر ۱: در این پژوهش، برای اثبات همگرایی زمان‌متناهی آرایش‌بندی، عامل‌های پیرو را با توجه به فاصله‌ی گرافی آن‌ها از رهبر گروه در گراف ارتباطی، به سطوح ۱ تا m نقسیم می‌کنیم. برای مثال در شکل ۱ رهبر گروه راس شماره صفر، عامل‌های ۱ و ۳ سطح۱، عامل‌های ۲ و ۴ سطح۲ و عامل‌های ۵ و ۶ سطح۳ هستند.

۲-۲- پایداری زمان‌متناهی

سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (۴)$$

را در نظر بگیرید که در آن $f(0) = 0$. در پایداری زمان‌متناهی، زمان‌نشست $T(x_0)$ برای سیستم تعریف می‌شود که به شرایط اولیه سیستم وابسته است. پایداری زمان‌متناهی یعنی حالت‌های سیستم در بازه‌ی زمانی $[t_0, T(x_0))$ پایدار باشند و در زمان متناهی $T(x_0)$ به نقطه تعادل سیستم میل کنند [۱۷]. به عبارت دیگر؛

$$\lim_{t \to T(x_0)} x(t) = 0 \quad (۵)$$

لم ۱- گیریم تابع پیوسته و مثبت معین $V: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که در شرط

$$\dot{V}(x) + c(V(x))^{\alpha} + kV(x) \leq 0, x \in \Upsilon \backslash \{0\} \quad (۶)$$

به ازای اعداد $c > 0$ و $k \geq 0$ و $\alpha \in (0,1)$ و همچنین یک همسایگی باز $\Upsilon \in \mathcal{D}$ حول مبدا، صدق کند. در این صورت نقطه تعادل سیستم پایدار زمان‌متناهی است و زمان نشست سیستم از روابط

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x_0)^{1-\alpha}, x_0 \in \Upsilon, k = 0 \quad (۷)$$

$$T(x_0) \leq \frac{ln\left(1 + \frac{k}{c} V(x_0)^{1-\alpha}\right)}{k(1-\alpha)}, x_0 \in \Upsilon, k \neq 0 \quad (۸)$$

پیروی می‌کند. به علاوه اگر $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ و V بیکران شعاعی باشد آنگاه مبدا پایدار زمان‌متناهی سراسری خواهد بود [۶, ۱۸].

۲-۳- مسئله تحت بررسی

سیستم چندعاملی با $N + 1$ عامل، شامل یک رهبر و N پیرو را در نظر بگیرید. رهبر گروه را عامل صفر در نظر می‌گیریم که دینامیک آن به صورت

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ f_0(t) + g_0(\boldsymbol{x}_0) u_0 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

و دینامیک بقیه عامل‌ها به صورت

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ f_i(\boldsymbol{x}_i) + f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t}) + g_i(\boldsymbol{x}_i) u_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (۱۰)$$

است. $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ بردار حالت رهبر گروه که متشکل از موقعیت p_0 و سرعت v_0، u_0 سیگنال ورودی دینامیک رهبر، $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^2$ نیز بردار حالت عامل‌های پیرو متشکل از موقعیت p_i و سرعت v_i و u_i سیگنال ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد. در (۹)، $f_0(t)$ نامعلوم برای عامل‌ها و مشتق آن در رابطه $|\dot{f}_0(t)| \leq \dot{f}_{max}$ با فرض معلوم بودن $\dot{f}_{max}$ صدق می‌کند. همچنین $g_0(\boldsymbol{x}_0) u_0$ نیز کران‌دار به صورت $|g_0(\boldsymbol{x}_0) u_0| \leq g_{max} u_{0,max}$ و کران آن معلوم می‌باشد. در (۱۰)، $f_i(\boldsymbol{x}_i)$ و $g_i(\boldsymbol{x}_i)$ توابع پیوسته و غیرخطی معلوم در حالت نامی و $f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t})$ سیگنال اغتشاش (و یا نامعینی دینامیک) عامل‌ها می‌باشد که کران‌دار به صورت

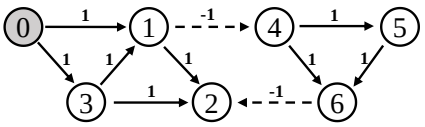
$$|f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t})| \leq f_{d,max} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (۱۱)$$

با کران مشخص $f_{d,max}$ می‌باشد.

تعریف ۲- برای سیستم چند عاملی با معادلات (۹) و (۱۰)، گوییم آرایش‌بندی دوبخشی به دست آمده است اگر

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{h}_i - d_i \boldsymbol{x}_0 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (۱۲)$$

که در آن $\boldsymbol{h}_i = \begin{bmatrix} h_i \\ 0 \end{bmatrix}$ فاصله و سرعت از پیش تعیین شده‌ی آرایش‌بندی و d_i عناصر قطری ماتریس D در (۳) است [۸].



شکل ۱- گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختار متعادل

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

در این پژوهش می‌خواهیم عامل‌های ۱ تا N را به نحوی کنترل کنیم که در زمان‌متناهی آرایش‌بندی دوبخشی را به خود بگیرند. در شکل ۲ موقعیت اولیه و پس از آرایش‌بندی دوبخشی دسته‌ای از عامل‌ها نمایش داده شده که در آن سه عامل که رابطه آن‌ها با رهبر به صورت همکاری است، رهبر گروه را و مابقی عامل‌ها قرینه رهبر گروه را نسبت به مبدا مختصات، با آرایشی از پیش تعیین شده دنبال می‌کنند.

فرض ۱- گراف مورد استفاده یک گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختاری متعادل است و همچنین شامل یک درخت فراگیر ریشه‌دار نیز هست که رهبر گروه، ریشه درخت می‌باشد.

به دلیل ساختار گراف ارتباطی، ماتریس لاپلاسین گراف ارتباطی به صورت

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_N^T \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

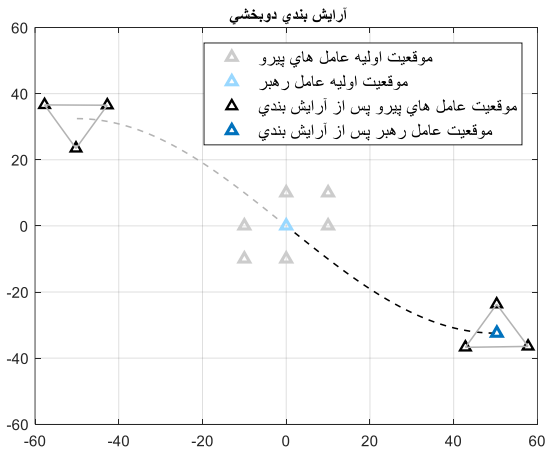
نوشته می‌شود که به دلیل عدم وجود ارتباط از عامل‌های پیرو به رهبر، سطر اول ماتریس لاپلاسین صفر است. همچنین زیر ماتریس $\mathcal{L}_{22} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ بیانگر ارتباط توام عامل‌های پیرو با یکدیگر و بردار $\mathcal{L}_{21} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ بیانگر ارتباط رهبر گروه با هر یک از عامل‌های پیرو می‌باشد. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف ارتباطی، ماتریس قطری و مثبت معین w یافت می‌شود آن چنان که [۸]

$$w\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{L}}^T w \geq 0, \hat{\mathcal{L}} = D\mathcal{L}_{22}D. \tag{۱۴}$$

