**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
**مقاله پژوهشی**
جلد۱۸، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۳، صفحه ۲۲-۱۱

# کنترل مد لغزشی مبتنی بر رخداد با فیدبک از خروجی برای سیستم‌های خطی در حضور اغتشاش خارجی

مرتضی فیروزآبادی [۱]، احمدرضا ولی [۲*]، عبدالرضا کاشانی‌نیا [۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران morteza.firouzabadi@gmail.com

[۲] دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران ar.vali@mut.ac.ir

[۲] استادیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران akashaninia@mut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۲۳ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۸/۱۵ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۸

**چکیده**: رویکرد رخداد-تحریک یک استراتژی زمان‌بندی برای کاهش تعداد به‌روزرسانی سیگنال کنترلی در زمان به‌منظور افزایش بهره‌وری کلی سیستم از نظر انرژی و پهنای باند شبکه با حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترلی است. در این مقاله، مساله طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان در حضور اغتشاش خارجی وارد شده در غیر کانال ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در طراحی کنترل‌کننده فرض بر آن است که تنها بخشی از متغیرهای حالت تحت عنوان خروجی‌های سیستم قابل اندازه‌گیری هستند. با بکارگیری رویتگر حالت لیونبرگر، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از رویتگر برای برآورده‌سازی کارآیی $H_\infty$ نیز پیشنهاد می‌گردد. کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف طراحی گردیده‌است به‌گونه‌ای‌که منحنی‌های حالت سیستم در یک زمان محدود بر روی ناحیه‌ای در حوالی سطح لغزشی واقع گردند و هیچ‌گاه آن را ترک ننمایند. همچنین، با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، پارامترهای مجهول سطح لغزشی به‌همراه رویتگر حالت تعیین می‌شود به‌نحوی‌که دینامیک مد لغزشی پایدار مجانبی به‌همراه کارآیی $H_\infty$ گردد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد که از پدیده زنو در پیاده‌سازی کنترل‌کننده جلوگیری شود. سپس، با انجام دو مثال شبیه‌سازی، کارآیی کنترل‌کننده پیشنهاد شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که علاوه بر هدف پایدارسازی حلقه بسته، فرامین کنترلی ارسال شده از سمت کنترل‌کننده به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** کنترل مد لغزشی، رخداد-تحریک، نامساوی‌های ماتریسی خطی، پدیده زنو، کنترل $H_\infty$.

# Output Feedback Event Triggered Sliding Mode Control of Linear Systems in the Presence of External Disturbance

**Morteza Firouzabadi, Ahmad Reza Vali, Abdorreza Kashaninia**

**Abstract:** The event-triggered approach is a scheduling strategy designed to reduce the frequency of control signal updates over time, aiming to enhance overall system efficiency concerning energy consumption and network bandwidth, while maintaining the stability and performance of the control system. This paper investigates the problem of designing an event-based controller for linear time invariant (LTI) systems in the presence of mismatched external disturbances. It is assumed that certain state variables can be directly measured as outputs. The design of an event trigger sliding mode observer is investigated by incorporating a Luenberger observer to meet the $H_\infty$ performance requirements. A sliding mode controller is designed using the Lyapunov method to ensure that the system trajectories remain within the predefined sliding surface. Furthermore, the tuning parameters of the sliding surface and the state observer are calculated using linear matrix inequality (LMI) to achieve asymptotic stability of the sliding mode dynamics with a prescribed $H_\infty$ index. Finally, a non-zero lower bound for the minimum inter-event interval is determined to prevent Zeno phenomena.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

Then, two numerical examples are provided to demonstrate the performance of the developed controller. Simulation results indicate that, besides achieving the objective of stabilizing the closed-loop system, the control commands generated by the controller are significantly reduced.

**Keywords:** Sliding mode control, Event triggered control, Linear Matrix Inequality, Zeno phenomena, $H_\infty$ control.

## ۱- مقدمه

در رویکرد رخداد-تحریک (Event trigger) برخلاف استراتژی رایج زمان-تحریک (Time trigger) که در آن انتقال داده‌های اندازه‌گیری شده توسط سنسورها به سمت کنترل‌کننده به‌صورت متناوب صورت می‌گیرد، تنها وقتیکه شرط تحریک رخداد (شرط قضاوت) برقرار گردد، داده‌های اندازه‌گیری شده به‌سمت کنترل‌کننده انتقال می‌یابند [۱-۳]. بنابراین، در این رویکرد تنها سیگنال‌های اندازه‌گیری شده ضروری به سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردند. در مقایسه با رویکرد مرسوم زمان-تحریک، روش کنترل مبتنی بر رخداد طبیعتی نزدیک‌تر به رفتار انسان به‌عنوان یک کنترل‌کننده دارد [۴]. مزیت دیگر این رویکرد آن است که عملکرد ممتد سنسورها و عملگرها و حجم محاسباتی در بخش کنترل‌کننده به‌مقدار چشم‌گیری کاهش می‌یابد [۵]. در کاربرد سیستم‌های کنترل شبکه شده، گام‌های زمانی‌ای که داده اندازه‌گیری شده توسط سنسور از طریق شبکه مخابراتی به سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردد، به‌طور محسوسی کاهش می‌یابد؛ بنابراین، پهنای باند کانال مخابراتی به‌صورت موثرتری مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶]. همچنین، استفاده از رویکرد رخداد-تحریک در شبکه‌های بی‌سیم موجب ذخیره انرژی انتقال و افزایش طول عمر باطری می‌گردد [۷].

مساله طراحی کنترل‌کننده $H_\infty$ مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های کنترل شبکه شده در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی به فرم LMI (Linear matrix inequality)، بهره کنترل‌کننده فیدبک حالت به‌همراه پارامتر شرط قضاوت به‌گونه‌ای طراحی شده‌است که شرط پایداری به‌همراه کارآیی $H_\infty$ برای سیستم حلقه بسته برآورده گردد. با این وجود، فرض دسترسی به تمامی متغیرهای حالت در مسائل کاربردی یک فرض محدودکننده است. مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی استاتیکی بر مبنای رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم‌های LTI (Linear time invariant) در مرجع [۹] مورد بررسی قرار گرفته‌است. پارامتر کنترل‌کننده از حل مساله بهینه‌سازی به فرم LMI تعیین گردیده‌است. با این وجود، دینامیک سیستم مورد بررسی در حالت نامی و بدون حضور اغتشاش در نظر گرفته شده‌است. مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی مبتنی بر رویتگر برای سیستم‌های LTI با رویکرد رخداد-تحریک در مرجع [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته‌است. در مرجع مورد بررسی فرض بر آن است که در سمت سنسور محدودیت محاسباتی وجود ندارد و بنابراین، رویتگر پیشنهاد شده پیش از واحد آشکارساز رخداد قرار داده شده‌است. این موضوع در مسائل کاربردی یک فرض محدودکننده است. اغتشاش‌های خارجی، عدم قطعیت در پارامترهای سیستم و دینامیک‌های مرتبه بالای مدل نشده که در این مقاله از مجموع آن‌ها تحت عنوان نامعینی‌های دینامیکی یاد می‌شود، جز جدایی‌ناپذیر سیستم‌های دینامیکی کاربردی است که می‌بایست در طراحی کنترل‌کننده لحاظ گردد. در غیر این صورت، عملکرد سیستم تحت کنترل می‌تواند کاهش قابل توجهی پیدا کند. رویکرد کنترل مد لغزشی، قابلیت طراحی کنترل‌کننده‌ای مقاوم در برابر نامعینی‌های ذکر شده را داراست. اساس این روش بدین گونه است که کنترل‌کننده مد لغزشی به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان محدود بر روی یک سطح لغزشی مطلوب که عاری از نامعینی‌های دینامیکی است قرار می‌گیرند و هیچ‌گاه نمی‌توانند آنرا ترک نمایند. علی‌رغم تمامی مزایای اشاره شده برای روش طراحی کنترل مد لغزشی، حضور تابع علامت در قانون کنترل مد لغزشی باعث ایجاد ناپیوستگی در کنترل‌کننده طراحی شده می‌گردد که در مراجع تحت عنوان پدیده چترینگ (Chattering phenomena) شناخته می‌شود [۱۱]. با توجه به‌آن‌که سیگنال کنترلی در روش طراحی مبتنی بر رخداد به‌صورت متناوب تولید نمی‌شود، می‌توان ادعا نمود که طراحی کنترل مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک به‌طور ذاتی پدیده چترینگ را کاهش می‌دهد [۱۲]. مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های LTI در حضور اغتشاش وارد شده در کانال ورودی در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته‌است. با بکارگیری رویکرد طراحی مبتنی بر لیاپانوف (Lyapunov)، قانون کنترل مد لغزشی به‌گونه‌ای تعیین شده‌است که مسیر منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان محدود در ناحیه‌ای در حوالی سطح لغزشی محدود گردد. به‌طور مشابه، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی برای سیستم‌های LTI در مرجع [۱۴] نیز مورد بررسی قرار گرفته‌است. با بکارگیری معادله ریکاتی به‌همراه LMI، بهره مجهول سطح لغزشی به‌گونه‌ای تعیین شده‌است که با قرارگیری منحنی‌های حالت بر روی سطح لغزشی، هدف پایدارسازی مقاوم متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته تضمین گردد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد محاسبه شده‌است که از پدیده زنو (Zeno phenomena) در پیاده‌سازی کنترل‌کننده جلوگیری شود. با تعمیم ایده مذکور در مرجع [۱۴]، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم‌های تکین در حضور اغتشاش وارد شده در کانال ورودی در مرجع [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. با این وجود، نتایج بدست آمده در مراجع [۱۳-۱۵] برای وقتی که امکان دسترسی به تمامی متغیرهای حالت وجود ندارد، کارآمد نمی‌باشند. در مرجع [۱۶]، کنترل‌کننده مد لغزشی فیدبک خروجی مبتنی بر رویتگر حالت با رویکرد رخداد-تحریک



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

پیشنهاد شده‌است. پارامترهای مجهول مرتبط با سطح لغزشی و رویتگر حالت از حل مساله بهینه‌سازی به فرم نامساوی‌های ماتریسی تعیین شده‌است به‌گونه‌ای‌که دینامیک سیستم حلقه بسته پایدار به‌همراه کارآیی $H_\infty$ گردد.

