

# طراحی یک کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتتمرکز مقاوم از مرتبه‌ی ثابت برای سامانه‌های مقیاس وسیع با عدم قطعیت غیرخطی

مهندی سجادی<sup>۱</sup>، وحید جوهري مجذ<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل.

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل، پیام‌نگار؛ majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۲/۸/۱۳۸۹، تاریخ پذیرش مقاله ۲۰/۹/۱۳۸۹)

**چکیده:** هدف این نوشتار ارائه یک روش کنترلی مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای پایدارسازی مقاوم غیرمتتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های متشکل از زیرسامانه‌هایی با پویایی خطی و دارای عدم قطعیت و با اتصالات غیر خطی با قیود مربعی می‌باشد. این روش از ساختار بازخورد خروجی پویای خطی عمومی بهمراه عدم قطعیت در پارامترها بهره می‌گیرد. در این طراحی درجه قوام بیشینه سامانه حلقه بسته با حل مستقلی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود. در نهایت، یک مثال عددی قابل مقایسه با کارهای اخیر، برای نشان دادن قابلیت اجرا و اعمال روش و همچنین نشان دادن اثربخشی و بهبود صورت پذیرفته، آورده می‌شود.

**کلمات کلیدی:** بازخورد خروجی پویا، سامانه‌های مقیاس وسیع، کنترلگر غیر شکننده، کنترلگر مرتبه ثابت، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

## A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty

Mahdi Sojoodi, Vahid Johari Majd

**Abstract:** The objective of this paper is to propose a fixed-order non-fragile dynamic output control scheme within the LMI framework for robust decentralized stabilization of systems composed of linear dynamic subsystems coupled by static nonlinear interconnections satisfying quadratic constraints. The procedure utilizes the general linear dynamic feedback structure in presence of parameter uncertainty. In this design, the maximum robustness degree of the closed loop system is obtained through solving the optimization problem under stabilizing conditions given in the form of LMIs, and then the fixed order controller parameters are calculated based on the obtained results. A numerical example illustrates the applicability and effectiveness of the method.

**Keywords:** Output dynamic feedback, large scale systems, non-fragile controller, fixed-order controller, linear matrix inequality (LMI).

شرط لازم و کافی در طراحی بازخورد خروجی با استفاده از روش‌های

بهینه سازی محدب به مسئله‌ای غیرمحدب منجر می‌شود [۳-۲]،

پژوهشگران بدنبال ارائه روش‌هایی ابتکاری برای امکان ساده سازی این

مسائل با روش‌های مختلف برای حل توسط ابزار نابرابری‌های ماتریسی

خطی هستند. مشکل غیر محدب بودن مسائل، با بکارگیری قیود

۱ - مقدمه

با ظهور ابزار قدرتمند بهینه سازی محدب با استفاده از نابرابری‌های

ماتریسی خطی [۱]، حل مسائل طراحی کنترلگر در قالب نابرابری‌های

ماتریسی خطی بسیار جذابیت پیدا کرد. با توجه به اینکه بدست آوردن

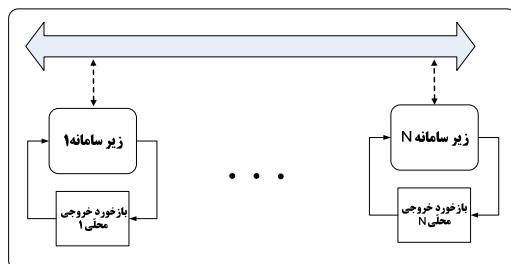
با توجه به بررسی‌های انجام شده و مطالعات صورت گرفته، در زمینه کنترل مرتبه ثابت ساختار مدل [۸] و همچنین در نظر گرفتن عدم-قطعیت در پارامترهای کنترلگر به منظور طراحی کنترلگر غیرشکننده تحقیق و پژوهشی مشاهده نگردید. اهمیت بسیار زیاد طراحی کنترلگر مرتبه ثابت و غیرشکننده انگیزه انجام این تحقیق بود.

هدف این مقاله ارائه یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای طراحی بازخورد خروجی پویای غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه برای هر زیرسامانه برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمن کر سامانه‌های بهم پیوسته است. برای این منظور بازخورد خروجی خطی پویای غیرمتمن کر غیرشکننده با ساختاری بسیار عمومی و با مرتبه دلخواه ثابت به ساختار مدل پایه ارائه شده در [۸] اعمال گردیده است. در این طراحی درجه قوام پیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم به بیان مسئله و مقدمات لازم برای طراحی پرداخته شده است. نتایج اصلی کار تحت دو قصیه در بخش سوم بیان شده است و بخش چهارم به ارائه یک مثال عددی برای تشریح قابلیت اعمال روش طراحی اختصاص یافته است. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

## ۲- تعریف مساله

سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد محدود  $N$  زیرسامانه مطابق شکل ۱ مفروض است که در آن زیرسامانه‌ها دارای ارتباطات داخلی (که در شکل زیر با خط‌چین‌های دوطرفه نمایش داده شده است) با یکدیگر بوده و برای پایداری کل سامانه از بازخوردهای محلی حول هر زیرسامانه بهره گرفته شده است.



شکل ۱: سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد  $N$  زیرسامانه با بازخورد خروجی پویای غیرمتمن کر

معادلات هریک از زیرسامانه‌های سامانه غیرخطی به هم پیوسته به صورت زیر می‌باشد:

ساختاری اطلاعات غیرمتمن کر در طراحی کنترلگر بسیار پیشتر نیز می-گردد [۵-۴]. در سالهای اخیر پیشرفت‌های زیادی در راستای ارائه روش‌های کنترل پیشرفته در جهت طراحی غیرمتمن کر برای سامانه‌های بهم پیوسته (Interconnected) حاصل شده است و ایده‌ها و نتایج جدید بسیاری در این حوزه ارائه شده است. در این میان طراحی کنترلگرهای  $H_2$  و  $H_\infty$  با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی برای سامانه‌های با ابعاد وسیع مورد توجه تعداد زیادی از پژوهشگران قرار گرفته است [۶]. پس از ارائه نتایج اولیه در [۷]، مقالات بسیاری [۸-۱۰] برای نشان دادن بهبود حاصل شده و تبدیل مسئله غیرمحاسب به محاسب با استفاده از روش‌های ابتکاری متفاوت برای سامانه‌های مختلف ارائه شده است. ساختار مقیاس وسیع در کاربردهای مهم و پیچیده مانند سامانه‌های قدرت، ساختارهای وسیع و شبکه‌های رایانه‌ای قابل مشاهده است [۱۱-۱۳]. برخی از کارهای مهم صورت گرفته در این حوزه، به طراحی کنترلگر غیرمتمن کر بطور صریح یا ضمنی، برای پایدارسازی کل سامانه در حضور بازخوردهای محلی زیرسامانه‌ها و تغییرات پیکربندی در اتصالات زیرسامانه‌ها پرداخته‌اند [۱۴-۱۶].

