

# طراحی کنترل کننده چند متغیره غیر خطی و بهینه برای ردیابی مسیر ربات‌های متحرک غیر هولونومیک

حسین میرزائی نژاد<sup>۱</sup>، علی محمد شافعی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، بخش مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، h\_mirzaeinejad@uk.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، بخش مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، shafei@uk.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۱۱/۱۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۲/۴)

**چکیده:** در این مقاله یک کنترل کننده غیرخطی چند متغیره با استفاده از روش کنترل پیش بین برای ردیابی مسیر ربات‌های متحرک غیر هولونومیک طراحی شده است. اساس این روش، پیش بینی پاسخ‌های مدل غیرخطی ربات در بازه زمان پیش بین با استفاده از بسط سری تیلور می باشد. قوانین کنترلی بهینه بر اساس کمینه کردن اختلاف بین پاسخ‌های مطلوب و پیش بینی شده خروجی‌های سیستم به صورت تحلیلی توسعه داده می شوند. قوانین کنترلی استخراج شده منجر به خطی سازی فیدبک خواهند شد. در اینجا از مدل سینماتیکی غیرخطی ربات برای طراحی کنترل کننده و شبیه سازی‌ها استفاده شده است. در ادامه، تحلیل و ارزیابی سیستم کنترلی طراحی شده همراه با نتایج شبیه سازی شده با استفاده از چندین مانور در شرایط مختلف، عملکرد بالای کنترل کننده در ردیابی مسیر مرجع هر مانور را نشان می دهند.

**کلمات کلیدی:** ربات متحرک غیر هولونومیک، کنترل غیرخطی، پیش بینی، ردیابی مسیر.

## A Nonlinear Optimal Multivariable Controller Design for Trajectory Tracking of Non-Holonomic Mobile Robots

Hossein Mirzaeinejad, Ali Mohammad Shafei

**Abstract:** In this paper, a predictive approach is applied to design a nonlinear multivariable controller to generate trajectory tracking control commands of non-holonomic robots. In this method, the nonlinear responses of the mobile robot are predicted using Taylor series. The optimal control laws are analytically developed by minimizing the difference between the predicted and the desired responses of the system outputs. The obtained control laws lead to the feedback linearization. Here, the nonlinear kinematics model of mobile robot is used for design of the controller and simulations. The performed analyses along with the simulation results indicate that the designed controller can successfully track the reference trajectories with high performance in different maneuver conditions.