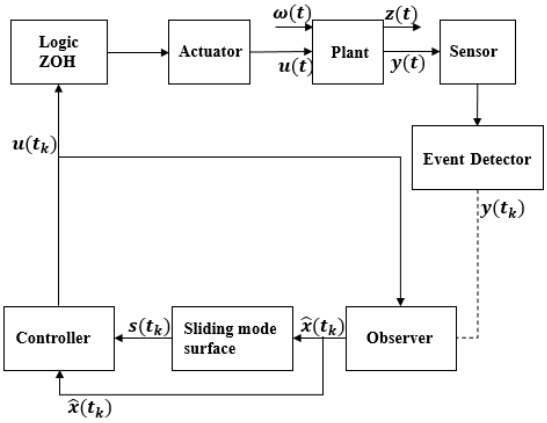
با الهام جستن از مراجع [۱۴] و [۱۶]، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های LTI در حضور اغتشاش خارجی وارد شده در غیر کانال ورودی در مطالعه حاضر مورد بررسی قرار گرفته‌است. برای این منظور، فرض بر آن است که تنها بخشی از متغیرهای حالت تحت عنوان خروجی سیستم توسط سنسورها قابل اندازه‌گیری هستند. با بکارگیری رویتگر حالت به‌همراه کنترل‌کننده پس از بلوک آشکارساز رخداد، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از رویتگر برای برآورده‌سازی کارآیی $H_\infty$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، پارامترهای مجهول سطح لغزشی به‌همراه رویتگر حالت با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی به فرم LMI تعیین می‌گردد به‌گونه‌ای‌که دینامیک مد لغزشی (مسیر حرکت منحنی‌های حالت پس از قرارگیری بر روی سطح لغزشی) پایدار مجانبی به‌همراه کارآیی $H_\infty$ گردد. همچنین، طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد به‌گونه‌ای‌که از پدیده زنو در پیاده‌سازی کنترل‌کننده جلوگیری شود.

در مطالعه حاضر برخلاف مرجع [۱۰]، کنترل‌کننده به‌همراه رویتگر حالت پس از واحد (بلوک) آشکارساز رخداد پیاده‌سازی گردیده‌است. این امر منجر به کاهش قابل توجه فرامین صادر شده از کنترل‌کننده می‌گردد. طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک موجب گردیده‌است که کنترل‌کننده مد لغزشی طراحی شده تنها در زمان‌های وقوع رخداد (و نه در هر زمان نمونه‌برداری) عمل نماید و در نتیجه، پدیده چترینگ ناشی از حضور تابع علامت در قانون کنترلی به‌طور چشم‌گیری کاهش پیدا می‌کند. این امر از نقطه نظر کاربردی حائز اهمیت می‌باشد. نوآوری دیگر مطالعه حاضر این است که تعیین هم‌زمان پارامترهای مجهول سطح لغزشی و رویتگر حالت برای برآورده‌سازی کارآیی $H_\infty$ دینامیک مد لغزشی با استفاده از LMI صورت گرفته‌است. مزیت این روش در آن است که به‌راحتی می‌توان توسط جعبه‌ابزارهای حل LMI در نرم‌افزار متلب برای محاسبه این پارامترهای مجهول استفاده نمود. به‌عنوان نوآوری سوم، در مقایسه با مرجع [۱۶]، در این مطالعه ثابت شده‌است که پدیده زنو در حین پیاده‌سازی سیستم حلقه بسته به‌وجود نمی‌آید.

ساختاربندی مقاله بدین صورت است که پس از ارائه مقدمه‌ای بر مفاهیم رخداد-تحریک در کنترل سیستم‌های LTI و مروری بر کارهای انجام شده در این حوزه و همچنین، ارائه اهداف و دستاوردهای این مطالعه در بخش اول، در بخش دوم فرمول‌بندی مساله به‌همراه اهداف اصلی کنترلی آورده شده‌است. در بخش سوم که مربوط به نتایج اصلی است، نتایج مرتبط با طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با رویکرد رخداد-تحریک مطرح شده‌است. در بخش چهارم، نتایج شبیه‌سازی برای نشان دادن کارآیی رویکرد پیشنهادی در طراحی کنترل‌کننده آورده شده‌است. در انتها، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری صورت گرفته‌است.

## ۲- بیان مساله

مطابق شکل ۱، سیستم کنترل فیدبک خروجی مبتنی بر رخداد-تحریک در این مطالعه به سه واحد اصلی به‌صورت ۱) سیستم تحت کنترل ۲) آشکارساز رخداد و ۳) کنترل‌کننده مبتنی بر رویتگر تقسیم‌بندی شده‌است که در ادامه هر یک از واحدهای مذکور مورد بررسی قرار می‌گیرند.




شکل ۱: شماتیک سیستم کنترل فیدبک خروجی با استفاده از رویتگر مبتنی بر رخداد-تحریک

### ۲-۱ سیستم تحت کنترل

سیستم تحت کنترل به‌صورت یک سیستم خطی پیوسته در زمان در حضور اغتشاش با دینامیک ذکر شده در رابطه (۱) در نظر گرفته شده‌است:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_\omega \omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Dx(t) + D_\omega \omega(t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن $x(t) \in R^n$ بیانگر بردار ورودی حالت، $u(t) \in R^m$ بیانگر بردار ورودی کنترلی، $y(t) \in R^q$ بیانگر بردار خروجی اندازه‌گیری شده، $z(t) \in R^l$ بیانگر بردار خروجی تحت کنترل و $\omega(t) \in R^p$ بیانگر سیگنال اغتشاش متعلق به فضای $\mathcal{L}_2[0,\infty)$ می‌باشند. فرض بر آن است که ماتریس‌های سیستمی در رابطه (۱) همگی معلوم و دارای ابعاد مناسب هستند. فرض شده‌است که ماتریس $B$ دارای رتبه کامل ستونی است، جفت $(A,B)$ کنترل‌پذیر و جفت $(A,C)$ رویت‌پذیر می باشند. همچنین، فرض بر آن است که $\omega(t)$ دارای کران بالا به‌صورت $\|\omega(t)\| \le \varpi$ است.

### ۲-۲ آشکارساز رخداد

آشکارساز رخداد به‌صورت پیوسته شرط بروز رخداد را برای تعیین آن‌که آیا رخدادی پدید آمده‌است یا خیر، پایش می‌کند. به‌محض آن‌که رخدادی پدید آمد، آشکارساز رخداد متغیر خروجی جدید را به سمت کنترل‌کننده مبتنی بر رخداد



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

ارسال می‌نماید. گام‌های زمانی که رخداد در آن‌ها اتفاق می‌افتد به‌صورت $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود که در آن $t_k < t_{k+1}$ است. بدون از دست دادن کلیت مطلب، فرض می‌شود که $t_0 = 0$ است و اولین رخداد در زمان $t_0$ پدید می‌آید. با توجه به خروجی $y(t_k)$ که در گام زمانی $t_k$ در بافر کنترل‌کننده قرار می‌گیرد، گام زمانی $t_{k+1}$ به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$t_{k+1} = \inf\left\{t > t_k \mid \|e_y(t)\| \geq \eta\right\} \quad \forall k \in N \qquad (۲)$$

که در آن $e_y(t) = y(t) - y(t_k)$ است.

۳-۲ کنترل‌کننده مبتنی بر رویتگر

بر مبنای خروجی واقع در بافر کنترل‌کننده در آخرین رخداد، مساله طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رویتگر در این مطالعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف، طراحی کنترل‌کننده برای برآورده‌سازی شروط ذکر شده در ادامه است:

الف) سیستم رابطه (۱) با $\omega(t) = 0$ پایدار مجانبی گردد.

ب) با فرض $\gamma > 0$، شرط کارآیی $H_\infty$ با شاخص $\gamma$ مطابق رابطه (۳) برآورده گردد:

$$\int_0^\infty z(t)^T z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega(t)^T \omega(t)dt \qquad (۳)$$

همانطور که از شکل ۱ پیداست، برای برآورده‌سازی هدف کنترلی ذکر شده در بالا، کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر رویتگر حالت با رویکرد رخداد-تحریک طراحی می‌گردد.

