مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۷، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۲، صفحه ۸-۱

پایداری گوشه‌ای در سیستم های غیر خطی خود گردان

ارسلان رحیم‌آبادی، حمیدرضا تقی‌راد

گروه رباتیک ارس، قطب کنترل صنعتی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

arsalan.rahimabadi@ee.kntu.ac.ir, taghirad@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۲/۵/۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۲/۷/۲)

چکیده: در بسیاری از کاربردهای عملی بررسی پایداری مجانبی نقاط تعادل یک سیستم دارای اهمیت ویژه‌ای است. همچنین در برخی از این سیستم‌ها با وضعیتی مواجه می‌شویم که وجود پاسخ در این سیستم‌ها محدود به بخشی از فضای حالت است. برای مثال سیستم‌های مثبت که در فرایندهای شیمیایی متداول هستند دارای متغیرهای حالت نامنفی می‌باشند. در این نوع سیستم‌ها تحلیل پایداری با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف همیشه انتخاب مناسبی نیست؛ زیرا بررسی شرایط لیاپانوف در بخشی از فضای حالت که وجود پاسخ‌ها به آنجا محدود می‌شود، کافی می‌باشد و همواره نیاز به تضمین وجود حداقل یک قلمرو شامل نقطه تعادل که دارای شرایط لیاپانوف است نخواهد بود. از این رو در این مقاله به تعریف نوع دیگری از پایداری با عنوان پایداری گوشه‌ای می‌پردازیم که جایگزین مناسبی برای بررسی پایداری مجانبی نقاط تعادل در این گونه سیستم‌ها است. شرایط تضمین این نوع پایداری توسط قضیه‌ای مشابه با قضیه لیاپانوف ارائه می‌شود و برای دو سیستم متفاوت با استفاده از این قضیه، پایداری گوشه‌ای نقطه تعادل واقع در مبدا را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: سیستم‌های خودگردان، سیستم‌های مثبت، تحلیل پایداری، پایداری لیاپانوف، پایداری مجانبی.

Corner Stability in Nonliner Autonomous Systems

Arsalan Rahimabadi, Hamidreza Taghirad

Abstract: In many practical applications, studying the asymptotic stability of equilibrium points of a system are of utmost importance. Furthermore, in some of such cases the response is restricted to only a sector of the state space. For example positive systems that are really common in chemical processes, have non-negativestate variables. For such systems stability analysis of the system using direct Lyapunov stability is not a suitable choice everywhen, since it suffices to consider of Lypunov conditions in a part of the state space that the existence of solutions is restricted to there and the existence guarantee of at least a domain that includes the equilibrium point & has the Lypunov conditions, will not be required every time. In this paper a new notion of stability which is called corner stability is defined which is more suitable for studying asymptotic stability of equilibriumpoints in such systems. To derive the sufficient condition of corner stability a theorem is stated in this paper, and for two different cases studies corner stability of an equilibrium point at the origin, is studied according to this theorem.

Keywords: Autonomous systems, positive system, stability analysis, Lyapunov stability, asymptotic stability.

۱- مقدمه

تعاریف فراوانی در مورد پایداری پاسخ یک سیستم دینامیکی بیان شده است که برای مطالعه تاریخچه‌ای از این تعاریف می توانید به [۱] مراجعه کنید. از تعاریف متداول برای پایداری پاسخ یک سیستم دینامیکی می‌توان به پایداری پوانکاره (یا اُربیتالی[1]) [۲]، پایداری ژاکوفسکی[2][۳]، پایداری لیاپانوف [۴] و پایداری مجانبی [۴] اشاره کرد. برای حالتی که هدف تحلیل پایداری یک نقطه تعادل است تعاریف مربوط به پایداری پوانکاره، ژاکوفسکی و لیاپانوف معادل می‌باشند. از این رو به تبیین پایداری لیاپانوف برای یک نقطه تعادل در ارتباط با این سه پایداری بسنده می‌کنیم. نقطه تعادل یک سیستم دینامیکی را پایدار به مفهوم لیاپانوف گویند، اگر با

[1] Orbitally stability

[2] Zhukovsky stability

نویسنده عهده دار مکاتبات: حمید رضا تقی راد

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]

انتخاب شرط اولیه مناسب، پاسخ به اندازه دلخواه نزدیک نقطه تعادل باقی بماند. در بسیاری از کاربردهای عملی پایداری به مفهوم لیاپانوف کافی نیست و علاوه بر آن همگرا شدن پاسخ به نقطه تعادل نیز مد نظر قرار می‌گیرد، که در این صورت نقطه تعادل را پایدار مجانبی گویند. پایه‌ای‌ترین کار برای تضمین پایداری مجانبی، روش مستقیم لیاپانوف می‌باشد [۴]. در این روش برای اثبات پایداری مجانبی نقطه تعادل مربوط به یک سیستم خودگردان، هدف بدست آوردن تابع معین مثبتی است، که مشتق آن نسبت به زمان معین منفی باشد. در واقع در این روش مسئله تضمین پایداری مجانبی نقطه تعادل یک سیستم، به مسئله بدست آوردن تابع لیاپانوف، تبدیل می‌شود.

لازال[1] در مقاله خود [۵]، با استفاده از مفاهیم مجموعه‌های پایا شرایط قضیه لیاپانوف را برای تضمین پایداری مجانبی نقطه تعادل یک سیستم خودگردان، ساده سازی کرد. در مرجع [۶]، شرط معین منفی بودن مشتق تابع نسبت به زمان در قضیه لیاپانوف برای حالت پایدار مجانبی یکنواخت[2] با دو شرط دیگر جایگزین گشت؛ ۱) مشتق تابع نسبت به زمان نیمه معین منفی باشد، ۲) یک $T > 0$ موجود باشد، که برای تمام $t \geq t_0$ داشته باشیم: $\int_t^{t+T} \dot{V}(x(\tau),\tau)\, d\tau \leq -\alpha(\|x(t)\|) < 0$؛ که α یک تابع یکنوای‌مثبت[3] روی $\mathbb{R}^+$ است، که شرط $\alpha(0) = 0$ را ارضا می‌کند. در مرجع [۷] نشان داده شد، که تنها شرط دوم ارائه شده توسط مرجع [۶] با در نظر گرفتن تابع α در کلاس K برای جایگزینی با شرط معین منفی بودن مشتق تابع در قضیه لیاپانوف، برای اثبات پایداری مجانبی یکنواخت کافی است، همچنین در مرجع [۸] نشان داده شد، که اگر شرط دوم ارائه شده توسط مرجع [۶] برای دنباله اکیدا صعودی[4] از زمان برقرار باشد، می‌توان آن را جایگزین شرط معین منفی بودن مشتق تابع در قضیه لیاپانوف، برای اثبات پایداری مجانبی یکنواخت دانست.

