مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۶۰-۵۳

تخمین ناحیه جذب سیستم های چندجمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری

فرهاد اسماعیلی[۱]، علی وحیدیان کامیاد[۲]، محمد رضا جاهد مطلق[۳]، ناصر پریز[۴]

[۱]دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد تهران Esmaili@iaubir.ac.ir

[۲]استاد، دانشکده ریاضیات کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد kamyad@math.um.ac.ir

[۳]دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت تهران Jahedmr@iust.ac.ir

[۴]استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد N-Pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۹/۳)

چکیده : در این مقاله تخمین ناحیه جذب سیستم های چندجمله ای مرتبه دو با استفاده از تابع لیاپانوف کسری مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از روش های تخمین ناحیه جذب، یافتن بزرگترین مجموعه رویه است. در این مطالعه تابع هزینه برای رسیدن به بزرگترین مجموعه رویه به جای استفاده از فاکتور شکل دهی بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه پیشنهاد شده است. تخمین ناحیه جذب به حل مسئله بهینه سازی نامعادله ماتریسی دوخطی تبدیل گردیده و با چند مثال توانایی این روش در مقایسه با روش های موجود در مطالعات اخیر بررسی شده است.

کلمات کلیدی: سیستم چند جمله ای، تخمین ناحیه جذب، چندجمله ای های مجموع مربعات، مجموعه رویه.

Domain of Attraction Estimation of Second Order Polynomial System using Rational Lyapunov Function

Farhad Esmaili, Ali Vahidian Kamyad, Naser Pariz, Mohamad Reza Jahed Motlagh

Abstract: In this paper, estimation of second order polynomial systems' domain of attraction (DA) via rational Lyapunov function is investigated. One of the methods for estimating DA is to find the greatest level set. In this study, in order to obtain the greatest level set, cost function based on increasing the region enclosed to the level set has been offered instead of using shape factor. Estimating DA has been converted into solving bilinear matrix inequality optimization problem. Capacity of this method compared to other methods in recent studies has been shown through some examples.

Keywords: Polynomial system, domain of attraction estimation, SOS polynomial, level set.

۱- مقدمه

یکی از مسائل چالش برانگیز در تئوری کنترل بدست آوردن ناحیه جذب[۱] (DA) سیستم های غیرخطی برای یک نقطه تعادل است. DA به مجموعه ای از شرایط اولیه گفته می شود که متغیرهای حالت سیستم در زمان طولانی به نقطه تعادل میل کند. تئوری زبوف[۲] [۱] مهمترین ابزار برای بدست آوردن دقیق DA است که نیاز به حل معادلات با مشتقات جزئی دارد. معمولا محاسبه دقیق ناحیه جذب غیرممکن است و

[1] Domain of Attraction

[2] Zubov

باید تخمین زده شود. روش های تخمین DA را می توان به سه دسته تقسیم کرد.

دسته اول روشهایی که با استفاده از مفهوم تابع لیاپانوف بیشینه[1] (MLF) به حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی در تئوری زبوف می پردازند [۲-۵]. Vanelli و Vidyasagar در [۲] یک روش بازگشتی با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بر اساس MLF پیشنهاد نموده اند. در [۴] تخمین DA با استفاده از تئوری moment و با محاسبه MLF تبدیل به مسئله نامعادله ماتریسی خطی (LMI) [2] شده است. در [۳] MLF توسط تابع لیاپانوف چندجمله ای با حل مسئله مینیمم سازی نا محدب[3] و در [۵] با استفاده از الگوریتم ژنتیک با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بدست آمده است.

دسته دوم روشها که پرکاربردتر است، تخمین DA با محاسبه بزرگترین مجموعه رویه[4] است. در این روش برای تخمین DA ابتدا تابع لیاپانوفی را می یابیم که مثبت و مشتق زمانی آن بر روی مجموعه رویه منفی باشد. این مجموعه رویه یک مجموعه پایای مثبت[5] است و بنابراین تخمینی از DA است. در [۶] با بکار بردن تابع لیاپانوف چند وجهی[6] محاسبه بزرگترین مجموعه رویه انجام شده است. با استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۲ تخمین DA به حل مسئله LMI منجر شده است [۷]. در سال های اخیر به دلیل پیشرفت هایی که در جبر و همچنین چند جمله ایها اتفاق افتاده، استفاده از توابع لیاپانوف پیچیده تر امکان پذیر شده است. در [۸] با بکار بردن تابع لیاپانوف چندجمله ای، نتایج بهتری برای تخمین DA سیستم های چندجمله ای بدست آمده است. در این مقاله بدنبال یافتن مجموعه رویه ای است که بزرگترین فاکتور شکل دهی[7] را شامل می شود. خدادادی و همکارانش در [۹] با تغییر فاکتور شکل دهی در هر مرحله، تخمین بهتری از DA با بکار بردن تابع لیاپانوف چندجمله ای بدست آورده اند. در [۸،۹] تخمین DA به برنامه ریزی چندجمله ای های مجموع مربعات SOS[8] تبدیل شده است. Tran و Packard در [۱۰] استفاده از چند تابع لیاپانوف چندجمله ای که هر کدام در ناحیه خاصی DA را تخمین می زنند، پیشنهاد داده و به مسئله برنامه ریزی SOS دوخطی تبدیل کرده اند. در [۱۱] تخمین DA با استفاده از تابع لیاپانوف کسری به نامعادله ماتریسی دوخطی[9] (BMI) منجر شده است.