## ۳- طراحی کنترل‌کننده

در این بخش، پنج گام اصلی در طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی رخداد-تحریک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در اولین گام، سطح لغزشی مبتنی بر رویتگر حالت پیشنهاد می‌شود. در گام دوم، با تعیین قانون کنترلی معادل، فرمول‌بندی تعیین هم‌زمان پارامتر مجهول سطح لغزشی و پارامتر مجهول رویتگر حالت به فرم یک سیستم فضای حالت افزونه صورت می‌گیرد. در گام سوم، تعیین پارامترهای مجهول سیستم افزونه اشاره شده در گام دوم با استفاده از LMI ها صورت می‌پذیرد. در گام چهارم، مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با روش لیاپانوف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در گام آخر، یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد تعیین می‌گردد به‌گونه‌ای‌که از پدیده زنو در پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیشنهاد شده در گام چهارم جلوگیری شود.

### ۳-۱ سطح لغزشی مبتنی بر رویتگر حالت

سطح لغزشی پیشنهاد شده در این مطالعه به‌صورت رابطه (۴) است:

$$s(t) = G\hat{x}(t) - \int_0^t G(A+BK)\hat{x}(\theta)d\theta \qquad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \qquad (۴)$$

که در آن $G \in R^{m\times n}$ و $K \in R^{m\times n}$ ماتریس‌های حقیقی مربوط به سطح لغزشی هستند. به‌طور خاص، ماتریس $G$ به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که $GB$ ناتکین گردد. در اینجا، با توجه به فرض رتبه ستونی کامل ماتریس $B$، ماتریس $G$ به‌صورت $G = B^\dagger$ در نظر گرفته شده‌است و لذا $GB$ ماتریس همانی خواهد بود. $\hat{x}(t)$ بیانگر تخمین متغیر حالت $x(t)$ است. برای این منظور، رویتگر لیونبرگر (Leunberger observer) برای تعیین $\hat{x}(t)$ پیشنهاد می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \tilde{L}[y(t_kT) - C\hat{x}(t)], \quad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \qquad (۵)$$

که در آن $\tilde{L} = BL$ است.

### ۳-۲ فرمول‌بندی دینامیک مد لغزشی

از ادبیات کنترل مد لغزشی استنباط می‌شود که قانون کنترل می‌بایست به‌گونه‌ای تعیین گردد که با قرار گرفتن منحنی‌های حالت سیستم رابطه (۱) بر روی سطح لغزشی، دینامیک سیستم همواره در محدوده به اندازه کافی نزدیک به سطح لغزشی باقی بماند و نتواند از این محدوده خارج شود. دینامیک سیستم واقع بر روی سطح لغزشی تحت عنوان دینامیک مد لغزشی شناخته می‌شود. یک رویکرد مرسوم برای تعیین دینامیک مد لغزشی، تعیین قانون کنترلی معادل با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزشی است [۱۷]. برای این منظور، با گرفتن مشتق زمانی از رابطه (۴) و مساوی صفر قرار دادن آن بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\dot{s}(t) = G\dot{\hat{x}}(t) - G(A+BK)\hat{x}(t) = 0 \\ &\rightarrow GBu_{eq} + G\tilde{L}\left(y(t_kT) - C\hat{x}(t)\right) - GBK\hat{x}(t) = 0 \qquad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \end{aligned} \qquad (۶)$$

با توجه به آن‌که $GB$ در رابطه (۶) ماتریس همانی است، قانون کنترل معادل به فرم رابطه (۷) تعیین می‌گردد:

$$u_{eq} = K\hat{x}(t) - L\left(y(t_kT) - C\hat{x}(t)\right) \qquad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \qquad (۷)$$

با جای‌گذاری قانون کنترل معادل رابطه (۷) در دینامیک رویتگر رابطه (۵)، دینامیک مد لغزشی به‌صورت رابطه (۸) تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + B\left(K\hat{x}(t) - L\left(y(t_kT) - C\hat{x}(t)\right)\right) + BL\left(y(t_kT) - C\hat{x}(t)\right) \\ &\rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = (A+BK)\hat{x}(t) \qquad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \end{aligned} \qquad (۸)$$

از طرفی، با تعریف خطای تخمین متغیر حالت به‌صورت $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ و بهره جستن از رابطه (۱)، معادله دینامیکی خطای تخمین به‌صورت رابطه (۹) بیان می‌گردد:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (Ax(t) + Bu_{eq}(t) + B_\omega\omega(t)) - (A\hat{x}(t) + Bu_{eq}(t) + \tilde{L}\left(y(t_kT) - C\hat{x}(t)\right)) \quad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \qquad (۹)$$

با تعریف خطای تحریک به‌صورت $e_y(t) = y(t) - y(t_k)$، رابطه (۹) به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - \tilde{L}[Cx(t) - e_y(t) - C\hat{x}(t)] + B_\omega\omega(t) \\ &\rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = (A - \tilde{L}C)\tilde{x}(t) + \tilde{L}e_y(t) + B_\omega\omega(t) \qquad t \in [t_kT, t_{k+1}T) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با تعریف متغیر حالت افزونه شده به‌صورت $\xi(t) = \left[\hat{x}^T(t) \quad \tilde{x}^T(t)\right]^T$ و بهره جستن از روابط (۱)، (۸) و (۱۰)، دینامیک مد لغزشی در فرم افزونه به‌صورت رابطه (۱۱) بیان می‌گردد:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t)&=\begin{bmatrix}A+BK & 0\\ 0 & A-\tilde{L}C\end{bmatrix}\xi(t)+\begin{bmatrix}0\\ \tilde{L}\end{bmatrix}e_y(t)+\begin{bmatrix}0\\ B_\omega\end{bmatrix}\omega(t) \quad t\in[t_kT,t_{k+1}T)\\ z(t)&=\begin{bmatrix}D & D\end{bmatrix}\xi(t)+D_\omega\omega(t)\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با تعریف:

$$A_\xi \triangleq \begin{bmatrix}A+BK & 0\\ 0 & A-\tilde{L}C\end{bmatrix},\ B_\xi \triangleq \begin{bmatrix}0\\ \tilde{L}\end{bmatrix},\ B_{\omega\xi} \triangleq \begin{bmatrix}0\\ B_\omega\end{bmatrix},$$
$$C_\xi \triangleq \begin{bmatrix}D & D\end{bmatrix},\ D_{\omega\xi} \triangleq D_\omega$$

رابطه (۱۱) به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t)&=A_\xi\xi(t)+B_\xi e_y(t)+B_{\omega\xi}\omega(t) \quad t\in[t_kT,t_{k+1}T)\\ z(t)&=C_\xi\xi(t)+D_{\omega\xi}\omega(t)\end{aligned} \tag{۱۲}$$

هدف طراحی پارامترهای مجهول $K$ و $L$ در رابطه (۱۲) به‌گونه‌ای است که دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۱) پایدار از نوع UUB ( Uniformly ultimately boundedness) به همراه کارآیی $H_\infty$ با شاخص $\gamma$ گردد. پیش از تعیین این پارامترهای مجهول، قانون کنترل مد لغزشی برای تضمین همگرایی منحنی‌های حالت سیستم بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) تعیین می‌گردد. نتایج در بخش ۳-۳ آورده شده‌است.

## ۳-۳ قانون کنترل مد لغزشی

در این بخش، مساله طراحی قانون کنترل مد لغزشی برای تضمین رسیدن منحنی‌های حالت سیستم به‌صورت فراگیر بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، فرض شود که پارامترهای $K$ و $L$ در رابطه (۱۲) معلوم هستند. نتایج در قضیه ۱ آورده شده‌است.

**قضیه ۱:** فرض شود که پارامترهای $K$ و $L$ در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) معلوم باشند. با طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی به‌صورت رابطه (۱۳) تضمین می‌شود که منحنی‌های حالت سیستم به‌صورت مجانبی فراگیر بر روی سطح لغزشی رابطه (۴) قرار خواهند گرفت و هیچ‌گاه نمی‌توانند از آن خارج گردند.

$$\begin{cases}u(t)=(K+LC)\hat{x}(t)-(\rho+\kappa(t))\mathrm{sat}\big(s(t)\big),\\ \mathrm{sat}\big(s(t)\big)=\begin{cases}\dfrac{s(t)}{\delta}, & \|s(t)\|<\delta\\ \dfrac{s(t)}{\|s(t)\|}, & \|s(t)\|\ge\delta\end{cases}\end{cases} \quad t\in[t_kT,t_{k+1}T) \tag{۱۳}$$

که در آن $\kappa(t)=\|L\|\|y(t_kT)\|$.