در [۸]، سامانه‌های خطی به صورت توانمند با ساختار بهم پیوسته غیرخطی مدنظر قرار گرفته است. از آنجا که در اغلب کاربردهای عملی می‌توان زیرسامانه‌ها را حول نقاط کار با یکسری عدم‌قطعیت حول این نقاط، خطی در نظر گرفت، این مدل از اهمیت بالائی برخوردار است. همچنین با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل عملی، اتصالات بین زیرسامانه‌ها دارای ساختارهای ناشناخته و غیرخطی هستند و تنها کرانهایی از آنها معلوم است، جذابیت این مدل دوچندان می-شود. همچنین این ساختار امکان پیشینه‌سازی کران روی اتصالات و عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌نماید. با توجه به مزایای ساختار مدل ارائه شده در [۸]، بسیاری از مقالات، آن را به عنوان مدل پایه مورد استفاده قرار داده‌اند.

پایدارسازی ساختار مدل ارائه شده، در [۸] بوسیله بازخورد حالت صورت گرفته است. این ساختار مدل در [۱۷] توسط یک بازخورد حالت تخمین زده شده غیرمتمن کر بر پایه‌ی رویتگر طراحی شده برای هر زیرسامانه کنترل گردیده است. همچنین ساختار مدل در [۹-۱۸] توسط بازخورد خروجی با رویتگر لون برگر کنترل شده است. روش ارائه شده در [۹] با حذف یک سری از شروط ارائه شده در [۶] به ارائه یک روش جدید برای دسته وسیع تر از سامانه‌ها پرداخته است. همچنین در [۲۰] ساختار مدل ارائه شده در [۸] با بازخورد خروجی پویای هم مرتبه با سامانه (مرتبه کامل) کنترل شده است. در [۲۱] کنترل مقاوم غیرمتمن کر با رویکرد بازخورد خروجی مرتبه کامل برای دسته‌ای از سامانه‌های با اتصالات داخلی غیرخطی نموآخطي ارائه شده و نتایج حاصل از آن بر روی یک فرآیند تانک چهارتانی تحت آزمون قرار گرفته است.

هستند. همانطور که در [۹] اثبات گردیده است، برای برقراری رابطه (۴)، کافیست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda_{\max}(\bar{H}^T \bar{H}) \min_i \bar{\gamma}_i \leq \max_i \gamma_i \min_i \lambda_{\min}(H_i^T H_i) \quad (5)$$

در این مقاله، بدنبال طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای شکننده و غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه داده شده‌ی  $n_c$  برای کنترلگر کلی برای سامانه داده شده در (۳) هستیم تا بهصورت غیرمتقارن و تنها با استفاده از اطلاعات خروجی زیرسامانه‌ها، کل سامانه را کنترل نماییم. در این طراحی مرتبه کنترلگر زیرسیستم  $i$ -ام

$$\sum_{i=1}^N n_{ci} = n_c \quad \text{مقدار دلخواه } n_c \text{ می‌باشد به‌طوری که}$$

ساختمار مدل کنترلگر بازخورد خروجی پویای معمولی و نیز غیرشکننده را به ترتیب بهصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y, \quad x_c(0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = (A_c + \Delta A_c)x_c + (B_c + \Delta B_c)y \\ u = (C_c + \Delta C_c)x_c + (D_c + \Delta D_c)y, \quad x_c(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

که در آن  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  حالات کنترلگر کلی است،  $x_{ci} \in \mathbb{R}^{n_{ci}}$ ،  $x_c = [x_{c1} \dots x_{cN}]^T$  می‌باشد. همچنین  $B_c = \text{diag}(B_{c1} \dots B_{cN})$ ،  $A_c = \text{diag}(A_{c1} \dots A_{cN})$ ،  $D_c = \text{diag}(D_{c1} \dots D_{cN})$  و  $C_c = \text{diag}(C_{c1} \dots C_{cN})$  بوده که پارامترهای کنترلگر هریک از زیرسامانه‌ها می‌باشند و:

$$\|\Delta A_c\| \leq \delta_{A_c}, \quad \|\Delta B_c\| \leq \delta_{B_c}, \quad \|\Delta C_c\| \leq \delta_{C_c} \quad \text{و} \quad (8)$$

$$\|\Delta D_c\| \leq \delta_{D_c}$$

عدم قطعیت‌هایی با کران نرم معلوم هستند.

با در نظر گرفتن کنترلگر (۶) و سامانه (۳) بهصورت توأم، سامانه حلقه بسته را می‌توان بهصورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \begin{bmatrix} h(t, x_p) \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (9)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{p1}^T & x_{c1}^T & \dots & x_{pN}^T & x_{cN}^T \end{bmatrix}^T \quad \text{که در آن} \quad \bar{C} = \text{diag}(\bar{C}_1 \dots \bar{C}_N) \quad \text{و} \quad \bar{A} = \text{diag}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_N)$$

$$\bar{C}_i = [C_i : 0] \quad \text{و} \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_i & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_i & A_{ci} \end{bmatrix} \quad \text{می‌باشد.}$$