دسته سوم روشها مبتنی بر استفاده از مجموعه های پایاست [۱۲،۱۳]. تخمین DA با بکار بردن مجموعه پایای مثبت در [۱۳] به مسئله برنامه ریزی SOS دوخطی تبدیل شده است. ایده بکار رفته در [۱۳] استفاده از مجموعه های advection که مجموعه پایای مثبت هستند، می باشد. این روش منجر به نتایج بهتری نسبت به سایر روش ها گردیده، اما بدلیل اینکه یک روش تکراری است نیاز به محاسبات زیادی برای بدست آوردن تخمین DA دارد.

در این مقاله تخمین DA سیستم های چندجمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری مطالعه شده است. برای تخمین DA مجموعه رویه محاسبه می شود که برای رسیدن به بزرگترین مجموعه رویه تابع هدف در مسئله بهینه سازی بر اساس ناحیه محصور به مجموعه رویه تعریف گردیده و مسئله تخمین DA به BMI فرموله شده است.

استفاده از تابع لیاپانوف کسری که حالتی خاص از آن تابع لیاپانوف چندجمله ای را نتیجه می دهد، به دلیل پیچیدگی بیشتر منجر به تخمین بهتری از DA خواهد شد. اما انتخاب تابع هدف مناسب اهمیت زیادی دارد. در تعدادی از مقالات [۲،۴] برای تخمین DA تابع لیاپانوف کسری بکار رفته و تابع هدف بصورت یافتن بزرگترین v_c که c تخمینی از ناحیه جذب باشد، تعریف شده است. در دسته ای دیگر از مقالات [۵،۱۱] تابع هدف بر اساس یافتن بزرگترین فاکتور شکل دهی تعریف شده که منجر به تخمین بهتری از DA گردیده است. در [۹] تابع هدف بر اساس فاکتور شکل دهی تصحیح شده، بدست آمده است که تخمین بدست آمده از DA نسبت به روش های قبل دقیق تر بوده است. استفاده از این تابع هدف ها در روش های بیان شده تضمینی برای دست یافتن به بهترین تخمین DA با تابع لیاپانوف کسری را نمی دهد. در روش پیشنهادی در این مقاله تابع هدف بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه در نظر گرفته شده که این تابع هدف با توجه به مفهوم آن می تواند به تخمین بهتر DA منجرشود.

مقاله بدین صورت سازمان دهی شده است. در بخش بعد چندجمله ای های SOS و تخمین DA با مجموعه رویه بیان شده است. در بخش ۳ نتایج اصلی ارائه شده است. به این منظور ابتدا مسئله تخمین DA با استفاده از تابع لیاپانوف کسری به SOS دوخطی تبدیل شده، سپس تابع هزینه بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه تعریف و در ادامه تخمین DA به BMI فرموله شده است. بخش ۴ چند مثال برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی ارائه و نتایج با روشهای موجود مقایسه شده است. در انتها جمع بندی نتایج ارائه گردیده است.

۲-۱ چندجمله ایهای SOS

$x^{[d]}$ را برداری شامل همه مونومیال[10] های درجه d و

$$x^{\{d\}} = \left(1, x^{[1]}, \dots, x^{[d]}\right)' \in R^{\sigma(n,d)}$$

برداری شامل همه مونومیال های با درجه کوچکتر یا مساوی d تعریف می کنیم که $x \in R^n$ و $\sigma(n,d) = \frac{(n+d)!}{n!d!}$ [۱۴]. بعنوان مثال برای $x = (x_1, x_2)'$

$$x^{[2]} = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)'$$
$$x^{\{2\}} = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)'$$

[1] Maximal Lyapunov Function
[2] Linear Matrix Inequality
[3] Non Convex
[4] Level Set
[5] Invariant Set
[6] Polyhedral
[7] Shape Factor
[8] Sum of Squares
[9] Bilinear Matrix Inequality
[10] Monomial

[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.3.7]

تعریف می گردد. بنابراین هر چند جمله ای درجه d را می توان بصورت $p(x) = cx^{\{d\}}$ بیان کرد که c بردار ضرایب چندجمله ای است. برای هر چند جمله ای درجه زوج فرم نمایش ماتریسی مربعی[1] (SMR) بصورت

$$p(x) = cx^{\{2d\}} = \left(x^{\{d\}}\right)' G x^{\{d\}}$$

را داریم (G یک ماتریس متقارن است) که این نمایش یکتا نیست. نمایش ماتریسی مربعی کامل[2] (CSMR) بصورت

$$p(x) = \left(x^{\{d\}}\right)'\left(G + L(\alpha)\right)x^{\{d\}}$$

شامل تمام SMR های ممکن چند جمله ای $p(x)$ است که $L(\alpha)$ یک ترکیب خطی از فضای

$$\boldsymbol{L} = \{L = L' | \left(x^{\{d\}}\right)' L x^{\{d\}} = 0 \quad \forall x \in R^n\}$$

است. برای سادگی از نمایش

$$G + L(\alpha) = CSMR(p(x))$$

استفاده می کنیم. هر چند جمله ای که بتوان آنرا بصورت مجموع مربعات چندجمله ایهای دیگر یعنی $p(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i^2(x)$ بازنویسی کرد را چندجمله ای SOS گوییم. لم زیر ارتباط بین چندجمله ای های SOS و CSMR را بیان می کند [۱۴،۱۵].