**Keywords:** Nonholonomic mobile robot, Nonlinear control, Prediction, Trajectory tracking

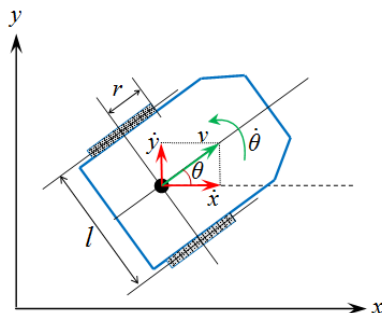
## ۱- مقدمه

کنترل سیستم های با قیود غیرهولونومیک یکی از موضوعاتی است که توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است. در بین این سیستم ها، ربات های متحرک چرخدار با توجه به کاربرد گسترده ای که در صنعت دارند از جایگاه ویژه ای برخوردار می باشند. از اینرو، مطالعات زیادی در زمینه مدل سازی و کنترل این سیستم ها انجام شده است [۵-۱]. با توجه به ساختار این ربات ها، چرخ ها دارای غلتش بدون لغزش بوده و ربات در امتداد محور دوران چرخ ها دارای سرعت نمی باشد. قید مذکور به عنوان قید غیرهولونومیک شناخته می شود. از دیدگاه ریاضی، قیود غیرهولونومیک قیودی هستند که انتگرال پذیر نیستند. با توجه به اینکه اینگونه قیود از درجات آزادی سیستم نمی کاهند و به عبارتی این قیودها در کنار معادلات سیستم در نظر گرفته می شوند، لذا وجود این قیود موجب افزایش پیچیدگی در مدل سازی دینامیکی و کنترل این ربات ها می شود. در واقع، چالش اصلی در سیستم های غیرهولونومیک این است که تعداد درجات آزادی کنترل پذیر از تعداد کل درجات آزادی سیستم کمتر می باشد. بنابراین، پیدا نمودن ورودی های کنترلی مناسب برای تضمین پایداری تمام متغیرهای حالت مورد نظر می باشد. در این بین، مسئله ردیابی مسیری زمانی با دقت بالا در ربات های متحرک چرخدار، با توجه به کاربردهای گوناگون آن از اهمیت بالایی برخوردار است. از این جهت، مطالعات زیادی با روش های مختلف در این زمینه با اهداف ردیابی و پایدارسازی انجام گرفته است که می توان از طراحی کنترل کننده مبتنی بر روش لیاپانوف [۶]، استفاده از روش کنترل تطبیقی [۸،۷]، روش مد لغزشی [۹-۱۲]، روش خطی سازی فیدبک [۱۳]، کنترل مقاوم [۱۴]، روش فازی [۱۵]، روش برگشت به عقب [۱۶،۱۷]، ترکیبی از روش های فازی شبکه های عصبی [۱۸] و... نام برد. در مرجع [۱۹]، یک کنترل کننده تناسبی-مشتقی بهینه مبتنی بر خطی سازی فیدبک برای ردیابی مسیر توسط ربات چرخدار طراحی شده است. در تحقیقی دیگر روش کنترلی روینگر فعال مبتنی بر فیلتر کالمن برای کنترل دینامیکی ربات های متحرک پیشنهاد شده است [۲۰]. همچنین، از نمونه مطالعاتی که از روش های بهینه استفاده نموده اند می توان مرجع [۲۱] را نام برد که در آن کنترل کننده ای بهینه به روش افق زمانی پیش رو یا روش کنترل پیش بین مبتنی بر مدل ارائه شده است. البته باید یادآوری کرد که استفاده از روش های محاسبات عددی برای حل مسئله بهینه سازی آسان نبوده و پیاده سازی آنها نیز مشکل بوده و با تاخیر زمانی زیاد همراه می باشد. در این مقاله، یک روش بهینه جدید برای طراحی کنترل کننده غیرخطی چندمتغیره برای ردیابی مسیر ربات متحرک چرخدار توسعه داده شده و سپس تحلیل می گردد. این روش قبلاً توسط نویسندگان در طراحی کنترل کننده سیستم ترمز ضدقفل برای سیستم های تک ورودی-تک خروجی و چند ورودی-چند خروجی برای ردیابی لغزش چرخ ها بکار گرفته شده است [۲۲-۲۵]. وجه تمایز این روش با روش کنترل پیش بین مبتنی بر مدل مورد استفاده در کارهای گذشته در این است که

در حالت کلی روش کنترل پیش بین متداول در هر مرحله کنترلی نیاز به حل مسئله بهینه سازی به صورت همزمان و عددی دارد و به همین دلیل با ایجاد تأخیر همراه بوده و بنابراین برای پیاده سازی مناسب نمی باشد. اما روش کنترلی ارائه شده در این مقاله منجر به رسیدن به قوانین کنترلی تحلیلی می شود که مشکلات ذکر شده را ندارد. اساس این روش، پیش بینی پاسخ مدل غیرخطی ربات است. به این ترتیب که ابتدا پاسخ غیرخطی ربات توسط بسط سری تیلور پیش بینی شده و سپس قانون کنترلی از طریق حداقل کردن اختلاف پاسخ های مطلوب و پیش بینی شده بدست می آید. از طرفی با توجه به چالش اصلی در سیستم های غیرهولونومیک که ذکر شد، قابلیت این روش را می توان در پیدا نمودن ورودی های کنترلی مناسب برای تضمین پایداری تمام متغیرهای حالت مطلوب نام برد. پس از طراحی کنترل کننده، تحلیل خطای ردیابی به صورت تحلیلی بررسی می گردد و اثر پارامتر زمان پیش بین که به عنوان یک پارامتر آزاد کنترلی می باشد مورد ارزیابی قرار گرفته و نشان داده خواهد شد که قوانین کنترلی منجر به خطی سازی فیدبک خواهند شد. در ادامه به منظور نشان دادن کارایی سیستم کنترلی طراحی شده، شبیه سازی های لازم بر روی مدل ربات با سه درجه آزادی در مانورهای مختلف انجام شده است. نتایج تحلیل ها و شبیه سازی ها، نشان از عملکرد مناسب سیستم کنترلی پیشنهادی در رسیدن به اهداف مورد نظر می باشد.