**تعریف ۱: دسته‌ی  $H_\alpha$ :** برای هر  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T$  و  $\Xi$  معلوم،  $H_\alpha$  دسته‌ای از توابع تکه‌ای-پیوسته است که بهصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_\alpha = \left\{ h(t, x_p) \mid h \in \mathbb{R}^n, h^T h \leq x_p^T \Xi^T \alpha^T \alpha \Xi x_p \right\} \quad (10)$$

in the domains of continuity

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pi} &= A_{ii} x_{pi} + B_i u_i + h_i(t, x_p) \\ h_i(t, x_p) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_{pj} + \bar{h}_i(t, x_p) \\ y_i &= C_i x_{pi}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ،  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  و  $x_{pi} \in \mathbb{R}^{n_i}$  به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی زیر سامانه  $i$ ام جایی که  $\sum_{i=1}^N n_i = n$  بودار حالت کل سامانه بهم پیوسته،  $x_p = [x_{p1}^T \ x_{p2}^T \ \dots \ x_{pN}^T]^T$  و  $\bar{h}_i(t, x_p)$  ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب، و  $A_{ii}$  حاوی تمام ترم‌های غیرخطی و عدم قطعیت موجود در هر زیرسامانه فرض گردیده است و فرض شده است که  $h_i(t, x_p) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  هر دو آرگومان  $t, x_p$  است و در حوزه پیوستگی خود نابرابری مربعی زیر را برآورده می‌سازد:

$$h_i(t, x_p)^T h_i(t, x_p) \leq \bar{\alpha}_i^2 x_p^T \bar{H}_i^T \bar{H}_i x_p, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

در رابطه بالا  $\bar{H}_i$  ماتریس‌های با ابعاد  $v_i \times n$  و معلوم هستند و  $\bar{\alpha}_i > 0$  کران‌هایی هستند که می‌توانند بسته به مسئله معلوم فرض شوند و یا اینکه هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه آنها ضمن حفظ پایداری سامانه حلقه بسته کل باشد [۸ و ۹]:

می‌توان سامانه کلی بهم پیوسته را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = Ax_p + Bu + h(t, x_p) \\ y = Cx_p \end{cases} \quad (3)$$

که در آن  $m_i = m$  و  $u = [u_1^T \ \dots \ u_N^T]^T$  و  $\sum_{i=1}^N p_i = p$  و  $y = [y_1^T \ \dots \ y_N^T]^T$  به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی سامانه بهم پیوسته هستند.  $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$ ،  $A = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{NN})$  و  $C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_N)$  بوده و  $h(t, x_p) = [h_1(t, x_p)^T \ \dots \ h_N(t, x_p)^T]^T$  تابع ارتباطات داخلی (غیرخطی) کل سامانه بهم پیوسته است.

$$\bar{\Gamma} = \text{diag}(\bar{\gamma}_1 I_{v_1}, \dots, \bar{\gamma}_N I_{v_N}) \quad \text{و} \quad \bar{H}^T = [\bar{H}_1^T \ \dots \ \bar{H}_N^T]$$

حال را در نظر بگیرید که  $\bar{H}_i$  ها برای  $i = 1, \dots, N$  در (۲) تعریف شده‌اند.

$$\text{با تعریف } \bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i^{-2} I_{v_i} \quad (\gamma_i \times v_i), \quad \text{همواره می‌توان}$$

ماتریس‌های  $H$  و  $\Gamma$  را چنان یافته که [۹]:

$$h(t, x_p)^T h(t, x_p) \leq x_p^T \bar{H}^T \bar{\Gamma}^{-1} \bar{H} x_p \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \quad (4)$$

که در آن  $H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_N)$ ، ماتریس‌های  $H_i$  به ابعاد

$$\gamma_i > 0 \quad \text{با} \quad v_i \times n_i \quad \text{و}$$

و ماتریس‌های  $Y_i$ ,  $Q_i$ ,  $W_i$  و  $U_i$  به ازای  $i=1,\dots,N$  و اسکالار مثبت  $\tau_1$  وجود داشته باشند به طوری که مسئله کمینه‌سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \\ \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} \text{diag}(L_1, \dots, L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 \\ * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi} A_i + Y_i C_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_i C_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

,  $i=1,\dots,N$ ,

$$\hat{\Gamma} = \text{diag}(\hat{\gamma}_1 I_{V_1}, \dots, \hat{\gamma}_N I_{V_N})$$

آنگاه سامانه حلقه بسته (۹) به صورت مقاوم با درجه  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$  پایدار است که در آن  $\hat{\gamma}_i = \tau_1^{-1} \hat{\Gamma}$  و یا  $\Gamma = \tau_1^{-1} \hat{\Gamma}$ . در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  و  $D_c$  از روابط زیر بدست می‌آیند که در آن عملگر  $\hat{\Gamma}$  بیانگر شبه معکوس می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_{ci} &= P_{ci}^{-1} U_i \\ B_{ci} &= P_{ci}^{-1} W_i \\ C_{ci} &= B_i^\top P_{pi}^{-1} Q_i \\ D_{ci} &= B_i^\top P_{pi}^{-1} Y_i \end{aligned} \quad (16)$$

**افبات:** با در نظر گرفتنتابع لیپانوف به صورت زیر:

$$V = x^T P x \quad (17)$$

با مشتق گیری از (۱۷) و با فرض  $z_1 = \begin{bmatrix} h(t, x_p) \\ 0 \end{bmatrix}$  جای گذاری معادلات سامانه (۹) در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (\bar{A}x + z_1)^T P x + x^T P (\bar{A}x + z_1) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

برای منفی بودن (۱۸) باید نابرابری زیر برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19)$$

با توجه به (۴)، روشن است که:

$$z_1^T z_1 \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \quad (20)$$

همچنین می‌توان رابطه (۲۰) را به صورت معادل زیر بیان کرد:

تعريف فوق ایجاب می‌کند که  $h(t, 0) = 0$  باشد و این شرط الزام می‌کند که  $x = 0$  بعنوان نقطه تعادل سامانه (۹) باشد.

**تعريف ۲: پایداری مقاوم از درجه  $\alpha$ :** سامانه (۹) با عدم قطعیت غیرخطی کراندار ارائه شده در (۴)، پایدار مقاوم از درجه برداری  $\alpha$  گفته می‌شود، اگر نقطه تعادل  $x = 0$  برای  $h(t, x_p) \in H_\alpha$  پایدار مجانبی سراسری باشد.

تعريف‌های ۱ و ۲ توسعه یافه تعريف‌های ارائه شده در [۸] به صورت برداری می‌باشند.