لم ۲- بردار $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نامساوی‌های نرمی زیر برای آن صادق هستند [۱۹]

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2 \tag{۱۵}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty. \tag{۱۶}$$



شکل ۲- آرایش‌بندی دوبخشی سیستم چندعاملی

فرض ۲- رهبر با عامل‌ها فقط به صورت همکاری ارتباط دارد و نه رقابتی. به بیان دیگر $a_{i0} \geq 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, N$.

فرض ۳- فواصل از پیش تعیین شده برای آرایش‌بندی، فواصل ثابتی هستند و با زمان تغییر نمی‌کنند. به عبارت دیگر $\dot{\boldsymbol{h}}_i = \mathbf{0}$.

۳- طراحی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر

با توجه به تعریف ۲، خطای آرایش‌بندی دوبخشی عامل‌ها را به صورت

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{h}_i - d_i\boldsymbol{x}_0 \tag{۱۷}$$

تعریف می‌کنیم. به دلیل اینکه همه‌ی عامل‌ها با رهبر گروه در ارتباط نیستند، مسئله نیازمند رابطه‌ای می‌باشد که هم بیانگر خطای آرایش‌بندی باشد و هم رویکرد توزیع‌شده در مسئله حفظ شود. بنابراین با استفاده از (۱۷) خطای توزیع‌شده‌ی آرایش‌بندی دوبخشی را می توان به صورت

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,i} \\ \varepsilon_{2,i} \end{bmatrix} = d_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \big((\boldsymbol{r}_i) - sgn(a_{ij})(\boldsymbol{r}_j) \big) + d_i a_{i0}(\boldsymbol{r}_i) \tag{۱۸}$$

تعریف نمود [۸]. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف و در صورت غیر صفر بودن a_{ij}

$$d_j = sgn(a_{ij})d_i. \tag{۱۹}$$

پس شکل برداری (۱۸) برای تمام عامل ها را می‌توان به صورت

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix} = (D\mathcal{L}_{22} \otimes I_2)\boldsymbol{r} \tag{۲۰}$$

نوشت که در آن $\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}_1 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{r}_N]^T$ است. به دلیل وجود درخت فراگیر در گراف ارتباطی، $\mathcal{L}_{22}$ غیرتکین بوده [۸] و در صورت میل $\boldsymbol{\varepsilon}$ به صفر، $\boldsymbol{r}$ نیز به صفر میل کرده و خطای آرایش‌بندی دوبخشی صفر می‌شود.

با توجه به تحلیل انجام شده، در ادامه به معرفی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر f_0 می پردازیم. با استفاده از سطح لغزش

$$S_i = \varepsilon_{1,i} + \frac{1}{\beta}\varepsilon_{2,i}^{p/q} \tag{۲۱}$$

که در آن $\beta > 0$ و p و q اعداد فرد و مثبتی با شرط $1 < {}^{p}/_{q} < 1.5$ هستند؛ نشان خواهیم داد که با فرض صفر بودن $f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t})$، کنترل‌کننده مود لغزشی برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی به صورت

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

$$u_i = \frac{1}{g_i(x_i)}\left(-f_i(\boldsymbol{x}_i) + d_i\left(-a_1 sgn(S_i) - a_2 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} S_i + \hat{f}_{0,i}\right)\right),\ i = 1, \dots, N \tag{۲۲}$$

خواهد بود که در آن

$$a_1 = g_{max} u_{0,max} + a_{1,2}, \qquad a_2 = \frac{1}{\lambda_1}\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} + a_{2,2} \tag{۲۳}$$

و λ_1 کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس $\hat{\mathcal{L}}^T w + w\hat{\mathcal{L}}$ می‌باشد. $a_{1,2}$ و $a_{2,2}$ نیز مقادیر مثبتی هستند که باید به نحوی انتخاب شوند تا نامساوی‌های

$$a_{1,2} > max\left(0.5\frac{q}{p}\frac{\beta}{a_{i0,min}} a_6^{2-\frac{p}{q}} + 0.5\frac{1}{a_{i0,min}} a_2\, a_{ij,max}\sqrt{N}\, a_7,\ \frac{1}{a_{i0,min}} a_2\, a_{ij,max}\sqrt{N}\, a_7\right) \tag{۲۴}$$

$$a_1 > \max\left(\frac{q}{p}\frac{\beta}{a_{ij,min}} a_6^{2-\frac{p}{q}} + \frac{1}{a_{ij,min}} a_2\, a_{ij,max},\ \frac{1}{a_{ij,min}} a_2 a_{ij,max} a_7\sqrt{N}\right) \tag{۲۵}$$

برقرار باشد. در (۲۴) و (۲۵)، $a_{i0,min}$، $a_{ij,max}$، $a_{ij,min}$ به ترتیب کوچک‌ترین اندازه وزن یال‌های متصل به رهبر گروه، بزرگ‌ترین اندازه و کوچک‌ترین اندازه وزن یال‌ها در گراف ارتباطی هستند. همچنین

$$a_6 = \left(N^{-\frac{4-2p}{p+q}+\frac{4-2p}{4q-2p}} \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}} \frac{\beta}{w_{min}}\right)^{\frac{q}{3p-3q}} \tag{۲۶}$$

$$a_7 = \frac{2w_{max} a_6^{2-\frac{p}{q}}\sqrt{N}}{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}}. \tag{۲۷}$$

مشاهده‌گر مورد استفاده برای تخمین دینامیک رهبر گروه $f_0(t)$ توسط عامل i-ام به صورت

$$\dot{\hat{f}}_{0,i} = a_3 sgn(\tilde{f}_{0,i}) + a_4 \tilde{f}_{0,i} \tag{۲۸}$$

$$a_3 = \dot{f}_{max} + a_{3,2}, \qquad a_4 = \frac{1}{\lambda_1} w_{max}^2 + a_{4,2} \tag{۲۹}$$

می‌باشد که در آن $a_{3,2}, a_{4,2} > 0$. در ادامه ثابت می‌شود که همگرایی مشاهده‌گر زمان‌متناهی است.

قضیه ۱- مشاهده‌گر (۲۸) در زمان‌متناهی به $f_0(t)$ در (۹) میل می‌کند.