## ۲- بیان مسئله

ساختار کلی یک ربات متحرک چرخدار متشکل از دو چرخ محرک که روی یک محور قرار گرفته اند در شکل ۱ نشان داده شده است. چرخ ها دارای شعاع یکسان  $r$  بوده و به فاصله  $l$  از یکدیگر قرار گرفته اند. هر دو چرخ به منظور حرکت و جهت دهی ربات به صورت مستقل توسط دو فعال کننده (دو موتور DC) به حرکت در می آیند. مطابق با شکل ۱، ربات در صفحه دو بعدی متشکل از سه درجه آزادی شامل دو حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی است. به طوری که  $(x, y)$  موقعیت مرکز محور که چرخ ها روی آن قرار گرفته اند و  $\theta$  نشان دهنده زاویه قرار گرفتن ربات می باشد.



شکل ۱: پیکربندی ربات متحرک چرخدار

با توجه به اینکه ربات در امتداد محور دوران چرخ ها دارای سرعت نمی باشد، در نتیجه داریم:

## ۳- طراحی سیستم کنترلی

با نوشتن معادلات (۵) به فرم فضای حالت زیر داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_r \cos x_3 - u_1 + x_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = v_r \sin x_3 - x_1 u_2 \\ \dot{x}_3 = \omega_r - u_2 \end{cases} \quad (۶)$$

که در آن  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3] = [e_x \ e_y \ e_\theta]$  بردار متغیرهای حالت و  $\mathbf{u}^T = [u_1 \ u_2] = [v \ \omega]$  بردار ورودی های کنترلی می باشند. حال هدف، طراحی یک کنترل کننده با دو ورودی برای سیستم با معادلات (۶) است که با ردیابی مسیر مرجع، خطای ردیابی  $\mathbf{e}^T = [e_x \ e_y \ e_\theta]$  صفر شده و به عبارتی دیگر، پایداری سیستم مذکور تضمین شود. بدین منظور، در اینجا از روش کنترل غیرخطی پیش بین مبتنی بر بهینه سازی استفاده خواهد شد. به طور کلی در این روش، ابتدا خروجی های سیستم مورد نظر توسط بسط سری تیلور پیش بینی شده و سپس با کمینه کردن تابع عملکرد که براساس خطاهای پیش بینی شده تعریف می شود، قوانین کنترلی به صورت بهینه و تحلیلی بدست می آیند. علاوه بر مزیت های مذکور در این روش، می توان از قابلیت آن برای پایداری سازی یک سیستم غیرخطی با انتخاب خروجی های مناسب نیز نام برد. با انتخاب خروجی های زیر داریم:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  تابع علامت می باشد. در بخش تحلیل و ارزیابی قوانین کنترلی نشان داده خواهد شد که انتخاب خروجی های فوق منجر به خطی سازی فیدبک ورودی-خروجی سیستم و پایداری آن می شود. حال برای توسعه قوانین کنترل غیرخطی، یک شاخص عملکرد به نحوی که خطاهای ردیابی در لحظه بعدی را جریمه کند به صورت زیر نوشته می شود:

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 e_i^2(t+h) \quad i=1,2 \quad (۸)$$