تابع لیاپانوف برداری که در مراجع [۹،۱۰] معرفی شده است، شیوه استفاده از قضیه لیاپانوف را برای سیستم‌های با ابعاد بالا توسعه می‌دهد. در واقع در این روش به جای بدست آوردن یک تابع لیاپانوف برای کل سیستم سعی می‌شود برای هر زیرسیستم یک تابع کاهشی[5] و حداقل نیمه معین مثبت به صورت $V_i(x,t)$ بدست آوریم تا تابع $V = \sum_{i=1}^{m} k_i V_i$ برای $k_i > 0$، معین مثبت باشد، آنگاه توابع V_i به عنوان نامزد تابع لیاپانوف برای یک زیرسیستم و تابع V کاندیدای تابع لیاپانوف برای کل سیستم خواهد بود. با استفاده از لم قیاس تعمیم یافته، تعریف شده در مرجع [۱۱]، مراجع [۱۲،۱۱] تابع لیاپانوف برداری را به صورت دیگری مورد استفاده قرار داده‌اند. آنها رابطه‌ای بین پاسخ‌های نامساوی برداری $\dot{V} \leq g(V(x,t))$ و سیستم $\dot{U} = g(U(x,t))$ با $V, U \in \mathbb{R}^m$، را بدست آورده‌اند، که نشان می‌دهد اگر تابع $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ در کلاس W باشد و برای شرایط اولیه داشته باشیم: $V(x_0,t_0) = U(t_0)$؛ آنگاه خواهیم داشت: $V_i(x,t) \leq U_i(t)$. حال اگر نقطه تعادل برای سیستم $\dot{U} = g(U(x,t))$ پایدار مجانبی باشد، آنگاه نقطه تعادل برای سیستمی که تابع برداری V برای اثبات پایداری مجانبی آن در نظر گرفته شده است، پایدار مجانبی خواهد بود. در این روش نیاز به معین منفی بودن توابع $\dot{V}_i(x,t)$ نیست.

در مراجع [۱۳،۱۴،۱۵،۱۶،۱۷]، از مشتقات بالاتر یک تابع برای اثبات پایداری مجانبی نقطه تعادل یک سیستم استفاده شده است. در مرجع [۱۳] برای سیستم‌های خودگردان، شرط معین منفی بودن تابع $\dot{V}$ را با شرط معین منفی بودن تابع $min\{\dot{V}(x), h\ddot{V}(x)\}$ به ازای $h > 0$ در برخی از نواحی مجاور مبدا (نقطه تعادل در مبدا فرض شده است)، جایگزین شده است. در مرجع [۱۴] نشان داده شده است، این شرط وقتی برآورده می‌شود که $\dot{V}(x)$ معین منفی باشد و این یعنی استفاده از این شرط بی‌فایده است، همچنین در مرجع [۱۴]، شرط $\forall x \neq 0, a_2\dddot{V}(x) + a_1\ddot{V}(x) + \dot{V}(x) < 0$ با $a_1, a_2 \geq 0$، را جایگزین شرط معین منفی بودن $\dot{V}(x)$ کرد. مرجع [۱۵]، از نامساوی $V^{(m)} \leq g_m(V, \dot{V}, \dots, V^{(m-1)}, t)$ و مقایسه کردن آن با سیستم کمکی $u^{(m)} = g_m(u, \dot{u}, \dots, u^{(m-1)}, t)$ استفاده کرد و نشان داد که اگر نقطه تعادل سیستم کمکی با میدان برداری در کلاس W پایدار مجانبی باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم توصیف شده با حالت $x(t)$، پایدار مجانبی است. در مرجع [۱۷] نشان داده شد، اگر تابع برداری V با V_iهای کاهشی و V_1 معین مثبت، موجود باشد تا بتواند نامساوی برداری $A_{m\times m}\dot{V} \leq [V_2 V_3 \ \dots \ V_m \ -\varphi(\|x\|)]^T$ با ماتریس پایین مثلثی A، را برقرار کند، پایداری مجانبی سیستم تضمین می‌شود (تابع φ در کلاس K است).

در مرجع [۱۸] تابع لیاپانوف دینامیک[6]، معرفی شده است. تابع لیاپانوف دینامیک به صورت زوج مرتب (D_τ, V) تعریف می‌شود، که D_τ توصیف کننده معادله به صورت $\dot{\xi} = \tau(x,\xi)$ با $\xi \in \mathbb{R}^n$ و V یک تابع لیاپانوف برای سیستم توسعه‌یافته به صورت $[\dot{x}\dot{\xi}]^T = [f(x) \ \tau(x,\xi)]^T$ است. اثبات پایداری سیستم با استفاده از تابع لیاپانوف دینامیک، مرتبط با بدست آوردن جواب $\xi(x)$ برای معادله $\frac{\partial \xi}{\partial x} f(x) = \tau(x, \xi(x))$ می‌باشد.

فرض کنید می‌خواهیم پایداری مجانبی نقطه تعادل یک سیستم مثبت[7] را مورد بررسی قرار دهیم. در این صورت کافی خواهد بود که تعریف پایداری مجانبی برای بخشی از فضای حالت که مقدار حالت‌ها در

[1] LaSalle

[2] با توجه به این که مطالب این نوشته به سیستم‌های خودگردان محدود می‌شود خواص مربوط به پایداری یکنواخت است. بدین معنی که در سیستمهای خودگردان پایداری مجانبی معادل با پایدای مجانبی یکنواخت می‌باشد.