مطابق [۸ و ۲۰]، سامانه حلقه بسته (۹) را به صورت مقاوم با درجه  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$  پایدار گویند اگر این سامانه برای تمام  $h(t, x_p)$  هایی که در رابطه (۴) صدق - می‌کند به صورت مجانبی سراسری پایدار باشد. با بیشینه کردن  $\alpha$  هم‌مان با پایدارسازی بخش خطی (۳)، خطای مجاز برای اتصالات داخلی غیرخطی و عدم قطعیت‌های مجاز نیز بیشینه می‌شود.

**لم ۱ [۴]: روند (S-procedure) S** ماتریس‌های متقارن  $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  مفروض هستند. شرایط زیر روی  $T_0, \dots, T_p$  در نظر گرفته می‌شوند:

$$\zeta^T T_i \zeta \geq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad \forall \zeta \neq 0 \quad \text{بطوریکه،}$$

حال در صورتیکه  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  هایی وجود داشته باشند، که رابطه:

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (12)$$

برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۱) برقرار خواهد بود [۴].

### ۳- نتایج اصلی کار

در این بخش دو قضیه برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی مرتبه ثابت معمولی و غیرشکننده برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) ارائه شده است. با توجه به اینکه، هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه کران ترم غیرخطی  $h(t, x_p)$  بیان گردیده است. می‌توان با یافتن مقدار کمینه ماتریس قطری  $\Gamma$  که سامانه حلقه بسته (۹) به ازای آن پایدار است، نسبت به بیشینه کردن درجه قوام  $\alpha$  اقدام کرد.

**قضیه ۱:** سامانه حلقه باز (۳) و کنترلگری به صورت (۶) مفروض است.

اگر ماتریس‌های مثبت معین  $P = P^T$  به صورت:

$$P = \text{diag}(P_1, \dots, P_N), \quad P_i = \text{diag}(P_{pi}, P_{ci}), \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} L_i &= \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi} A_i + Y_i C_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_i C_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۲۶) به صورت مقاوم با درجه  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^T = [1/\sqrt{\gamma_1} \dots 1/\sqrt{\gamma_N}]^T$  پایدار است. که در آن  $\gamma_i = \tau_3^{-1} \hat{\gamma}_i$  و یا  $\Gamma = \tau_3^{-1} \hat{\Gamma}$ . در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$  و  $D_c$  از رابطه (۱۶) بدست می‌آیند.

**اثبات:** مشابه نحوی اثبات قضیه ۱ و با فرض:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Delta C_c x_c, \quad z_2 = \Delta D_c C x_p, \quad z_3 = h(t, x_p), \\ z_4 &= \Delta A_c x_c, \quad z_5 = \Delta B_c C x_p, \end{aligned} \quad (28)$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})^T P_x + x^T P(\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

برای منفی بودن (۲۹) تابعی زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{aligned} - &\begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_1^T z_1 &\leq \delta_{C_c}^2 x_c^T x_c, \quad z_2^T z_2 \leq \|C\| \delta_{D_c}^2 x_p^T x_p, \\ z_3^T z_3 &\leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p, \quad z_4^T z_4 \leq \delta_{A_c}^2 x_c^T x_c, \\ z_5^T z_5 &\leq \|C\| \delta_{B_c}^2 x_p^T x_p, \end{aligned} \quad (31)$$

حال مشابه روند اثبات در قضیه ۱، با استفاده از لم ۱ در روابط (۳۰) و (۳۱)، همچنین با بکارگیری مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

با فرض (۱۳) و با به کارگیری روابط (۱۹) و (۲۱) در لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1, \dots, L_N) + \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \Gamma^{-1} H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & P \\ * & -\tau_1 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

حال با بکارگیری مکمل شور در رابطه (۲۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1, \dots, L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 \\ * & * & -\tau_1 \Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{pi} A_i + P_{pi} B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

با تغییر متغیرهای به صورت زیر:

$$\begin{aligned} Y_i &= P_{pi} B_i D_{ci} \\ Q_i &= P_{pi} B_i C_{ci} \\ W_i &= P_{ci} B_{ci} \\ U_i &= P_{ci} A_{ci} \end{aligned} \quad (25)$$

رابطه نابرابری ماتریسی خطی ارائه شده در (۱۴) حاصل می‌گردد. پایان اثبات. □.

در قضیه بعدی به طراحی کنترلگر مرتبه ثابت غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) می‌پردازیم:

**قضیه ۲:** سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگر غیرشکننده به صورت (۷) با کران (۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین به صورت (۱۳) و ماتریس‌های  $Y_i$ ,  $Q_i$ ,  $W_i$  و  $U_i$  به ازای  $i = 1, \dots, N$  و اسکالرها مثبت  $\tau_j$  برای  $j = 1, \dots, 5$  وجود داشته باشند به طوری که مسئله کمینه‌سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \\ &\text{subject to} \\ &\begin{bmatrix} diag(L_1, \dots, L_N) & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

در روابط بالا  $e(t, x_p) : \mathfrak{R}^5 \rightarrow [0,1]$  پارامترهای نرمالیزه شده اتصالات را نشان می دهند. می توان فرم کلی سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + h(t, x_p) \quad (35)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) \quad \text{که در آن:}$$

$$h(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p \quad (36)$$

می خواهیم یک قانون کنترل غیرمتغیر کر بدست آوریم که سامانه را برای همه مقادیر  $e(t, x_p) \in [0,1]$  در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر پایدار کند.