که  $h$  زمان پیش بین بوده و یک عدد حقیقی مثبت است و  $e_i$  ها خطاهای ردیابی می باشند:

$$e_i(t+h) = y_i(t+h) - y_{di}(t+h) \quad i=1,2 \quad (۹)$$

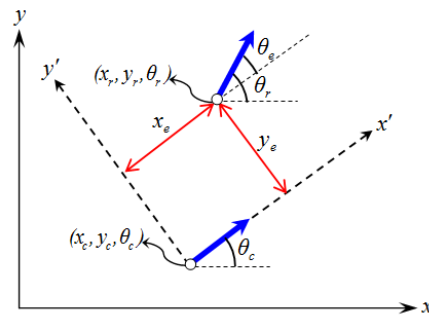
از آنجایی که فرض شده است که هیچ محدودیتی روی ورودی کنترلی برای رسیدن به ردیابی کامل نداریم، شاخص عملکرد (۸)، شامل وزن روی ورودی کنترلی نبوده و به عبارتی، طراحی بر اساس کنترل ارزان است. از طرفی اهمیت خطاهای ردیابی یکسان فرض شده و بنابراین روی خطاها وزن یکسان در نظر گرفته شده است. حال به منظور توسعه شاخص عملکرد (۸) به عنوان تابعی از ورودی کنترلی، لازم است که خروجی های سیستم برای بازه زمان بعدی با استفاده از بسط سری تیلور

$$[-\sin \theta \ \cos \theta] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \quad (۱)$$

معادله قیدی فوق انتگرال پذیر نبوده و لذا به عنوان قید غیرهولونومیک شناخته می شود. همچنین، معادلات حاکم بر اساس مدل سینماتیکی مرتبه اول ربات عبارتند از:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (۲)$$

بطوری که  $q^T = [x \ y \ \theta]$  بردار مختصات تعمیم یافته بوده،  $v$  سرعت انتقالی و  $\omega$  سرعت زاویه ای ربات می باشند. در سیستم کنترلی از دو موقعیت  $q_c^T = [x_c \ y_c \ \theta_c]$  و  $q_r^T = [x_r \ y_r \ \theta_r]$  استفاده خواهد شد که اولی مربوط به موقعیت جاری ربات و دومی مربوط به موقعیت یا مسیر مرجع ربات است که باید توسط کنترل کننده ردیابی شود.



شکل ۲: خطای موقعیت ربات

با توجه به شکل ۲ و در نظر گرفتن دستگاه مختصات مرجع  $x-y$  و دستگاه مختصات نسبی  $x'-y'$  به مرکز  $(x_c - y_c)$  و در جهت  $\theta_c$ ، خطای موقعیت  $e^T = [e_x \ e_y \ e_\theta]$  را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (q_r - q_c) \quad (۳)$$

با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\dot{x}_r \sin \theta_r = \dot{y}_r \cos \theta_r \quad (۴)$$

حال با مشتق گیری از معادلات (۳)، استفاده از رابطه (۴) و برخی محاسبات ریاضی، می توان مدل خطا را به صورت زیر بدست آورد [۲۶]:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos e_\theta & 0 \\ \sin e_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (۵)$$

توجه شود که در کلیه روابط اندیس  $r$  مربوط به مدل مرجع می باشد.

عنوان تابعی از ورودی های کنترلی بدست می آید. با اعمال شرط بهینگی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0 &\Rightarrow A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + B_1 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u_2} = 0 &\Rightarrow A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + B_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

بدین ترتیب قوانین کنترلی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$u_1 = -\frac{1}{A_{11}}(A_{12}u_2 + B_1) \quad (15)$$

$$u_2 = \frac{B_2 A_{11} - B_1 A_{12}}{A_{12}^2 - A_{11} A_{22}} \quad (16)$$

بطوری که

$$\begin{aligned} A_{11} &= -h, \quad A_{12} = h(x_1 + x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r)), \\ B_1 &= x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(\phi_r) + hv_r(\cos x_3 - \sin x_3 \operatorname{sgn}(\omega_r)), \\ A_{21} &= -h(x_1 + x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r)), \\ A_{22} &= h(1 + (x_1 + x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r))^2), \\ B_2 &= -(x_3 + h\omega_r) + (x_2 + x_1 \operatorname{sgn}(\omega_r))(x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r)) \\ &\quad + hv_r(\cos x_3 - \sin x_3 \operatorname{sgn}(\omega_r)) \end{aligned} \quad (17)$$

