مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۵۱-۳۹

# کنترل‌کننده پیش‌بین بر پایه حالت ماندگار سیگنال کنترلی، تنظیم تحلیلی و تحلیل سیستم حلقه بسته

پیمان باقری

استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، Pbagheri@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۲۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۳۰)

**چکیده**: برای تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله در کنترل‌کننده‌های پیش‌بین، دو راهکار وجود دارد. در راهکار اول که متداول‌تر است، به مدل سیستم انتگرال‌گیر اضافه می‌شود. در کنترل‌کننده‌هایی نظیر کنترل پیش‌بین تعمیم یافته و کنترل ماتریس دینامیکی از این ایده استفاده شده است. در راهکار دوم، از مقدار مطلوب حالت ماندگار سیگنال کنترلی در تابع معیار کنترل‌کننده استفاده می‌شود. با توجه به مزیت‌های راهکار دوم، در این مقاله سعی شده است روش تنظیم تحلیلی برای چنین کنترل‌کننده‌هایی ارائه شود. با توجه به این‌که غالباً مدل‌های مرتبه اول با تاخیر بسیاری از فرآیندهای صنعتی را به خوبی توصیف می‌کنند، در این مقاله از این مدل‌ها برای تقریب سیستم واقعی و محاسبه پیش‌بینی‌ها استفاده شده است. با استفاده از این مدل‌ها و با فرض غیرفعال بودن قیدها، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته تعیین می‌گردد و تحلیل‌های عمیقی از سیستم حلقه بسته و قوام آن نسبت به نامعینی، نویز و اغتشاش ارائه می‌شود. در انتهای مقاله نیز چند مثال شبیه‌سازی برای نشان دادن قابلیت‌های روش تنظیم پیشنهادی، ارائه می‌شود.

**کلمات کلیدی:** کنترل‌کننده پیش‌بین، تنظیم تحلیلی کنترل‌کننده، مدل مرتبه اول با تاخیر، حالت ماندگار سیگنال کنترلی.

# Model Predictive Controller Based on Steady-State Value of Control Signal, Analytically Tuning and Closed-Loop Studies

**Peyman Bagheri**

**Abstract:** There are two approaches to guarantee zero steady-state error in step reference tracking and step disturbance rejection in model predictive controllers. In the first scheme, which is more prevalent, integrator is added to the model of the system. In generalized predictive control and dynamic matrix control, this structure is used. In second scheme, the desired steady-state value of control signal is used in cost function of predictive controller. Due to substantial characteristics of second scheme, in this paper it is tried to propose an analytically tuning method for these predictive controllers. Besides, many industrial processes can be effectively described with first-order plus dead time models. Hence, in this paper these models are used to provide predictions. Using these models and considering the constraints are inactive, the closed-loop transfer function is derived and a deep study on the closed-loop system and its robustness are given. Finally, the simulation results are used to evaluate the efficiency of the proposed tuning method.

**Keywords:** Model Predictive Control, Analytically Controller tuning, First Order plus Dead Time Models, Steady-State Control Signal.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

## ۱- مقدمه

کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل[1] امروزه مطرح‌ترین روش کنترل فرآیند پیشرفته محسوب می‌شود. پیشرفت‌های چشمگیر این خانواده از کنترل‌کننده‌ها و استقبال روزافزون از آن در صنعت، مخصوصاً صنایع شیمیایی مانند نفت و پتروشیمی در مراجع متعددی مورد تاکید، بررسی و مطالعه قرار گرفته است [۳-۱]. به صراحت می‌توان گفت ویژگی‌هایی مانند برخورد اصولی و مهندسی با سیستم‌های تاخیردار، کنترل سیستم‌های چندمتغیره، قابلیت حل مسئله قید و امکان استفاده از اطلاعات ورودی مرجع آینده، از دلایل موفقیت این کنترل‌کننده‌ها است. کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل به خانواده وسیعی از روش‌های کنترلی اطلاق می‌شود که در آن‌ها روند زیر اجرا می‌شود [۴]:

- استفاده از مدل برای پیش‌بینی رفتار آینده خروجی سیستم در طول افق پیش‌بین،
- تعریف یک تابع معیار (تابع هزینه) به عنوان هدف بهینه‌سازی،
- حل مسئله بهینه‌سازی برای به‌دست آوردن سیگنال‌های کنترلی بهینه در طول افق کنترل با استفاده از مدل پیش‌بین،
- اعمال اولین سیگنال کنترلی بهینه به‌دست آمده در طول افق کنترل و اجرای مجدد همین روند.

همان‌طور که می‌دانیم، بعد از پایدارسازی مهم‌ترین خواسته از یک سیستم کنترلی تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله است. برای رسیدن به این هدف، در ساختار کنترل پیش‌بین دو راهکار وجود دارد [۵]؛ که عبارت‌اند از افزودن انتگرال‌گیر به مدل سیستم و استفاده از حالت ماندگار سیگنال کنترلی. در راهکار اول، به مدل سیستم انتگرال‌گیر افزوده می‌شود و از قابلیت انتگرال‌گیر برای حذف خطای حالت ماندگار استفاده می‌شود. در این ساختار اغلب در تابع معیار کنترل‌کننده، توان دوم خطای پیش‌بینی ردیابی به همراه توان دوم تغییرات سیگنال کنترلی آینده وجود دارد. لازم به ذکر است که انتگرال‌گیر مرتبه سیستم حلقه بسته را بالا برده و هم‌چنین می‌تواند مشکل پایان‌پذیری انتگرالی[2] را به همراه داشته باشد [۶]. در ساختار دوم، مرتبه سیستم افزایش نمی‌یابد و به جای استفاده از انتگرال‌گیر، مقدار حالت ماندگار سیگنال کنترلی استفاده می‌شود و در تابع معیار کنترل‌کننده علاوه بر توان دوم خطای پیش‌بینی ردیابی، توان دوم اختلاف مقدار ماندگار سیگنال کنترلی آینده و مقدار مطلوب آن وجود دارد. ثابت می‌شود که این تابع معیار در ساختار کنترل پیش‌بین می‌تواند حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله را تضمین کند [۷]. مزیت اصلی این روش ساده بودن ساختار کنترلی و سیستم حلقه بسته ایجاد شده است. همچنین در این ساختار مشکل پایان‌پذیری انتگرال نیز وجود ندارد. البته باید ذکر گردد که این ساختار نمی‌تواند اغتشاش‌های پله ورودی را در سیستم‌های انتگرالی حذف کند ولی بحث ردیابی و حذف اغتشاش خروجی همچنان تضمین شده است؛ این مطلب با مثالی در این مقاله نشان داده می‌شود.

در کنار تمام این بحث‌ها، یکی از چالش‌های به‌کارگیری کنترل‌کننده‌های پیش‌بین نحوه تنظیم پارامترهای آن‌ها است. این مسئله از ابتدا مورد توجه محققان بوده است و در سال‌های اخیر نیز تلاش‌های زیادی در این زمینه انجام گرفته است. در [۹-۸] روش‌های تنظیم ارائه شده تا سال ۲۰۰۹ بررسی شده‌اند. اخیراً نیز در [۱۰]، دسته‌بندی جدیدی از روش‌های تنظیم کنترل‌کننده‌های پیش‌بین ارائه شده است و بر اساس آن، روش‌های جدیدتر تنظیم تا سال ۲۰۱۴ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این دسته‌بندی، روش‌های تنظیم به سه دسته اصلی تقسیم می‌گردند؛ روش‌های متفرقه تنظیم، تنظیم بر پایه روش‌های عددی و محاسبات نرم و فرمول‌های بسته تنظیم. البته فرمول‌های بسته تنظیمی که بر پایه‌های نظری استوارند، اهمیت بیشتری دارند زیرا این فرمول‌ها دید خوبی از سیستم حلقه بسته از نظر پایداری، عملکرد و مقاومت ایجاد می‌کنند. قابل ذکر است که ارتباط پیچیده پارامترهای تنظیم با پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته، مسئله تنظیم را دشوار و حل کامل آن را مسئله‌ای باز در حوزه کنترل پیش‌بین نگه داشته است. در ادامه چند نمونه از روش‌های تنظیم مطرح و جدید معرفی می‌شود.

کنترل شبکه انتقال آب آشامیدنی با استفاده از کنترل‌کننده پیش‌بین چندمتغیره در مرجع [۱۱] مد نظر بوده و تنظیم افق پیش‌بینی و وزن‌های موجود در تابع هزینه با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه بر اساس قوانین فازی انجام شده است. در [۱۲] با استفاده از بهینه‌سازی اجتماع ذرات[3] برای کنترل‌کننده پیش‌بین چندمتغیره مقید، روش تنظیمی ارائه شده است که عملکرد مقاوم را تضمین می‌کند. تنظیم کنترل پیش‌بین غیرخطی بر اساس بهینه‌سازی چندهدفه در مرجع [۱۳] مطرح شده است. در [۱۴] بر اساس محاسبه حساسیت پیش‌بینی انجام شده نسبت به پارامترهای قابل تنظیم، روش تنظیمی به‌صورت برخط برای ماتریس‌های وزنی کنترل‌کننده پیش‌بین مقید ارائه شده است. حل مسئله تنظیم به وسیله بحث تطابق کنترل‌کننده پیش‌بین با کنترل‌کننده فیدبک حالت در [۱۵] ارائه شده است. در مرجع [۱۶] کار مشابهی با مسئله تطابق کنترل‌کننده‌ها انجام شده است با این تفاوت که سیستم از دید ورودی- خروجی مد نظر بوده و با استفاده از روش بهینه‌سازی محدب، ماتریس‌های وزنی کنترل‌کننده تنظیم می‌شوند. همین ایده در مرجع [۱۷] برای تنظیم کنترل‌کننده پیش‌بین تعمیم یافته[4] به‌کار گرفته شده است برای تطابق دادن کنترل‌کننده پیش‌بین با هر کنترل‌کننده دلخواه خطی تغییرناپذیر با زمان. لازم به ذکر است که در هیچ یک از روش‌های فوق، فرمول‌های بسته تنظیم ارائه نشده است. در ادامه به بررسی چند نمونه از روش‌های تنظیمی که به فرمول بسته منجر شده‌اند، پرداخته می‌شود. در [۱۸] سعی شده است با استفاده از تحلیل واریانس و برازش منحنی برای کنترل ماتریس دینامیکی[5]

[1] Model Based Predictive Control
[2] Integral Windup

[3] Particle Swarm Optimization (PSO)
[4] Generalized Predictive Control (GPC)
[5] Dynamic Matrix Control (DMC)



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

فرمول‌های تنظیم بسته ارائه شود. همین ایده در [۱۹] برای تنظیم مقاوم کنترل ماتریس دینامیکی بکار رفته است و برای سیستم دارای نامعینی فرمول‌های بسته تنظیم ارائه شده است. البته در بخش برازش منحنی، تعیین ساختار فرمول تنظیم به صورت سعی و خطا می‌باشد. شاید بتوان [۲۰] را به عنوان اولین کار تحلیلی در حوزه تنظیم پارامترهای کنترل پیش‌بین تلقی نمود که برای تمامی پارامترهای قابل تنظیم کنترل ماتریس دینامیکی روابط تحلیلی به صورت فرمول‌های بسته تعیین کرده است. در مرجع [۲۱] با در نظر گرفتن مدل مرتبه اول با تاخیر[1] برای سیستم، روش تحلیلی برای تنظیم پارامترهای کنترل پیش‌بین تک ورودی- تک خروجی ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است برای چنین ساختاری تمام عملکردهای ممکن سیستم توسط افق کنترل یک و دو قابل دسترس است. تعمیم این ایده به سیستم‌های چندمتغیره را می‌توان در مرجع [۲۲] یافت؛ به همین ترتیب تعمیم و گسترش این روش به سیستم‌های ناپایدار و دارای تاخیر کسری در مرجع [۲۳] انجام شده است.