بازخورد حالت خطی غیرمتغیر کر مقاوم ایستا بر اساس روش ارائه شده در [۸]، درجه قوام  $\alpha^* = \alpha_1 = \alpha_2 = 4.4950$  و ماتریس ضرایب  $[K = -725.9085 \quad -40.4346]$  را بدست می دهد، و قطب های حلقه بسته حاصل  $\{-20 \pm 17.8093i\}$  می باشد. اما به سادگی می توان دید که به علت وجود مد ناپایدار در سامانه حلقه باز خودگذاری آن در خروجی ظاهر نمی گردد، این سامانه با هیچ بازخورد خطی خروجی ایستا قابل پایدار سازی نمی باشد. اما این کار با بازخورد خطی خروجی پویا امکان پذیر می باشد، پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی پویا مرتبه کامل که از قضیه ۱ [۲۰] با فرض  $H = I$  بدست آمده است به صورت  $-Ac=10^4 \times [-0.4670; -1.4182; -1.0131]$  و  $Cc=[243.5166 \quad 3.1931 \quad 1.5118]$ ،  $Bc=10^4 \times [-3.3926; 1.5118]$  و  $Dc=333.7029 \quad 767.0817$  می باشد، که این کنترلگر قطب های سامانه حلقه بسته را در مقادیر زیر قرار می دهد:

$$\left\{ 3.6543 \times 10^4; -0.0390 \times 10^4; -0.7455 \pm 0.5605i \right\}$$

از یک سیگنال نویز گوسی با میانگین  $0/5$  و واریانس  $0/5$  که در شکل ۲ نشان داده شده است برای شبیه سازی سیگنال  $e(t, x_p)$  استفاده شده است. شکل ۳ و شکل ۴ به ترتیب حالت ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر مرتبه کامل قضیه ۱ [۲۰] را نشان می دهند. چنانچه در شکل ۳ نیز مشاهده می شود بزرگ بودن پارامترهای کنترلگر، بازه تغییرات وسیعی را برای حالت های سامانه حلقه بسته موجب شده است.

$$\begin{bmatrix} diag(L_1, \dots, L_N) & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_3 \Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \quad (32)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{pi} A_i + P_{pi} B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (33)$$

با اعمال تغییر متغیرهای رابطه (۲۵) در (۳۳) و تغییر متغیر به صورت

$$\hat{\Gamma} = \tau_3 \Gamma, \quad \text{به رابطه (۲۶) خواهیم رسید. پایان اثبات.} \square$$

**نکته ۱:** در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می توان به طراحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض  $C = I$  از طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طراحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر می ناید.

**توجه ۱:** در این مقاله برای شناسایی نابرایری های ماتریسی خطی ارائه شده در قضیه ۱ و ۲ به محیط نرم افزار، از جعبه ابزار یالمیپ (Yalmip) و برای حل آن ها از جعبه ابزار LMILab در محیط نرم افزار متلب (Matlab) استفاده گردیده است.

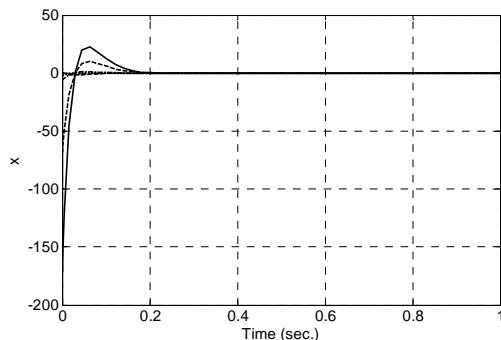
#### ۴- مثال عددی

به منظور شبیه سازی و به منظور قابلیت مقایسه، حرکت دو پاندول معکوس که توسط فنر به یکدیگر متصل شده اند در نظر گرفته شده است که می تواند در پرسش های ناگهانی با اندازه و جهت غیر قابل پیش بینی، میله های پاندول را بالا و پایین بلغزاند. یک مدل خطی و نرمالیزه شده از هر یک از زیر سامانه ها را به صورت زیر در نظر می گیریم [۸]:

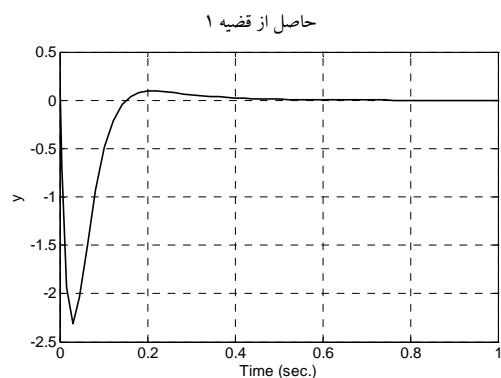
$$\dot{x}_{p1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p1}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_1(t, x_p), \\ y_1(t) = [1 \quad 0] x_{p1}(t), \\ h_1(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p, \\ \dot{x}_{p2}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_{p2}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + h_2(t, x_p), \\ y_2(t) = [1 \quad 0] x_{p2}(t), \\ h_2(t, x_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t, x_p) x_p. \quad (34)$$

$D_c = -11.0025$	$0 \pm 3.1626$	0
$A_c = -334.0098$ $B_c = -115.8581$ $C_c = -761909.8291$ $D_c = -428932.9973$	$(-98.5963 \pm 626.2838i)$ $-136.8172$	1
$A_c = [-2728.1704 \quad -4701.1121 \quad -1602.6708 \quad -2815.1797]$ $B_c = [-2777.8063 \quad -1631.8701]^T$ $C_c = [-737860.0973 \quad -1341458.1817]$ $D_c = -1019733.2438$	$-5375.1735$ $(-69.9510 \pm 502.8512i)$ $-28.2745$	2
$K = D_c = [-10.5076 \quad -8.0126]$	-1.4483 -6.5642	بازخورد حالات ( $C=I$ )

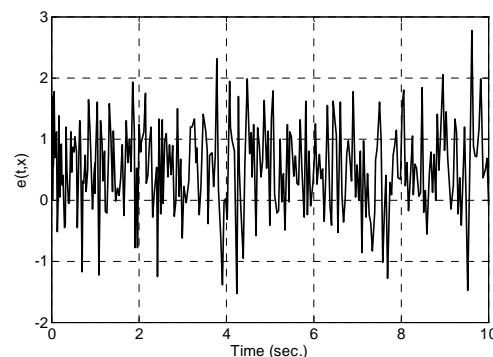
شکل ۵ و شکل ۶ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کل را برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه، و شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته را با کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه نشان می‌دهد.