شکل بسط داده شده قوانین کنترلی با جایگذاری روابط (۱۷) در (۱۵) و (۱۶) همراه با برخی ساده سازی ها به صورت زیر قابل محاسبه می باشند:

$$u_1 = \frac{1}{h}(x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) + (x_2 + x_1 \operatorname{sgn}(\omega_r))(x_3 + h\omega_r) + hv_r(\cos x_3 - \sin x_3 \operatorname{sgn}(\omega_r))), \quad (18)$$

$$u_2 = \frac{1}{h}(x_3 + h\omega_r) \quad (19)$$

قوانین کنترلی فیدبک فوق که شکل بسته دارند تابع عملکرد (۸) را کمینه می کنند. در اینجا ورودی های کنترلی سرعت خطی و سرعت زاویه ای محاسبه شده اند که در واقع باید با استفاده از مدل دینامیکی ربات، گشتاورهای اعمالی لازم به چرخ ها برای تولید ورودی های مذکور محاسبه شوند. در بخش بعدی قوانین کنترلی بدست آمده مورد تحلیل و ارزیابی قرار خواهند گرفت.

### ۳-۱- تحلیل و ارزیابی قوانین کنترلی

در این قسمت ویژگی های اصلی قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) و همچنین اهمیت پارامتر آزاد زمان پیش بینی  $h$  در قوانین کنترلی بررسی خواهد شد. با مشتق گیری از خروجی اول رابطه (۷) با فرض  $\omega_r \neq 0$  و جایگذاری معادلات سیستم (۶) در آن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) \\ &= -u_1 + u_2(x_2 + x_1 \operatorname{sgn}(\omega_r)) + \\ &\quad v_r(\cos x_3 - \sin x_3 \operatorname{sgn}(\omega_r)) \end{aligned} \quad (20)$$

قراردان قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۲۰) منجر می شود به:

پیش بینی شوند. در ابتدا  $y_i(t+h)$  به وسیله سری تیلور مرتبه  $q$  ام در زمان  $t$  به صورت زیر بسط داده می شود:

$$\begin{aligned} y_i(t+h) &= y_i(t) + h\dot{y}_i(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \\ &\quad \dots + \frac{h^q}{q!}y_i^{(q)}(t) \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (10)$$

در ادامه، مسئله اصلی انتخاب مرتبه بسط  $q$  برای خروجی های سیستم می باشد به طوری که با اهداف طراحی کنترل کننده بر اساس پیش بینی متناسب باشد. معمولاً مرتبه بسط که مشخص کننده بالاترین مرتبه مشتق خروجی استفاده شده در پیش بینی است، به جمع درجه نسبی سیستم غیرخطی و مرتبه کنترلی انتخاب شده محدود می گردد [۲۷]. همچنین، درجه نسبی از معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی قابل حصول بوده و برابر با پایین ترین مرتبه مشتق خروجی است که در آن ورودی کنترلی برای اولین بار به طور صریح در معادلات ظاهر می شود [۲۸]. با توجه به معادلات سیستم (۶)، هر دو خروجی سیستم نسبت به هر دو ورودی دارای درجه نسبی یک،  $q=1$ ، می باشند. از طرف دیگر برای رسیدن به یک اثری کنترلی پایین و جلوگیری از پیچیدگی قانون کنترلی، مرتبه کنترلی در اینجا به حداقل ممکن یعنی صفر محدود می شود. این انتخاب، یعنی مرتبه کنترلی صفر، باعث می شود که اثری کنترلی در یک بازه زمان پیش بینی ثابت مانده و مشتقات ورودی کنترلی در پیش بینی خروجی ظاهر نشود.