**اثبات:** با انتخاب تابع لیاپانوف به‌صورت

$$V_s(t)=\frac{1}{2}s^T(t)(GB)^{-1}s(t) \tag{۱۴}$$

و اعمال اپراتور مشتق‌گیری نسبت به زمان بر روی آن بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t)=s^T(t)(GB)^{-1}\dot{s}(t) \tag{۱۵}$$

که در آن $\dot{s}(t)$ طبق رابطه (۶) به‌صورت $\dot{s}(t)=GBu(t)+G\tilde{L}\big(y(t_kT)-C\hat{x}(t)\big)-GBK\hat{x}(t)$ است. با جای‌گذاری $\dot{s}(t)$ در رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t)=s^T(t)\big(u(t)+L\big(y(t_kT)-C\hat{x}(t)\big)-K\hat{x}(t)\big) \tag{۱۶}$$

با جای‌گذاری $u(t)$ از رابطه (۱۳) در رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$\dot{V}_s(t)=s^T(t)\big(-(\rho+\kappa(t))\mathrm{sat}\big(s(t)\big)+Ly(t_kT)\big) \tag{۱۷}$$

با جای گذاری $\kappa(t)$ از رابطه (۱۳)، برای $\|s(t)\|\ge\delta$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{V}_s(t)&=s^T(t)\left(-(\rho+\kappa(t))\frac{s(t)}{\|s(t)\|}+Ly(t_kT)\right)\\ &=-(\rho+\kappa(t))\|s(t)\|+s^T(t)Ly(t_kT)\\ &\le-\rho\|s(t)\|-\kappa(t)\|s(t)\|+\|s(t)\|\|L\|\|y(t_kT)\|\\ &\le-\rho\|s(t)\|\end{aligned} \tag{۱۸}$$

از رابطه (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{V}_s(t)$ منفی است. بنابراین، با گذشت زمان محدود، منحنی‌های حالت سیستم درون ناحیه $\|s(t)\|<\delta$ قرار خواهند گرفت. برای $\|s(t)\|<\delta$ با توجه به کنترل‌کننده پیشنهاد شده در رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{V}_s(t)&\le-(\rho+\kappa(t))\frac{\|s(t)\|^2}{\delta}+\|L\|\|y(t_kT)\|\|s(t)\|\\ &\le-\rho\frac{\|s(t)\|^2}{\delta}+\frac{\kappa(t)}{\delta}\left(\|s(t)\|\delta-\|s(t)\|^2\right)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با انتخاب $\rho$ به اندازه کافی بزرگ می‌توان نتیجه گرفت که $\dot{V}_s(t)<0$ است. بنابراین، منحنی‌های حالت سیستم با گذشت زمان بر روی سطح لغزشی $s(t)=0$ قرار خواهند گرفت. همچنین، پس از قرارگیری این منحنی‌های مسیر بر روی $s(t)=0$، تضمین خواهد شد که آن‌ها هیچ‌گاه نمی‌توانند از این سطح لغزشی خارج شوند و اثبات تمام می‌گردد.

## ۴-۳ تحلیل پایداری به همراه کارآیی $H_\infty$

در این بخش، هدف تعیین پارامترهای مجهول دینامیک مد لغزشی در رابطه (۱۲) است به‌گونه‌ای‌که پایداری به همراه کارآیی $H_\infty$ برای دینامیک مد لغزشی تضمین گردد. برای دستیابی به این مقصود، هدف ارایه یک شرط کافی به فرم LMI برای تعیین پارامترهای $K$ و $L$ در رابطه (۱۲) است. نتایج مربوطه در ادامه آورده شده‌است.

**قضیه ۲:** دینامیک مد لغزشی در رابطه (۱۲) در نظر گرفته شود. این دینامیک مد لغزشی پایدار UUB به همراه کارآیی $H_\infty$ در کاهش $\gamma$ اثر اغتشاش است، اگر ماتریس مثبت معین $P$ یافت شود به‌گونه‌ای‌که:

$$\begin{bmatrix}A_\xi^TP+PA_\xi & PB_{\omega\xi}+C_\xi^TD_{\omega\xi} & PB_\xi & C_\xi^T\\ * & D_{\omega\xi}^TD_{\omega\xi}-\gamma^2I & 0 & 0\\ * & * & -I & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{۲۰}$$

محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود عبارت است از:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

$$\beta(\eta)=\left\{\xi(t)\,\middle|\,\|\xi(t)\|\le\eta(t)\sqrt{\frac{1}{\delta\lambda_{\min}(P)}}\right\} \tag{۲۱}$$

**اثبات:** ابتدا، با دو بار بکارگیری لم مکمل شور (Schur complement lemma) [۱۹] بر روی نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰)، این نامساوی ماتریسی به‌طور معادل به‌صورت (۲۲) بیان می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} A_\xi^T P+PA_\xi+PB_\xi B_\xi^T P+C_\xi^T C_\xi & PB_{\omega\xi}+C_\xi^T D_{\omega\xi} \\ * & D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi}-\gamma^2 I \end{bmatrix}<0 \tag{۲۲}$$

برای شروع فرض شود که اغتشاش خارجی $\omega(t)$ برابر صفر در نظر گرفته شود. با تعریف تابع لیاپانوف به‌صورت $V(\xi(t))=\xi^T(t)P\xi(t)$ و مشتق‌گیری از آن بدست می‌آید:

$$\dot V(t)=\dot\xi^T(t)P\xi(t)+\xi^T(t)P\dot\xi(t) \tag{۲۳}$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot V(t)&=(A_\xi\xi(t)+B_\xi e_y(t))^T P\xi(t)\\&\quad+\xi^T(t)P(A_\xi\xi(t)+B_\xi e_y(t))\\&=\xi^T(t)(A_\xi^T P+PA_\xi)\xi(t)+e_y^T(t)B_\xi^T P\xi(t)\\&\quad+\xi^T(t)PB_\xi e_y(t)\\&=\xi^T(t)(A_\xi^T P+PA_\xi+PB_\xi B_\xi^T P)\xi(t)\\&\quad-\|e_y(t)-B_\xi^T P\xi(t)\|^2+\|e_y(t)\|^2\le-\lambda_{\min}(-Q)\|\xi(t)\|^2+\|e_y(t)\|^2\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن ماتریس $Q$ به‌صورت $Q\triangleq A_\xi^T P+PA_\xi+PB_\xi B_\xi^T P$ تعریف شده‌است. از درایه $(1,1)$ نامساوی ماتریسی رابطه (۲۲) نتیجه می‌شود که $Q$ منفی معین است. از طرفی، از شرط رخداد-تحریک رابطه (۲) نتیجه می‌شود که برای بازه $t\in[t_kT,t_{k+1}T)$ رابطه $\|e(t)\|<\eta$ برقرار است. بنابراین، برای بازه $t\in[t_kT,t_{k+1}T)$ از رابطه (۲۴) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}\dot V(t)&\le-\lambda_{\min}(-Q)\|\xi(t)\|^2+\|e_y(t)\|^2\le-\frac{\lambda_{\min}(-Q)}{\lambda_{\max}(P)}\xi^T(t)P\xi(t)+\eta^2\\&=-\delta V(t)+\eta^2\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن $\delta$ به‌صورت $\delta\triangleq\dfrac{\lambda_{\min}(-Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ تعریف شده‌است. محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود عبارت است از:

$$\beta(\eta)=\left\{\xi(t)\,\middle|\,\|\xi(t)\|\le\eta(t)\sqrt{\frac{1}{\delta\lambda_{\min}(P)}}\right\} \tag{۲۶}$$

در ادامه، کارآیی $H_\infty$ دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) برای $\omega(t)\neq0$ و شرایط اولیه صفر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، تابع هزینه به‌صورت رابطه زیر در نظر گرفته شود:

$$J_{T_j}=\int_0^{T_j}\left(z^T(s)z(s)-\gamma^2\omega^T(s)\omega(s)\right)ds \tag{۲۷}$$

رابطه (۲۷) به فرم معادل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned}J_{T_j}&=\int_0^{T_j}\left(z^T(s)z(s)-\gamma^2\omega^T(s)\omega(s)+\dot V(\xi(s))\right)ds-\int_0^{T_j}\dot V(\xi(s))ds\\&=\int_0^{T_j}\left(z^T(s)z(s)-\gamma^2\omega^T(s)\omega(s)+\dot V(\xi(s))\right)ds-V(\xi(T_j))\end{aligned} \tag{۲۸}$$

با توجه به آن‌که $V(\xi(T_j))$ تابعی مثبت است، بنابراین می‌توان از رابطه (۲۸) نتیجه گرفت که:

$$J_{T_j}\le\int_0^{T_j}\left(z^T(s)z(s)-\gamma^2\omega^T(s)\omega(s)+\dot V(\xi(s))\right)ds \tag{۲۹}$$

شرط کافی برای منفی بودن $J_{T_j}$ آن است که عبارت داخل انتگرال در رابطه (۲۹) منفی گردد. به عبارتی:

$$J'(t)=z^T(t)z(t)-\gamma^2\omega^T(t)\omega(t)+\dot V(\xi(t))<0 \tag{۳۰}$$

با جای‌گذاری $z(t)$ از رابطه (۱۲) و $\dot V(t)$ از رابطه (۲۳) در رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}J'(t)=\;&\xi^T(A_\xi{}^T P+PA_\xi+PB_\xi B_\xi{}^T P+C_\zeta^T C_\zeta)\xi\\&+Sym\left(\xi^T C_\xi^T D_{\omega\xi}\omega(t)\right)\\&+Sym\left(\xi^T PB_{\omega\xi}\omega(t)\right)\\&+\omega^T(t)D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi}\omega(t)-\gamma^2\omega^T(t)\omega(t)-\|e_y(t)-\\&B_\xi{}^T P\xi\|^2+\|e_y(t)\|^2\end{aligned} \tag{۳۱}$$

با تعریف $\bar\xi(t)=\begin{bmatrix}\xi^T(t) & \omega^T(t)\end{bmatrix}^T$ و:

$$Q\triangleq\begin{bmatrix} A_\xi{}^T P+PA_\xi+PB_\xi B_\xi{}^T P+C_\xi^T C_\xi & PB_{\omega\xi}+C_\xi^T D_{\omega\xi} \\ * & D_{\omega\xi}^T D_{\omega\xi}-\gamma^2 I \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

از رابطه (۳۱) نتیجه می‌شود که:

$$J'(t)\le-\lambda_{\min}(-Q)\|\bar\xi(t)\|^2+\|e_y(t)\|^2 \tag{۳۳}$$

اگر $Q<0$ باشد، یا به‌طور معادل نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰) برقرار باشد، مشابه روند ذکر شده در روابط (۲۴)-(۲۶)، دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پایدار UUB به همراه کارآیی $H_\infty$ در کاهش $\gamma$ اثر اغتشاش است. محدوده‌ای که سیستم به آن همگرا می‌شود با رابطه (۲۱) بیان می‌گردد و اثبات تمام می‌شود.