در این مقاله، برای تنظیم کنترل‌کننده پیش‌بین از ایده مطرح شده در [۲۳-۲۱] کمک گرفته شده است و همان‌طور که ذکر شد برای تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله، از مقدار مطلوب حالت ماندگار سیگنال کنترلی در تابع معیار کنترل‌کننده استفاده می‌شود. با توجه به این‌که به‌دست آوردن فرمول‌های تحلیلی بسته در حالت کلی امکان‌پذیر نیست و همین‌طور چون مدل‌های مرتبه اول با تاخیر بسیاری از فرآیندهای صنعتی را به خوبی توصیف می‌کنند، در این‌جا از این مدل‌ها برای تقریب سیستم واقعی و محاسبه پیش‌بینی‌ها استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است که در گسسته‌سازی مدل، اغلب فرض می‌شود تاخیر سیستم ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری است. این فرض موجب ساده‌تر شدن مدل مرتبه اول با تاخیر گسسته در زمان می‌شود ولی محدود کننده است [۲۳]. در حالتی‌که لزوماً تاخیر مدل ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری نباشد به آن مدل مرتبه اول با تاخیر کسری[2] گوییم. قابل ذکر است که در این مقاله مسئله تنظیم برای هر سیستمی که بتوان آن را با مدل مرتبه اول تقریب زد، حل شده است و فقط محدود به خود سیستم‌های مرتبه اول نیست. البته واضح است که هر چقدر دقت این تقریب بیشتر باشد، به محدوده عملکردی وسیع‌تری می‌توان دست یافت. با فرض غیرفعال بودن قیدهای سیستم، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته محاسبه می‌شود و مسئله تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده پیش‌بین به یافتن ارتباط تحلیلی بین پارامترهای تنظیم و بهره‌ای که در این تابع تبدیل حلقه بسته ایجاد می‌شود، تغییر داده می‌شود. سپس دو مفهوم کلیدی دست یافتنی[3] و شدنی[4] به واسطه تعریف بهره‌های دست یافتنی و بهره‌های شدنی ارائه می‌شود. این دو مفهوم کلیدی پل ارتباطی بین پارامترهای تنظیم و عملکرد و پایداری سیستم حلقه بسته است. در واقع با استفاده از این دو مفهوم می‌توانیم بررسی کنیم که آیا یک عملکرد مطلوب حلقه بسته با تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده دست‌یافتنی و یا شدنی هست یا خیر. این‌که به هر عملکرد دلخواهی با تنظیم کنترل‌کننده نمی‌توان دست یافت، واضح است؛ ولی تعیین بازه عملکردی دست یافتنی و شدنی بسیار کاربردی خواهد بود و یکی از نوآوری‌های مقاله محسوب می‌شود. همچنین برای سیستم حلقه بسته تحلیل‌های پایداری مقاوم در حضور نامعینی در مدل نیز انجام می‌شود و ارتباط بین تنظیم و پایداری مقاوم حلقه بسته ارائه می‌شود. در نهایت با چند مثال شبیه‌سازی به بررسی فرمول‌ها و قضایا پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در مرجع [۲۳] راهکار افزودن انتگرال‌گیر به مدل مد نظر بوده است درحالی‌که در این مقاله از حالت ماندگار سیگنال کنترلی استفاده شده است. همچنین در مرجع [۲۲] فقط سیستم‌های پایدار با تاخیر به صورت صحیح از زمان نمونه‌برداری مد نظر بوده است که محدودتر از روش ارائه شده در این مقاله است. در نهایت قابل ذکر است که در هیچ یک از مراجع [۲۳-۲۱] بحث پایداری مقاوم سیستم نامعین مطرح نشده است. ارتباط‌دهی پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته به مسئله تنظیم نیز نوآوری دیگر این مقاله است. باید به این نکته نیز اشاره کرد که اصلی‌ترین محدودیت روش ارائه شده در این مقاله غیرفعال فرض کردن قیدهای سیستم است. اما باید تاکید شود که به‌دست آوردن روابط تحلیلی تنظیم برای حالتی‌که قیدهای سیستم فعال باشند در حالت کلی امکان ناپذیر است. در کنار این بحث باید به این مطلب هم اشاره شود که یک سیستم کنترلی همیشه در مرز قیدها نخواهد بود و در خیلی از زمان‌ها قیدها فعال نخواهند بود. پس در این زمان‌ها روش ارائه شده در این مقاله، خواسته کنترلی را به صورت دقیق برآورده خواهد ساخت. در زمان‌هایی هم که قیدها فعال هستند، چون راهی جز سعی و خطا وجود ندارد، پس حداقل روش ارائه شده نقطه اولیه برای سعی و خطا برای قیدها نیز می‌تواند باشد.

ساختار مقاله به این شکل است که در بخش دوم، فرموله‌بندی مسئله کنترل پیش‌بین در فضای حالت مطرح می‌شود، روابط سیستم حلقه بسته بدست می‌آید و شروط پایداری سیستم حلقه بسته تعیین می‌گردد. بخش سوم به مسئله تنظیم کنترل‌کننده معرفی شده در بخش دوم می‌پردازد و قضایایی را برای تنظیم تحلیلی پارامترها ارائه می‌کند. همچنین نشان داده می‌شود که حداکثر عملکرد دست یافتنی سیستم حلقه بسته با افق کنترل یک نیز امکان‌پذیر است. در بخش چهارم، تحلیل پایداری مقاوم سیستم را خواهیم داشت. بخش بعدی مثال‌های شبیه‌سازی را در بر دارد که به منظور بررسی کارایی روش ارائه تنظیم شده در این مقاله آمده است و نهایتاً در بخش ششم مقاله جمع‌بندی و نتیجه‌گیری را خواهیم داشت.

## ۲- فرموله‌بندی مساله

در این بخش برای سیستم‌هایی که با مدل خطی مرتبه اول با تاخیر تخمین زده شده‌اند، یک ساختار استاندار کنترل پیش‌بین مقید در فضای

[1] First Order plus Dead Time (FOPDT)
[2] First Order plus Fractional Dead Time
[3] Achievable
[4] Feasible



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

حالت ارائه می‌شود. با فرض فعال نبودن قیدها، روابط سیستم حلقه بسته محاسبه شده و تعاریف لازم برای ورود به بحث تنظیم مطرح می‌شود.

فرض کنید مدل مرتبه اول با تاخیر تک ورودی- تک خروجی پیوسته زیر، برای تخمین سیستم واقعی در نظر گرفته شده باشد:

$$y(t) = G(s)u(t) \qquad (۱)$$

که در آن $y(t)$ خروجی مدل پیوسته و $u(t)$ سیگنال کنترلی پیوسته در زمان $t$ است و داریم:

$$G(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \qquad (۲)$$

و $k$ بهره حالت ماندگار، $\theta$ تاخیر و $\tau$ ثابت زمانی مدل است. با فرض این‌که تاخیر لزوماً ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری نباشد، شکل گسسته‌شده رابطه (۱) را با زمان نمونه‌برداری $T_s$ به شکل زیر داریم:

$$y(n) = G(z)u(n) \qquad (۳)$$

که در آن $y(n)$ خروجی مدل گسسته شده و $u(n)$ سیگنال کنترلی در $n$امین زمان نمونه‌برداری است و داریم:

$$G(z) = k(1-a)\frac{(1-b_1)z + b_1}{z^{d+1}(z-a)} \qquad (۴)$$

و $a = e^{-\frac{T_s}{\tau}}$، $d + b_1 = \theta/T_s$، $d$ عددی صحیح و غیرمنفی، $0 \le b_1 < 1$، $a > 0$ و $a \ne 1$ است. به $G(z)$ در رابطه (۴) مدل مرتبه اول با تاخیر کسری گوییم. نمایش فضای حالت (۴) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(n+1) &= \mathbf{A}\boldsymbol{x}(n) + \mathbf{B}u(n) \\ y(n) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) \end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن

$$\boldsymbol{x}(n) = [y(n)\ \ y(n+1) \dots y(n+d)\ \ k(1-a)b_1u(n-1)]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = k(1-a)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1-b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

$$\boldsymbol{C} = [1\ \ 0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0\ \ 0]$$

تحقق فوق می‌نیمال است. ابتدا باید پیش‌بینی خروجی مدل را بدست آورد؛ با توجه به رابطه (۶) داریم:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(n) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}(n) \qquad (۷)$$

که در آن:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{y}(n+d+1|n) \\ \hat{y}(n+d+2|n) \\ \vdots \\ \hat{y}(n+d+P|n) \end{bmatrix}_{P\times 1}$$

$$\boldsymbol{u}(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n+1) \\ \vdots \\ u(n+M-1) \end{bmatrix}_{M\times 1}$$

$$\mathbf{S} = k(1-a)[\bar{\mathbf{S}}_1\ \ \bar{\mathbf{S}}_2\ \ \cdots\ \ \bar{\mathbf{S}}_{M-1}\ \ \bar{\mathbf{S}}_M]$$