[3] Positive monotonic function

[4] Strictly increasing

[5] Decrescent

[6] Dynamic Lyapunov Functions

[7] سیستم مثبت یعنی سیستمی که همه حالت‌های آن در همه زمان‌های $t \geq 0$، نامنفی هستند. این دسته از سیستم‌ها در سیستم‌های عملی نظیر کنترل سطح مایع، کنترل دمای مطلق، رکتورهای شیمیایی (غلظت مواد مقداری نامنفی است) و ... کاربرد دارند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]

آن مثبت است برآورده گردد. همچنین ممکن است، استفاده از قضایای متداول برای تضمین پایداری مجانبی، در این گونه سیستم‌ها مقدور نباشد (به مثال (۱) مراجعه کنید). از سوی دیگر اکثر کارهای انجام شده در زمینه تحلیل پایداری سیستم‌های مثبت، مربوط به سیستم‌های خطی [۲۱] و همگن [۲۵،۲۴،۲۳،۲۲] می‌باشد. همچنین در بسیاری از سیستم‌های عملی مانند سیستم‌های مثبت ممکن است با محدودیت فیزیکی برای وجود پاسخ در بخشی از فضای حالت روبرو باشیم. از این رو نیاز به توسعه قضیه‌ای مشابه با قضیه لیاپانوف در ارتباط با این گونه سیستم‌ها احساس می‌شود.

۲- تعریف پایداری گوشه‌ای

سیستم خودگردان به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = f(x) \qquad (۱)$$

تابع $f: D \to \mathbb{R}^n$ در قلمرو $D \subset \mathbb{R}^n$ شامل مبدا، لیپ‌شیتز محلی است؛ همچنین مبدا نقطه تعادل این سیستم است.

قضیه (۱)[۲۶]: فرض کنید C زیرمجموعه‌ای فشرده، در D باشد و برای تمام زمان‌های $t \geq t_0$، هرپاسخ سیستم (۱) با شرط اولیه $x_0 \in C$ بطور کامل درون C قرار بگیرد. در این صورت پاسخ یکتایی که به ازای جمیع مقادیر $t \geq t_0$ تعریف می‌شود؛ وجود دارد.

تعریف (۱): نقطه تعادل واقع در مبدا برای سیستم (۱) را پایدار گوشه‌ای گوییم، اگر قلمرو $\omega \subset D$ به گونه‌ای یافت شود که مبدا یک نقطه مرزی برای این قلمرو باشد و همچنین مجموعه $\Omega = \omega \cup \{0\}$ تشکیل یک مجموعه پایا مثبت بدهد، به صورتی که برای هر پاسخ $x(t)$ در مجموعه Ω داشته باشیم[۱]:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; \|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \|x(t)\| < \varepsilon & ,\forall t \geq t_0 \geq 0 \\ lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0 \end{cases} \qquad (۲)$$

۳- شرایط تضمین پایداری گوشه‌ای

قضیه (۲) : سیستم خودگردان با معادله (۱) را در نظر بگیرید. حال فرض کنید توابع $V_1: D \to \mathbb{R}$ و $V_2: D \to \mathbb{R}$ با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته که شرایط (*) را برآورده کنند، موجود باشند. در این صورت ناحیه $\Omega \subset D$ وجود خواهد داشت که برای آن پایداری گوشه‌ای مبدا تضمین می‌گردد.

شرایط (*):

۱) قلمرو $\Omega_1 \subset D$ به گونه‌ای موجود باشد که[۲]:

$$\forall x \in \Omega_1 \Rightarrow V_1(x) > 0 \;\; ,\Omega_1 \subset B(r_1,0) \subset D \;\; ,r_1 > 0 \qquad (۳)$$

و همچنین برای مرز Ω_1 داشته‌باشیم[۳]:

$$\forall x \in \partial\Omega_1 \Rightarrow V_1(x) = 0 \;\vee\; \|x\| = r_1$$
$$,0 \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 \cap B(r_1,0) \neq \emptyset \qquad (۴)$$

۲) قلمرو $\Omega_2 \subset \Omega_1$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\forall x \in \Omega_2 \Rightarrow \dot{V}_1(x) < 0 \qquad (۵)$$

و همچنین برای مرز Ω_2 داشته‌باشیم:

$$\forall x \in \partial\Omega_2 \Rightarrow \dot{V}_1(x) = 0 \;\vee\; \|x\| = r_1$$
$$,0 \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 \cap B(r_1,0) \neq \emptyset$$
$$H = \{x \in \partial\Omega_2 \backslash \{0\} : \dot{V}_1(x) = 0\} \qquad (۶)$$
$$[H \cup \Omega_2] \subset \Omega_1$$

۳) قلمرو $\Omega_3 \subset \Omega_2$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\forall x \in \Omega_3 \Rightarrow V_2(x) > 0 \;\; ,\Omega_3 \subset B(r_2,0) \;\; ,r_2 > 0 \qquad (۷)$$

و همچنین برای مرز Ω_3 داشته‌باشیم:

$$\forall x \in \partial\Omega_3 \Rightarrow V_2(x) = 0 \;\vee\; \|x\| = r_2 \;\; ,r_2 < r_1$$
$$,0 \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 \cap B(r_2,0) \neq \emptyset \qquad (۸)$$
$$\bar{\Omega}_3 \backslash \{0\} \subset \Omega_2$$

۴) قلمرو $\Omega_4 \subset \Omega_3$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\forall x \in [\Omega_3 \backslash \Omega_4]^o \Rightarrow \dot{V}_2(x) > 0$$
$$,\Omega_4 \subset B(r_3,0) \quad ,r_3 > 0 \qquad (۹)$$

و همچنین برای مرز Ω_4 داشته‌باشیم:

$$\forall x \in \partial\Omega_4 \Rightarrow \dot{V}_2(x) = 0 \;\vee \|x\| = r_3 \;\; ,r_3 < r_2$$
$$,0 \in \partial\Omega_4 \;\; ,\partial\Omega_4 \cap B(r_3,0) \neq \emptyset \qquad (۱۰)$$
$$[\bar{\Omega}_4 \backslash \{0\}] \subset \Omega_3$$