$$\frac{d}{d\tau}u(t+\tau) = 0 \quad \text{for } \tau \in [0, h] \quad (11)$$

انتخاب مرتبه کنترلی صفر برای سیستم های غیرخطی با درجات نسبی پایین مناسب می باشد [۲۷]. به طور معمول، مرتبه کنترل به عنوان یک پارامتر آزاد بوده و متناسب با مشخصات سیستم کنترلی و محدودیت های انرژی کنترلی توسط طراح تعیین می گردد. بدین ترتیب با توجه به دلایل فوق، سری مرتبه اول متناسب با درجه نسبی سیستم برای بسط خروجی های سیستم کافی می باشد.

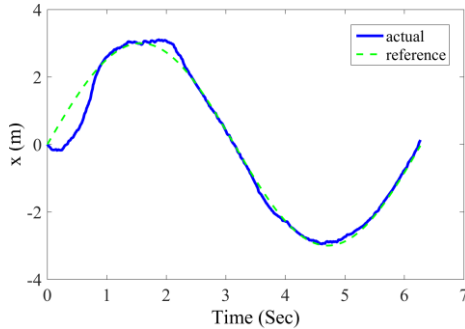
$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) \quad i=1,2 \quad (12)$$

با جایگذاری معادلات (۶) در (۱۲) و استفاده از خروجی های انتخاب شده داریم:

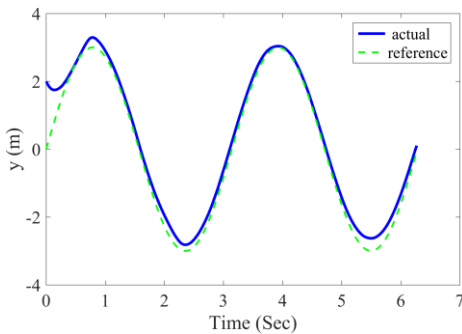
$$\begin{aligned} y_1(t+h) &= y_1 + h(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ &= x_1 - x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) + h(x_2 u_2 - u_1 + \\ &\quad v_r \cos x_3 + x_1 u_2 - v_r \sin x_3) \\ y_2(t+h) &= y_2 + h\dot{x}_3 \\ &= x_3 + h(\omega_r - u_2) \end{aligned} \quad (13)$$

حال با جایگذاری معادلات (۱۳) در (۸) و با توجه به اینکه مقادیر مطلوب خروجی ها صفر می باشد، شاخص عملکرد بسط داده شده به

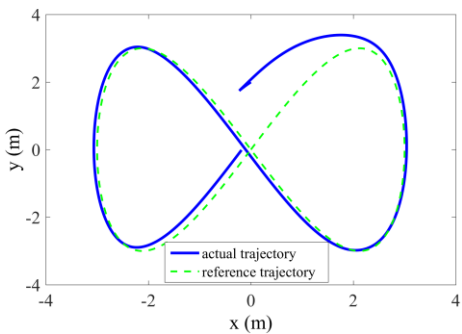
همان گونه که در این شکل دیده می شود، پاسخ های زمانی موقعیت ربات به سرعت توانسته اند به پاسخ های مدل مرجع برسند. همچنین از مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع در شکل ۴ نیز می توان به توانایی کنترل کننده طراحی شده در ردیابی مسیر مورد نظر با دقت بالا پی برد.



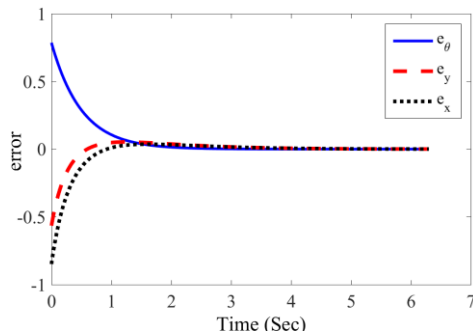
شکل ۳- الف: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۷) (تغییرات زمانی  $x$ )



شکل ۳- ب: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۷) (تغییرات زمانی  $y$ )