شکل ۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه

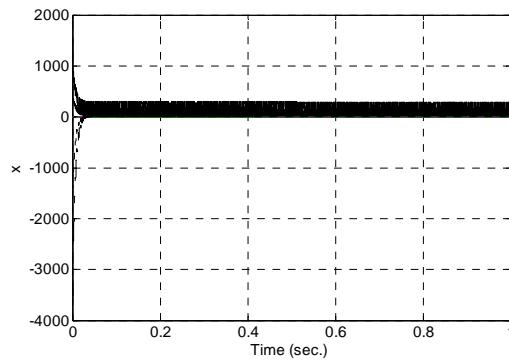


شکل ۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

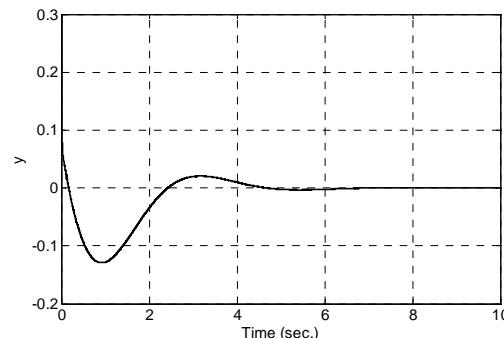


شکل ۲: سیگнал نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵

نتایج حاصل از قضیه ۱ با فرض  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$  در جدول ۱ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر برای هر زیر سامانه به همراه محل قرارگیری قطب‌های حلقه بسته نشان داده شده است.



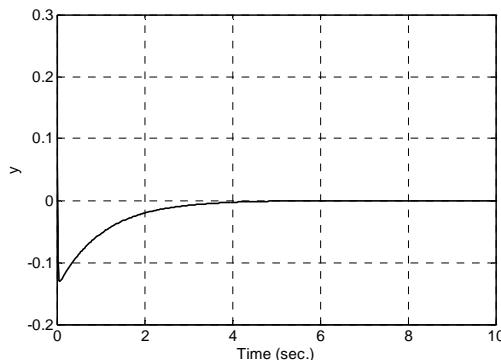
شکل ۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]



شکل ۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

جدول ۱: پارامترهای کنترلگر و قطب‌های حلقه بسته با اعمال قضیه ۱ به سامانه نمونه

پارامترهای کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	الا
		۴۳۶



شکل ۱۰: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱

در این قسمت برای نشان دادن کارآئی روش ارائه شده، شبیه‌سازی در حضور عدم قطعیت در پارامترهای کنترلگر و با استفاده از قضیه ۲ انجام شده است. نتایج حاصل از قضیه ۲ با فرض  $\delta_{C_c} = 0.01$ ،  $\delta_{B_c} = 0.01$ ،  $\delta_{A_c} = 0.01$  و  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$  و  $\delta_{D_c} = 0.01$ ، در جدول ۲ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر به همراه محل قرار گیری قطب‌های حلقه بسته آورده شده است.

در این شبیه‌سازی پارامترهای عدم قطعیت برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

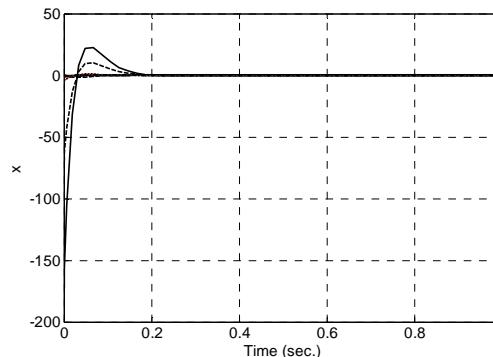
$$\begin{aligned}\Delta A_c &= 0.01 \sin(3t), \quad \Delta B_c = 0.01 \sin(5t), \\ \Delta C_c &= 0.01 \cos(t), \quad \Delta D_c = 0.01 \sin(t)\end{aligned}\quad (۳۷)$$

جدول ۲: پارامترهای کنترلگر و قطب‌های حلقه بسته با اعمال قضیه ۲ به سامانه نموده

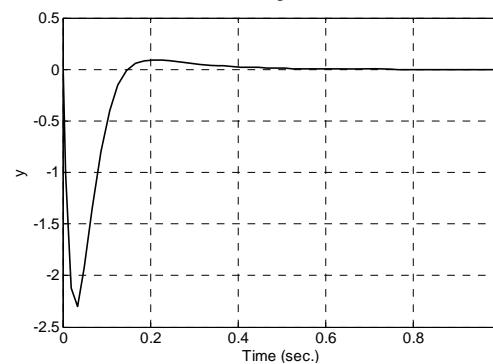
پارامترهای کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	ال <sup>۱</sup> ال <sup>۲</sup> ال <sup>۳</sup>
$D_c = -3.0781$	$0 \pm 1.44i$	۰
$A_c = -103.0782$ $B_c = -44.8305$ $C_c = -7568.5345$ $D_c = -5115.0377$	$-68.4570$ $(-17.3106 \pm 49.44i)$	۱
$A_c = [-32.3502 \quad -47.8556 \quad -46.5729 \quad -97.8487]$ $B_c = [-41.5950 \quad -67.5857]^T$ $C_c = [-4569.1215 \quad -8714.0399]$ $D_c = -7978.2686$	$(-39.2785 \pm 54.6544i)$ $-44.2478$ $-7.3939$	۲
$K = D_c = [-8.2358 \quad -7.19]$	$-1.21$ $-5.98$	بازخورد حالات ( $C = I$ )

همچنین برای کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه پارامترهای عدم قطعیت به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned}\Delta A_c &= 0.01 \begin{bmatrix} 0.5 \sin(3t) & 0.5 \sin(5t) \\ 0.5 \sin(2t) & 0.5 \cos(t) \end{bmatrix}, \\ \Delta B_c &= 0.01 \begin{bmatrix} 0.7 \sin(3t) \\ 0.7 \cos(t) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (۳۸)$$