اثبات: قلمرو Ω_3^ε را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_3^\varepsilon = \Omega_3 \cap B(\varepsilon,0) \quad ,0 < \varepsilon < r_3 \qquad (۱۱)$$

قلمرو π_ρ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi_\rho = \{x \in \Omega_3^\varepsilon : \; V_1(x) < \rho\} \quad ,\rho > 0 \qquad (۱۲)$$

با توجه به پیوسته بودن تابع $V_1(x)$ و این که هر چقدر هم که مقدار ε را کوچک کنیم قلمرو π_ρ ناتهی باقی خواهد ماند، خواهیم داشت:

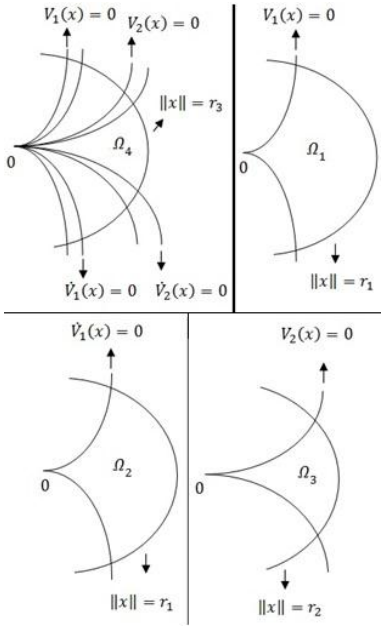
$$0 \in \partial\pi_\rho \qquad (۱۳)$$

[۱] نماد $\|\cdot\|$ متناظر هر یک از نرم‌های p می‌تواند باشد.

[۲] $B(r,0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x\| < r\}$

[۳] $\partial\Omega_1$، Ω_1^o و $\bar{\Omega}_1$ به ترتیب بیانگر مرز، درون و بستار مجموعه Ω_1 می‌باشد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]



شکل ۱: نمایش هندسی مجموعه‌ها در شرایط (*)

و همچنین ρ در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$0 < \rho < \rho_m \qquad (۱۴)$$

که ρ_m به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\rho_m = min_{x\in L} V_1(x) \\ ,L = \{x \in \partial\Omega_3^\varepsilon :\ \|x\| = \varepsilon\} \qquad (۱۵)$$

با توجه به این که L یک مجموعه فشرده است و تابع $V_1(x)$ روی L پیوسته است پس روی آن، مینیمم خواهد داشت. همچنین با توجه به روابط (۶) و (۱۰)، $L \subset \Omega_1$ است پس $V_1(x)$ روی L مثبت می‌باشد، درنتیجه $\rho_m > 0$ خواهد بود. حال می‌خواهیم نشان دهیم: $L \cap \partial\pi_\rho = \emptyset$. برای بستار π_ρ خواهیم داشت:

$$\bar{\pi}_\rho = \overline{[\Omega_3^\varepsilon \cap \{x \in \Omega_1 :\ 0 < V_1(x) < \rho\}]} \subset \\ [\bar{\Omega}_3^\varepsilon \cap \{x \in \bar{\Omega}_1 :\ 0 \le V_1(x) \le \rho\}] \qquad (۱۶)$$

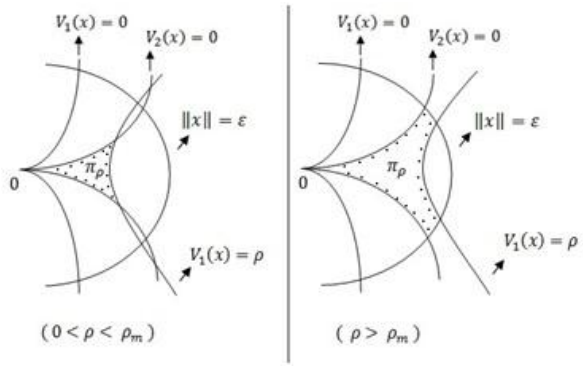
درنتیجه برای عبارت سمت راست رابطه (۱۶) خواهیم داشت:

$$[\bar{\Omega}_3^\varepsilon \cap \{x \in \bar{\Omega}_1 :\ 0 \le V_1(x) \le \rho\}] \subset \\ \{x \in \bar{\Omega}_3^\varepsilon :\ 0 \le V_1(x) \le \rho\} \qquad (۱۷)$$

فرض خلف: $L \cap \partial\pi_\rho \neq \emptyset$. در این صورت نقطه $p_0 \in L$ وجود دارد که عضو $\partial\pi_\rho$ نیز خواهد بود. برای نقطه p_0 روی L با توجه به رابطه (۱۵) خواهیم داشت: $V_1(p_0) \ge \rho_m$ و همچنین برای $p_0 \in \partial\pi_\rho$ خواهیم داشت: $V_1(p_0) \le \rho$ ،0 که چون $\rho < \rho_m$ است؛ پس فرض خلف باطل و $L \cap \partial\pi_\rho = \emptyset$ است.

قلمرو Ω_4^ε را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_4^\varepsilon = \Omega_4 \cap B(\varepsilon, 0) \qquad (۱۸)$$



شکل ۲ : نمایش هندسی مجموعه π_ρ

قلمرو ψ_ρ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_\rho = \{x \in \Omega_4^\varepsilon :\ V_1(x) < \rho\} \quad ,\rho > 0 \qquad (۱۹)$$

با توجه به پیوسته بودن تابع $V_1(x)$ و این که هر چقدر هم که مقدار ε را کوچک کنیم قلمرو ψ_ρ ناتهی باقی خواهد ماند، خواهیم داشت:

$$0 \in \partial\psi_\rho \qquad (۲۰)$$

همچنین با توجه به این که $\Omega_4^\varepsilon \subset \Omega_3^\varepsilon$ و براساس روابط (۱۲) و (۱۹) نتیجه می‌شود: $\psi_\rho \subset \pi_\rho$.