اثبات- تابع لیاپانوف $V_1 = \tilde{\boldsymbol{f}}_0^T w \tilde{\boldsymbol{f}}_0$ را در نظر بگیرید که w به گونه‌ای انتخاب می‌شود که (۱۴) برقرار باشد و $\tilde{\boldsymbol{f}}_0$ نیز بردار خطای توزیع‌شده‌ی مشاهده‌گر می‌باشد و به صورت

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{0,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0,N} \end{bmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{bmatrix} f_0(t) - \hat{f}_{0,1} \\ \vdots \\ f_0(t) - \hat{f}_{0,N} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

تعریف می‌شود. با مشتق‌گیری از V_1 و جایگذاری (۲۹)، پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_1 \le -a_4 \lambda_1 \|\tilde{\boldsymbol{f}}_0\|^2. \tag{۳۱}$$

بنابر این مطابق با قضیه ۴-۱۰ در [۲۰]، $\tilde{\boldsymbol{f}}_0$ پایدار نمایی سراسری است. به عبارت دیگر؛ با استفاده از لم ۲

$$\|\tilde{\boldsymbol{f}}_0(t)\|_\infty \le \|\tilde{\boldsymbol{f}}_0(t)\| \le \left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\boldsymbol{f}}_0(t_0)\| e^{-\left(\frac{\lambda_1 a_4}{2\, w_{max}}\right)(t-t_0)}. \tag{۳۲}$$

اکنون با استفاده از تابع لیاپانوف $V_{1,i} = \tilde{f}_{0,i}^2$ و با توجه به

$$2a_{i0}\tilde{f}_{0,i}\dot{f}_0(t) - 2\dot{f}_{max}\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\, sgn(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\left(sgn(\tilde{f}_{0,i}) - sgn(\tilde{f}_{0,j})\right)\right) \le 0 \tag{۳۳}$$

خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \le -2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\, sgn(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\left(sign(\tilde{f}_{0,i}) - sgn(\tilde{f}_{0,j})\right)\right) - 2a_4\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\,\tilde{f}_{0,i} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\left(\tilde{f}_{0,i} - \tilde{f}_{0,j}\right)\right). \tag{۳۴}$$

برای تکمیل اثبات، ادامه روند اثبات پایداری را به سه مرحله تقسیم می‌کنیم.

مرحله‌ی اول: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۱. به دلیل

$$-2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i}\sum_{j=1}^N |a_{ij}|\left(sgn(\tilde{f}_{0,i}) - sgn(\tilde{f}_{0,j})\right) \le 0 \tag{۳۵}$$

و با توجه به (۳۲)، با ساده‌سازی (۳۴) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \le -2a_{3,2}a_{i0}V_{2,i}^{0.5} - 2a_4\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\right)V_{2,i} + \left(2a_4\sum_{j=1}^N |a_{ij}|\right)\|\tilde{\boldsymbol{f}}_0(t)\|_\infty V_{2,i}^{0.5} \tag{۳۶}$$

لذا به ازای زمان‌های

$$t > \frac{\lambda_1 a_4}{2\, w_{max}} ln\left(\frac{\left(2a_4\sum_{j=1}^N |a_{ij}|\right)\left(\frac{w_{max}}{w_{min}}\right)^{\frac{1}{2}}\|\tilde{f}_0(t_0)\|}{2a_{3,2}a_{i0}}\right) + t_0 \tag{۳۷}$$

شرایط لم ۱ برآورده شده و در نتیجه برای عامل‌های سطح ۱

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

$$\exists 0 \le T_1 < \infty: \lim_{t\to T_1} \tilde{f}_{0,i} = 0 \qquad (۳۸)$$

مرحله‌ی دوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۲. در این حالت (۳۴) برای عامل‌های سطح۲ و در زمان‌های بزرگتر از T_1 به صورت

$$\begin{aligned}\dot{V}_{1,i} &\le -2a_{3,2}\left(\sum_{v_j\in level1}|a_{ij}|\right)V_{2,i}^{0.5} \\ &- 2a_4\left(\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\right)V_{2,i} \\ &+\left(2a_4\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\right)\|\tilde{\boldsymbol{f}}_0(t)\|_\infty V_{2,i}^{0.5}\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

ساده‌سازی می‌شود که در (۳۹) منظور از $v_j \in level1$، عامل‌های سطح۱ است. در این مرحله نیز مانند مرحله‌ی قبل، عامل‌های سطح۲ در شرایط پایداری زمان‌متناهی لم ۱ صدق کرده و لذا

$$\exists 0 \le T_2 < \infty: \lim_{t\to T_1+T_2} \tilde{f}_{0,i_{level2}} = 0 \qquad (۴۰)$$

مرحله‌ی سوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۳ و بالاتر. در این مرحله نیز مانند مراحل قبل، پس از پایداری عامل‌های سطح i، شرایط برای پایدراری زمان‌متناهی عامل‌های سطح $(1+i)$ فراهم می‌شود. به این ترتیب، برای همه عامل‌های گراف با m سطح، مشاهده‌گر f_0 پایدار زمان‌متناهی سراسری با زمان‌نشست

$$T_{m_0} = T_1 + T_2 + \cdots + T_m \qquad (۴۱)$$

است. ■

در ادامه کران‌هایی برای حالت‌های سیستم و خطای آرایش‌بندی عامل‌ها به دست می‌آوریم که در اثبات پایداری زمان‌متناهی خطای آرایش‌بندی دوبخشی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

لم ۳– سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰) را با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن $f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t})$ در نظر بگیرید. با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر f_0 (۲۸) به سیستم، سیگنال $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$، کران‌دار است.

اثبات– تابع لیاپانوف

$$V_2(\boldsymbol{S}, \tilde{\boldsymbol{f}}_0, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1) = \boldsymbol{S}^T w \boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{f}}_0^T w \tilde{\boldsymbol{f}}_0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^T w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \qquad (۴۲)$$

را در نظر بگیرید که $\boldsymbol{S}$ بردار سطوح لغزش عامل‌ها به صورت

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \frac{1}{\beta}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{p/q} \qquad (۴۳)$$

و $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ و $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ به ترتیب خطای توزیع‌شده‌ی آرایش‌بندی موقعیت و سرعت عامل‌ها است و به صورت

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{1,1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,N}\right]^T, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{2,N}\right]^T \qquad (۴۴)$$

تعریف می‌شود. با مشتق‌گیری از (۴۲) و جایگذاری مقادیر کنترل‌کننده و مشاهده‌گر و همچنین یا استفاده از نامساوی یانگ [۲۰] و با توجه به $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \boldsymbol{S} - \frac{1}{\beta}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p}{q}}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \le -\Bigg\| &\sqrt{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}}\, diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S} - \\ &\frac{2}{\sqrt{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{2,2}}} w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{2-\frac{p}{q}}\Bigg\|^2 + \\ &+ \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{2,2}}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{4-2\frac{p}{q}}^{4-2\frac{p}{q}} - \frac{w_{min}}{\beta}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1}^{\frac{p}{q}+1}.\end{aligned} \qquad (۴۵)$$