شکل ۴: مقایسه مسیر ربات در صفحه  $x - y$  با مسیر مرجع (۲۷)



شکل ۵: خطاهای ردیابی مربوط به موقعیت انتقالی و موقعیت زاویه ای ربات (ردیابی مدل مرجع (۲۷))

$$\dot{y}_1 + \frac{1}{h} y_1 = 0 \quad (21)$$

به همین ترتیب برای خروجی دوم خواهیم داشت:

$$\dot{y}_2 + \frac{1}{h} y_2 = 0 \quad (22)$$

واضح است که دینامیک خطاهای (۲۱) و (۲۲) خطی و مستقل از زمان می باشد. مشاهده می شود که قوانین کنترلی منجر به حالت خاصی از خطی سازی ورودی-خروجی می شوند. بدین ترتیب، سیستم حلقه بسته خطی و به ازای هر  $h > 0$  پایدار نمایی است و با کمتر کردن زمان پیش بین  $h$  می توان سرعت پاسخ دهی را افزایش داد. در این حالت داریم:

$$\text{if } t \rightarrow \infty, \Rightarrow \begin{cases} y_1 \rightarrow 0 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) \\ y_2 \rightarrow 0 \Rightarrow x_3 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (23)$$

هم اکنون با قرار دادن روابط (۲۳) و قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) در دو معادله اول از معادلات (۶) خواهیم داشت:

$$\dot{x}_1 + \omega_r \operatorname{sgn}(\omega_r) x_1 = 0 \quad (24)$$

$$\dot{x}_2 + \omega_r \operatorname{sgn}(\omega_r) x_2 = 0 \quad (25)$$

با توجه به اینکه  $\omega_r \neq 0$  معادلات (۲۴) و (۲۵) پایدار نمایی بوده و به عبارتی خواهیم داشت:

$$\text{if } t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (26)$$

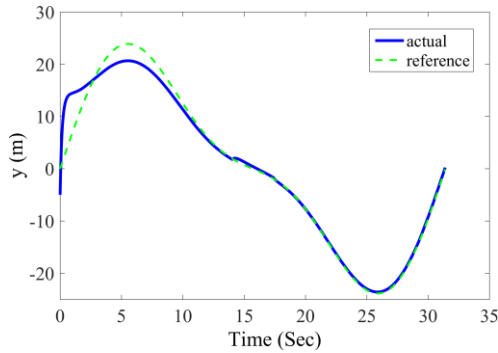
بنابراین با توجه به معادلات (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) می توان نتیجه گرفت که سیستم کنترلی پیشنهادی با قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) خطای ردیابی  $e^T = [e_x \ e_y \ e_\theta]$  را صفر می کند. در بخش بعدی به منظور نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی طراحی شده در مواجه شدن با مانورهای مختلف، نتایج شبیه سازی های انجام گرفته مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

#### ۴- نتایج شبیه سازی

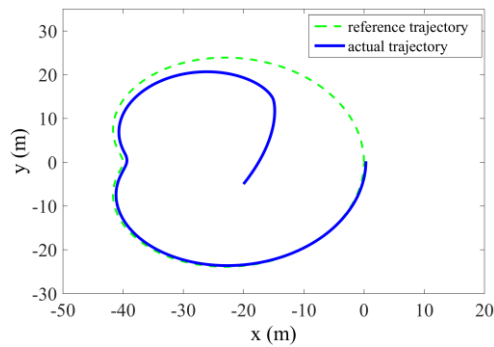
برای نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی، شبیه سازی های لازم بر روی مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخدار با سه درجه آزادی انجام شده است. به منظور بررسی عملکرد کنترل کننده در شرایط واقعی، به متغیرهای حالت سیستم نویز سفید اعمال شده است. در مانور اول، هدف ردیابی مدل مرجع با معادلات زیر می باشد:

$$\begin{aligned} x_r &= 3 \sin t \\ y_r &= 3 \sin(2t) \end{aligned} \quad (27)$$