حال اثبات می‌کنیم: $[\pi_\rho \backslash \psi_\rho] \subset [\Omega_3 \backslash \Omega_4]$. با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) داریم: $[\pi_\rho \backslash \psi_\rho] \subset \Omega_3$ ، پس کافی است نشان دهیم: $[\pi_\rho \backslash \psi_\rho] \cap \Omega_4 = \emptyset$. فرض کنید $p_0 \in [\pi_\rho \backslash \psi_\rho]$ یعنی $p_0 \in \pi_\rho$ و $p_0 \notin \psi_\rho$ است با توجه به رابطه (۱۹) داریم: $p_0 \notin \Omega_4$. درنتیجه خواهیم داشت:

$$[\pi_\rho \backslash \psi_\rho] \subset [\Omega_3 \backslash \Omega_4] \qquad (۲۱)$$

برای قلمرو π_ρ داریم:

$$\forall x \in \partial\pi_\rho \ \Rightarrow V_2(x) = 0 \ \ \vee \ \ V_1(x) = \rho \\ ,0 \in \partial\pi_\rho \qquad (۲۲)$$

با توجه رابطه (۱۰) و (۱۸) نتیجه می‌شود: $\bar{\Omega}_4^\varepsilon \backslash \{0\} \subset \bar{\Omega}_4 \backslash \{0\} \subset \Omega_3$، پس داریم:

$$\forall x \in \partial\psi_\rho / \{0\} \Rightarrow V_1(x) \neq 0 \qquad (۲۳)$$

برای قلمرو ψ_ρ داریم:

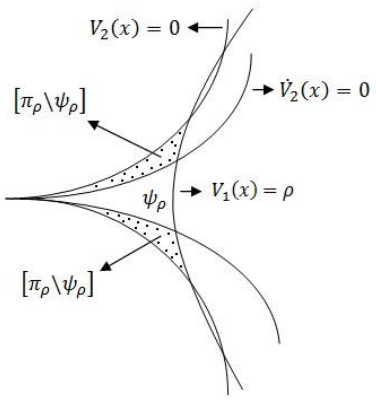
$$\forall x \in \partial\psi_\rho \Rightarrow V_1(x) = \rho \ \ \vee \ \ \dot{V}_2(x) = 0 \\ ,0 \in \partial\psi_\rho \qquad (۲۴)$$

برای قلمرو π_ρ می‌توان نوشت:

$$\pi_\rho = \psi_\rho \cup [\pi_\rho \backslash \psi_\rho] \qquad (۲۵)$$

با توجه به روابط (۲۲) و (۲۳)، مرز مشخص شده‌ی π_ρ توسط $V_2(x) = 0$ بخشی از مرز $\pi_\rho \backslash \psi_\rho$ است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]



شکل ۳ : نمایش هندسی مجموعه ψ_ρ

حال فرض کنید پاسخ $x(t)$ در بازه‌ی‌زمانی $[t_0,T)$ درون π_ρ باشد. با توجه به رابطه (۱۲) داریم:

$$\forall x\in\pi_\rho \Rightarrow V_1(x)>0 \quad ,\dot{V}_1(x)<0 \tag{۲۶}$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$V_1\big(x(t)\big)=V_1\big(x(t_0)\big)+\int_{t_0}^{t\in[t_0,T)}\dot{V}_1\big(x(\tau)\big)d\tau$$
$$\Rightarrow V_1(x(t))\le V_1(x(t_0))<\rho \tag{۲۷}$$

از رابطه (۲۷) نتیجه می‌شود که پاسخ $x(t)$ قلمرو π_ρ را از مرز مشخص شده با $V_1(x)=\rho$ ترک نخواهد کرد. با توجه به رابطه (۲۴)، همچنین اگر پاسخ $x(t)$ بخواهد قلمرو π_ρ را از مرز مشخص شده با $V_2(x)=0$ ترک کند، از ناحیه $\pi_\rho\backslash\psi_\rho$ عبور خواهد کرد. برای ناحیه $\pi_\rho\backslash\psi_\rho$ با توجه به روابط(۹) و (۲۱) داریم:

$$\forall x\in[\pi_\rho\backslash\psi_\rho]^o \Rightarrow V_2(x)>0 \quad ,\dot{V}_2(x)>0 \tag{۲۸}$$

که در این صورت برای پاسخ $x(t)$که در بازه‌ی‌زمانی $[t_0,T_1)$ درون $\pi_\rho\backslash\psi_\rho$ باشد، داریم:

$$V_2\big(x(t)\big)=V_2\big(x(t_0)\big)+\int_{t_0}^{t\in[t_0,T_1)}\dot{V}_2\big(x(\tau)\big)d\tau$$
$$\Rightarrow V_2(x(t))\ge V_2(x(t_0))>0 \tag{۲۹}$$

از رابطه (۲۹) نتیجه می‌شود که پاسخ $x(t)$ قلمرو π_ρ را از مرز مشخص شده با $V_2(x)=0$ نیز نمی‌تواند ترک کند. پس براساس رابطه (۲۸) پاسخ $x(t)$ با شرط اولیه $x(t_0)\in\pi_\rho$ برای تمام زمان‌های $t\ge t_0$ درون قلمرو π_ρ باقی می‌ماند. با توجه به قضیه (۱) و این که $\pi_\rho\subset\bar{B}(\varepsilon,0)\subset D$ یکتایی پاسخ $x(t)$ تضمین می‌شود. با توجه به این که برای ε دلخواه در بازه $0<\varepsilon<r_3$ مجموعه‌ی π_ρ حاصل شد و با انتخاب δ به صورت:

$$\delta_m=min_{x\in L}\|x\| \quad ,L=\{x\in\bar{\pi}_\rho:\ V_1(x)=\rho\}$$
$$\Rightarrow\ \delta<\delta_m \tag{۳۰}$$

و همچنین با این عبارت که : $\pi_\rho\cap B(\delta,0)\neq\emptyset$ (چون $0\in\partial\pi_\rho$)؛ رابطه زیر اثبات می‌شود.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \ \|x(t_0)\|<\delta(\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\|x(t)\|<\varepsilon \quad ,t\ge t_0\ge 0 \tag{۳۱}$$

حال کافی است اثبات کنیم:

$$\forall x(t_0)\in\pi_\rho\Rightarrow lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0 \tag{۳۲}$$

باید نشان دهیم با افزایش t به سمت بی‌نهایت، $V_1(x(t))$ به سمت صفر سوق خواهد یافت زیرا $V_1(x(t))$ روی π_ρ به طور یکنوا کاهشی است و از پایین با مقدار صفر کراندار می‌باشد. یعنی:

$$t\to\infty \ \ \Rightarrow V_1(x(t))=\sigma\ge 0 \quad ,\sigma<\rho \tag{۳۳}$$

با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم؛ $\sigma=0$ است.