لم ۱: چندجمله ای $p(x)$ SOS است اگر و فقط اگر α وجود داشته باشد که $G + L(\alpha) \geq 0$ که در آن

$$G + L(\alpha) = CSMR(p(x))$$

الگوریتم محاسبه ماتریس های G و L در مرجع [۱۵] بیان شده است. تئوری زیر یکی از قضایای پر کاربرد برای تبدیل مسائل مختلف کنترل به نامعادلات چندجمله ای است [۱۴].

قضیه ۱: چندجمله ای های $p(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ مفروض است.

$$p(x) \geq 0 \ \forall x \in \{x | p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\} \qquad (۱)$$

اگر و فقط اگر چندجمله ایهای SOS $s_1(x), \dots, s_m(x)$ وجود داشته باشد که $p(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i(x) p_i(x)$ یک چندجمله ای SOS باشد.

۲-۲ تخمین DA با استفاده از مجموعه رویه

سیستم با معادلات حالت

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_{init} \qquad (۲)$$

که در آن $x \in R^n$ متغیرهای حالت و $f(x)$ یک تابع برداری چندجمله ای است، را در نظر بگیرید. مبدا یکی از نقاط تعادل پایدار مجانبی سیستم فرض شده است. DA برای مبدا بصورت

$$DA = \{x_{init} | \lim_{t \to \infty} \phi(t, x_{init}) = 0\} \qquad (۳)$$

که $\phi(t, x_{init})$ پاسخ سیستم (۲) به شرایط اولیه x_{init} است، تعریف می شود. سیستم (۲) در مبدا پایدار مجانبی است اگر تابع لیاپانوف $v(x)$ وجود داشته باشد که

$$\begin{aligned} & v(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}, \ v(0) = 0 \\ & \dot{v}(x) < 0 \quad \forall x \in D \end{aligned} \qquad (۴)$$

و D مجموعه ای در همسایگی مبدا است. از طرف دیگر مجموعه رویه به صورت

$$v_c = \{x | c - v(x) \geq 0\} \qquad (۵)$$

تعریف می شود. در صورتی که $D = v_c$ آنگاه v_c تخمینی از DA خواهد بود [۱۶]. بنابراین یافتن بزرگترین مجموعه رویه منجر به تخمین بزرگتری از DA خواهد گردید. در [۱۱] با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف ثابت، بزرگترین مجموعه رویه با حل مسئله BMI بدست آمده است که انتخاب $v(x)$ یک مسئله چالش برانگیز است. در صورتی که $v(x)$ ثابت نباشد، معمولا با استفاده از فاکتور شکل دهی، v_c بدست می آید [۹،۱۰،۱۳]. در این روش با در نظر گرفتن چندجمله ای مثبت $p(x)$ که به آن فاکتور شکل دهی گفته می شود، بزرگترین β و $v(x)$ به گونه ای بدست می آید که علاوه بر برآورده کردن شرایط (۴) شرط $\{x | \beta - p(x) \geq 0\} \subset v_c$ نیز برقرار گردد. در این صورت با افزایش β به تخمین بزرگتری از DA دست می یابیم. اما انتخاب $p(x)$ های متفاوت تخمین های متفاوتی از DA ارائه می دهد. در الگوریتم پیشنهادی در [۹]، چند جمله ای $p(x)$ در هر مرحله، قسمت درجه ۲ تابع لیاپانوف بدست آمده، در نظر گرفته شده، که منجر به تخمین بهتری از DA شده است. در صورتی که قسمت درجه دو تابع لیاپانوف، تابعی مثبت نباشد، این روش کاربرد ندارد و علاوه بر این تضمینی برای این که به بهترین تخمین ممکن از DA رسیده باشد، وجود ندارد. با یک تغییر مقیاس می توان به جای محاسبه مجموعه رویه v_c، رویه v_1 را برای تخمین DA بکار برد، اما باید تابع هزینه مناسب برای رسیدن به تخمین بهتر از DA تعریف گردد.

۳- نتایج اصلی

در این بخش ابتدا با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف کسری، تخمین DA برای مبدا سیستم (۲) تبدیل به SOS دوخطی می گردد. سپس تابع هزینه ای بر اساس افزایش ناحیه محصور در مجموعه رویه تعریف و در انتها مسئله یافتن تخمین DA به BMI تبدیل می شود.