لذا اگر بخواهد

$$\begin{aligned}&\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1} > a_5^{\frac{q}{3p-3q}}, \\ &a_5 = N^{-\frac{4-2p}{p+q}+\frac{4-2p}{4q-2p}} \frac{4w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}} \frac{\beta}{w_{min}}\end{aligned} \qquad (۴۶)$$

برقرار باشد، با توجه به نامساوی(۴۵) تابع V_2 کاهش می‌یابد و لذا $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ کراندار و محدود به کران

$$\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_\infty = \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1} \le a_5^{\frac{q}{3p-3q}} \qquad (۴۷)$$

می‌باشد. ■

لم ٤– سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰) را با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن $f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i, \mathrm{t})$ در نظر بگیرید. با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر f_0 (۲۸) به سیستم، سیگنال $diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p}{q}-1}\right)\boldsymbol{S}$، کران‌دار است.

اثبات– با مشتق گیری از تابع

$$V_3(\boldsymbol{S}, \tilde{\boldsymbol{f}}_0) = \boldsymbol{S}^T w \boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{f}}_0^T w \tilde{\boldsymbol{f}}_0 \qquad (۴۸)$$

و ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_3 \le 2\boldsymbol{S}^T w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 - \lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}\, \left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\|^2 \qquad (۴۹)$$

پس از ورود $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ به کران ذکر شده در لم۳ و استفاده از لم۲ داریم

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &\le 2w_{max} a_6^{2-\frac{p}{q}}\sqrt{N}\left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\| \\ &- \lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\, a_{2,2}\, \left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\|^2.\end{aligned} \qquad (۵۰)$$

که در آن $a_6 = a_5^{\frac{q}{3p-3q}}$. با توجه به (۵۰)، اگر بخواهد رابطه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

$$\left\| diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\| > a_7 \tag{۵۱}$$

برقرار باشد که در آن $a_7 = \frac{2w_{max}a_6^{2-\frac{p}{q}}\sqrt{N}}{\lambda_1\frac{p1}{q\beta}a_{2,2}}$ است، تابع V_3 کاهش می‌یابد لذا $diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}$ کران‌دار و محدود به کران a_7 می‌باشد. ■

قضیه۲- سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰)، با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن $f_{d,i}(\boldsymbol{x}_i,t)$، با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر f_0 (۲۸)، به طوری که نامساوی‌های (۲۴) و (۲۵) برقرار باشند، تمامی عامل‌ها بعد از ورود به کران به دست آمده در لم‌های ۳ و ۴، در زمان متناهی به سطح لغزش S_i میل می‌کنند. پس از آن روی سطح لغزیده و در زمان متناهی خطای آرایش‌بندی دوبخشی صفر می‌شود.

اثبات- با مشتق‌گیری از تابع $V_{2,i} = S_i^2$ پس از زمان T_{m_0} (۴۱) و همگرایی مشاهده‌گر f_0، با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}&2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}S_i\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|a_2\varepsilon_{2,j}^{\frac{p-q}{q}}S_j\\&\le 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_2a_{ij,max}|S_i|\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\|_1\end{aligned} \tag{۵۲}$$

و ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{2,i} \le 2S_i\varepsilon_{2,i} +\\&2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}S_i\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\textstyle\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\left(-a_1sgn(S_i) +\right.\\&\left.a_1sgn(S_j)\right) +\\&2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_2a_{ij,max}|S_i|\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\|_1 +\\&2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\left(-2a_{i0}a_{1,2}S_isgn(S_i)\right).\end{aligned} \tag{۵۳}$$

پس از برقراری $\left\|diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S}\right\| \le a_7$ و $\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_\infty \le a_6$ همچنین با استفاده لم۲، (۵۳) را به صورت

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{2,i} \le 2a_6^{2-\frac{p}{q}}\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}|S_i| +\\&2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}S_i\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\textstyle\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\left(-a_1sgn(S_i) +\right.\\&\left.a_1sgn(S_j)\right) + 2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_2\,a_{ij,max}\sqrt{N}\,a_7\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}|S_i| -\\&4\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_{i0}\,a_{1,2}\,\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}|S_i|\end{aligned} \tag{۵۴}$$

بازنویسی می‌کنیم و برای ادامه، روند اثبات را به سه مرحله تقسیم خواهیم کرد.

مرحله‌ی اول: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۱. به دلیل منفی نیمه معین بودن دومین عبارت سمت راست نامساوی (۵۴)، آن را به صورت

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{2,i} \le \left(2a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_2\,a_{ij,max}\sqrt{N}\,a_7 -\right.\\&\left.4\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_{i0}\,a_{1,2}\right)\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}|S_i|\end{aligned} \tag{۵۵}$$

بازنویسی می‌کنیم. اکنون اگر $a_{1,2}$ را آنچنان انتخاب کنیم که شرط (۲۴) برقرار شود، خواهیم داشت

$$\dot{V}_{2,i_{level1}} \le -\rho_1(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_1(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \tag{۵۶}$$

که در (۵۶)

$$\begin{aligned}&\rho_1(\varepsilon_{2,i}) = \left(2\,a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_2\,a_{ij,max}\sqrt{N}\,a_7 -\right.\\&\left.4\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_{i0}\,a_{1,2}\right)\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \ge 0\end{aligned} \tag{۵۷}$$

می‌باشد. با به کار گیری رویه‌ای مانند [۲۱] و با برقراری شرط (۲۴) پایداری زمان‌متناهی در (۵۶) برقرار می‌شود و در نتیجه عامل‌های سطح۱ در زمان محدود $0 \le T_{m_1} < \infty$ به سطح لغزش میل می‌کنند.