در ادامه، بر مبنای نامساوی ماتریسی استخراج شده در رابطه (۲۰)، یک نامساوی ماتریسی به فرم LMI برای تعیین پارامترهای $K$ و $L$ در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پیشنهاد می‌گردد به‌گونه‌ای‌که با قرار گرفتن منحنی‌های حالت بر روی دینامیک مد لغزشی، پایداری UUB به همراه کارآیی $H_\infty$ در کاهش $\gamma$ اثر اغتشاش سیستم حلقه بسته تضمین گردد. نتایج در قضیه ۳ آورده شده‌است. برای اثبات قضیه ۳ نیاز به تعریف ۱ و لم ۱ است که در ادامه آورده شده‌است.

**تعریف ۱ [۱۹]:** فرض شود که ماتریس $B\in R^{n\times m}$ دارای رتبه کامل ستونی باشد. همواره دو ماتریس اورتاگونال (Orthagonal matrix) $U\in R^{n\times n}$ و $V\in R^{m\times m}$ یافت می‌شوند به‌گونه‌ای‌که:

$$\tilde B=UBV=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}BV=\begin{bmatrix}\Sigma\\0\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

که در آن $U_1 \in R^{m\times n}$، $U_2 \in R^{(n-m)\times n}$ و $\Sigma = diag\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m\}$ ($\sigma_i$ ها مقادیر استثنایی ماتریس $B_2$ هستند) می‌باشند.

**لم ۱ [۲۰]:** فرض شود که $B \in R^{n\times m}$ دارای رتبه کامل ستونی باشد و ماتریس $\mathcal{P}_1$ دارای ساختار زیر باشد:

$$\mathcal{P}_1 = U^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} U = U_1^T \mathcal{P}_{11} U_1 + U_2^T \mathcal{P}_{22} U_2 \qquad (۳۵)$$

که در آن $\mathcal{P}_{11} \in R^{m\times m}$ و $\mathcal{P}_{22} \in R^{(n-m)\times(n-m)}$ دو ماتریس مثبت معین دلخواه هستند. ماتریس‌های $U_1$ و $U_2$ نیز در رابطه (۳۴) تعریف شده‌است. آن‌گاه، همواره ماتریس ناتکین $\mathcal{P} \in R^{m\times m}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $B\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 B$ برقرار است.

**قضیه ۳:** فرض شود که اسکالر مثبت $\gamma$ معلوم باشد. دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) پایدار UUB به همراه کارآیی $H_\infty$ در کاهش $\gamma$ اثر اغتشاش است، اگر ماتریس‌های مثبت معین $P_{11} \in R^{m\times m}$، $P_{22} \in R^{(n-m)\times(n-m)}$ و $\bar{P}_1 \in R^{n\times n}$ و ماتریس‌های حقیقی $M \in R^{m\times q}$ و $N \in R^{m\times n}$ یافت شوند به‌گونه‌ای که LMI رابطه (۳۶) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A\bar{P}_1 + N^T B^T + BN & 0 & \bar{P}_1 D^T D_{\omega} & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - BMC - C^T M^T B^T & P_2 B_{\omega} + D^T D_{\omega} & BM & D^T \\ * & * & D_{\omega}^T D_{\omega} - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۶)$$

که در آن $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$ است و $U_1$ و $U_2$ در رابطه (۳۴) تعریف شده‌است. علاوه بر آن، در صورتی‌که LMI رابطه (۳۶) دارای جواب شدنی باشد، پارامترهای مجهول در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت رابطه (۳۷) تعیین می‌گردند.

$$K = N\bar{P}^{-1}, \quad L = V\Sigma^{-1} P_{11}^{-1} \Sigma V^T M \qquad (۳۷)$$

**اثبات:** فرض شود که نامساوی ماتریسی رابطه (۲۰) برقرار باشد. ماتریس‌های $A_\xi$، $B_\xi$، $B_{\omega\xi}$، $C_\xi$ و $D_{\omega\xi}$ از رابطه (۱۱) در رابطه (۲۰) جای‌گذاری می‌گردند و $P = diag\{P_1, P_2\}$ قرار داده می‌شود. در ادامه، با ضرب طرفین نامساوی حاصل شده از سمت چپ و سمت راست در ماتریس $\mathrm{diag}\{P_1^{-1}, I, I, I, I\}$ و تعریف $\bar{P}_1 \triangleq P_1^{-1}$ بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A\bar{P}_1 + \bar{P}_1 K^T B^T + BK\bar{P}_1 & 0 & \bar{P}_1 D^T D_{\omega} & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - P_2 BLC - C^T L^T B^T P_2 & P_2 B_{\omega} + D^T D_{\omega} & P_2 BL & D^T \\ * & * & D_{\omega}^T D_{\omega} - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۸)$$

با فرض آن‌که $P_{11} > 0$ و $P_{22} > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$ برقرار باشد، آن‌گاه می‌توان از لم ۱ نتیجه گرفت که همواره ماتریس ناتکین $\bar{P}_2 \in R^{m\times m}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $B\bar{P}_2 = P_2 B$ برقرار است. در ادامه، با بهره جستن از تعریف ۱، ماتریس $\bar{P}_2$ از رابطه $B\bar{P}_2 = P_2 B$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 = P_2 U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \rightarrow U P_2 U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 \qquad (۳۹)$$

با جای‌گذاری $P_2 = U_1^T P_{11} U_1 + U_2^T P_{22} U_2$ در رابطه (۳۹) بدست می‌آید:

$$U\left(U^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} U\right) U^T \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T \bar{P}_2 \qquad (۴۰)$$

با انجام عملیات ساده ماتریسی بر روی رابطه (۴۰) بدست می‌آید:

$$P_{11} \Sigma V^T = \Sigma V^T \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_2 = V \Sigma^{-1} P_{11} \Sigma V^T \qquad (۴۱)$$

تغییر متغیر $N = K\bar{P}_1$ در نامساوی ماتریسی رابطه (۳۸) اعمال می‌گردد. همچنین، با استناد به لم ۱، ماتریس $P_2 B$ در نامساوی ماتریسی رابطه (۳۸) با ماتریس $B\bar{P}_2$ جای‌گذاری می‌گردد که در آن $\bar{P}_2$ از رابطه (۴۱) محاسبه شده‌است. نتیجه می‌شود که:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 A^T + A\bar{P}_1 + \bar{P}_1 N^T + BN & 0 & \bar{P}_1 D^T D_{\omega} & 0 & \bar{P}_1 D^T \\ * & A^T P_2 + P_2 A - B\bar{P}_2 LC - C^T L^T \bar{P}_2 B^T & P_2 B_{\omega} + D^T D_{\omega} & B\bar{P}_2 L & D^T \\ * & * & D_{\omega}^T D_{\omega} - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۴۲)$$

با تغییر متغیر $M = \bar{P}_2 L$، LMI رابطه (۳۶) بدست می‌آید و اثبات تمام می‌شود. همچنین، بر مبنای تغییر متغیرهای ذکر شده، در صورتی که LMI رابطه (۳۶) دارای جواب شدنی باشد، پارامترهای $K$ و $L$ در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت رابطه (۳۷) تعیین می‌گردند.

### ۵-۳ حداقل فاصله زمانی بین رخدادها

برای از بین بردن پدیده زنو، نیاز است که یک حد پایین غیر صفر برای حداقل فاصله زمانی بین رخدادها تعیین گردد. نتایج مربوطه در قضیه ۱ آورده شده‌است. از لم ۲ آورده شده در ادامه در اثبات قضیه ۴ استفاده می‌شود.

**لم ۲ [۲۱]:** فرض شود که ماتریس $Q$ هرویتز (Hurwitz) باشد. آن‌گاه همواره یک اسکالر مثبت $c$ وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$\left\| e^{Qt} \right\| \le c e^{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{2} t}$$

که در آن $\lambda_{\max}(Q) = \max_i \left[ \mathrm{Re}\left(\lambda_i(Q)\right) \right]$ است.

**قضیه ۴:** بر مبنای گام‌های زمانی تعریف شده در رابطه (۲) که رخداد در آن‌ها اتفاق می‌افتد، حداقل فاصله زمانی بین دو رخداد دارای یک کران پایین مثبت است.