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = \begin{bmatrix} a^0(1-b_1) \\ a(1-b_1) + a^0 b_1 \\ \vdots \\ a^{P-1}(1-b_1) + a^{P-2}b_1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{M-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^0(1-b_1) \\ \vdots \\ a^{P-M-1}(1-b_1) + a^{P-M-2}b_1 \end{bmatrix}, \qquad (۸)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a^0(1-b_1) + v_0 \\ \vdots \\ a^{P-M}(1-b_1) + v_{P-M} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F}_1\ \ \boldsymbol{F}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{F}_d\ \ \boldsymbol{F}_{d+1}\ \ \boldsymbol{F}_{d+2}]$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \cdots = \boldsymbol{F}_d = \mathbf{0}_{P\times 1}$$

$$\boldsymbol{F}_{d+1} = a[a^0\ \ a^1\ \ \cdots\ \ a^{P-1}]^T = a\boldsymbol{F}_{d+2}$$

و $d+1$ حد پایین افق پیش‌بینی، $d+P$ حد بالای افق پیش‌بینی، $P$ طول افق پیش‌بینی، $M$ افق کنترل، $\hat{y}(n+j|n)$ پیش‌بینی $j$ گام جلوترِ خروجی مدل در $n$امین زمان نمونه‌برداری بوده و از نماد $\hat{}$ برای نشان دادن تخمین استفاده شده است. همچنین داریم:

$$v_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \sum_{j=1}^{i} a^{j-1} = 1 + a + \cdots + a^{i-1} & i \ge 1 \end{cases} \qquad (۹)$$

حال پیش‌بینی خروجی سیستم از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{y}}_p(n) &= \begin{bmatrix} \hat{y}_p(n+d+1|n) \\ \hat{y}_p(n+d+2|n) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(n+d+P|n) \end{bmatrix}_{P\times 1} \\ &= \hat{\boldsymbol{y}}(n) + b(n)\mathbf{1}_{P\times 1} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{y}}(n)$ در (۸) تعریف شده است و داریم:

$$b(n) = y_p(n) - y(n) \qquad (۱۱)$$

که $y_p(n)$ خروجی واقعی سیستم است و $b(n)$ در برگیرنده اغتشاش‌ها، نامعینی‌ها، نویز و غیرخطی‌گری سیستم است. قابل ذکر است که در رابطه (۷) فرض بر این است که سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بینی، بعد از افق کنترل ثابت می‌ماند؛ یعنی $u(n+M+j) = u(n+M-1)$ برای $j = 0, 1, 2, \cdots$. بعد از پیش‌بینی‌ها تابع معیار کنترل‌کننده پیش‌بین باید معرفی شود. در این مقاله مسئله بهینه‌سازی زیر مد نظر است:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}(n)} \Big\{ &\big(\boldsymbol{w}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}_p(n)\big)^T \mathbf{Q}\big(\boldsymbol{w}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}_p(n)\big) \\ &+ \big(\boldsymbol{u}_{ss}(n) - \boldsymbol{u}(n)\big)^T \mathbf{R}\big(\boldsymbol{u}_{ss}(n) - \boldsymbol{u}(n)\big) \Big\} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

s. t.

$$u_{min} \le u(n+i|n) \le u_{max} \quad 0 \le i \le M-1$$
$$y_{min} \le \hat{y}_p(n+j|n) \le y_{max} \quad d+1 \le j \le d+P$$

که در آن:



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}(n) &= w(n)\mathbf{1}_{P\times 1}\\ \boldsymbol{u_{ss}}(n) &= k^{-1}[w(n)-b(n)]\mathbf{1}_{M\times 1}\\ \boldsymbol{Q} &= diag\{1,q_2,q_3,\dots,q_P\}\\ \boldsymbol{R} &= k^2(1-a)^2 diag\{r_1,r_2,\dots,r_M\}\end{aligned} \quad (۱۳)$$

و $\boldsymbol{Q}$ ماتریس مثبت نیمه معین، $\boldsymbol{R}$ ماتریس مثبت معین، $w(n)$ سیگنال مرجع در $n$امین زمان نمونه‌برداری است. $diag$ برای نمایش بلوکی قطری استفاده شده است و $\boldsymbol{u_{ss}}(n)$ مقادیر مطلوب ماندگار سیگنال‌های کنترلی در طول افق کنترل است.

نکته قابل ذکر در رابطه (۱۳) این است که محدودیت دیگر روش تنظیم ارائه شده در این مقاله عدم امکان استفاده از اطلاعات آینده سیگنال مرجع $w(n)$ در طول کل افق پیش‌بینی است. البته باید تاکید شود که در رابطه (۱۳) اگر از اطلاعات آینده سیگنال مرجع تا زمان تاخیر سیستم استفاده گردد (که این کار در این مقاله امکان‌پذیر است)، می‌توان کل تاخیر سیستم را در پاسخ سیستم حلقه بسته حذف کرد که یکی از اهداف استفاده از اطلاعات آینده سیگنال مرجع است. در واقع کافی است در رابطه (۱۳) داشته باشیم: $\boldsymbol{w}(n) = w(n+d)\mathbf{1}_{P\times 1}$.

با فرض غیرفعال بودن قیدها، مسئله بهینه‌سازی (۱۲) با توجه به مدل پیش‌بین مد نظر، به بردار سیگنال کنترلی بهینه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(n) = (\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{S}+\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{S}^T\mathbf{Q}[\mathbf{1}_{P\times 1}[w(n)\\ -b(n)]-\mathbf{F}_{d+1}k(1-a)(b_1/a)u(n-1)\\ -\mathbf{F}_{d+1}y(n+d)]+\mathbf{R}(\mathbf{1}_{M\times 1}[w(n)-b(n)]/k))\end{aligned} \quad (۱۴)$$

در ادامه برای سادگی کار، بردارهای بهره زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_x &= [\mathrm{K}_{x1}\quad \mathrm{K}_{x2}\quad \cdots\quad \mathrm{K}_{xM}]^T\\ &= (\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{S}+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_{d+1}\\ \mathbf{K}_y &= [\mathrm{K}_{y1}\quad \mathrm{K}_{y2}\quad \cdots\quad \mathrm{K}_{yM}]^T\\ &= (\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{S}+\mathbf{R})^{-1}[\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{1}_{P\times 1}+\mathbf{R}\mathbf{1}_{M\times 1}k^{-1}]\\ \mathbf{K}_u &= [\mathrm{K}_{u1}\quad \mathrm{K}_{u2}\quad \cdots\quad \mathrm{K}_{uM}]^T\\ &= (\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{S}+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_{d+1}k(1-a)(b_1/a)\\ &= \boldsymbol{K}_x k(1-a)(b_1/a)\end{aligned} \quad (۱۵)$$

به این ترتیب معادله (۱۴) را با توجه به (۱۵) می‌توان بازنویسی کرد. با توجه به این‌که متغیر حالت $y(n+d)$ را نداریم از تخمین آن یعنی $\hat{y}(n+d)$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{K}_y[w(n)-b(n)]-\boldsymbol{K}_x\hat{y}(n+d)\\ -\boldsymbol{K}_x k(1-a)(b_1/a)u(n-1)\end{aligned} \quad (۱۶)$$

که در نهایت می‌توان سیگنال کنترلی لحظه حال (زمان نمونه‌برداری $n$ام) را به صورت زیر محاسبه کرد:م:

$$\begin{aligned}u(n) = K_{y1}[w(n)-b(n)]-K_{x1}\hat{y}(n+d)\\ -K_{x1}k(1-a)(b_1/a)u(n-1)\end{aligned} \quad (۱۷)$$

**لم ۱.** بردار بهره‌های $\boldsymbol{K}_x$ و $\boldsymbol{K}_y$ طبق رابطه زیر به هم وابسته هستند:

$$\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{K}_x[1+b_1(a^{-1}-1)]+\mathbf{1}_{M\times 1}k^{-1} \quad (۱۸)$$

**اثبات.** با توجه به روابط (۸) و (۱۵) این لم به سادگی اثبات می‌شود. ■

حال با توجه به لم ۱ خواهیم داشت:

$$K_{y1} = K_{x1}[1+b_1(a^{-1}-1)]+k^{-1} \quad (۱۹)$$

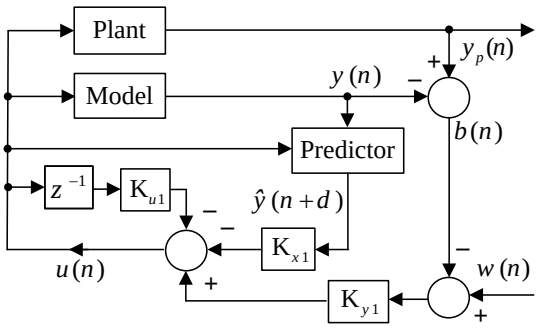
به این ترتیب می‌توان معادله سیگنال کنترلی بهینه (۱۷) را با در نظر گرفتن رابطه (۱۹) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}u(n) = (K_{x1}[1+b_1(a^{-1}-1)]+k^{-1})\times[w(n)\\ -b(n)]-K_{x1}\hat{y}(n+d)\\ -K_{x1}k(1-a)(b_1/a)u(n-1)\end{aligned} \quad (۲۰)$$

برای محاسبه $u(n)$ در رابطه (۲۰) نیاز به $\hat{y}(n+d)$ داریم. با توجه به تابع تبدیل آمده در رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\hat{y}(n+d) = a^d y(n)+k(1-a)\times[(1-b_1)\\ +b_1z^{-1}]z^{-d}a^{d-1}\sum_{i=0}^{d-1}a^{-i}z^i\,u(n)\end{aligned} \quad (۲۱)$$

به این ترتیب، با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) سیگنال کنترلی به سیستم و مدل قابل اعمال خواهد بود. در شکل ۱ بلوک دیاگرام ساختار کنترلی معادل مطرح شده در این بخش نشان داده شده است.




شکل ۱: بلوک دیاگرام معادل کنترل‌کننده پیش‌بین مطرح شده.

**تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برای سیستم مرتبه اول با تاخیر کسری.** در این بخش روابط سیستم حلقه بسته در حالتی‌که سیستم، مرتبه اول با تاخیر کسری باشد محاسبه می‌شود. با فرض فعال نبودن قیدهای سیستم و تطابق بین خروجی مدل و سیستم؛ یعنی $b(n)=0$ و انجام محاسبات ساده بر روی روابط (۲۰)، (۲۱) و (۳) رابطه سیستم حلقه بسته به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$G_{cl}(z) = \frac{[1-a+\acute{K}_{x1}(1+b_1(a^{-1}-1))][(1-b_1)z+b_1]}{z^{d+1}[z-a+\acute{K}_{x1}(1+b_1(a^{-1}-1))]} \quad (۲۲)$$

که در آن:

$$\acute{K}_{x1} = k(1-a)K_{x1} \quad (۲۳)$$

**لم ۲.** سیستم حلقه بسته (۲۲) پایدار است، اگر:

$$\frac{-1+a}{1+b_1(a^{-1}-1)} < \acute{K}_{x1} < \frac{1+a}{1+b_1(a^{-1}-1)} \quad (۲۴)$$

**اثبات.** با توجه به چندجمله‌ای مشخصه تابع تبدیل حلقه بسته، شرط پایداری به‌سادگی به‌دست می‌آید. ■

**تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برای سیستم از مرتبه بالا.** حال فرض کنیم سیستم از مرتبه بالا باشد که با مدل مرتبه اول با تاخیر کسری

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

(۳) تخمین زده شده است. سیستم مرتبه بالا داده شده باشد با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G_p(z)=\frac{y_p(n)}{u(n)}=\frac{N(z)}{D(z)} \qquad (۲۵)$$

اندیس $p$ برای مشخص کردن سیستم استفاده شده است. برای محاسبه تابع تبدیل سیستم حلقه بسته باید $\hat{y}(n+d)$ محاسبه شود. با توجه به (۲۱)، (۲۵) و (۴) داریم:

$$\hat{y}(n+d)=k(1-a)\frac{(1-b_1)+b_1z^{-1}}{1-az^{-1}}z^{-1}\times \frac{D(z)}{N(z)}y_p(n) \qquad (۲۶)$$

حال باید $b(n)$ محاسبه شود. داریم:

$$\begin{aligned} b(n)&=y_p(n)-y(n)\\ &=y_p(n)\left[1-k(1-a)\frac{D(z)}{N(z)}\times \frac{[(1-b_1)+b_1z^{-1}]z^{-d-1}}{1-az^{-1}}\right] \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با انجام محاسباتی ساده بر روی روابط (۲۰) و (۲۵) تا (۲۷)، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$G_{cl}(z)=\frac{K_{y1}N(z)(z-a)z^{d+1}}{\Delta_{cl}(z)} \qquad (۲۸)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(z)=z^d\Big((z-a)\big[zD(z)+\mathrm{K}_{y1}zN(z)\\ +\acute{\mathrm{K}}_{x1}(b_1/a)\mathrm{D}(z)\big]+[(1-b_1)z+b_1]\times\\ \acute{\mathrm{K}}_{x1}\mathrm{D}(z)\Big)-\acute{\mathrm{K}}_{y1}[(1-b_1)z+b_1]D(z) \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

و داریم $\acute{K}_{y1}=k(1-a)K_{y1}$ که در آن $K_{y1}$ با توجه به رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود.

با توجه به این‌که در ساختار معرفی شده در این بخش فقط یک بهره $\acute{K}_{x1}$ را برای تنظیم داریم، پس فقط نیاز به یک پارامتر قابل تنظیم است. به این ترتیب، مسئله تنظیم به یافتن ارتباطی تحلیلی بین پارامترهای قابل تنظیم و بهره مطلوب $\acute{K}_{xd1}$ تبدیل می‌شود. نحوه انتخاب بهره مطلوب از طریق تابع تبدیل‌های (۲۲) یا (۲۸) برای دست‌یابی به عملکرد مطلوب حلقه بسته خواهد بود. البته می‌توان از توابع تبدیل اغتشاش و نویز در خروجی که در بخش چهارم ارائه خواهد شد نیز استفاده نمود. نکته مهم این است که به ازای یک مقدار خاص برای پارامترهای تنظیم به مقداری خاص برای بهره $\acute{K}_{x1}$ دست می‌یابیم و حتی ممکن است چند مقدار مختلف برای پارامترهای تنظیم به یک مقدار برای این بهره بیانجامد که مطلب جالبی است. ولی برعکس این مطلب لزوماً صادق نیست؛ یعنی هر مقدار مطلوب این بهره یعنی $\acute{K}_{xd1}$ لزوماً دست یافتنی نیست. یعنی ممکن است هیچ مقداری برای پارامترهای تنظیم وجود نداشته باشد که به $\acute{K}_{xd1}$ خاص بیانجامد. برای مشخص‌تر شدن این مسئله دو مفهوم کلیدی دست یافتنی و شدنی در ادامه تعریف می‌شود که در بخش بعدی مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

**تعریف ۱.** به بهره مطلوب $\acute{K}_{xd1}$ که در روابط (۱۵) و (۲۳) صدق کند *بهره مطلوب دست یافتنی* گوییم.

**تعریف ۲.** به بهره مطلوب دست یافتنی $\acute{K}_{xd1}$ که پایداری سیستم حلقه بسته (۲۲) یا (۲۸) را تضمین کند، *بهره مطلوب شدنی* گوییم.

## ۳- تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده برای دستیابی به عملکرد مطلوب

در این بخش با فرض غیر فعال بودن قیدها و با در نظر گرفتن افق کنترل یک، برای تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده پیش‌بین معرفی شده در بخش قبل با هدف رسیدن به بهره مطلوب $\acute{K}_{xd1}$، قضایایی مطرح شده و فرمول‌های تحلیلی تنظیم ارائه می‌شود. همچنین محدوده بهره دست‌یافتنی و شدنی نیز در این قضایا مشخص می‌گردد. سپس بیشترین محدوده بهره دست‌یافتنی نیز تعیین می‌شود که از اهمیت زیادی برخوردار است. در نهایت نشان داده می‌شود که تمام عملکرد شدنی که کنترل‌کننده پیش‌بین برای مدل مرتبه اول با تاخیر کسری می‌تواند ایجاد کند، با افق کنترل یک قابل حصول بوده و نیازی به افزایش حجم محاسباتی به واسطه بالا بردن افق کنترل نیست.

ابتدا افق کنترل را یک فرض می‌کنیم. طبق رابطه (۱۳)، ماتریس‌های وزنی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{Q}=diag\{1,q_2,\dots,q_P\},\ \ R=k^2(1-a)^2r \qquad (۳۰)$$

همچنین در رابطه (۸) با فرض افق کنترل یک داریم:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1=k(1-a)\begin{bmatrix} a^0(1-b_1)+v_0\\ a^1(1-b_1)+v_1\\ \vdots\\ a^{P-1}(1-b_1)+v_{P-1}\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

ماتریس بهره $\boldsymbol{K}_x$ تعریف شده در رابطه (۱۵) به صورت اسکالر خواهد بود:

$$\begin{aligned} K_x=K_{x1}&=(R+\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}_{d+1}\\ &=\frac{1}{k(1-a)}\frac{aY}{X+r} \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} X&=\sum_{i=1}^{P}q_i\left(a^{i-1}(1-b_1)+v_{i-1}\right)^2\\ Y&=\sum_{i=1}^{P}q_i\left(a^{i-1}(1-b_1)+v_{i-1}\right)a^{i-1} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که در آن $q_1=1$ و $v_i$ در (۹) تعریف شده است. از بین پارامترهای وزنی $r,q_2,q_3,\dots,q_P$ به یک پارامتر نیاز هست تا بتوان به بهره مطلوب $\acute{K}_{xd1}$ دست یافت. برای افق کنترل یک، $r$ گزینه مناسبی می‌تواند باشد.

**قضیه ۱.** فرض کنید داشته باشیم:

$$\boldsymbol{Q}=diag\{1,q_2,\dots,q_P\},\ \ R=k^2(1-a)^2r \qquad (۳۴)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

که در آن $q_i \in \mathbb{R}_{\circ+}$ برای $i = 2,3,\cdots,P-1$ ، $q_P \in \mathbb{R}_+$ پارامترهای دلخواه و $r \in \mathbb{R}_+$ به عنوان پارامتر تنظیم انتخاب شده است. همچنین داریم $P \in \mathbb{Z}_+$ , $P \geq 1$. در حالتی‌که قیدهای سیستم فعال نباشد، مسئله بهینه‌سازی (۱۲) با در نظر گرفتن مدل (۳) به سیستم‌های حلقه بسته (۲۲) یا (۲۸) منجر می‌شود با بهره مطلوب دست یافتنی $\acute{K}_{xd1}$ که در نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$0 < \acute{K}_{xd1} < \frac{aY}{X} \qquad (۳۵)$$

که در آن $X$ و $Y$ در (۳۳) تعریف شده‌اند. شرط شدنی بودن این بهره، اشتراک رابطه (۳۵) و شرط پایداری سیستم حلقه بسته است. فرمول تنظیم برای دستیابی به بهره مطلوب دست یافتنی $\acute{K}_{xd1}$ به صورت زیر است:

$$r = \frac{aY - \acute{K}_{xd1}X}{\acute{K}_{xd1}} \qquad (۳۶)$$

**اثبات.** با توجه به روابطه (۳۲) و (۲۳) داریم:

$$\acute{K}_{x1} = \frac{aY}{X+r} \;\rightarrow\; r = \frac{aY - \acute{K}_{x1}X}{\acute{K}_{x1}} \qquad (۳۷)$$

با توجه به شرط مثبت معین بودن ماتریس $R$ و رابطه (۳۷) داریم:

$$r = \frac{aZ - \acute{K}_{x1}X}{\acute{K}_{x1}} > 0 \;\rightarrow 0 < \acute{K}_{xd1} < \frac{aY}{X} \qquad (۳۸)$$

با توجه به تعریف ۲، اشتراک ناتساوی (۳۸) و شرط پایداری سیستم حلقه بسته، شرط شدنی بودن بهره مطلوب را می‌دهد. ■

لازم به ذکر است که محدوده $\acute{K}_{xd1}$ در ناتساوی (۳۵)، محدودیت روش تنظیم ارائه شده در قضیه ۱ را نشان می‌دهد. در ادامه لمی آمده است که در آن حداکثر ناحیه ممکن در این ناتساوی مشخص می‌شود که در واقع حداکثر ناحیه دست یافتنی بهره مطلوب $\acute{K}_{xd1}$ را نشان می‌دهد.