۳-۱ تخمین DA با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری

تابع لیاپانوف کسری $v(x) = v_n(x)/v_d(x)$ را که

$$v_n(x) = c_n x^{\{n_n\}}$$

و

$$v_d(x) = c_d x^{\{n_d\}}$$

در نظر بگیرید. قضیه زیر شرایطی برای یافتن تخمین DA ارائه می دهد.

[1] Square Matrix Representation
[2] Complete SMR

قضیه ۲ : اگر چندجمله ای های $v_d(x)$ ،$v_n(x)$ و چندجمله ای های SOS $s_1(x), s_2(x), s_3(x)$ وجود داشته باشد که $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ چندجمله ای های SOS باشند آنگاه

$$v_1 = \{x | v_d(x) - v_n(x) \geq 0\} \qquad (۶)$$

تخمینی از DA مبدا سیستم (۲) است.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= v_n(x) - l(x) - s_1(x)\big(v_d(x) - v_n(x)\big) \\ q_2(x) &= v_d(x) - \epsilon - s_2(x)\big(v_d(x) - v_n(x)\big) \\ q_3(x) &= -\dot{v}(x) + \epsilon - s_3(x)\big(v_d(x) - v_n(x)\big) \end{aligned} \qquad (۷)$$

که در آن

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_n/2} \epsilon_{ij} x_i^{2j}$$

و

$$\epsilon > 0 \in R,\ \epsilon_{ij} > 0 \in R.$$

اثبات قضیه ۲: با توجه به اینکه $s_i(x), q_i(x)$ چندجمله ای های SOS هستند با بکار بردن تئوری (۱) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} &v_n(x) - l(x) \geq 0 && \forall\, x \in v_1 \\ &v_d(x) - \epsilon \geq 0 && \forall\, x \in v_1 \\ &-\dot{v}(x) + \epsilon \geq 0 && \forall\, x \in v_1 \end{aligned} \qquad (۸)$$

با $l(x)$ و ϵ تعریف شده شرایط تئوری لیاپانوف (۴) برای $D = v(x)$ برآورده می شود و بنابراین v_1 تخمینی از DA برای مبدا سیستم (۲) است.

۲-۳ تابع هزینه برای تخمین DA

در ادامه $v_n(x)$ و $v_d(x)$ چندجمله ای های درجه چهار به صورت

$$\begin{aligned} v_n(x) &= a_{n_1}x_1^2 + a_{n_2}x_1x_2 + a_{n_3}x_2^2 + a_{n_4}x_1^4 \\ &+ a_{n_5}x_1^3x_2 + a_{n_6}x_1^2x_2^2 + a_{n_7}x_1x_2^3 + a_{n_8}x_2^4 \\ v_d(x) &= 1 + a_{d_1}x_1^2 + a_{d_2}x_1x_2 + a_{d_3}x_2^2 + a_{d_4}x_1^4 \\ &+ a_{d_5}x_1^3x_2 + a_{d_6}x_1^2x_2^2 + a_{d_7}x_1x_2^3 + a_{d_8}x_2^4 \end{aligned} \qquad (۹)$$

فرض شده است. البته واضح است که چندجمله ای صورت و مخرج می توانند فقط درجه ۲ یا فقط همگن درجه ۴ نیز باشند و علاوه بر این مخرج می تواند از درجه صفر باشد که در این حالت تابع لیاپانوف چندجمله ای را نتیجه می دهد. با تعریف $v_{nd}(x)$ که

$$1 - v_{nd}(x) = v_d(x) - v_n(x)$$

$a_{nd_i} = a_{n_i} - a_{d_i}\ \ \forall\, i = 1, \dots, 8$ دارای ضرایب $v_{nd}(x)$ فرض شده است. بنابراین

$$v_1 = \{x | 1 - v_{nd}(x) \geq 0\} \qquad (۱۰)$$

تخمین DA است. برای رسیدن به تخمین بهتری از DA باید $v(x)$ را بگونه ای بیابیم که به v_1 بزرگتری منجر شود. به این منظور تابع هدف، مساحت محصور در v_1 یعنی

$$J_1 = \oiint_{v_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \qquad (۱۱)$$

تعریف می گردد و در نتیجه بزرگ شدن J_1 به معنای بزرگ شدن v_1 است. از طرفی J_1 تابعی از c_n, c_d ضرایب چندجمله ایهای صورت و مخرج تابع لیاپانوف است و بنابراین می توان آنرا بصورت $J_1(c_n, c_d)$ نمایش داد. با حل مسئله بهینه سازی

$$\begin{aligned} &\max\ \ J_1 \\ &subject\ to\ q_i(x)\ \ is\ \ SOS\ \ i = 1,2,3 \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

بهترین تخمین برای DA بدست می آید. با توجه به اینکه قیدها برحسب متغیرهای تصمیم گیری از درجه دو می باشد، در صورت تعریف یک تابع هزینه خطی، مسئله بهینه سازی (۱۲) به یک مسئله برنامه ریزی SOS دوخطی تبدیل می شود. با تعریف مختصات قطبی

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad (۱۳)$$

انتگرال ارائه شده در رابطه (۱۱) بصورت

$$J_1 = \oiint_{v_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \qquad (۱۴)$$