فرض خلف: $\sigma\neq 0$. پس داریم: $V_1(x(t))\to\sigma>0$، که نشان می‌دهد، پاسخ $x(t)$ با شرط اولیه $x(t_0)\in\pi_\rho\backslash\pi_\sigma$ برای بازه‌ی‌زمانی $[t_0,\infty)$ خارج π_ρ می‌ماند. حال مقدار α را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\alpha=min_{x\in L}\left(-\dot{V}_1(x)\right)$$
$$,L=\{x\in\bar{\pi}_\rho:\ \sigma\le V_1(x)\le\rho\} \tag{۳۴}$$

با توجه به این که $[\bar{\pi}_\rho\backslash\{0\}]\subset\Omega_1$ و $0\notin L$، اگر α وجود داشته باشد، $\alpha>0$خواهد بود. که مقدار αوجود دارد زیرا مجموعه L یک مجموعه فشرده است و تابع $\dot{V}_1(x)$ روی آن پیوسته می‌باشد. حال اگر $x(t)$ برای بازه‌ی‌زمانی $[t_0,\infty)$ در $\pi_\rho\backslash\pi_\sigma$ باقی بماند. خواهیم داشت:

$$V_1\big(x(t)\big)=V_1\big(x(t_0)\big)+\int_{t_0}^{t}\dot{V}_1\big(x(\tau)\big)d\tau$$
$$\le V_1(x(t_0))-\alpha(t-t_0) \quad ,t\ge t_0 \tag{۳۵}$$

برای سمت راست رابطه (۳۵) با توجه به مثبت بودن $V_1(x(t))$ باید داشته باشیم:

$$t<\frac{V_1(x(t_0))}{\alpha}+t_0 \tag{۳۶}$$

که رابطه (۳۶) با این که پاسخ $x(t)$ برای بازه‌زمانی $[t_0,\infty)$، در $\pi_\rho\backslash\pi_\sigma$ باقی بماند در تناقض است، در نتیجه فرض خلف باطل و $\sigma=0$ است و اثبات تمام است.

٤- مثال‌های موردی

مثال (۱): معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1^2\\ -x_2\end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

فرض کنید این معادلات توصیف کننده سیستمی باشد که حالت x_1 آن نشان دهنده غلظت یک ماده است در این صورت همواره برای $t\ge t_0$ ، خواهیم داشت: $x_1(t)\ge 0$. حال اگر چه با توجه به تابع $V=x_1$، براساس قضیه چتایف[۲۶]، می‌توان ناپایداری مبدا را ثابت کرد. اما همان طور که از شکل (۵) مشخص است رفتار ناپایداری مبدا ناشی از شرایط اولیه مربوط به ناحیه $x_1(t)<0$ است. حال آن که می دانیم پاسخ‌های سیستم توصیف شده با این معادلات فقط دارای شرایط اولیه که

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]

$x_1(t_0) \geq 0$ باشد؛ خواهد بود. از این رو ناپایدار خواندن سیستم درست نیست و با استفاده از مفهوم پایداری گوشه‌ای و قضیه ارائه شده در این مقاله به بررسی پایداری این سیستم می‌پردازیم.

$$V = x_1 \Rightarrow \dot{V} = -x_1^2 \qquad (۳۸)$$

با استفاده از توابع V_1 و V_2، به ترتیب با پارامترهای a و b، بیان شده در رابطه (۳۹) می‌خواهیم پایداری گوشه‌ای مبدا را مورد مطالعه قرار دهیم.

$$V_1 = x_1 + ax_2^2 \quad ,V_2 = -x_2^2 - bx_1^4 \qquad (۳۹)$$

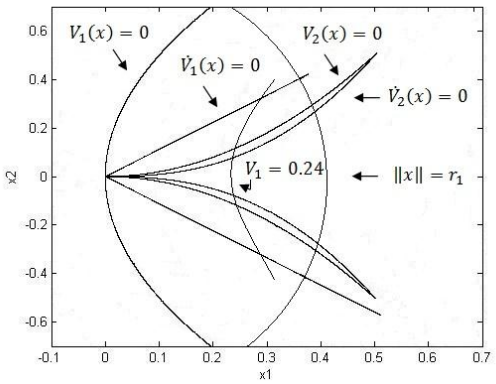
برای مشتق این دو تابع نسبت به زمان داریم:

$$\dot{V}_1 = -x_1^2 - 2ax_2^2 \quad ,\dot{V}_2 = 2x_2^2 + 4bx_1^5 \qquad (۴۰)$$

به ازای $a = -0.4$ و $b = -4$ دو تابع V_1 و V_2 شرایط قضیه را برآورده می‌کنند. در این صورت ناحیه $\Omega \subset B(0.4,0)$، که برای مرز آن داریم:

$$x \in \partial\Omega \;:\; V_1(x) = 0.24 \;\vee\; V_2(x) = 0 \qquad (۴۱)$$

وجود خواهد داشت که برای آن پایداری مجانبی گوشه‌ای مبدا تضمین می‌گردد. شکل (۴) را مشاهده کنید.