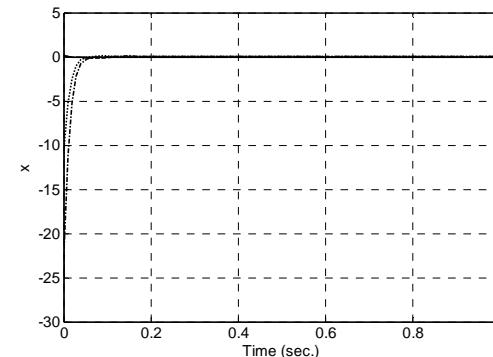


شکل ۷: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

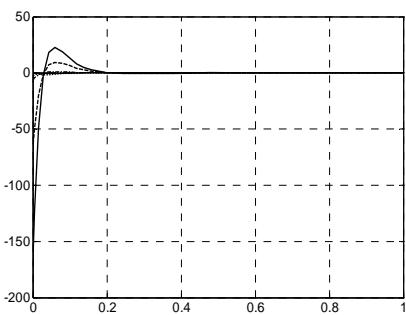


شکل ۸: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

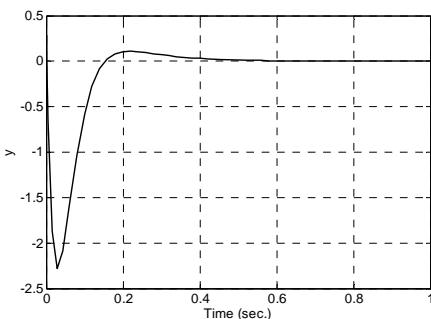
علاوه بر قابلیت طراحی کنترلگر از مرتبه‌های دلخواه، شکل‌ها نشان می‌دهند که هم بازه تغییرات حالت‌ها بسیار کمتر از [۲۰] است و هم زمان نشست به مراتب کمتری در این طراحی حاصل شده است. همچنین در شکل ۹ و شکل ۱۰ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر بازخورد حالت بر اساس قضیه ۱ نمایش داده شده است. با توجه به در اختیار داشتن اطلاعات بیشتری از سامانه در طراحی کنترلگر بازخورد حالت، بدیهیست پاسخ‌های این طراحی به مراتب بهتر از کنترلگر بازخورد خروجی باشد که می‌توان این بهبود را در شکل ۹ و شکل ۱۰ با مقایسه بازه تغییرات حالت‌ها و زمان نشست آنها با مقادیر قبلی مشاهده کرد.



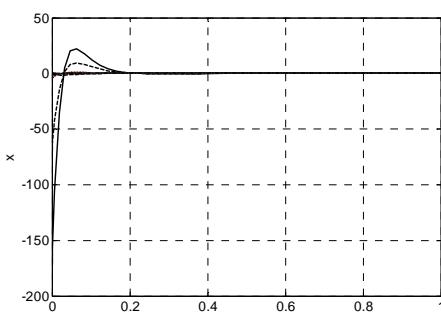
شکل ۹: حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱



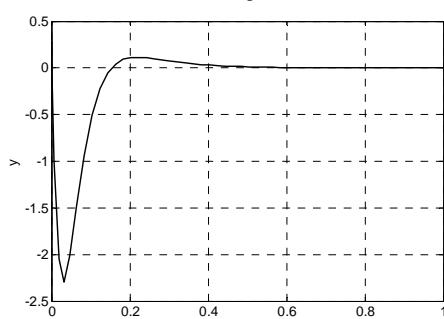
شکل ۱۳: حالت های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۵: حالت های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



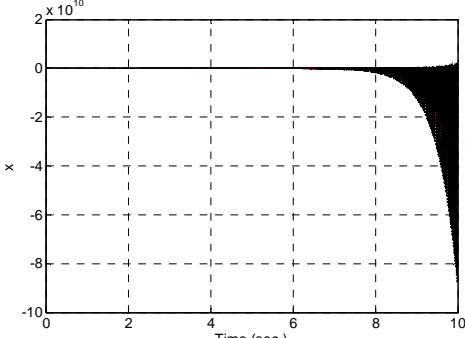
شکل ۱۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲

$$\Delta C_c = 0.01[0.7 \cos(t) \quad 0.7 \sin(4t)],$$

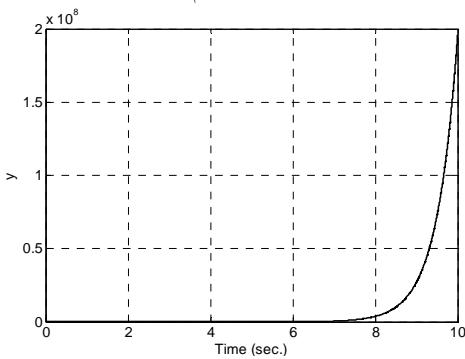
$$\Delta D_c = 0.01 \sin(t)$$

در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نتایج حاصل از شیوه سازی نتایج [۲۰] عدم قطعیت (۳۸) مشاهده می گردد. شکل ۱۱ و شکل ۱۲ بیانگر ناپایداری سامانه حلقه بسته با در نظر گرفتن عدم قطعیت در ساختار کنترلگر است. بدینهیست طراحی ارائه شده در [۲۰] شکنندۀ بوده و برای کاربردهای عملی مناسب نمی باشد.

همچنین شکل ۱۳ تا شکل ۱۸ حالت ها و خروجی سامانه حلقه بسته کل را برای مرتبه های مختلف کنترلگر بازخورد خروجی پویا برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲ و در حضور عدم قطعیت (۳۷) و (۳۸) نشان می دهد. علاوه بر قابلیت های مختلف روش ارائه شده که در شکلهای ارائه شده برای نتایج قضیه ۱ بیان گردید، مشاهده می شود که با وجود عدم قطعیت در پارامتر های کنترلگر، پاسخ های بدست آمده همچنان کارآئی بالای کنترلگر طراحی شده را نشان می دهد. غیرشکنندۀ بودن کنترلگر طراحی شده این امکان را به ما می دهد تا در کاربردهای عملی به راحتی از نتایج این روش بهره مند شویم.



شکل ۱۱: حالت های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰] در حضور عدم قطعیت