مرحله‌ی دوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۲. به دلیل عدم ارتباط عامل‌های سطح۲ با رهبر گروه، با توجه به اینکه $a_{i0} = 0$، در نتیجه (۵۴) را می توان به صورت

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{2,i}\\&\le 2a_6^{2-\frac{p}{q}}\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}|S_i|\\&+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}S_i\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\sum_{v_j\in level1}|a_{ij}|\left(-a_1sgn(S_i)\right.\\&\left.+ a_1sgn(S_j)\right)\\&+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}S_i\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\sum_{v_j\notin level1}|a_{ij}|\left(-a_1sgn(S_i)\right.\\&\left.+ a_1sgn(S_j)\right) + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_2\,a_{ij,max}\sqrt{N}\,a_7|S_i|\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\end{aligned} \tag{۵۸}$$

بازنویسی نمود. پس از همگرایی عامل‌های سطح۱ در زمان متناهی T_{m_1}، با برقراری شرط (۲۵)، (۵۸) را می‌توان به صورت

$$\dot{V}_{2,i_{level2}} \le -\rho_2(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_2(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \tag{۵۹}$$

ساده‌سازی نمود که

$$\begin{aligned}&\rho_2(\varepsilon_{2,i}) = \left(2a_6^{2-\frac{p}{q}} - 2a_1\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}|a_{ij}|_{min} +\right.\\&\left.2\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{\beta}a_2\,a_{ij,max}\sqrt{N}a_7\right)\varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}}\end{aligned} \tag{۶۰}$$

می‌باشد. در این مرحله نیز به کمک روشی که در مرحله‌ی قبل انجام شد، پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۲ نیز برقرار شده و این عامل‌ها در زمان محدود $0 \le T_{m_2} < \infty$ به سطح لغزش میل می‌کنند.

مرحله‌ی سوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۳ و بالاتر. بررسی پایداری زمان‌متناهی این عامل‌ها نیز فرایندی مشابه عامل‌های سطح۲ دارد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

لذا پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح۳ پس از پایداری عامل‌های سطح۲ و در حالت کلی پایداری عامل‌های سطح m $(m > 3)$ پس از پایداری عامل‌های سطح $(m-1)$ اتفاق می‌افتد.

با همگرایی زمان‌متناهی عامل‌ها بر روی سطح لغزش تساوی

$$-\beta\varepsilon_{1,i}^{q/p} = \varepsilon_{2,i} \tag{۶۱}$$

برقرار شده و با توجه به

$$\dot{\varepsilon}_{1,i} = \varepsilon_{2,i} \tag{۶۲}$$

با مشتق گیری از تابع

$$V_{3,i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{1,i}^2 \tag{۶۳}$$

و جایگذاری (۶۱) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{3,i} = -\beta\varepsilon_{1,i}^{\frac{q}{p}+1} = -\beta V_{3,i}^{\frac{p+q}{2p}} \tag{۶۴}$$

لذا بنا به لم۱ مبدا برای $\varepsilon_{1,i}$ پایدار زمان‌متناهی است. همچنین با توجه به (۶۱)، همزمان با همگرایی $\varepsilon_{1,i}$ به مبدا، $\varepsilon_{2,i}$ نیز به مبدا همگرا شده و در نتیجه آرایش‌بندی دوبخشی در زمان متناهی حاصل می‌شود. ■

تذکر ۲- نتایج به دست آمده به سیستم توام با اغتشاش و یا دارای نامعینی پارامتری در $f_i(\boldsymbol{x}_i)$، برای حالتی که $p/q = 7/5$ می‌باشد، نیز قابل تعمیم است. با رویکردی مشابه می‌توان نشان داد که با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و با در نظر گرفتن شرایط

$$\begin{aligned} a_{1,2} &> max\Big(\frac{q}{p}\frac{1}{a_{i0,min}}\beta a_9 + \frac{1}{a_{i0,min}}a_2 a_{ij,max}\sqrt{N}a_{11} + \frac{3}{a_{i0}}N_{i,max}f_{d,max}a_{ij,max}, \\ &\quad \frac{1}{a_{i0,min}}a_2 a_{ij,max}\sqrt{N}a_{11} + \frac{2}{a_{i0,min}}a_{ij,max}f_{d,max}N_{i,max}\Big) \end{aligned} \tag{۶۵}$$

$$\begin{aligned} a_1 &> max\Big(\frac{1}{a_{ij,min}N_{i,min}}\Big(\frac{q}{p}\beta a_9 + a_2 a_{ij,max}\sqrt{N}a_{11} + 3N_{i,max}f_{d,max}a_{ij,max}\Big), \\ &\quad \frac{1}{a_{ij,min}N_{i,min}}\big(a_2 a_{ij,max}\sqrt{N}a_{11} + 2a_{ij,max}f_{d,max}N_{i,max}\big)\Big) \end{aligned} \tag{۶۶}$$

برای مقادیر کنترل‌کننده و مشاهده‌گر $f_0(t)$، عامل‌ها در زمان متناهی آرایش دوبخشی به خود گرفته و رهبر گروه را دنبال می‌کنند.

اثبات- با مشتق‌گیری از تابع

$$V_2(\boldsymbol{S}, \tilde{\boldsymbol{f}}_0, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1) = \boldsymbol{S}^T w \boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{f}}_0^T w \tilde{\boldsymbol{f}}_0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^T w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \tag{۶۷}$$

و ساده‌سازی، مانند آنچه در لم ۳ صورت گرفت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\le 2\boldsymbol{S}^T w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 - \lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\,\bar{a}_{2,2}\,\boldsymbol{S}^T diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p-q}{q}}\right) diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p-q}{q}}\right)\boldsymbol{S} \\ &\quad + 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^T w \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\boldsymbol{S}^T w\, diag\left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\cdot 2}^{\frac{p-q}{q}}\right) D\mathcal{L}_{22}\,\boldsymbol{f}_d \end{aligned} \tag{۶۸}$$

و یا

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\le -\frac{w_{min}}{\beta}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1}^{\frac{p}{q}+1} + \frac{8w_{max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\bar{a}_{2,2}}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{4-2\frac{p}{q}}^{4-2\frac{p}{q}} \\ &\quad + 8\frac{\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}\left(N_{i,max}f_{d,max}|a_{ij}|_{max}\right)^2 w_{max}^2 N}{\lambda_1\,\bar{a}_{2,2}}. \end{aligned} \tag{۶۹}$$

اکنون با استفاده از نامساوی هلدر [۲۰]، (۶۹) را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\le -\frac{w_{min}}{\beta}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1}^{\frac{p}{q}+1} + \\ &\frac{8w_{max}^2}{\lambda_1\frac{p1}{q\beta}\bar{a}_{2,2}}N^{-\frac{4q-2p}{p+q}+\frac{4q-2p}{4q-2p}}\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\|_{\frac{p}{q}+1}^{4-2\frac{p}{q}} + \\ &\frac{\frac{p8}{q\beta}\left(N_{i,max}f_{d,max}|a_{ij}|_{max}\right)^2 w_{max}^2 N}{\lambda_1\,\bar{a}_{2,2}} \end{aligned} \tag{۷۰}$$

بازنویسی می‌کنیم. برای بررسی منفی شدن سمت راست نامساوی (۷۰)، با انتخاب $p/q = 7/5$ و با توجه به

$$\frac{p}{q} + 1 = \frac{12}{5} = 2\frac{6}{5} = 2(4 - 2\frac{p}{q}) \tag{۷۱}$$

ریشه‌های سمت راست (۷۰) را می‌توان با حل یک نامعادله‌ی درجه۲ به دست آورد. مابقی اثبات همانند لم‌های ۳ و ۴ و قضیه ۲ قابل بررسی است. ■