و سپس

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} r dr \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_1^2 \mathrm{d}\theta \qquad (۱۵)$$

ساده می شود که در آن r_1 اندازه در مختصات قطبی روی مرز v_1 است. r_1 از معادله

$$v_{nd}(x_1, x_2) = v_{nd}(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta)) = 1$$

و یا معادل آن

$$r_1^2 R_2(\theta) + r_1^4 R_4(\theta) - 1 = 0 \qquad (۱۶)$$

بدست می آید که در آن

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= a_{nd_1}\cos^2(\theta) + a_{nd_2}\cos(\theta)\sin(\theta) + a_{nd_3}\sin^2(\theta) \\ R_4(\theta) &= a_{nd_4}\cos^4(\theta) \\ &+ a_{nd_5}\cos^3(\theta)\sin(\theta) + a_{nd_6}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\ &+ a_{nd_7}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + a_{nd_8}\sin^4(\theta) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

پس از حل معادله (۱۶)، r_1^2 بصورت

$$r_1^2 = \frac{2}{R_2(\theta) + \sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}} \qquad (۱۸)$$

محاسبه می شود. برای رسیدن به یک تابع هدف خطی بر حسب پارامترهای تصمیم گیری a_{n_i} و a_{d_i} به جای ماکزیمم کردن تابع هزینه J_1 بدست آمده در رابطه (۱۵)، J_2 در رابطه (۱۹) مینیمم می شود.

$$\begin{aligned} J_2 &= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_1^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(R_2(\theta) + \sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}\Big)\mathrm{d}\theta \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه توابع $R_2(\theta)$ و $R_4(\theta)$ بر حسب پارامترهای تصمیم گیری خطی است، در صورتی که جمله $\sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}$ را در انتگرال (۱۹) حول نقطه ای خطی کنیم، به تابع هزینه خطی خواهیم رسید.

بسط تیلور تابع دو متغیره هموار دلخواه $g(R_2, R_4)$ حول مقادیر R_{20} و R_{40} برابر است با

$$\begin{aligned} g(R_2, R_4) \cong\ & g(R_{20} + R_{40}) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial R_2}\Big|_{R_2=R_{20}, R_4=R_{40}} (R_2 - R_{20}) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial R_4}\Big|_{R_2=R_{20}, R_4=R_{40}} (R_4 - R_{40}) \end{aligned}$$

حال بسط تیلور $g(R_2,R_4)=\sqrt{R_2^2+4R_4}$ با رابطه (۲۰) بدست خواهد آمد.

$$\sqrt{R_2^2+4R_4} \simeq \sqrt{R_{20}^2+4R_{40}} + \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2+4R_{40}}}(R_2-R_{20}) + \frac{2}{\sqrt{R_{20}^2+4R_{40}}}(R_4-R_{40}) \quad (20)$$

که θ برحسب توابعی شده بیان (۱۷) رابطه در که همانگونه R_4 و R_2 هستند. با جایگذاری رابطه (۲۰) در انتگرال (۱۹) و ساده کردن این انتگرال، تابع هزینه خطی شده ای به صورت ارائه شده در (۲۱) بدست می آید.

$$J_L = \pi\left(1+\frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2+4R_{40}}}\right)(a_{nd_1}+a_{nd_3}) + \frac{\pi}{4\sqrt{R_{20}^2+4R_{40}}}(3a_{nd_4}+a_{nd_6}+3a_{nd_8}) \quad (۲۱)$$

که در این تابع هزینه جملاتی که مستقل از متغیرهای تصمیم گیری هستند حذف شده است.

۳-۳ تخمین DA با حل مسئله BMI

با تعریف $G_i+L_i(\alpha_i)=CSMR(q_i(x))$ و بکار بردن لم (۱) اگر $G_i+L_i(\alpha_i)\geq 0$ آنگاه $q_i(x)$ چندجمله ای SOS است. بنابراین می توان مسئله بهینه سازی برای رسیدن به تخمین DA را بصورت

$$\min_{\epsilon>0,\epsilon_{ij}>0,\alpha_i,a_{n_i},a_{d_i}} J_L \quad \text{subject to } G_i+L_i(\alpha_i)\geq 0 \quad i=1,2,3 \quad (۲۲)$$

بیان کرد. مسئله برنامه ریزی BMI (۲۲) توسط ابزار PENBMI شرکت TOMLAB [۱۷] و YALMIP [۱۸] حل شده است.