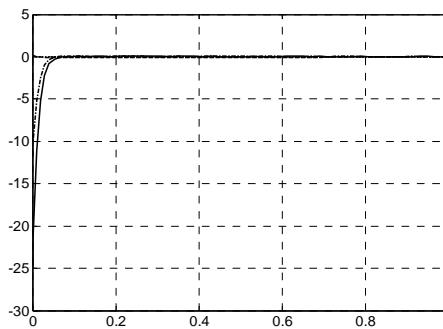


شکل ۱۲: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰] در حضور عدم قطعیت

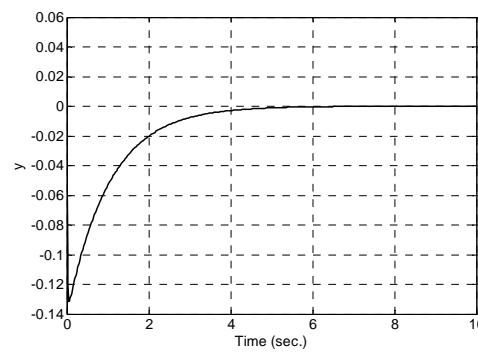
است. در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طراحی کنترلگر بازخورد خروجی استا پرداخت، همچنین در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض اینکه تمامی حالت‌ها بصورت مستقیم در خروجی در دسترس باشند، طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طراحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر خواهد یافت. روند طراحی با تعیین مرتبه کنترلگر، درجه‌های قوام و پارامترهای کنترلگر مورد نظر را بدست می‌دهد. همچنین کنترلگرهای غیرمتumer کر حاصل از این طراحی، پایداری سامانه کل را نیز تضمین می‌نماید. در این مقاله، یک مثال برای نشان دادن چگونگی پایدارسازی یک سامانه مشکل از زیر سامانه‌های بهم پیوسته با کنترل غیرمتumer کر ارائه گردیده و با نتایج حاصل از کارهای قبلی مقایسه شده است. این روش برای کاربردهای عمومی در طراحی کنترلگر برای سامانه‌های مقیاس وسیع و سامانه‌های غیر مقیاس وسیع بسیار مناسب است.

## مراجع

- [1] Gahinet, Pascal, Nemirovski, Arkadi, Laub, Alan J., Chilali, Mahmoud, *LMI control toolbox*, The Math Works, Natick, MA, 1995.
- [2] Gahinet, P., Apkarian, P., 1994, "A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control", *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 4, 421-448.
- [3] Iwasaki, T., Skelton, R.E., 1994, "All controllers for the general  $H_\infty$  control Problem: LMI existence conditions and state space formulas", *Automatica*, 30, 1307-1317.
- [4] Boyd, Stephen, El Ghaoui, Laurent, Feron, Eric, Balakrishnan, Venkataramanan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [5] Dullerud, Geir E., Paganini, Fernando, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, N.Y, 2000.
- [6] Geromel, J.C., Bernussou, J.C., de Oliveira, M.C., 1999, "H2-norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control", *IEEE Trans. Automat. Control*, 44, 1449-1454.
- [7] Geromel, J.C., Bernussou, J., Peres, P.L.D., 1994, "Decentralized control through parameter space optimization", *Automatica*, 30, 1565-1578.
- [8] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2000, "Robust stabilization of nonlinear systems", *Math. Probl. Eng.*, 6, 461-493.
- [9] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2001, "Autonomous decentralized control", *Proc. ASME Intern. Mech. Eng. Congress*, 761-765.
- [10] Zhai, G., Ikeda, M., Fujisaki, Y., 2001, "Decentralized controller design: A matrix inequality design using a homotopy method", *Automatica*, 37, 565-572.
- [11] D'Andrea, R., Dullerud, G.E., 2003, "Distributed control design for spatially interconnected systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 48, 1478-1495.
- [12] Zecevic, A.I., Neskovic, G., Siljak, D.D., 2004, "Robust decentralized exciter control with linear feedback", *IEEE Trans. Power Syst.*, 19, 1096-1103.
- [13] Stipanovic, D.M., Teo, Inhlan R., Tomlin, C., 2004, "Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles", *Automatica*, 40, 1285-1296.
- [14] Siljak, D.D., Zecevic, A.I., 2004, "Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback", in: *Proc. 10th*



شکل ۱۷: حالت‌های سامانه بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۸: خروجی سامانه بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲

چنانچه ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده از دو جهت قابل بررسی می‌باشد: اول اینکه قطب‌های حلقه‌بسته بدست آمده در مقایسه با کارهای مرتبه کامل قبلی دورت از محور موهومی است که در نتیجه پایداری بسیار بهتری را به دست می‌دهد و پاسخ سامانه نیز بسیار سریع تر و پایدارتر است، دومین مسئله وجود کنترلگر از مرتبه‌های مختلف است که می‌توان مرتبه کنترلگر را برای زیرسامانه‌های متفاوت با توجه به نیاز در کاربردهای مختلف تنظیم نمود. چنانچه ملاحظه می‌شود پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد خروجی پویا بسیار سریعتر از کنترلگر بازخورد حالت است ولی پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد حالت به مراتب بالا زدگی و پایین‌زدگی کمتری را دارد می‌باشد. همچنین با توجه به غیرشکننده بودن کنترلگر حاصل از قضیه ۲، مشکلات ناشی از اجرا در عمل به حداقل خواهد رسید. چنانچه در نتایج حاصل مشاهده گردید نتایج حاصل از [20] در حضور عدم قطعیت بسیار شکننده بوده و پاسخ سامانه ناپایدار گردیده است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتumer کنترلگر بازخورد سامانه‌های مرکب از زیرسامانه‌های خطی با اتصالات داخلی غیرخطی دارای عدم قطعیت که قیود مربوطی را برآورده می‌سازند، طراحی شده است. این طرح از ساختار عمومی بازخورد خروجی پویا بهره گرفته

- [19] Zhu, Y., Pagilla, P.R., 2007, "Decentralized output feedback control of a class of large scale interconnected systems", *IMA J. Math. Control Inform.*, 24, 57-69.
- [20] Stankovic, S. S., Siljak, D. D., 2009, "Robust stabilization of nonlinear interconnected systems by decentralized dynamic output feedback", *Systems & Control Letters*, 58, 271-275.
- [21] Labibi, B., Marquez, H. J., Chen, T., 2009, "Decentralized robust output feedback control for control affine nonlinear interconnected systems", *Journal of Process Control*, 19, 865-878.
- [22] Lofberg, John, *What is YALMIP?*, Linkopings univeritet, <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php?n>Main.What>, 2001.
- [15] Zecevic, A.I., Siljak, D.D., 2004, "Design of robust static output feedback for large-scale systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 49, 2040-2044.
- [16] Siljak, Dragoslav D., *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, New York, 1991.
- [17] Pagilla, P.R., Zhu, Y., 2005, "A decentralized output feedback controller for a class of large-scale interconnected nonlinear systems", *Trans. ASME, J. Dynam. Syst. Meas. Control*, 127, 167-172.
- [18] Stankovic, S.S., Stipanovic, D.M., Siljak, D.D., 2007, "Decentralized Dynamic Output Feedback for Robust Stabilization of a Class of Nonlinear Interconnected Systems", *Automatica*, 43, 861-867.