٤- نتایج شبیه‌سازی

۴-۱- سیستم بدون اغتشاش و عدم قطعیت

سیستم چندعاملی دکوپله با عامل رهبر

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_{0_x} \\ \dot{v}_{0_x} \\ \dot{p}_{0_y} \\ \dot{v}_{0_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0_x} \\ u_{0_x} + 0.01\,cos(0.5t) \\ v_{0_y} \\ u_{0_y} + 0.01\,sin(0.5t) \end{bmatrix} \tag{۷۲}$$

و عامل‌های پیرو غیرهمگن

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i_x} \\ \dot{v}_{i_x} \\ \dot{p}_{i_y} \\ \dot{v}_{i_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i_x} \\ u_{i_x} + 2cos(0.1p_{i_x}) + v_{i_x}^3 \\ v_{i_y} \\ u_{i_y} + 2\,sin\left(0.1p_{i_y}\right) + v_{i_y}^3 \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1,2,3 \tag{۷۳}$$

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i_x} \\ \dot{v}_{i_x} \\ \dot{p}_{i_y} \\ \dot{v}_{i_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i_x} \\ u_{i_x} + 2cos(0.1p_{i_x}) + ln(v_{i_x}^2 + 1)sgn(v_{i_x}) \\ v_{i_y} \\ u_{i_y} + 2\,sin\left(0.1p_{i_y}\right) + ln\left(v_{i_y}^2 + 1\right)sgn\left(v_{i_y}\right) \end{bmatrix}, \quad \forall i = 4,5,6 \tag{۷۴}$$

و گراف ارتباطی شکل ۱ که در آن عامل صفر، رهبر گروه است را در نظر بگیرید. x_0 بردار حالت رهبر و $u_0 = [u_{0_x} \quad u_{0_y}]^T$ بردار ورودی رهبر می‌باشد که در آن p_{0_x} موقعیت رهبر در جهت x، v_{0_x} سرعت رهبر در جهت x، p_{0_y} موقعیت رهبر در جهت y، v_{0_y} سرعت رهبر در جهت y، u_{0_x} سیگنال ورودی رهبر در جهت x و u_{0_y} سیگنال ورودی رهبر در جهت y است. همچنین x_i بردار حالت و $u_i = [u_{i_x} \quad u_{i_y}]^T$ بردار ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد که در آن p_{i_x} موقعیت پیرو در جهت x، v_{i_x} سرعت پیرو در جهت x، p_{i_y} موقعیت پیرو در جهت y، v_{i_y} سرعت پیرو در جهت y، u_{i_x} سیگنال ورودی پیرو در جهت x و u_{i_y} سیگنال ورودی پیرو در جهت y می‌باشد. همچنین شکل ۳ بیانگر سیگنال ورودی رهبر، u_0، در بازه‌ی شبیه‌سازی است. در ادامه و با در نظر گرفتن (۲۴) و (۲۵) پارامترهای کنترل‌کننده و مقادیر دلخواه آرایش‌بندی به ترتیب در جدول ۱ و جدول ۲ بیان شده است.

جدول ۱- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم در حالت بدون اغتشاش

p	q	β	w	a_1	a_2	a_3	a_4
101	69	1	$7.61I_6$	15.7	15.4	2	2

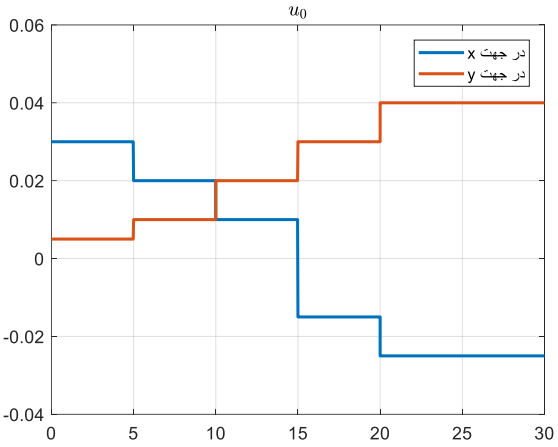
جدول ۲- مقادیر آرایش‌بندی عامل‌ها

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
$\boldsymbol{h}_{ix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{h}_{iy}$	$\begin{bmatrix}1.15\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.58\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.58\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.58\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.58\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1.15\\0\end{bmatrix}$

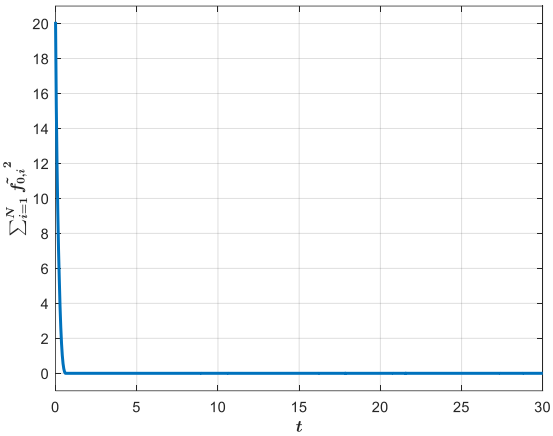
شکل ۴ مجذور نرم خطای مشاهده‌گر عامل‌ها را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، خطای مشاهده‌گر f_0 در کسری از ثانیه به صفر میل می‌کنند. شکل ۵ نیز نمایش مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه می‌باشد. همچنین

شکل ۶ نمایش مجذور نرم خطای آرایش‌بندی دوبخشی سرعت و موقعیت عامل‌ها هم در جهت x و هم در جهت y می‌باشد. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در زمان محدود و متناهی به مبدا همگرا می‌شود. به منظور نمایش دقیق رفتار عامل‌ها پس از اعمال کنترل‌کننده،

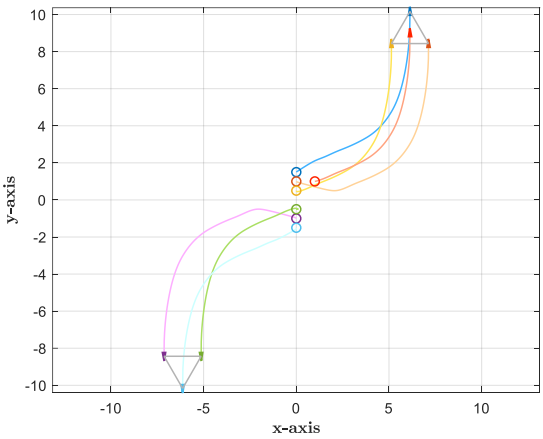
شکل ۷ تا شکل ۱۰ به ترتیب موقعیت عامل‌ها در جهت x، موقعیت عامل‌ها در جهت y، سرعت عامل‌ها در جهت x و سرعت عامل‌ها در جهت y را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد.