**اثبات:** فرض شود که $t_k T$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ بیانگر گام زمانی وقوع رخداد باشد. آن‌گاه، در هریک از زمان‌های واقع در بازه زمانی $[t_k T, t_{k+1} T)$، $\hat{x}(t_k)$ مقداری ثابت است. با استفاده از تعریف خطای تحریک به‌صورت $e_y(t) = y(t) - y(t_k T)$، برای $[t_k T, t_{k+1} T)$ بدست می‌آید:

$$\dot{e}_y(t) = \dot{y}(t) = C\dot{e}_x(t) \qquad (۴۳)$$

که در آن $e_x(t) = x(t) - x(t_k T)$ است. $\dot{e}_x(t)$ برای $[t_k T, t_{k+1} T)$ برابر خواهد بود با:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &= \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\omega\omega(t) = \\ &= Ax(t) - B\big((K+LC)\hat{x}(t) - (\rho+\kappa(t))\operatorname{sgn}(s(t))\big) + B_\omega\omega(t) \\ &= Ae_x(t) - B\big((K+LC)\hat{x}(t) - (\rho+\kappa(t))\operatorname{sgn}(s(t))\big) + Ax(t_kT) + B_\omega\omega(t)\end{aligned} \tag{۴۴}$$

پاسخ معادله دیفرانسیل بالا برای $t\in[t_kT, t_{k+1}T)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}e_x(t) &= e^{A(t-t_kT)}e_x(t_kT) \\ &+\int_{t_kT}^{t} e^{A(\eta-s)}\big(B\big((K+LC)\hat{x}(\eta)-(\rho+\kappa(\eta))\operatorname{sgn}(s(\eta))\big)+Ax(t_kT)+B_\omega\omega(\eta)\big)d\eta\end{aligned} \tag{۴۵}$$

که در آن $e_x(t_kT)$ برابر صفر است. همچنین، از رابطه (۸) استنباط می‌شود که:

$$\hat{x}(t) = e^{(A+BK)t}\hat{x}(0) \tag{۴۶}$$

با توجه به آن‌که بهره $K$ به‌گونه‌ای تعیین گردیده‌است که ماتریس $A+BK$ هرویتز باشد، برای شرایط اولیه $\hat{x}(0)$، حاصل عبارت $\|\hat{x}(0)\|$ کراندار است. بنابراین، از رابطه (۴۵) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}\|e_x(t)\| &\le \left\|\int_{t_kT}^{t} e^{A(\eta-s)}\left(\|B\|\|K+LC\|\|e^{(A+BK)\eta}\|\|\hat{x}(0)\|+\|B\|\|\rho+\kappa(\eta)\|\sqrt{m}+\|A\|\|x(t_k)\|+\|B_\omega\|\varpi\right)d\eta\right\| \\ &\le \int_{t_kT}^{t} e^{\|A\|(\eta-s)}\left(c\|B\|\|K+LC\|\|\hat{x}(0)\|e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2}\eta}+\|B\|\|\rho+\kappa(\eta)\|\sqrt{m}+\|A\|\|x(t_k)\|+\|B_\omega\|\varpi\right)d\eta \\ &\le \left(c\|B\|\|K+LC\|\|\hat{x}(0)\|e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2}t_kT}+\rho\|B\|\sqrt{m}+\|B_\omega\|\varpi\right)\int_{t_kT}^{t} e^{\|A\|(\eta-s)}\left((\|A\|+\|L\|\|C\|)\|x(t_k)\|\right)d\eta\end{aligned} \tag{۴۷}$$

با تعریف

$$\Phi(t_kT) = (\|A\|+\|L\|\|C\|)\|x(t_k)\| + c\|B\|\|K+LC\|\|\hat{x}(0)\|e^{\frac{\lambda_{\max}(A+BK)}{2}t_kT}+\rho\|B\|\sqrt{m}+\|B_\omega\|\varpi$$

و با فرض آن‌که $\|A\|\neq 0$ باشد، از رابطه (۴۷) بدست می‌آید:

$$\|e_x(t)\| \le \frac{\Phi(t_kT)}{\|A\|}\left(e^{\|A\|(t-t_kT)}-1\right) \tag{۴۸}$$

با توجه به رابطه $e_y(t)=y(t)-y(t_kT)$ نتیجه می‌شود که $e_y(t)=Ce_x(t)$. بنابراین، می‌توان از رابطه (۴۸) نتیجه گرفت که:

$$\|e_y(t)\| \le \frac{\|C\|\Phi(t_kT)}{\|A\|}\left(e^{\|A\|(t-t_kT)}-1\right) \tag{۴۹}$$

با تعریف $\bar{T}=t-t_kT$ و از رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\|C\|\Phi(t_kT)}{\|A\|}(e^{\|A\|\bar{T}}-1)\ge\eta \rightarrow \bar{T}\ge\frac{1}{\|A\|}\ln\left(1+\frac{\eta\|A\|}{\|C\|\Phi(t_k)}\right) \tag{۵۰}$$

و اثبات تمام می‌شود.

## ٤- نتایج شبیه‌سازی

به‌منظور نشان دادن کارآیی روش طراحی پیشنهاد شده در بخش ۳، در این بخش دو مثال شبیه‌سازی عددی آورده شده‌است. به‌طور خاص، مثال شماره ۲ مرتبط با دینامیک سیستم تعلیق فعال خودرو با دو درجه آزادی است که در مرجع [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته‌است.

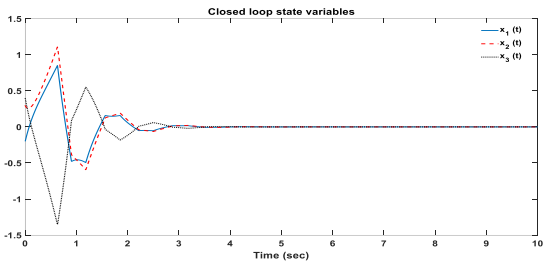
**مثال شماره ۱)** یک سیستم از مرتبه سه با ماتریس‌های سیستمی زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix}-5.1 & 2.2 & -1.1\\ 3.1 & -5.0 & -2.3\\ 2.1 & -4.1 & -1.2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\\-0.1\end{bmatrix}, B_w=\begin{bmatrix}0.2\\-0.1\\0.3\end{bmatrix},$$
$$C=[0.1\quad 0\quad 0.2], D=[0.1\quad 0\quad 0.2], D_w=0.2.$$

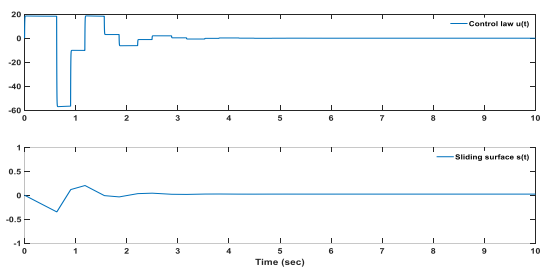
با حل LMI رابطه (۳۶) از قضیه ۳ با سطح کارآیی $\gamma=3$ پارامترهای مجهول $K$ و $L$ در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت زیر بدست آمده‌است:

$$K=[-916.31\quad -933.53\quad 874.62],\ L=[321.34]$$

برای پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیشنهاد شده در رابطه (۱۳)، پارامترهای آن به‌صورت $\rho=0.6$ و $\kappa=0.7$ در نظر گرفته شده‌است. در شبیه‌سازی، اغتشاش خارجی به‌صورت $w(t)=0.1\sin(0.2\pi t)/(t+1)^2$ در نظر گرفته شده‌است. متغیرهای حالت سیستم از شرایط اولیه $x_0=[-0.2\quad 0.3\quad 0.4]^T$ و متغیرهای حالت رویتگر از شرایط اولیه $\hat{x}_0=[0\quad 0\quad 0]^T$ رها می‌گردند. در شکل ۲، نمایی از پاسخ متغیرهای حالت حلقه بسته مشاهده می‌شود. همانطور که از شکل ۲ پیداست، پس از گذشت زمان محدود ۴ ثانیه، پاسخ حالت‌های حلقه بسته به مقدار صفر میل کرده‌است و بنابراین، هدف پایدارسازی حلقه بسته در حضور اغتشاش خارجی برآورده می‌گردد. در شکل ۳، نمایی از قانون کنترل مد لغزشی به همراه تابع سطح لغزشی $s(t)$ مشاهده می‌شود. همانطور که از این شکل پیداست، قانون کنترلی عاری از پدیده چترینگ است. این مساله از نقطه نظر عملی حائز اهمیت است. همچنین، سطح لغزشی $s(t)$ با گذشت زمان محدود به مقدار صفر میل نموده‌است.




شکل ۲: نمایی از رفتار متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته رها شده از شرایط اولیه $x_0$



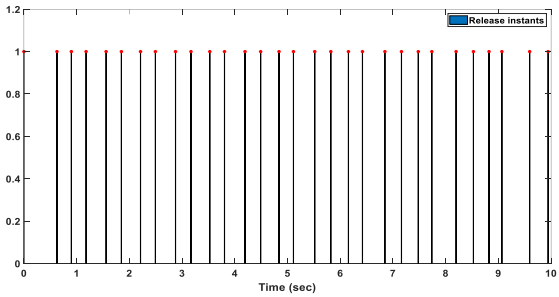

شکل ۳: (بالا) قانون کنترل مد لغزشی، (پایین) سطح لغزشی

در شکل ۴، گام‌های زمانی وقوع رخداد نمایش داده شده‌است. با توجه به آن‌که در شبیه‌سازی، دینامیک سیستم با گام زمانی گسسته‌سازی گردیده‌است، پیاده‌سازی روش کنترل مد لغزشی مرسوم در طول بازه



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

زمانی ۱۰ ثانیه نیازمند ارسال ۳۰۰۰۰ فرمان کنترلی از سمت کنترل‌کننده است. با این وجود، همانطور که از شکل ۴ پیداست، در روش طراحی با رویکرد رخداد-تحریک، در بازه زمانی شبیه‌سازی ۱۰ ثانیه، تنها ۳۰ فرمان از سمت کنترل‌کننده صادر گردیده‌است. این موضوع حاکی از کاهش چشم‌گیر فرامین کنترلی و در نتیجه کاهش عملکرد ممتد عملگرها و همچنین، کاهش حجم محاسباتی در بخش کنترل‌کننده است.