۴-مثال ها و شبیه سازی

در ادامه چند مثال برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی در تخمین DA سیستم های چندجمله ای ارائه شده است. در همه این مثال ها مبدا نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

مثال ۱: سیستم با معادلات حالت

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -50x_1 - 16x_2 + 13.8x_1x_2\\ \dot{x}_2 = 13x_1 - 9x_2 + 5.5x_1x_2\end{cases}$$

را که در مراجع [۶،۹] مورد بررسی قرار گرفته است، را در نظر بگیرید. DA این سیستم با چندوجهی در [۶] تخمین زده شده که در شکل ۱ نمایش داده شده است. با بکار بردن تابع لیاپانوف چند جمله ای درجه ۴ نتیجه بهتری در [۹] بدست آمده است. در [۹] با استفاده از برنامه ریزی SOS و بکار بردن تابع هزینه بر حسب افزایش تابع شکل دهی، تخمین بزرگتری از DA نتیجه شده است. برای پیاده سازی روش پیشنهادی در این مقاله، باید تابع هزینه حول R_{20} و R_{40} خطی شود. انتخاب مقادیر R_{20} و R_{40} بر اساس تخمین اولیه ای که از DA بدست آمده صورت می گیرد. با توجه به DA تخمین زده شده در [۹] که در شکل ۱ بصورت خط چین نشان داده شده است، می توان ناحیه جذب را با دایره ای به شعاع $r_1=7$ تقریب زد. با جایگذاری r_1 در معادله (۱۶) باید

$$49R_2(\theta)+2401R_4(\theta)-1=0$$

برقرار باشد. تابع هزینه را حول

$$R_{20}=R_2(\theta)=1/(49*2)$$

و

$$R_{40}=R_4(\theta)=1/(2041*2)$$

که یکی از جواب های معادله مذکور است، خطی می کنیم. حال با حل مساله بهینه سازی BMI (۲۲) تابع لیاپانوف کسری

$$v(x)=v_n(x)/v_d(x)$$

که در آن

$$\begin{aligned}v_n(x) &= 0.28x_1^2 - 0.026x_1x_2 + 0.425x_2^2 + 0.014x_1^4 + 0.033x_1^3x_2 + 0.13x_1^2x_2^2 - 0.016x_1x_2^3 + 0.011x_2^4\\ v_d(x) &= 1 + 1.091x_1^2 - 0.066x_1x_2 + 1.245x_2^2\end{aligned}$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیاپانوف در شکل (۱) رسم شده است. صورت تابع لیاپانوف چندجمله ای، درجه ۴ و مخرج آن درجه ۲ فرض شده است.

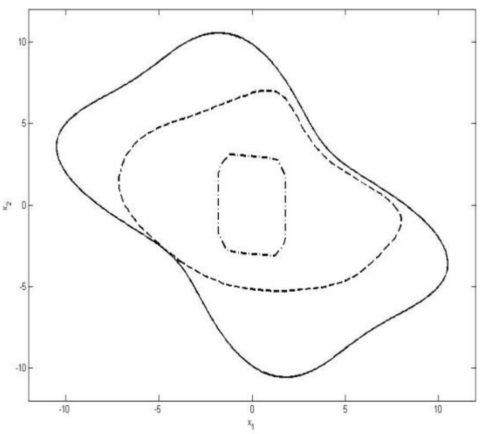
مثال ۲: سیستم چندجمله ای با معادلات حالت

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -5.2x_1 - 0.1x_2 - 0.5x_1^3 + 1.9x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - 1.7x_2^3\\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 0.4x_1^3 - 0.3x_1^2x_2 + 2.9x_1x_2^2 + 1.6x_2^3\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در [۱۹] DA این سیستم با تابع لیاپانوف درجه ۲ تخمین زده شده است. با بکار بردن الگوریتم پیشنهادی و همچنین در نظر گرفتن $n_n=4, n_d=2$ تابع لیاپانوف کسری با چندجمله ایهای صورت و مخرج

$$\begin{aligned}v_n(x) &= 56.1x_1^2 + 29.6x_1x_2 + 56.7x_2^2 + 0.014x_1^4 + 0.016x_1^3x_2 + 0.017x_1^2x_2^2 + 0.004x_1x_2^3 + 0.0018x_2^4\\ v_d(x) &= 1 + 56.8x_1^2 + 29.67x_1x_2 + 57.6x_2^2\end{aligned}$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیاپانوف در شکل ۲ رسم شده است. همچنین در روش پیشنهادی می توان تابع لیاپانوف را چندجمله ای درجه ۴ در نظر گرفت که DA تخمین زده شده پس از بدست آوردن تابع لیاپانوف در شکل ۲ رسم شده است.

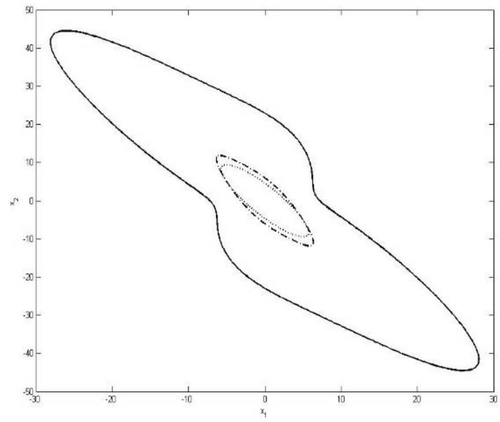


شکل ۱: DA تخمین زده شده در مثال (۱) با چندوجهی [۶] (خط–نقطه)، چندجمله ای [۹] (خط چین)، روش پیشنهادی با تابع لیاپانوف کسری (خط)