شکل ۳- سیگنال ورودی رهبر گروه در بازه‌ی شبیه‌سازی

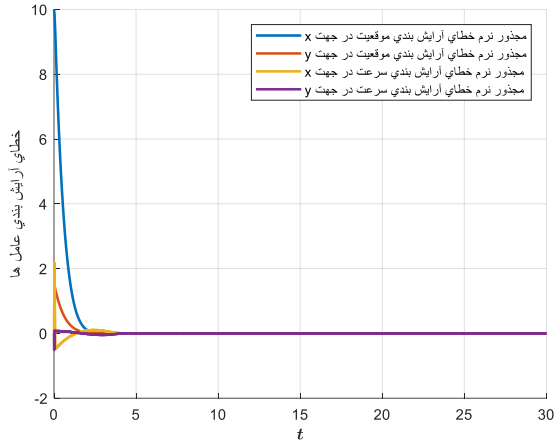


شکل ۴- مجذور نرم خطای مشاهده‌گر عامل‌های پیرو

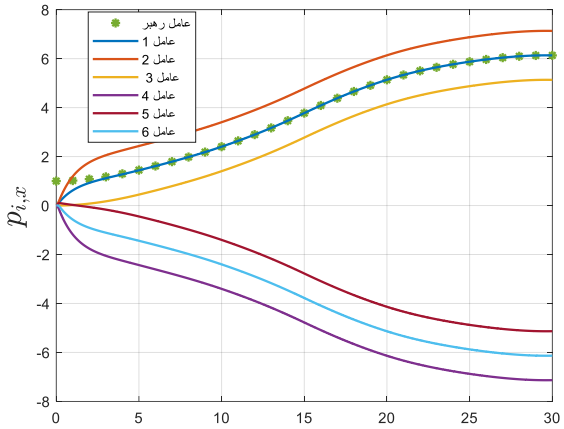


شکل ۵- مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه

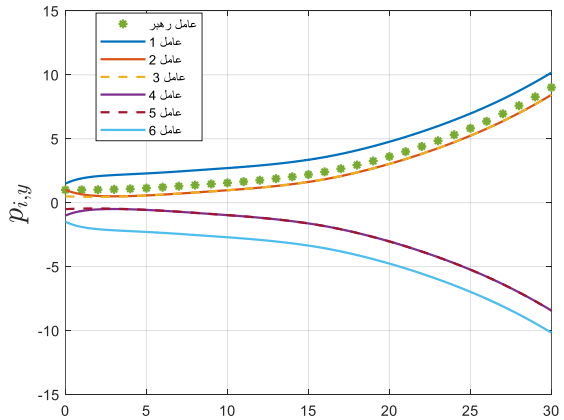
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]



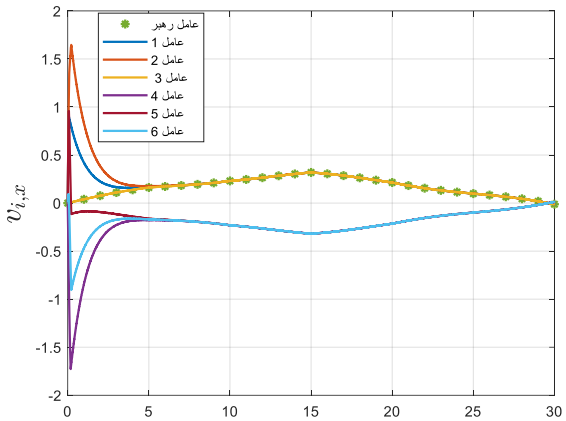
شکل ۶- نمایش خطای آرایش‌بندی دوبخشی عامل‌ها



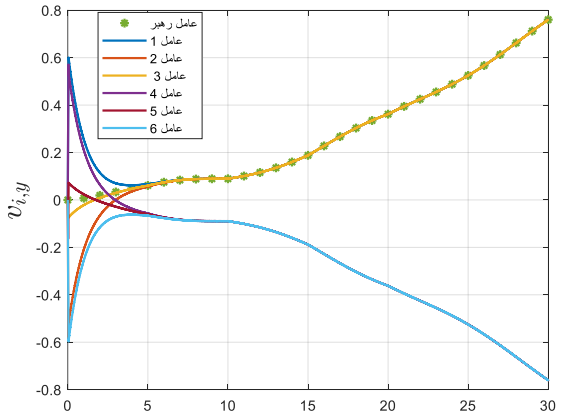
شکل ۷- نمایش موقعیت عامل‌ها در جهت x



شکل ۸- نمایش موقعیت عامل‌ها در جهت y



شکل ۹- نمایش سرعت عامل‌ها در جهت x



شکل ۱۰- نمایش سرعت عامل‌ها در جهت y

۴-۲- سیستم در معرض اغتشاش و دارای نامعینی

سیستم چندعاملی شبیه‌سازی قبل را در نظر بگیرید که این بار عامل‌های پیرو در معرض اغتشاش سینوسی با دامنه و فرکانس متغیر با زمان به صورت شکل ۱۱ می‌باشند. همچنین در این مثال برای عامل‌های ۱ تا ۳ نامعینی پارامتری متغیر با زمان به صورت

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} v_{i_x} \\ u_{i_x} + 2cos(0.1p_{i_x}) + 0.2\,cos(t)cos\left(0.1p_{i_y}\right) + v_{i_x}^3 \\ v_{i_y} \\ u_{i_y} + 2\,sin\left(0.1p_{i_y}\right) - 0.2\,cos(2t)\,sin(0.1p_{i_x}) + v_{i_y}^3 \end{bmatrix} \quad (۷۵)$$

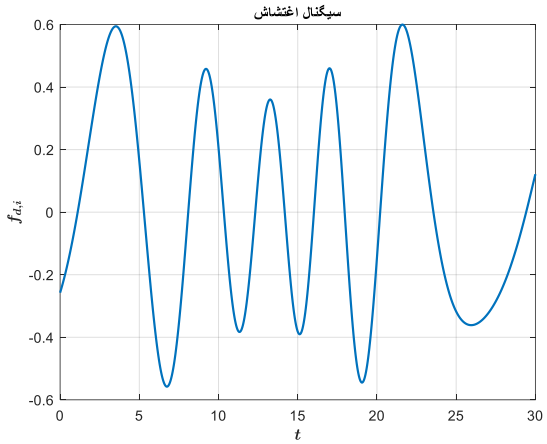
در نظر می‌گیریم. در ادامه و با استفاده از نامساوی‌های (۶۵) و (۶۶) مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده را به صورت جدول ۳ انتخاب می‌کنیم. همچنین سیگنال ورودی رهبر گروه و مقادیر آرایش‌بندی را مثل حالت بدون اغتشاش می‌گیریم. شکل ۱۲ خطای آرایش‌بندی عامل‌ها را در حالت سیستم توام با اغتشاش نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود با استفاده از کنترل‌کننده‌ی معرفی شده، حتی در حضور اغتشاش نیز اهداف کنترلی برآورده شده و خطای آرایش‌بندی در زمان متناهی به صفر میل کرده است.