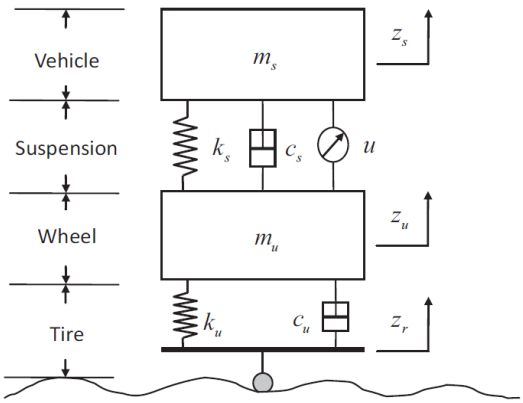



شکل ۴: گام‌های زمانی وقوع رخداد

**مثال شماره ۲)** مساله طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی استاتیکی دارای خاصیت $H_\infty$ با استفاده از رویکرد رخداد-تحریک برای سیستم تعلیق مغناطیسی فعال خودرو با دو درجه آزادی در مرجع [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در شکل ۵، نمایی از این سیستم آورده شده‌است. دینامیک سیستم با رابطه زیر توصیف می‌گردد:

$$\begin{cases} m_s\ddot{z}_s = -c_s(\dot{z}_s-\dot{z}_u)-k_s(z_s-z_u)+u(t) \\ m_u\ddot{z}_u = c_s(\dot{z}_s-\dot{z}_u)+k_s(z_s-z_u)-c_u(\dot{z}_u-\dot{z}_r)-k_u(z_u-z_r)-u(t) \end{cases} \quad (۵۱)$$

که در آن $z_s(t)$ و $z_u(t)$ به ترتیب بیانگر جابه‌جایی جرم فنری و جرم غیرفنری، $m_s$ و $m_u$ به ترتیب جرم خودرو و جرم چرخ، $k_s$ و $k_u$ به ترتیب ضریب سختی تعلیق و ضریب سختی چرخ، $c_s$ و $c_u$ به ترتیب بیانگر ضریب میرایی تعلیق و ضریب میرایی چرخ، $u(t)$ قانون کنترل فعال و $z_r$ بیانگر جابه‌جایی عمودی چرخ بر اثر دست‌اندازهای جاده‌ای می‌باشند.




شکل ۵: نمایی از سیستم تعلیق مغناطیسی فعال خودرو با دو درجه آزادی [۲۳]

با تعریف متغیرهای حالت به‌صورت $x_1 = z_s - z_u$، $x_2 = \dot{z}_s$، $x_3 = z_u - z_r$ و $x_4 = \dot{z}_u$، دینامیک سیستم در فرم فضای حالت به‌صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)+B_\omega\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (۵۲)$$

که در آن $\omega(t)$ بیانگر سرعت رخداد ناشی از ناهمواری‌های جاده است. ماتریس‌های سیستم عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{k_u}{m_u} & -\frac{c_s+c_u}{m_u} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix},\ B_\omega=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{c_u}{m_u} \end{bmatrix}, \quad (۵۳)$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \omega(t)=\dot{z}_r.$$

از آنجا که شتاب عمودی کوچک خودرو بیانگر راحتی در رانندگی است، مهم‌ترین هدف سیستم تعلیق کمینه نمودن این شتاب عمودی است. بنابراین، یکی از مشخصه‌های کارآیی در طراحی‌کننده برای سیستم تعلیق عبارت است از:

$$z_1(t)=\ddot{z}_s \quad (۵۴)$$

از طرفی، انحراف سیستم تعلیق می‌بایست در یک بازه امن محدود گردد تا از آسیب‌های ساختاری جلوگیری شود. همچنین، برای تضمین پایداری مطلوب در حرکت در طول جاده نیاز است که بار دینامیکی چرخ کم‌تر از بار استاتیکی آن باشد. فرم ریاضی دو هدف ذکر شده به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} |z_s-z_u| \le z_{\max} \\ |k_u(z_u-z_r)| \le (m_s+m_u)g \end{cases} \quad (۵۵)$$

که در آن $z_{\max}$ بیانگر بیشینه انحراف سیستم تعلیق است. مشخصه‌های طراحی ذکر شده در رابطه (۵۴) به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$z_2(t)=\begin{bmatrix} \frac{z_s-z_u}{z_{\max}} & \frac{k_u(z_u-z_r)}{(m_s+m_u)g} \end{bmatrix}^T \quad (۵۶)$$

با زیر هم‌نویسی روابط (۵۴) و (۵۶)، خروجی‌های تحت کنترل با رابطه زیر بیان می‌گردند:

$$z(t)=Dx(t)+D_\omega\omega(t) \quad (۵۷)$$

که در آن:

$$D=\begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{1}{z_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{(m_s+m_u)g} & 0 \end{bmatrix},\ D_\omega=\begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (۵۸)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

به‌منظور شبیه‌سازی، مقادیر پارامترهای مدل بیان شده با رابطه (۵۲) و (۵۷) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$m_s = 973Kg,\ k_s = 42720\,{}^{N}\!/_{m},\ c_s = 1095\,{}^{Ns}\!/_{m},$$
$$m_u = 114Kg, k_u = 101115\,{}^{N}\!/_{m}, c_u = 14.6\,{}^{Ns}\!/_{m}, z_{\max} = 0.1m.$$

اغتشاش $\omega(t)$ مرتبط با ناهمواری‌های جاده‌ای یک سیگنال سینوسی به‌صورت رابطه (۵۹) در نظر گرفته شده‌است:

(۵۹)

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{2h\pi v}{l}\sin\left(\dfrac{2\pi v}{l}t\right), & if\ \ 0 \le t \le 2l/v \\ 0, & if\ \ t > 2l/v \end{cases}$$

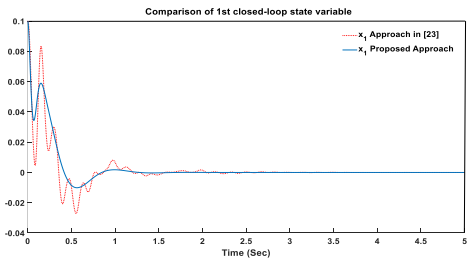
که در آن $h = 0.06m$، $v = 25km/h$ و $l = 5m$ فرض شده‌است. رابطه (۵۹) در واقع یک سیگنال سینوسی با دامنه $0.52m/s$ و فرکانس $1.39Hz$ است. LMI رابطه (۳۶) از قضیه ۳ با سطح کارآیی $\gamma = 0.6$ حل می‌گردد. پارامترهای مجهول $K$ و $L$ در دینامیک مد لغزشی رابطه (۱۲) به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$K = [0.4272 \quad 0.0109 \quad -1.0055 \quad -0.0069]\times 10^5$$
$$L = [0.965 \quad 0.185 \quad -0.025]\times 10^5$$

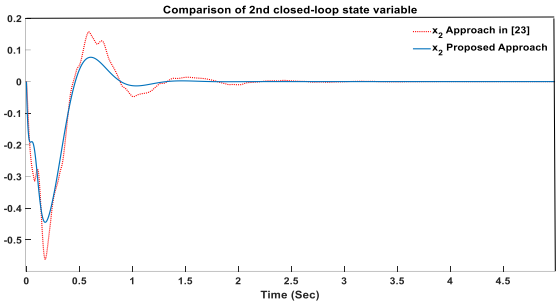
همچنین، با حل LMI بدست آمده در مرجع [۲۳]، پارامتر بهره فیدبک استاتیکی به‌صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$K = [0.97 \quad 0.415 \quad -3.75]\times 10^4$$

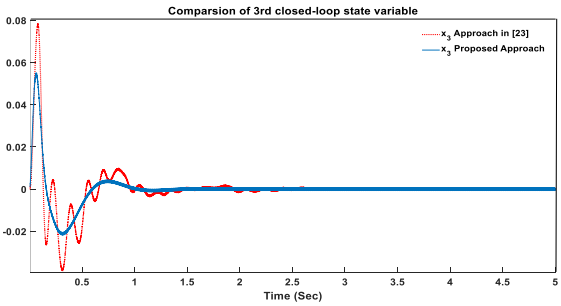
در شبیه‌سازی‌ها، دینامیک سیستم با گام زمانی $T = 0.001$ گسسته‌سازی گردیده‌است. پارامترهای کنترل‌کننده رابطه (۱۳) به‌صورت $\rho = 0.3$ و $\kappa = 0.1$ در نظر گرفته شده‌است. متغیرهای حالت سیستم از شرایط اولیه $x_0 = [0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ و متغیرهای حالت رویتگر از شرایط اولیه $\hat{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ رها می‌گردند. در شکل‌های ۶، ۷، ۸ و ۹ مقایسه پاسخ متغیرهای حالت حلقه بسته مشاهده می‌شود. با توجه به شکل‌های مذکور پیداست که در حضور اغتشاش مرتبط با ناهمواری‌های جاده‌ای، متغیرهای حالت حلقه بسته در روش پیشنهادی ما در مقایسه با مرجع [۲۳] سریع‌تر و ملایم‌تر به صفر میل می‌کنند. این امر مزیت عمده روش طراحی کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده توسط ما می‌باشد.