مثال ۳ : سیستم با معادلات حالت بیان شده در [۴] بصورت

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_1^2 + 0.1x_1^3\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در [۴] با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری به حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی در تئوری زبوف یا استفاده از MLF پرداخته است. DA تخمین زده شده با تابع لیاپانوف کسری که صورت آن چندجمله ای درجه ۴ و مخرج آن درجه ۲ است، در شکل ۳ رسم شده



شکل ۲: DA تخمین زده شده در مثال ۲ با استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۲ [۱۹] (نقطه چین)، روش پیشنهادی با تابع لیاپانوف چندجمله ای درجه ۴ (خط–نقطه چین) و روش پیشنهادی با تابع لیاپانوف تابع لیاپانوف کسری (خط)

است. تابع لیاپانوف کسری بدست آمده بصورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} v_n(x) = {} & 10.6x_1^2 + 6.57x_1x_2 + 9.54x_2^2 \\ & + 0.047x_1^4 + 0.0076x_1^3x_2 \\ & + 0.18x_1^2x_2^2 + 0.02x_1x_2^3 \\ & + 0.012x_2^4 \end{aligned}$$

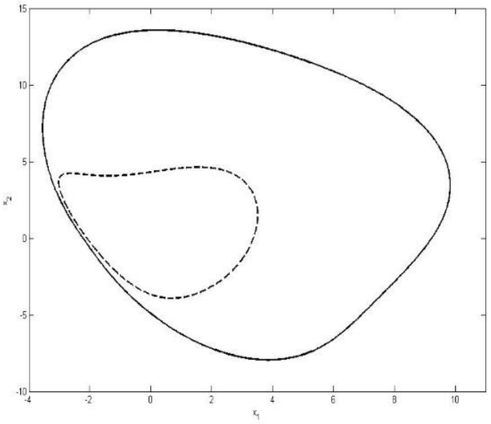
$$v_d(x) = 1 + 11.4x_1^2 + 6.48x_1x_2 + 10.3x_2^2$$

همان گونه که در شکل دیده می شود روش پیشنهادی منجر به تخمین بهتری نسبت به MLF با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری گردیده است.

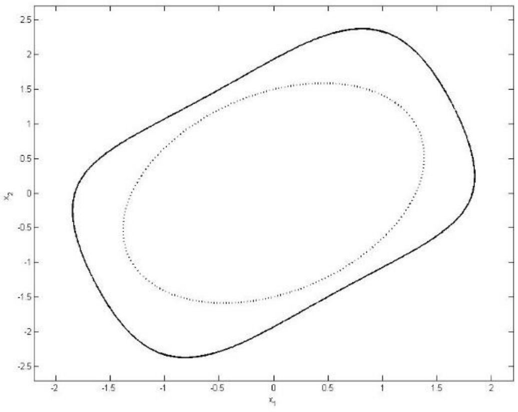
مثال ۴: سیستم وندرپول[1] با معادلات حالت

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2x_2\end{cases}$$

که تخمین ناحیه جذب آن در مقالات متعددی از جمله [۴،۲۰] ارجاع داده شده است، را در نظر بگیرید. بکار بردن روش پیشنهادی بهمراه تابع لیاپانوف چند جمله ای درجه ۲ ($n_n = 2$ ، $n_d = 0$) و یا تابع لیاپانوف



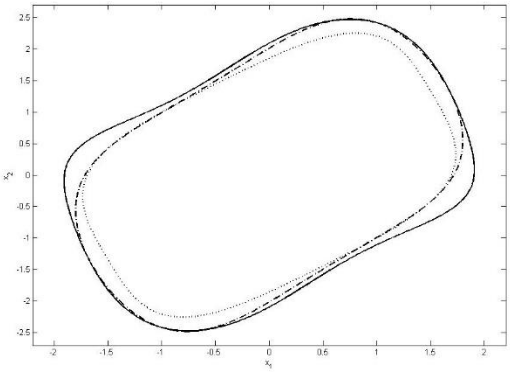
شکل ۳: تخمین DA سیستم مثال ۳ با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری و استفاده از MLF [۴] (خط چین)، تابع لیاپانوف کسری و روش پیشنهادی (خط)



شکل ۴: تخمین DA مثال ۴ با بکار بردن تابع لیاپانوف درجه ۲ [۲۰] (نقطه چین) و تابع چندجمله ای درجه ۴ با بکار بردن روش پیشنهادی (خط)

کسری درجه ۲ ($n_n = 2$ ،$n_d = 2$) منجر به تخمین یکسانی از DA این سیستم می گردد. علاوه بر این DA تخمین زده شده بوسیله تابع لیاپانوف درجه دو در [۲۰] نیز به همین نتیجه انجامیده که در شکل ۴ رسم شده است. در [۴] DA این سیستم با اعمال تابع لیاپانوف کسری درجه ۴ تخمین زده شده که در ۵ نشان داده شده است. با استفاده از

[1] van-der-pole



شکل ۵: تخمین DA مثال ۴ با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری با درجه صورت ۴ و مخرج ۲ [۴] (نقطه چین)، تابع لیاپانوف کسری با درجه صورت ۴ ومخرج ۲ با بکار بردن روش پیشنهادی (خط-نقطه چین) و تابع لیاپانوف کسری با درجه صورت و مخرج ۴ در روش پیشنهادی (خط)