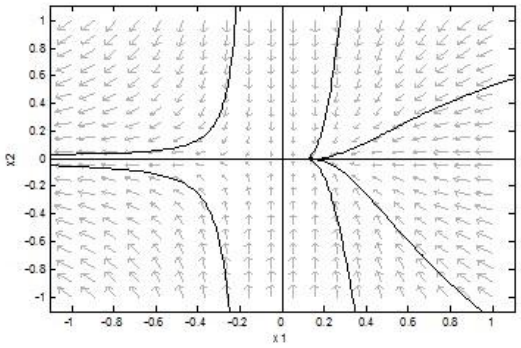
شکل ۴ : نمایش هندسی مرزها، مرتبط با مجموعه‌های مورد نیاز برای برقراری شرایط قضیه

مثال (۲) : سیستم توصیف شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 - (x_2+1)x_1\\ 0.2[-x_2 + (x_2+0.5)x_1]\end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

این سیستم توصیف کننده سینتیک آنزیم[1] است. که رفتار آن در مراجع [۲۸،۲۷] مورد بررسی قرار گرفته است و تخمینی از رویه کُند[2] این سیستم به صورت زیر ارائه شده است.

$$M_{slow} = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{x_2}{x_2+1} + \frac{0.1x_2}{(x_2+1)^4}\right\} \qquad (۴۳)$$



شکل ۵ : صفحه فاز مربوط به سیستم با رابطه (۳۷)

حال می‌خواهیم با استفاده از پایداری گوشه‌ای، ناحیه‌ای در برگیرنده رویه کُند سیستم در نزدیکی نقطه تعادل واقع در مبدا بدست آوریم که تمام مسیرهای وارد شونده به این ناحیه جذب مبدا گردد. در واقع به جای یک منحنی (رویه کُند سیستم)، یک ناحیه که در برگیرنده آن منحنی است را بدست می‌آوریم، که این امر سبب می‌شود تا تخمینی از حوزه جذب مبدا نیز حاصل گردد. تابع V و مشتق آن نسبت به زمان را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$V = -(x_2 - ax_1)(x_2 - bx_1^3) \quad ,a\,,b = cte$$

$$\dot{V} = \frac{1}{10}[ax_1^2 - (2+12a)x_1x_2 + (4+10a)x_2^2 - (4+10a)x_1x_2^2 + 2ax_1^2x_2 + (b+4ab)x_1^4 - (32b+40ab)x_1^3x_2 + 30bx_1^2x_2^2 + (2b+40ab)x_1^4x_2 - 30bx_1^3x_2^2] \qquad (۴۴)$$

حال توابع V_1 و V_2، را برای بررسی پایداری گوشه‌ای مبدا به صورت رابطه (۴۵) بدست می‌آوریم.

$$V_1 = V|_{a=20,b=0.2}$$
$$V_2 = -\dot{V}\big|_{a=5,b=0.5} \qquad (۴۵)$$

مشتق تابع V_1 نسبت به زمان را به سادگی از رابطه (۴۴) می‌توانید بدست آورید و مشتق تابع V_2 نسبت به زمان را با جایگذاری مقادیر a و b در رابطه (۴۶) می‌توانید بدست آورید.

$$\dot{V}_2 = \frac{-1}{50}[-(1+16a)x_1^2 + (16+92a)x_1x_2 - (18+80a)x_2^2 + ax_1^3 - (6+54a)x_1^2x_2 + (46+170a)x_1x_2^2 - (20+50a)x_2^3 - (36b+820ab)x_1^4 + (2a+562b+1440ab)x_1^3x_2 - (8+40a+840b+600ab)x_1^2x_2^2 + (20+50a+300b)x_1x_2^3 + (b+20ab)x_1^5 - (124b+1680ab)x_1^4x_2 + (1090b+1400ab)x_1^3x_2^2 - 750bx_1^2x_2^3 + (40ab+2b)x_1^5x_2 - (100b+800ab)x_1^4x_2^2] \qquad (۴۶)$$

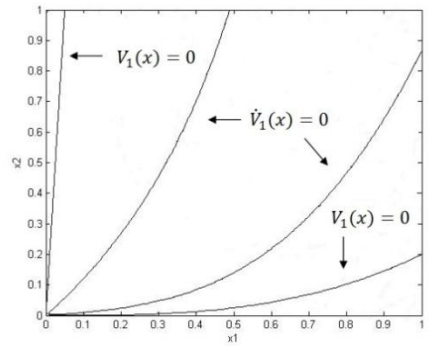
در این صورت ناحیه $\Omega \subset B(1,0)$، که برای مرز آن داریم:

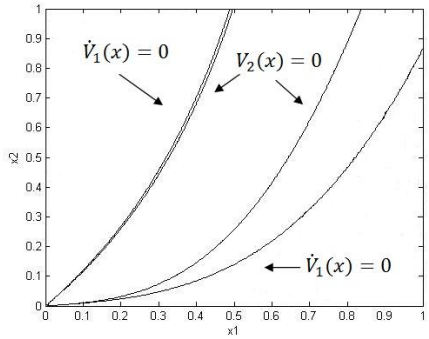
$$x \in \partial\Omega \;:\; V_1(x) = 6.11 \;\vee\; V_2(x) = 0 \qquad (۴۷)$$

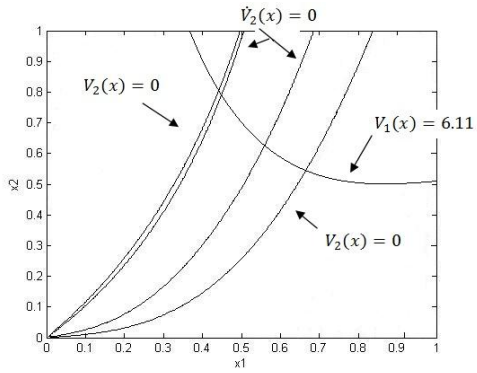
وجود خواهد داشت که برای آن پایداری گوشه‌ای مبدا تضمین می‌گردد. شکل (۶) را مشاهده کنید.