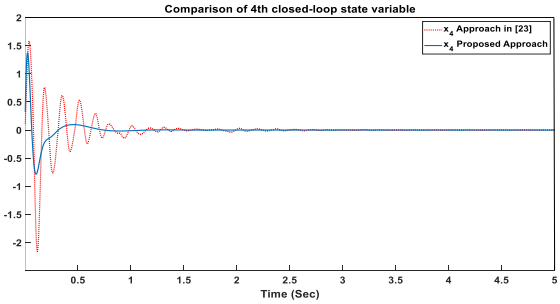

شکل ۶: مقایسه پاسخ متغیر حالت اول در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]




شکل ۷: مقایسه پاسخ متغیر حالت دوم در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]




شکل ۸: مقایسه پاسخ متغیر حالت سوم در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

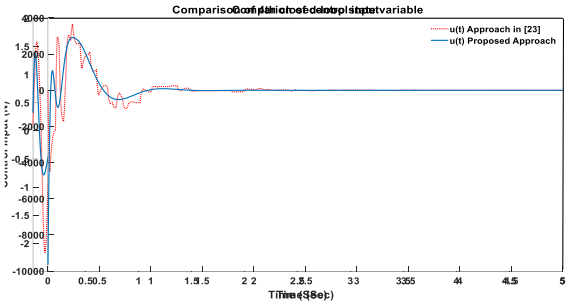



شکل ۹: مقایسه پاسخ متغیر حالت چهارم در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

در شکل ۱۰، نمایی از مقایسه قانون کنترل پیشنهادی در رابطه (۱۳) و قانون کنترل بدست آمده در مرجع [۲۳] مشاهده می‌شود. با توجه به آن‌که در شبیه‌سازی، دینامیک سیستم با گام زمانی $T = 0.001$ گسسته‌سازی گردیده‌است، پیاده‌سازی هر یک از روش‌های کنترلی در طول بازه زمانی ۵ ثانیه نیازمند ارسال ۵۰۰۰ فرمان کنترلی از سمت کنترل‌کننده است. با این وجود، در روش طراحی کنترل مد لغزشی پیشنهاد شده توسط ما در رابطه (۱۳)، تعداد ۱۵۵ فرمان از سمت کنترل‌کننده ارسال می‌گردد. همچنین، در روش پیشنهاد شده در مرجع [۲۳]، تعداد این فرامین کنترلی برابر ۳۸۹ است.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]




شکل ۱۰: مقایسه قانون کنترل در روش پیشنهادی ما و مرجع [۲۳]

## ۵- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، طراحی کنترل مد لغزشی مبتنی بر رخداد برای سیستم‌های LTI مورد بررسی قرار گرفت. از جمله موارد حائز اهمیت در نظر گرفته شده در این مطالعه: ۱) اغتشاش خارجی وارد شده در غیر از کانال ورودی ۲) فیدبک از خروجی و ۳) قرار دادن بلوک رویتگر حالت لیونبرگر پس از شرط وقوع رخداد می‌باشد. همچنین، در روند طراحی کنترل‌کننده مواردی چون ۱) تعیین پارامترهای مجهول سطح لغزشی به همراه رویتگر حالت با استفاده از LMI ها ۲) طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی با استفاده از روش لیاپانوف و ۳) تعیین یک کران پایین برای زمان بین دو رخداد برای جلوگیری از پدیده زنو در پیاده‌سازی کنترل‌کننده دارای اهمیت کاربردی می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که هدف پایدارسازی حلقه بسته در رویکرد رخداد-تحریک با تعداد فرامین کنترلی بسیار کم‌تری در مقایسه با روش‌های مرسوم طراحی زمان-تحریک صورت گرفته‌است. به‌عنوان یک پیشنهاد برای کارهای آتی، پیاده‌سازی کنترل‌کننده طراحی شده در حضور شبکه مخابراتی است که از نقطه نظر کاربردی حائز اهمیت خواهد بود. یکی از موضوعات تحقیقاتی ارزشمند در حوزه رخداد-تحریک، طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رویتگر اغتشاش است [۲۲]. بنابراین، تعمیم نتایج بدست آمده به مساله طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر رویتگر اغتشاش در حضور رخداد-تحریک پیشنهادی دیگر برای کارهای آتی می‌باشد.

## مراجع

[1] C. Peng and F. Li, “A survey on recent advances in event-triggered communication and control,” Information Sciences, vol. 457, pp. 113-125, 2018.

[2] J. Wu, M. Lu, F. Deng, and J. Chen, “Robust Output Regulation of Linear Uncertain Systems by Dynamic Event-Triggered Output Feedback Control,” IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 53, pp. 7333-7341, 2023.

[۳] رهنما معرفیان‌پور و مهدیان دهکردی، "طراحی قانون کنترل تحریک-رویداد برای اجماع سیستم های چندعاملی فازی با تاخیر زمانی در ورودی،" *مجله کنترل*، جلد ۱۵، صفحه ۲۲-۱۱، ۱۴۰۰.

[4] W. P. Heemels, K. H. Johansson, and P. Tabuada, “An introduction to event-triggered and self-triggered control,” IEEE conference on decision and control (CDC), pp. 3270-3285, 2012.

[5] A. Sahoo, H. Xu, and S. Jagannathan, “Adaptive neural network-based event-triggered control of single-input single-output nonlinear discrete-time systems,” IEEE transactions on neural networks and learning systems, vol. 27, pp. 151-164, 2015.

[6] X. M. Zhang, Q. L. Han, X. Ge, D. Ding, L. Ding, D. Yue, and C. Peng, “Networked control systems: A survey of trends and techniques,” IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, vol. 7, pp. 1-17, 2019.

[7] Y. Iino, T. Hatanaka, and M. Fujita, “Event-predictive control for energy saving of wireless networked control system,” American Control Conference (ACC), pp. 2236-2242, 2009.

[8] D. Yue, E. Tian, and Q. L. Han, “A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems,” IEEE Transactions on automatic control, vol. 58, pp. 475-481, 2012.

[9] X. M. Zhang and Q. L. Han, “Event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems,” IET Control Theory & Applications, vol. 8, pp. 226-234, 2014.

[10] J. Zhang and G. Feng, “Event-driven observer-based output feedback control for linear systems,” Automatica, vol. 50, pp. 1852-1859, 2014.

[11] S. J. Gambhire, D. R. Kishore, P. S. Londhe, and S. N. Pawar, “Review of sliding mode based control techniques for control system applications,” International Journal of dynamics and control, vol. 9, pp. 363-378, 2021.

[۱۲] فرزاد زارعی، محمد حسین شفیعی، اکبر رهیده، "کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش تحریک-رویداد در سیستم های خطی دارای اغتشاش و نایقینی،" *مجله کنترل*، جلد ۱۱، صفحه ۲۴-۱۳، ۱۳۹۶.

[13] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, “Robust sliding mode control: An event-triggering approach,” IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 64, pp. 146-150, 2016.

[14] X. Fan and Z. Wang, “Event-triggered integral sliding mode control for linear systems with disturbance,” Systems & control letters, vol. 138, pp.104669, 2020.

[15] X. Fan and Z. Wang, “Event-triggered sliding mode control for singular systems with disturbance,” Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 40, pp. 101011, 2021.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]

[16] X. Liu, X. Su, P. Shi, C. Shen, and Y. Peng, "Event-triggered sliding mode control of nonlinear dynamic systems," Automatica, vol. 112, pp. 108738, 2020.

[17] Y. Pan, C. Yang, L. Pan, and H. Yu, "Integral sliding mode control: performance, modification, and improvement," IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 14, pp. 3087-3096, 2017.

[18] E. Fridman and L. Shaikhet, "Stabilization by using artificial delays: An LMI approach," Automatica, vol. 81, pp. 429-437, 2017.

[19] Z. Wang, F. Yang, D. W. Ho, and X. Liu, "Robust $H_\infty$ control for networked systems with random packet losses," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 37, pp. 916-924, 2007.

[20] D. W. Ho and G. Lu, "Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback: the unified LMI approach," International Journal of Control, vol. 76, pp. 105-115, 2003.

[21] J. Zhang, X. Liu, Y. Xia, Z. Zuo, and Y. Wang, "Disturbance observer-based integral sliding-mode control for systems with mismatched disturbances," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 63, pp. 7040-7048, 2016.

[22] L.G. Moreira, S. Tarbouriech, A. Seuret, and J.G. da Silva Jr, "Observer-based event-triggered control in the presence of cone-bounded nonlinear inputs," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 33, pp.17-32, 2019.

[23] G. Wang, M. Chadli, H. Chen, and Z. Zhou, "Event-triggered control for active vehicle suspension systems with network-induced delays," Journal of the Franklin Institute, vol. 356, pp.147-172, 2019.

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-01-29 ]