روش پیشنهادی و بکار بردن تابع لیاپانوف چندجمله ای درجه ۴، DA بصورت نمایش داده در شکل ۴ تخمین زده می شود. با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری می توان به تخمین بهتری از ناحیه جذب این سیستم رسید که با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف کسری با صورت درجه ۴ و مخرج درجه ۲، DA تخمین زده شده در شکل ۵ رسم شده است. همان گونه که در این شکل مشاهده می شود به دلیل استفاده از تابع هدف مناسب، به تخمین بهتری نسبت به نتیجه مقاله [۴] بدست آمده است. پس از اعمال روش پیشنهادی، و بکار بردن تابع لیاپانوف کسری با درجه صورت و مخرج ۴ پس از حل BMIP، تابع لیاپانوف کسری با چندجمله ای صورت و مخرج

$$
\begin{aligned}
v_n(x) &= 2.29x_1^2 + 2.43x_1x_2 + 1.46x_2^2 + 0.45x_1^4 \\
&\quad + 1.44x_1^3x_2 + 1.64x_1^2x_2^2 \\
&\quad + 0.71x_1x_2^3 + 0.68x_2^4 \\
v_d(x) &= 1 + 2.19x_1^2 - 1.\,x_1x_2 + 1.49x_2^2 + 0.4x_1^4 \\
&\quad + 1.28x_1^3x_2 + 1.47x_1^2x_2^2 \\
&\quad - 0.65x_1x_2^3 + 0.62x_2^4
\end{aligned}
$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیاپانوف در شکل ۵ قابل مشاهده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله تخمین DA سیستم های چندجمله ای با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بررسی شده است. برای رسیدن به تخمین بهتر از DA تابع هزینه جدیدی بر اساس ناحیه محصور به مجموعه رویه ارائه و تخمین DA بصورت یک الگوریتم بر مبنای حل مسئله بهینه سازی BMI خلاصه شده است. همانگونه که در مثال ها نشان داده شد، این روش منجر به تخمین بهتری از DA در قیاس با MLF و استفاده از فاکتور شکل دهی شده است.

مراجع

[1] V. I. Zubov, "Methods of A.M. Lyapunov and Their Application", P. Noordhoff, 1964.

[2] A. Vannelli, M. Vidyasagar, "Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems", Automatica, vol. 21, pp. 69-80, 1985.

[3] W. Fermin Guerrero-Sanchez, J.F. Guerrero-Castellanos, V.V. Alexandrov, "A computational method for the determination of attraction regions", In: Proceedings of the Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Toluca, pp. 1-7, 2009.

[4] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions", Journal of Franklin Institute, vol. 344, pp. 535-552, 2007.

[5] F. Hamidi, H. Jerbi, et al., "Enlarging the domain of attraction in nonlinear polynomial systems", International Journal of Computers Communications and Control, vol. 8, pp. 538-547, 2013.

[6] F. Amato, F. Calabrese, et al., "Stability analysis of nonlinear quadratic systems via polyhedral Lyapunov functions", Automatica, vol. 47, pp. 614-617, 2011.

[7] A. Levin, "An analytical method of estimating the domain of attraction for polynomial differential equations", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 39, pp. 2471-2475, 1994.

[8] Jarvis-Wloszek, "Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization" Berkeley, University of California, 2003.

[9] L. Khodadadi, B. Samadi, H. Khaloozadeh, "Estimation of region of attraction for polynomial nonlinear systems: A numerical method", ISA Transaction, vol. 53, pp. 25-32, 2014.

[10] T. Weehong, A. Packard, "Stability region analysis using polynomial and composite polynomial lyapunov functions and sum-of-squares programming", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 53, pp. 565-571, 2008.

[11] G. Chesi, "Rational Lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction", Automatica, vol. 49, pp. 1051-1057, 2013.

[12] W. Ta-Chung, S. Lall, M. West, "Polynomial level-set method for polynomial system reachable set estimation", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 58, pp. 2508-2521, 2013.

[13] G. Valmorbida, J. Anderson, "Region of attraction analysis via invariant sets", In: Proceedings of

[18] J. Lofberg, "YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB", In: IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taiwan, pp. 284-289, 2004.

[19] G. Chesi, A. Garulli, et al., "LMI-based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 15, pp. 35-49, 2005.

[20] A. Tesi, F. Villoresi, et al., "On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: convexity and optimality properties for polynomial systems", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 41, pp. 1650-1657, 1996.

American Control Conference, Portland, pp. 3591-3596, 2014.

[14] G. Chesi, "LMI Techniques for optimization over polynomials in control: a survey", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 55, pp. 2500-2510, 2010.

[15] G. Chesi, A. Garulli, et al., "Solving quadratic distance problems: an LMI-based approach", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 48, pp. 200-212, 2003.

[16] H. Khalil, J. Grizzle, "Nonlinear Systems", New Jersey, Prentice hall, 2002.

[17] M. Kocvara, M. Stingl, "PENBMI user's guide", Available from http://www. penopt.com, 2005.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.3.7]