**لم ۳.** فرض کنید در قضیه ۱ داشته باشیم:

$$P = 1,\;\; Q = 1,\;\; R = k^2(1-a)^2 r \qquad (۳۹)$$

در این صورت بهره مطلوب دست یافتنی $\acute{K}_{xd1}$ بیشترین محدوده عملکردی ممکن را که توسط نامعادله زیر داده می‌شود خواهد داشت:

$$0 < \acute{K}_{xd1} < a\frac{1}{1-b_1} \qquad (۴۰)$$

**اثبات.** با توجه به فرض (۳۹) و روابط (۳۵) و (۳۳)، ناتساوی فوق به دست می‌آید. حال باید ثابت کرد که این ناحیه بزرگ‌ترین ناحیه دست یافتنی ممکن است، یعنی:

$$\max_{P,q_2,q_3,\ldots,q_P} \left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{1}{1-b_1} \qquad (۴۱)$$

برای اثبات، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم وجود داشته باشد $P, q_2, q_3, \ldots, q_P$ که به ازای آن داشته باشیم $\frac{Y}{X} > \frac{1}{1-b_1}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{P} q_i\big(a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1}\big)(1-b_1)a^{i-1} \\ &\quad > \sum_{i=1}^{P} q_i\big(a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1}\big)^2 \qquad (۴۲) \\ &\Longrightarrow 0 > \sum_{i=1}^{P} q_i\big(v_{i-1}^2 + v_{i-1}a^{i-1}\big)(1-b_1) \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $0 \leq b_1 < 1$، پس فرض $\frac{Y}{X} > \frac{1}{1-b_1}$ نیز به تبعیت از آن صحیح نبوده و (۴۰) بزرگ‌ترین ناحیه دست یافتنی را می‌دهد. ■

لازم به ذکر است که حداکثر محدوده به‌دست آمده در (۴۰) هم برای سیستم‌های پایدار معتبر است و هم ناپایدار. در ساختار معرفی شده برای سیستم تقریب زده شده با مدل مرتبه اول، می‌توان نشان داد حداکثر ناحیه دست یافتنی برای افق کنترل یک، دو و بالاتر برابر است. برای افق کنترل ۲ نیز به سادگی می‌توان این مطلب را نشان داد [۲۱]. برای افق‌های بالاتر، روابط تحلیلی بسیار پیچیده می‌شود ولی برای این‌که نشان دهیم که این ناحیه برای افق‌های بالاتر نیز همان است می‌توان از شبیه‌سازی استفاده کرد. روند شبیه‌سازی به مانند [۲۱] خواهد بود که برای طولانی نشدن مقاله از آوردن آن صرف نظر می‌شود. نتیجه این‌که در ساختار ارائه شده، افزایش افق کنترل تاثیری بر عملکرد سیستم کنترلی ندارد.

**مواجهه با سیستم‌های ناپایدار و یا دارای انتگرال‌گیر.** برای استفاده از ساختار کنترلی معرفی شده، در مواجهه با سیستم‌های ناپایدار و انتگرال‌گیر باید نکاتی را مد نظر داشت. تمام روابط ارائه شده در این بخش برای سیستم‌های ناپایدار نیز معتبر است. فقط مطلبی که در مرجع [۲۳] برای مواجهه با سیستم‌های ناپایدار آمده است در این‌جا نیز باید در نظر گرفته شود. نکته این است که با توجه به ساختاری که در این مقاله برای کنترل‌کننده پیش‌بین در نظر گرفته شده است سیگنال کنترلی هم به سیستم اعمال می‌شود و هم به مدل مرتبه اول با تاخیر سیستم. در حالتی‌که سیستم و به تبعیت از آن، مدل ناپایدار باشد و کوچک‌ترین عدم تطابقی بین دینامیک مدل و سیستم باشد، اعمال سیگنال کنترلی که سیستم ناپایدار را پایدار می‌سازد به مدل، می‌تواند ناپایداری خروجی مدل را به بار آورد و در نتیجه سیستم حلقه بسته نیز ناپایدار گردد. برای حل این مشکل راهکاری در [۲۳] ارائه شده است که در این جا نیز می‌توان از آن استفاده کرد. در مورد سیستم‌های دارای انتگرال‌گیر، مدل مرتبه اول انتگرالی با تاخیر کسری مد نظر است. فرض کنید تابع تبدیل تک ورودی- تک خروجی پیوسته در زمان انتگرالی زیر، برای تخمین سیستم واقعی در نظر گرفته شده باشد:

$$G(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{s} \qquad (۴۳)$$

شکل گسسته شده مدل (۴۳) را با زمان نمونه‌برداری $T_s$ به صورت رابطه (۴) خواهیم داشت با فرض $a = 1$ و به جای عبارت $(1-a)$ مقدار ۱ قرار خواهد گرفت. تمامی روابط آمده در بخش‌ها پیشین در این‌جا نیز صادق است فقط با چند تغییر کوچک. این تغییرات به این شکل خواهد بود که در روابط به جای $a$ مقدار ۱ قرار خواهد گرفت بغیر از جاهایی



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

که عبارت $(1-a)$ وجود دارد که به جای این عبارت نیز ۱ قرار می‌گیرد. هم‌چنین تساوی آمده در رابطه (۹) یعنی $\sum_{j=1}^{i} a^{j-1} = \frac{1-a^i}{1-a}$ دیگر برقرار نخواهد بود. یک تغییر هم در $\boldsymbol{u}_{ss}(n)$ آمده در رابطه (۱۳) خواهیم داشت به صورت زیر:

$$\boldsymbol{u}_{ss}(n) = \mathbf{0}_{M\times 1} \qquad (۴۴)$$

چون در ردیابی ورودی پله برای سیستم انتگرالی، مقدار ماندگار سیگنال کنترلی برابر صفر است. به این ترتیب در هر فرمولی که عبارت $\mathbf{1}_{M\times 1}k^{-1}$ وجود داشته باشد آن را با $\mathbf{0}_{M\times 1}$ جایگزین خواهیم کرد. لازم به ذکر است که در ساختار ارائه شده در این فصل که از $\boldsymbol{u}_{ss}(n)$ استفاده شده است، اگر سیستم دارای انتگرال‌گیر باشد در حذف خطای ماندگار اغتشاش پله در سیگنال کنترلی دچار مشکل خواهد شد. همان‌طور که ذکر شد مقدار ماندگار سیگنال کنترلی در این حالت برابر صفر است. پس برای هر مقدار ورودی مرجع در حالت ماندگار، مقدار صفر را در سیگنال کنترلی خواهیم داشت. حال اگر در سیگنال کنترلی اغتشاش پله وارد شود، دیگر این ساختار قادر به صفر کردن خطای حالت ماندگار نخواهد بود. به این مطلب در بخش بعدی اشاره می‌شود. البته روش‌هایی برای تخمین اغتشاش وجود دارد که می‌توان در این ساختار از آن‌ها استفاده نمود و این مشکل را حل کرد.

## ۴- بررسی تاثیر اغتشاش، نویز و نامعینی در مدل

در این بخش به بررسی تاثیر اغتشاش‌های مختلف، نویز و نامعینی در مدل پرداخته می‌شود. برای این منظور ساختار ارائه شده در شکل ۱ به صورت معادل اسمیت[1] آن در شکل ۲ نمایش داده می‌شود. در این شکل اغتشاش‌های ورودی $d_i(n)$ و خروجی $d_o(n)$ به همراه نویز $n(n)$ نیز لحاظ شده است. هم‌چنین سیستم مد نظر به صورت نامعینی ضربی در نظر گرفته شده است:

$$G_p(z) = [1+\Delta W(z)]G(z) \qquad (۴۵)$$

که در آن $G(z)$ مدل مرتبه اول با تاخیر کسری تعریف شده در (۴) می‌باشد که برای تقریب سیستم (سیستم نامی) بکار گرفته شده است و $\Delta W(z)$ نامعینی ضربی سیستم است. در بخش ۲ دیدیم که سیستم حلقه بسته برای سیستم مرتبه اول با تاخیر کسری عبارت است از:

$$\begin{aligned} G_{cl}(z) &= T(z) \\ &= \frac{\left[1-a+\acute{K}_{x1}\left(1+b_1(a^{-1}-1)\right)\right]\left[(1-b_1)z+b_1\right]}{z^{d+1}\left[z-a+\acute{K}_{x1}\left(1+b_1(a^{-1}-1)\right)\right]} \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

تابع تبدیل حلقه بسته فوق برای سیستم نامی است، یعنی $G_p(z)=G(z)$ و آن با $T(z)$ (تابع مکمل حساسیت) نمایش داده شده است. حال تابع تبدیل از اغتشاش‌ها و نویز به خروجی را می‌توان با توجه به شکل ۲ و رابطه حلقه بسته (۴۶) به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} &\frac{y_p(n)}{d_o(n)} = 1-T(z)\ , \quad \frac{y_p(n)}{n(n)} = -T(z) \\ &\frac{y_p(n)}{d_i(n)} = G(z)\left(1-T(z)\right) \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

با توجه به تابع تبدیل‌های اغتشاش بدست آمده در رابطه (۴۷) دیده می‌شود که ساختار کنترلی معرفی شده قابلیت حذف خطای حالت ماندگار به اغتشاش پله در ورودی و خروجی را دارد. البته در حالتی‌که سیستم دارای انتگرال‌گیر باشد، برای اغتشاش در سیگنال کنترلی دچار خطای ماندگار خواهد شد. برای بررسی پایداری مقاوم سیستم نمایش داده شده در شکل ۲، تابع تبدیل دیده شده از دو سر نامعینی $\Delta$ باید محاسبه شود. با توجه به ضربی بودن نامعینی می‌توان نشان داد که تابع تبدیل دیده شده از دو سر $\Delta$ عبارت است از $T(z)W(z)$. پس شرط پایداری مقاوم این ساختار عبارت است از:

$$\|\Delta W(z)T(z)\|_\infty \le 1 \qquad (۴۸)$$

حال روش‌های حوزه فرکانسی می‌توانند برای بررسی و طراحی کنترل‌کننده به قصد رسیدن به پایداری مقاوم استفاده شوند. اگر نامعینی ساختار یافته باشد، در حالت‌های ساده می‌توان روابط تنظیم تحلیلی مفیدی برای پایداری مقاوم به‌دست آورد که در ادامه اشاره می‌شود.