[1] Enzyme kinetics
[2] Slow manifold

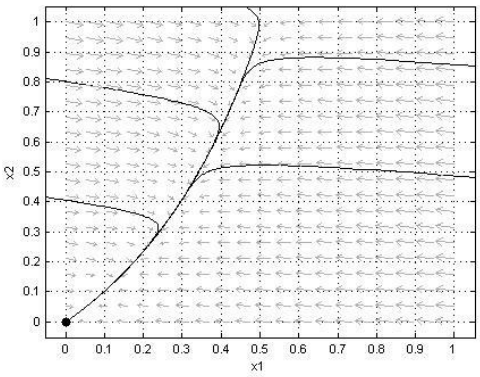
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]







شکل ۶ : نمایش هندسی منحنی‌های $V_1(x) = 0$ و $\dot{V}_1(x) = 0$ و $V_2(x) = 0$ و $\dot{V}_2(x) = 0$ و $V_1(x) = 6.11$ در ربع اول مختصات



شکل ۷ : صفحه فاز مربوط به سیستم با رابطه (۴۲)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله پایداری گوشه‌ای تعریف شده است. این نوع پایداری می تواند جایگزین مناسبی برای بررسی پایداری مجانبی نقطه تعادل سیستم‌هایی شود که وجود پاسخ در این سیستم‌ها مانند سیستم‌های مثبت، محدود به بخشی از فضای حالت باشد. همچنین قضیه‌ای مشابه با قضیه لیاپانوف در ارتباط با تضمین پایداری گوشه‌ای این گونه سیستم‌ها ارائه شد. در انتها برای دو سیستم متفاوت با استفاده از قضیه (۲)، پایداری گوشه‌ای نقطه تعادل واقع در مبدا مورد بررسی قرار داده شد.

مراجع

[1] R. I. Leine, “The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson, and Lyapunov stability,” Springer, Nonlinear Dynamics, Vol. 59, No. 1, pp. 173-182, 2010.

[2] W. Hahn, “Stability of motion,” Springer-Verlag, New York, 1967.

[3] G. A. Leonov, “Strange attractors and classical stability theory,” St. Petersburg University Press, 2008.

[4] A. M. Lyapunov, “The general problem of the stability of motion,” Translated from the Russian by A. T. Fuller, Taylor & Francis Ltd, 1992.

[5] J. P. LaSalle, “Some extensions of Liapunov’s second method,” IEEE, IRE Transactions on Circuit theory, vol. 7, no. 4, pp. 520-527, 1960.

[6] S. N. Kumpati, M. A. Anuradha, “Persistent excitation in adaptive systems,” International journal of control, Taylor & Francis, vol. 45, no. 1, pp. 127-160, 1987.

[7] D. Aeyels, J. Peuteman, “A new asymptotic stability criterion for nonlinear time variant differential equations,” IEEE Transactions on automatic control, vol. 43, no. 7, pp. 968-971, July. 1998.

[8] D. Aeyels, J. Peuteman, “Averaging results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time varying,” SIAM journal on control and optimization,” , vol. 37, no. 4, pp. 997-1010, 1999.

[9] R. Bellman, “Vector Lyapunov function,” SIAM journal of the society for industrial & applied mathematics, Series A: Control, vol. 1, no. 1, pp. 32-34, 1962.

[10] V. Lakshmikantham, V. M. Matrosov, S. Sivasundaram, “Vector Lyapunov functions and stability analysis of nonlinear systems,” Netherlands, Kluwer academic publishers, 1991.

[11] A. A. Martynyuk, “Stability by comparison technique,” Elsevier journal of nonlinear analysis : Theory, Method & Application, vol. 62, no. 4, pp. 629-641, 2005.

[12] G. Nersesov, M. Haddad, “On the stability and control of nonlinear dynamical systems via vector Lyapunov function,” IEEE Transactions on automatic control, vol. 51, no. 2, pp. 203-215, Feb. 2006.

[13] J. A. Yorke, “A theorem on Liapunov functions using $\ddot{V}$,” Springer journal Theory of computing systems, , vol. 4, no. 1, pp. 40-45, 1970.

[14] A. Butz, “Higher order derivative of Liapunov functions,” IEEE Transactions on automatic control, vol. 14, no. 1, pp. 111-112, 1969.

[15] R. W. Gunderson, “A comparison lemma for higher order trajectory derivatives,” JSTOR journal of Proceeding of the American mathematical society, vol. 27, no. 3, pp. 543-548, 1971.

[16] A. A. Ahmadi, “Non-monotonic Lyapunov functions for stability of nonlinear and switching system: Theory and

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]

[23] V. S. Bokharaie, "Stability analysis of positive systems with applications to epidemiology," Phd thesis, National university of irelandmaynooth ,2012.

[24] V. S. Bokharaie, O, Mason, M. Vewoerd, "D-Stability and Delay-Independent stability of homogeneous cooperative systems," IEEE Transactions on automatic control, Vol. 55, No. 12, pp. 2882-2885, 2010.

[25] V. S. Bokharaie, O, Mason, M. Vewoerd, "D-Stability and Delay-Independent stability of homogeneous cooperative systems," IEEE Transactions on automatic control, Vol. 56, No. 6, pp. 1489, 2011.

[26] H. K. Khalil, "Nonlinear systems," Third edition, Prentice Hall, 2002.

[27] T. J. Kaper, "An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems," American mathematical society, Proceedings of symposia in applied mathematics, Vol. 56, pp. 85-132, 1999.

[28] R. E. O'Malley, "Singular perturbation method for ordinary differential equations," Springer-Verlag, New York, 1991.

computation," MSc Thesis, Dept. of Electrical Eng and computer Sci, MIT, June 2008.

[17] V. Meigoli, S. K. Y. Nikravesh, "Stability analysis of nonlinear systems using higher order derivative of Lyapunov function candidates," Elsevier journal of Systems & control letters, vol. 61, no. 10, pp. 973-970, 2012.

[18] M. Sassano, A. Astolfi, "Dynamic Lyapunov functions: Properties and applications," American control conference, 2012.

[19] A. Berman, M. Neumann, R. J. Stern, "Nonnegative matrices in dynamic systems," New York, Wiley, 1989.

[20] T. Kaczorek, "Positive 1D and 2D systems," New York, Springer Verlag, 2002.

[21] M. A. Rami, F. Tadeo, "Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls," IEEE Trans. on circuits and systems, Vol. 54, No. 2, pp. 151-155, 2007.

[22] D. Aeyels, P. De Leenheer, "Extension of Perron-Frobenius theorem to homogeneous systems," SIAM J. on control and optimization,Vol. 41, No. 2, pp. 563-582, 2002.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-08]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1392.7.3.1.4]