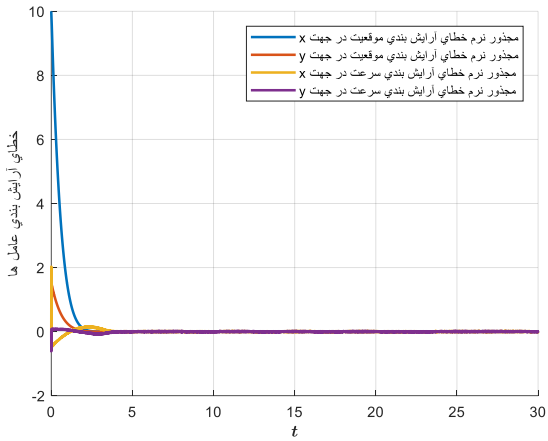
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

جدول ۳- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم توام با اغتشاش

p	q	β	w	a_1	a_2	a_3	a_4
7	5	1	I_6	110	70	2	2



شکل ۱۱- اغتشاش اعمال شده به عامل‌ها در طول شبیه‌سازی



شکل ۱۲- نمایش خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در حضور اغتشاش

۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از کنترل مود لغزشی ترمینال، روشی نو برای پایداری زمان‌متناهی عامل ناهمگن و غیرخطی، هم برای سیستم در شرایط ایده‌آل و هم برای سیستم توام با اغتشاش برآورده شد. همچنین در صورت وجود نامعینی در متغیر $f_i(\boldsymbol{x}_i)$، می‌توان با آن مانند اغتشاش برخورد کرد و با استفاده از کنترل‌کننده معرفی شده در این پژوهش، آرایش‌بندی دوبخشی را برای سیستم دارای نامعینی نیز برآورده کرد. لاکن بررسی اثر نامعینی در متغیر $g_i(\boldsymbol{x}_i)$ که در این پژوهش به آن پرداخته نشد برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود. همچنین رویکرد زمان‌ثابت[1] در آرایش‌بندی دوبخشی برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

نمادها

تابع علامت	$sgn(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$
ماتریس قطری با درایه‌های قطری x_1 تا x_N	$diag\big((x_1, \dots, x_N)\big)$
نرم (اقلیدسی) بردار $\boldsymbol{x}$	$\|\boldsymbol{x}\|$
نرم a بردار $\boldsymbol{x}$	$\|\boldsymbol{x}\|_a$
به توان رسیدن درایه‌های بردار $\boldsymbol{x}$ به توان a	$\boldsymbol{x}.^{\alpha} = [x_1^{\alpha}, \dots, x_N^{\alpha}]^T$
ضرب کرونکر	$\otimes$
ماتریس منفی نیمه‌معین	$X \leq 0$

مراجع

[1] A. Dorri, S. S. Kanhere, and R. Jurdak, “Multi-agent systems: a survey,” IEEE Access, vol. 6, pp. 28573-28593, 2018.

[2] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, “Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 64, no. 6, pp. 5014-5024, 2016.

[3] M. De Queiroz, X. Cai, and M. Feemster, “Formation control of multi-agent systems: a graph rigidity approach,” John Wiley & Sons, 2019.

[4] H. S. Ahn, Formation Control, Springer, 2020.

[5] J. Zhang, Y. Yao, J. A. Wang, Z. Li, P. Feng, and W. Bai, “Distributed bipartite output formation control for heterogeneous discrete-time linear multi-agent systems,” IEEE Access, Vol. 12, pp. 18901-18912, 2024.

[6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.

[7] S. Ding, S. Li, and Q. Li, “Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance,” Journal of Control Theory and Applications, vol. 7, no. 3, pp. 271-276, 2009.

[8] C. Yan, W. Zhang, H. Su, and X. Li, “Adaptive bipartite time-varying output formation control for multiagent systems on signed directed graphs,” IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 52, no. 9, pp. 8987-9000, 2021.

[9] X. Gong, J. J. R. Liu, Y. Wang, and Y. Cui, “Distributed finite-time bipartite consensus of multi-agent systems on directed graphs: Theory and experiment in nanoquadcopters formation,”

[1] Fixed-time

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]

manipulators," Automatica, vol. 38, no. 12, pp. 2159-2167, 2002.

Journal of the Franklin Institute, vol. 357, no. 16, pp. 11953- 11973, 2020.

[10] Y. Cai, H. Zhang, J. Zhang, R. Xi, and Q. He, "Fully distributed bipartite time-varying formation control for uncertain linear multi-agent systems under event-triggered mechanism," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 31, no. 11, pp. 5165-5187, 2021.

[11] G. A. Pavlopoulos, P. I. Kontou, A. Pavlopoulou, C. Bouyioukos, E. Markou, and P. G. Bagos, "Bipartite graphs in systems biology and medicine: a survey of methods and applications," GigaScience, vol. 7, no. 4, pp. 1-31, 2018.

[12] J. Liang, X. Bu, L. Cui, and Z. Hou, "Data-driven bipartite formation for a class of nonlinear MIMO multiagent systems," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 34, no. 6, pp. 3161-3173, 2021.

[13] W. Wang, W. Zhang, C. Yan, and Y. Fang, "Distributed adaptive bipartite time-varying formation control for heterogeneous unknown nonlinear multi-agent systems," IEEE Access, Vol. 9, pp. 52698-52707, 2021.

[14] X. Zhang, J. Wu, X. Zhan, T. Han, and H. Yan, "Observer-based adaptive bipartite time-varying formation tracking of multi-agent system with bounded unknown input," International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 20, No. 12, pp. 3969-3978, 2022.

[15] Y. Yang, D. Chen, Q. Liu, S. Gorbachev, and V. Kuzin, "Bipartite time-varying prescribed range formation control for a class of nonlinear multiagent systems with unknown disturbances," IEEE Systems Journal, Vol. 17, No. 2, pp. 1899-1908, 2023.

[16] C. Altafini, "Consensus problems on networks with antagonistic interactions," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 58, no. 4, pp. 935-946, 2012.

[17] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.

[18] Y. Shen and Y. Huang, "Uniformly observable and globally lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 11, pp. 2621-2625, 2009.

[19] W. Ford, Numerical Linear Algebra With Applications: Using MATLAB, Academic Press, 2014.

[20] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd ed., Patience Hall, 2002.

[21] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man, "Non-singular terminal sliding mode control of rigid

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-30]