فرض کنیم سیستم متعلق به مجموعه‌ای از سیستم‌های مرتبه اول با تاخیر کسری به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} G_p(z) = \Bigg\{ &\tilde{G}_p(z) = \tilde{k}(1-\tilde{a})\frac{(1-\tilde{b}_1)z+\tilde{b}_1}{z^{\tilde{d}+1}(z-\tilde{a})}\Bigg| \\ &k_{min}\le\tilde{k}\le k_{max}\,, a_{min}\le\tilde{a}\le a_{max} \\ &d_{min}\le\tilde{d}\le d_{max}\,, b_{1min}\le\tilde{b}_1\le b_{1max}\Bigg\} \end{aligned} \qquad (۴۹)$$

با توجه به $T(z)$ (تابع تبدیل حلقه بسته در حالت نامی) که در رابطه (۴۶) آمده است، تعریف می‌کنیم:

$$a_{cl} = a - \acute{K}_{x1}\left(1+b_1(a^{-1}-1)\right) \qquad (۵۰)$$

که در آن $a_{cl}$ محل قطب سیستم حلقه بسته در حالت نامی است. به این ترتیب داریم:

$$G_{cl}(z) = T(z) = \frac{(1-a_{cl})((1-b_1)z+b_1)}{z^{d+1}(z-a_{cl})} \qquad (۵۱)$$

با توجه به این‌که $|z^{d+1}|_{z=e^{-j\omega T_s}} = 1 \quad \forall\omega\in[0\,,\pi]$، داریم:

$$|T(z)| = \left|\frac{(1-a_{cl})((1-b_1)z+b_1)}{z-a_{cl}}\right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \qquad (۵۲)$$

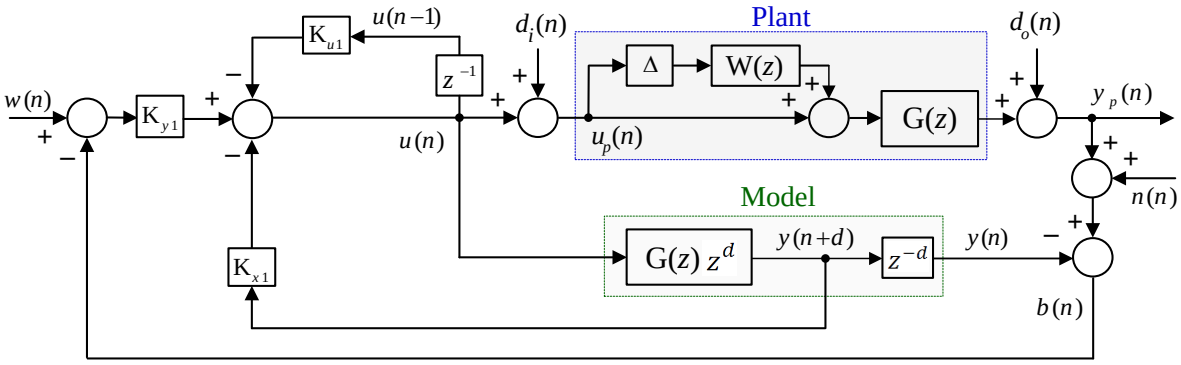
همچنین با توجه به ناتساوی $0\le b_1<1$، داریم $|(1-b_1)z+b_1|_{z=e^{-j\omega T_s}} \le 1 \quad \forall\omega\in[0\,,\pi]$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left|\frac{(1-a_{cl})\left((1-b_1)z+b_1\right)}{z-a_{cl}}\right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \\ &\le \left|\frac{1-a_{cl}}{z-a_{cl}}\right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \end{aligned} \qquad (۵۳)$$

[1] Smith



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]




شکل ۲: بلوک دیاگرام معادل ساختار کنترلی ارائه شده در این مقاله به صورت اسمیت.

حال با توجه به (۵۳) برای ساده‌تر شدن محاسبات، کمی محافظه کاری را قبول کرده و به‌جای استفاده از ناتساوی $\|\Delta W(z)T(z)\|_\infty \le 1$، از ناتساوی با محافظه کاری بیشتر به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left\| \Delta W(z) \frac{1-a_{cl}}{z-a_{cl}} \right\|_\infty \le 1 \qquad (۵۴)$$

در ادامه برای حالت‌های مختلف نامعینی، شرایط پایداری مقاوم را به‌دست می‌آوریم.

**حالت اول. نامعینی در بهره:** فرض کنیم فقط بهره حالت ماندگار سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = \tilde{k}(1-a)\frac{(1-b_1)z+b_1}{z^{d+1}(z-a)} \middle| \; k_{min} \le \tilde{k} \le k_{max} \right\} \qquad (۵۵)$$

با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = \frac{\tilde{k}-k}{k} \xrightarrow{(54)} \left\| \frac{\tilde{k}-k}{k} \frac{1-a_{cl}}{z-a_{cl}} \right\|_\infty \le 1 \qquad (۵۶)$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\max_\omega \left| \frac{1}{z-a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \left| \frac{1}{1-a_{cl}} \right| \qquad (۵۷)$$

به این ترتیب ناتساوی (۵۶) با در نظر گرفتن رابطه (۵۷) منجر می‌شود به:

$$\left| \frac{\tilde{k}-k}{k} \right| \le 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} 0 \le \tilde{k} \le 2k & k>0 \\ 2k \le \tilde{k} \le 0 & k<0 \end{cases} \qquad (۵۸)$$

ناتساوی‌های (۵۸) نشان می‌دهند که میزان تحمل نامعینی در بهره سیستم مستقل از تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده است و فقط به انتخاب مقدار نامی بهره وابسته است. هم‌چنین باید ذکر شود که در صورت انتخاب مقدار نامی بهره برابر با $k = (k_{min} + k_{max})/2$ و با فرض تغییر علامت ندادن بهره سیستم، رابطه (۵۸) نشان می‌دهد که برای هر مقدار نامعینی در بهره سیستم (۵۵) با این انتخاب همواره پایداری مقاوم را داریم. این خصوصیت مهم، می‌تواند یکی از نقاط قوت روش کنترلی ارائه شده باشد.

**حالت دوم. نامعینی در ثابت زمانی سیستم:** فرض کنیم فقط ثابت زمانی سیستم نامعین باشد، یعنی:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1-\tilde{a})\frac{(1-b_1)z+b_1}{z^{d+1}(z-\tilde{a})} \middle| \; a_{min} \le \tilde{a} \le a_{max} \right\} \qquad (۵۹)$$

با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = \frac{a-\tilde{a}}{1-a}\frac{z-1}{z-\tilde{a}} \xrightarrow{(54)} \left\| \frac{(a-\tilde{a})(1-a_{cl})}{1-a} \frac{z-1}{(z-\tilde{a})(z-a_{cl})} \right\|_\infty \le 1 \qquad (۶۰)$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$\max_\omega \left| \frac{z-1}{(z-\tilde{a})(z-a_{cl})} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \left| \frac{1}{(1-a_{cl})\sqrt{\tilde{a}} + (1-\tilde{a})\sqrt{a_{cl}}} \right| \qquad (۶۱)$$

به این ترتیب ناتساوی (۶۰) با در نظر گرفتن رابطه (۶۱) منجر می‌شود به:

$$-\frac{1-a}{1-a_{cl}} \le \frac{a-\tilde{a}}{(1-a_{cl})\sqrt{\tilde{a}} + (1-\tilde{a})\sqrt{a_{cl}}} \le \frac{1-a}{1-a_{cl}} \qquad (۶۲)$$

ناتساوی‌های (۶۲) نشان می‌دهند که انتخاب $a_{cl}$ و $a$ بر میزان نامعینی تحمل شده در ثابت زمانی تاثیرگذار است. به این ترتیب که هر چقدر $a_{cl}$ کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی کمتری قابل تحمل است. در نتیجه با توجه به رابطه (۵۰) هر چقدر $\acute{K}_{x1}$ کوچک‌تر انتخاب شود سیستم حلقه بسته نسبت به نامعینی در ثابت زمانی مقاومت بیشتری خواهد داشت.

**حالت سوم. نامعینی در بخش کسری تاخیر سیستم:** فرض کنیم بخش کسری تاخیر سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1-a)\frac{(1-\tilde{b}_1)z+\tilde{b}_1}{z^{d+1}(z-a)} \middle| \; b_{1min} \le \tilde{b}_1 \le b_{1max} \right\} \qquad (۶۳)$$

در این حالت با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = (b_1-\tilde{b}_1)\frac{z-1}{(1-b_1)z+b_1} \xrightarrow{(54)} |(b_1-\tilde{b}_1)(1-a_{cl})| \left\| \frac{z-1}{z-a_{cl}} \right\|_\infty \le 1 \qquad (۶۴)$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$\max_\omega \left| \frac{z-1}{z-a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \frac{2}{1+a_{cl}} \qquad (۶۵)$$



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

به این ترتیب ناتساوی (۶۴) با در نظر گرفتن رابطه (۶۵) منجر می‌شود به:

$$-\frac{1+a_{cl}}{2(1-a_{cl})} \le b_1 - \tilde{b}_1 \le \frac{1+a_{cl}}{2(1-a_{cl})} \qquad (۶۶)$$

با توجه به ناتساوی‌های (۶۶) می‌بینیم که انتخاب $a_{cl}$ و $b_1$ بر میزان نامعینی تحمل شده در بخش کسری تاخیر تاثیرگذار است. هر چقدر $a_{cl}$ کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی کمتری قابل تحمل است. در نتیجه هر چقدر $\acute{K}_{x1}$ کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی بیشتری قابل تحمل است. همچنین، با توجه به (۶۶) می‌توان نشان داد که به ازای $a_{cl} \ge \frac{1}{3}$ پایداری مقاوم حلقه بسته نسبت به هر مقدار نامعینی در بخش کسری تاخیر سیستم تضمین شده است؛ دقت شود که داریم $0 \le b_1, \tilde{b}_1 < 1$.

**حالت چهارم. نامعینی در بخش صحیح تاخیر سیستم:** فرض کنیم بخش صحیح تاخیر سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1-a)\frac{(1-b_1)z+b_1}{z^{\tilde{d}+1}(z-a)} \middle| \; d_{min} \le \tilde{d} \le d_{max} \right\} \qquad (۶۷)$$

در این حالت با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = z^{\tilde{d}-d} - 1 \xrightarrow{(54)} \left\| (1-a_{cl})\frac{z^{\tilde{d}-d}-1}{z-a_{cl}} \right\|_\infty \le 1 \qquad (۶۸)$$

با توجه به صحیح بودن $\tilde{d} - d$ به دست آوردن رابطه تحلیلی از (۶۸) بسیار مشکل است. اگر معادل پیوسته در زمان آن در نظر گرفته شود و برای آن، محاسبات انجام شود فرمول تحلیلی زیر را خواهیم داشت:

$$|\tilde{\theta} - \theta| \le \tau_{cl}\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \qquad (۶۹)$$

که در آن $\tau_{cl} = -\frac{T_s}{ln(a_{cl})}$ و $round\left(\frac{\tilde{\theta}-\theta}{T_s}\right) = \tilde{d} - d$ و تابع $round$ عبارت را به سمت نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی خود عبارت گرد می‌کند. با توجه به صحیح بودن $\tilde{d} - d$ می‌توان از رابطه زیر برای برآورده کردن ناتساوی (۶۸) استفاده نمود:

$$max\left(0 \;,\; -round\left(\frac{-\pi\sqrt{2}}{3\,ln(a_{cl})}\right)\right) \le \tilde{d} - d \le round\left(\frac{-\pi\sqrt{2}}{3\,ln(a_{cl})}\right) \qquad (۷۰)$$

با بررسی ناتساوی (۷۰) برای تمامی $\tilde{d} - d$ از ۱ تا ۲۰ دیده می‌شود رابطه فوق با دقت خوبی به جواب منجر می‌شود (برای $a_{cl} > 0.7$ دقت بالایی دارد). با توجه به ناتساوی (۷۰) دیده می‌شود که هرچقدر $a_{cl}$ بزرگ‌تر و در نتیجه $\acute{K}_{x1}$ کوچک‌تر باشد، نامعینی بیشتری در بخش صحیح تاخیر قابل تحمل است. همچنین می‌توان نشان داد که به ازای انتخاب $a_{cl} \le \frac{1}{3}$ هیچ نامعینی در بخش صحیح تاخیر قابل تحمل نیست.

## ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از دو مثال شبیه‌سازی به بررسی روش تنظیم ارائه شده پرداخته می‌شود. در مثال اول یک سیستم نامینیم فاز و در مثال دوم یک سیستم انتگرالی مد نظر است.

### ۵-۱ مثال شبیه سازی اول (سیستم نامینیمم فاز)

سیستم داده شده با تابع تبدیل غیرمی‌نیمم فاز $G_p(s)$ و تقریب مدل مرتبه اول با تاخیر آن $G(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۰]:

$$G_p(s) = \frac{(-50s+1)e^{-10s}}{(100s+1)^2}, \quad G(s) = \frac{e^{-100s}}{163s+1}$$

زمان نمونه برداری ۲۰ ثانیه برای سیستم و مدل فوق مناسب است. صورت گسسته شده سیستم و مدل را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$G_p(z) = \frac{0.04056z^2 + 0.0328z + 0.04062}{z(z^2 - 1.637z - 0.6703)}$$
$$G(z) = 0.1155\frac{0.75z + 0.25}{z^6(z - 0.8845)}$$

فرض کنید پاسخ مطلوب مد نظر دارای حداکثر فراجهشی کم‌تر از ٪۵، حداکثر فروجهشی کم‌تر از ٪۱۵ و زمان نشست (با معیار ٪۲) بین ۳۰۰ تا ۴۰۰ ثانیه داشته باشد. با توجه به تابع تبدیل حلقه بسته (۲۸) و عملکرد مطلوب مد نظر، ناحیه مطلوب برای بهره عبارت است از $0.034 < \acute{K}_{xd1} < 0.064$. این ناحیه با شبیه‌سازی به‌دست آمده است و چون داخل حداکثر ناحیه دست‌یافتنی $0 < \acute{K}_{xd1} < 1.18$ است، با استفاده از قضایای آمده در بخش‌های قبل می‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت. فرض کنیم $\acute{K}_{xd1} = 0.04$ انتخاب ما باشد. در قضیه ۱ فرض کنید داشته باشیم $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{P\times P}$، با توجه به ناتساوی (۳۵)، به‌دست می‌آوریم $P \le 25$ . فرض کنید افق پیش‌بینی $P$ را برابر ۱۰ انتخاب نماییم. به این ترتیب با توجه به (۳۶) پارامتر تنظیم به صورت $r = 469.58$ و در نتیجه $R = 1.66$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم قید حاکم بر سیستم به صورت $|u(n)| \le 1.1$ باشد. در شکل ۳ نتیجه اعمال کنترل‌کننده تنظیم شده به سیستم آمده است. در حالتی‌که قیدهای مسئله فعال نباشد پاسخ سیستم حلقه بسته بر پاسخ مطلوب منطبق است و خواسته‌های زمانی مسئله برآورده شده است. همچنین در زمان ۵۰۰۰ و ۶۰۰۰ ثانیه به ترتیب اغتشاش‌های پله در خروجی و سیگنال کنترلی با دامنه ۰/۳ جمع شده‌اند و در زمان ۷۰۰۰ ثانیه نویز سفید با واریانس ۰/۰۰۱ با خروجی جمع شده است. در شکل ۳ دیده می‌شود که اغتشاش‌ها با سرعت مناسبی دفع شده‌اند و خطای ماندگار نداریم. هم‌چنین تاثیر نویز اندازه‌گیری هم در شکل دیده می‌شود. همچنین در زمان‌هایی که قید فعال بوده است هم دیده می‌شود که پاسخ سیستم اختلاف زیادی با مقدار مطلوب ندارد.

### ۵-۲ مثال شبیه‌سازی دوم (سیستم دارای انتگرال‌گیر)

سیستم انتگرالی داده شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G_p(s) = G(s) = \frac{e^{-4s}}{s}$$

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

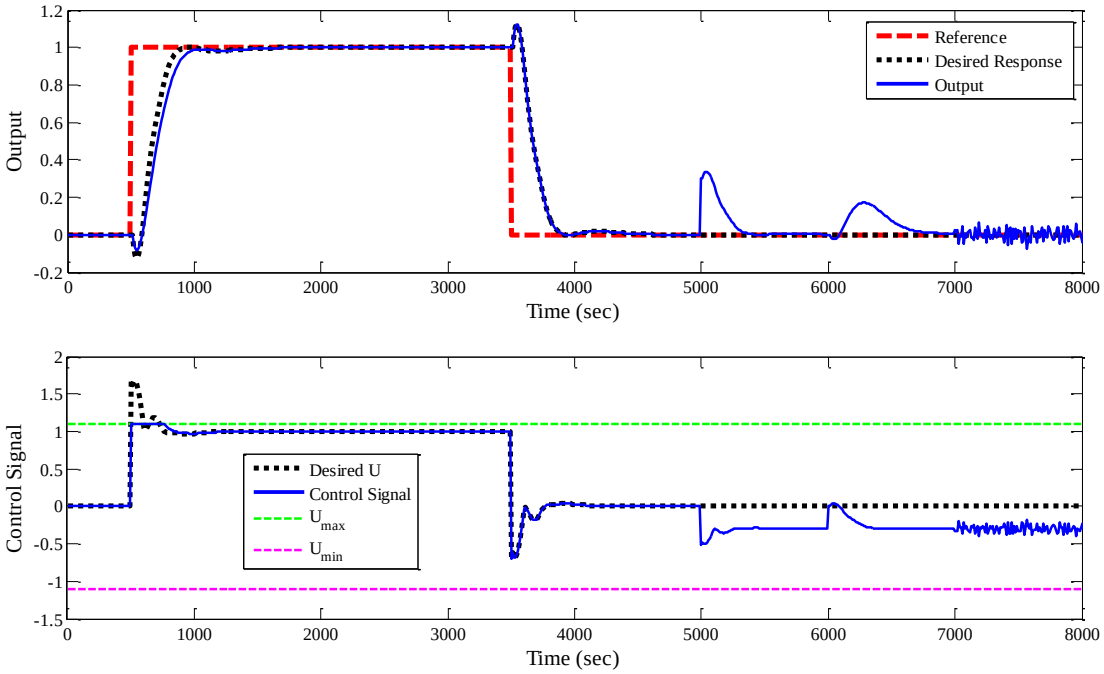
زمان نمونه‌برداری را برابر ۱ ثانیه در نظر می‌گیریم. شکل گسسته شده سیستم را به صورت زیر داریم:

$$G_p(z) = G(z) = \frac{1}{z^4(z-1)}$$

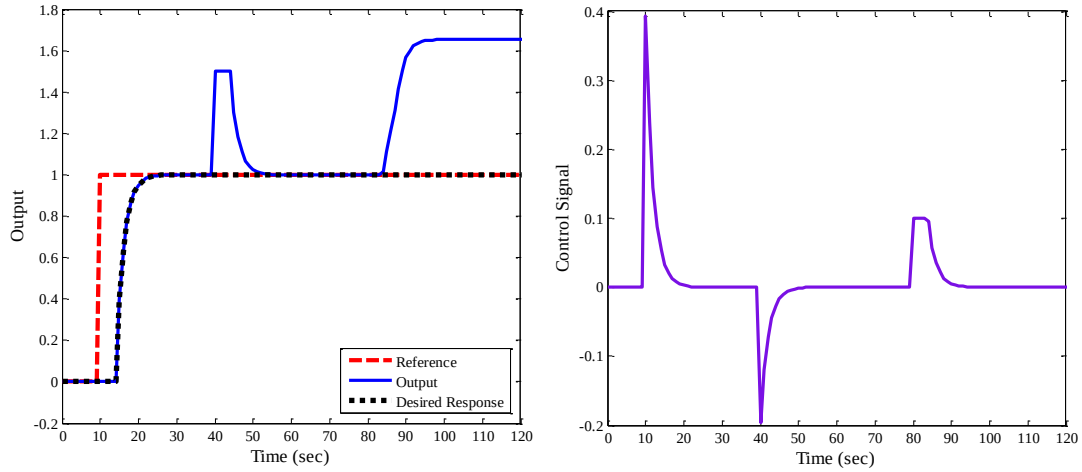
فرض کنیم می‌خواهیم قطب سیستم حلقه بسته در $s = -5$ قرار گیرد. با توجه به تابع تبدیل حلقه بسته (۲۲) و با توجه به زمان نمونه‌برداری و $a = 1$ خواهیم داشت $\acute{K}_{xd1} = 0.3935$. از قضیه ۱ برای تنظیم استفاده می‌کنیم. فرض کنید داشته باشیم $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{P\times P}$. با توجه به ناتساوی (۳۵) داریم $P \le 4$. با فرض افق پیش‌بینی برابر ۳ و با استفاده از (۳۶) خواهیم داشت $R = r = 1.248$. در شکل ۴ نتیجه شبیه‌سازی آمده است. در لحظه ۴۰ و ۸۰ ثانیه به ترتیب اغتشاش‌های پله با دامنه ۰/۵ و ۰/۱ به ترتیب در خروجی و سیگنال کنترلی جمع شده‌اند. همان‌طور که در بخش سوم ذکر شد این ساختار قادر به حذف خطای ماندگار ایجاد شده به دلیل اغتشاش پله در سیگنال کنترلی نیست. با استفاده از (۴۷) نیز این مطلب را می‌توان نشان داد:

$$\frac{y_p(n)}{d_i(n)} = G(z)\big(1 - T(z)\big) = \frac{z^4 + (1-a_{cl})(z^2+1)(z+1)}{z^4(z-a_{cl})}$$

که در آن $a_{cl}$ در (۵۰) تعریف شده است.



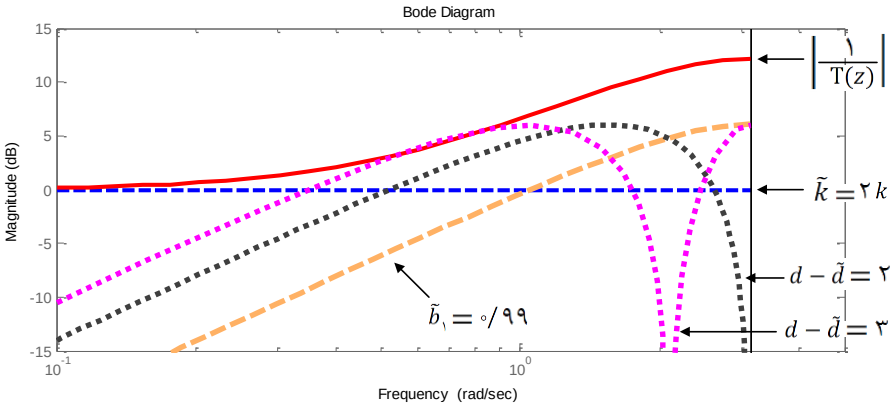

شکل ۳: پاسخ سیستم حلقه بسته در اولین مثال شبیه‌سازی.



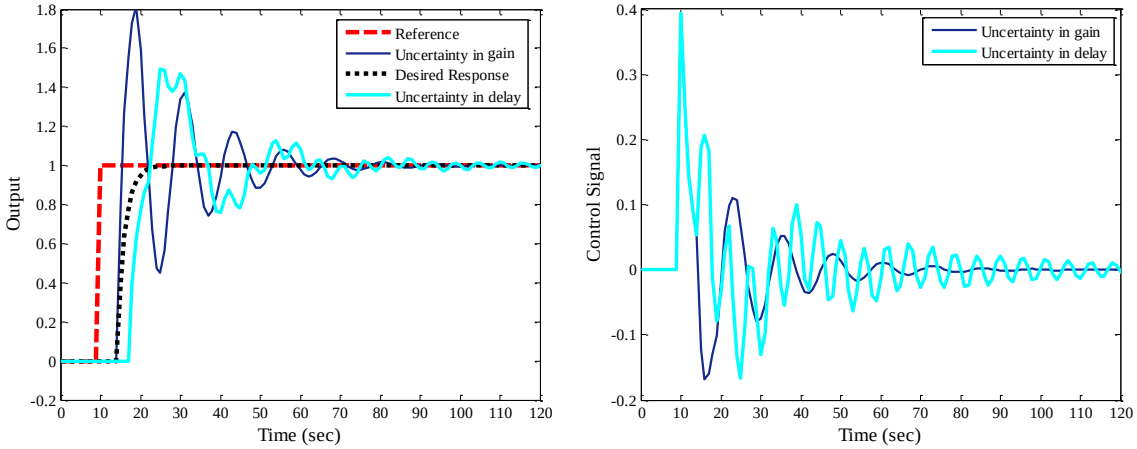

شکل ۴: پاسخ سیستم حلقه بسته در دومین مثال شبیه‌سازی.



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]




شکل ۵: نمودارهای بود نامعینی‌ها و تابع تبدیل حلقه بسته نامی در دومین مثال شبیه‌سازی.




شکل ۶: تاثیر نامعینی در مدل در شبیه‌سازی مربوط به دومین مثال شبیه‌سازی.

از رابطه فوق خطای ماندگار برابر است با $\frac{1}{1-a_{cl}} + 4$. در این مثال داریم $a_{cl} = 0.6065$. پس خطای حالت ماندگار به اغتشاش پله واحد در سیگنال کنترلی برابر است با ۶/۵۴. در انتهای این شبیه‌سازی نیز بررسی مقاومت کنترل‌کننده طراحی شده با استفاده از روابط بخش چهارم مد نظر است. نامعینی در بهره، بخش کسری تاخیر و بخش صحیح تاخیر را تک تک در نظر می‌گیریم. طبق رابطه (۵۸) حداکثر میزان نامعینی در بهره که منجر به ناپایداری نشود برابر است با $\tilde{k} - k = 1$. هم‌چنین برای بخش کسری تاخیر طبق رابطه (۶۶) داریم $-2.04 \le b_1 - \tilde{b}_1 \le 2.04$ پس برای هر مقدار نامعینی در بخش کسری تاخیر، پایداری مقاوم را خواهیم داشت. برای بخش صحیح تاخیر طبق رابطه (۷۰) داریم $\tilde{d} - d \le 2.96$. در شکل ۵ نمودار بود مربوط به هر نامعینی به همراه بود معکوس سیستم حلقه بسته در حالت نامی آمده است. اگر نامعینی‌ها در تمامی فرکانس‌ها زیر نمودار بود معکوس سیستم حلقه بسته در حالت نامی قرار گیرند، پایداری مقاوم تضمین شده است. البته این شرایط بدست آمده محافظه کارانه می‌باشد. به عنوان مثال برای $\tilde{k} - k = 1$ سیستم در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد و یا به ازای $\tilde{d} - d = 3$ سیستم باید ناپایدار شده باشد اما در شکل ۶ هر دوی این حالت‌ها شبیه‌سازی شده‌اند و دیده می‌شود که ناپایداری رخ نداده است.

## ۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، به تنظیم تحلیلی پارامترهای کنترل‌کننده پیش‌بین تک ورودی- تک خروجی پرداخته شد. با در نظر گرفتن مقدار ماندگار سیگنال کنترلی در ساختار کنترل پیش‌بین، حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله تضمین شد. با فرض مدل مرتبه اول پایدار، ناپایدار و انتگرالی با تاخیر کسری، تحلیل‌های حلقه بسته انجام شد و فرمول‌های تحلیلی تنظیم بدست آمد. عملکرد دست‌یافتنی، شدنی کنترل‌کننده مشخص گردید و بر اساس آن حداکثر عملکرد دست یافتنی نیز بدست آمد. هم‌چنین برای پایداری مقاوم سیستم دارای نامعینی ساختار یافته در حالت‌های خاصی فرمول‌های تحلیلی ارائه



[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]

شد. در انتها نیز با استفاده از مثال‌هایی قابلیت‌ها و محدودیت‌های روش ارائه شده مورد بررسی قرار گرفت.

## مراجع

[1] M. Kano, M. Ogawa, "The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey", Journal of Process Control, Vol. 20, No. 9, pp. 969–982, 2010.

[2] M. L. Darby, M. Nikolaou, "MPC: Current practice and challenges", Control Engineering Practice, Vol. 20, No. 4, pp. 328–342, 2012.

[3] D. Q. Mayne, "Model predictive control: Recent developments and future promise," Automatica, Vol. 50, No. 12, pp. 2967–2986, 2014.

[4] E. F. Camacho, A. C. Bordons, Model Predictive Control. Berlin: Springer, 2013.

[5] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, Model Predictive Control: Theory and Design, London, U.K.: Nob Hill Publishing, 2009.

[6] J. A. De Dona, G. C. Goodwin, M. M. Seron, "Anti-windup and Model Predictive Control: Reflections and Connections," European Journal of Control, Vol. 6, pp. 467–477, 2000.

[7] J. A. Rossiter, Model-based predictive control: a practical approach. CRC press, 2003.

[8] K. Y. Rani, H. Unbehauen, "Study of Predictive Controller Tuning Methods", Automatica, Vol. 33, No. 12, pp. 2243–2248, 1997.

[9] L. Garriga, M. Soroush, "Model Predictive Control Tuning Methods: A Review", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 49, No. 8, pp. 3505–3515, 2010.

[۱۰] علی خاکی صدیق و پیمان باقری، "بررسی روش‌های تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده‌های پیش‌بین و راهکارهای نوین تنظیم"، مجله کنترل، دوره ۸، شماره ۳، صفحه ۶۹-۸۵، پاییز ۱۳۹۳.

[11] J. M. Grosso, C. Ocampo-Martínez, V. Puig, "Learning-based tuning of supervisory model predictive control for drinking water networks", Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 26, No. 7, pp. 1741–1750, 2013.

[12] G. A. NeryJúnior, M. A. F. Martins, R. Kalid, "A PSO-based optimal tuning strategy for constrained multivariable predictive controllers with model uncertainty", ISA Transactions, Vol. 53, No. 2, pp. 560–567, 2014.

[13] M. Vallerio, J. Van Impe, F. Logist, "Tuning of NMPC controllers via multi-objective optimization", Computers & Chemical Engineering, Vol. 61, pp. 38–50, 2014.

[14] A. Al. Ghazzawi, E. Ali, A. Nouh and E. Zafiriou, "On-line Tuning Strategy for Model Predictive Controllers", Journal Process Control, Vol. 11, No. 3, pp. 265–284, 2001.

[15] S. Di Cairano, A. Bemporad, "Model Predictive Control Tuning by Controller Matching", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No. 1, pp. 185–190, 2010.

[16] G. Shah, S. Engell, "Tuning MPC for Desired Closed-Loop Performance for MIMO Systems", In American Control Conference (ACC), San Francisco, USA, pp. 4404–4409, 2011.

[17] Q. N. Tran, L. Özkan, A.C.P.M. Backx, "Generalized predictive control tuning by controller matching", Journal of Process Control, Vol. 25, pp. 1–18, 2015.

[18] P. Bagheri, A. Khaki-Sedigh, "Tuning of Dynamic Matrix Controller for FOPDT models using analysis of variance", In Proc of 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, pp. 12319–12324, 2011.

[19] P. Bagheri, A. Khaki-Sedigh, "Robust tuning of dynamic matrix controllers for first order plus dead time models," Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, No 22, pp. 7017–7031, 2015.

[20] R. Shridhar, D. J. Cooper, "A tuning strategy for unconstrained SISO model predictive control", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 36, No. 3, pp. 729–746, 1997.

[21] P. Bagheri, and A. Khaki Sedigh, "Analytical approach to tuning of model predictive control for first-order plus dead time models," IET Control Theory & Applications, Vol. 7, No. 14, pp. 1806–1817, 2013.

[22] P. Bagheri, and A. Khaki-Sedigh, "An analytical tuning approach to multivariable model predictive controllers", Journal of Process Control, Vol. 24, No. 12, pp. 41–54, 2014.

[23] P. Bagheri, and A. Khaki-Sedigh, "Closed form tuning equations for model predictive control of first-order plus fractional dead time models", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 13, No. 1, pp. 73–80, 2015.

[ Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-05 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1395.10.3.4.8 ]