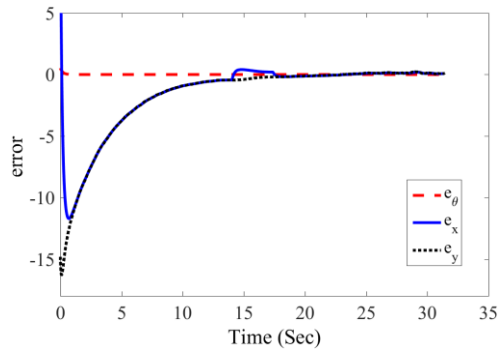
با توجه به رابطه (۲۷) موقعیت اولیه مسیر مرجع  $x_r(0) = (0, 0, 1.1071)^T$  می باشد. همچنین موقعیت اولیه واقعی ربات  $x(0) = (0, 2, \pi/4)^T$  در شکل ۳ تغییر زمانی متغیرهای موقعیت ربات  $(x, y)$  نمایش داده شده است.



شکل ۷-ب: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۸) (تغییرات زمانی y)



شکل ۸: مقایسه مسیر ربات در صفحه x-y با مسیر مرجع (۲۸)

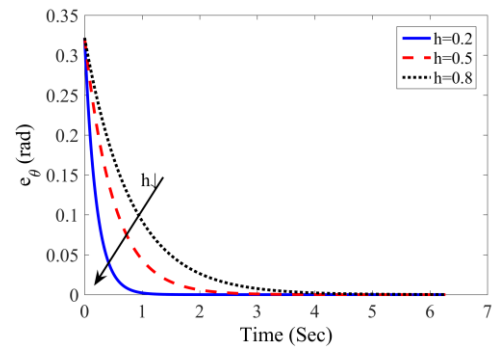


شکل ۹: خطاهای ردیابی مربوط به موقعیت انتقالی و موقعیت زاویه ای ربات (ردیابی مدل مرجع (۲۸))

در شکل ۹ نیز، خطاهای ردیابی موقعیت طولی ربات  $(e_x, e_y)$  و خطای ردیابی موقعیت زاویه ای ربات  $e_\theta$ ، نمایش داده شده است. مشاهده می شود که در این مانور هم پاسخها انطباق بسیار خوبی با پاسخهای مرجع دارند. در پایان، به منظور نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی در شرایط اولیه مختلف، شکل ۱۰ شبیه سازی شده است. در شکل ۱۰-الف مشاهده می شود که به ازای شرایط اولیه مختلف، ربات توانسته به خوبی مسیر مرجع مورد نظر را ردیابی نماید. برای نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی برای شرایط اولیه دور از مسیر مرجع شکل ۱۰-ب شبیه سازی شده است. مشاهده می شود که شرایط اولیه خیلی دور از مسیر مرجع، زمان و کیفیت رسیدن به مسیر مرجع را تحت تاثیر خواهد گذاشت، اما با دقت قابل قبولی مسیر مرجع ردیابی می شود.

بعلاوه، در شکل ۵ خطاهای ردیابی موقعیت طولی ربات  $(e_x, e_y)$  و خطای ردیابی موقعیت زاویه ای ربات  $e_\theta$ ، نمایش داده شده است. مشاهده می شود که در هر مورد، خطای اولیه به سرعت به صفر رسیده است.

در ادامه به منظور نشان دادن اثر پارامتر کنترلی  $h$  روی عملکرد سیستم کنترلی، شکل ۶ به ازای مقادیر مختلفی از زمان پیش بین برای خطای ردیابی موقعیت زاویه ای ربات شبیه سازی شده است. مشاهده می شود که با کاهش مقدار زمان پیش بین  $h$ ، خطای ردیابی کمتر می شود و سرعت پاسخ دهی افزایش می یابد. البته باید توجه داشت که کاهش زمان پیش بین باعث افزایش انرژی کنترلی در ابتدای مانور می شود. زیرا انرژی کنترلی با زمان پیش بین مطابق با قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) رابطه معکوس دارد. بنابراین می توان با تنظیم پارامتر کنترلی  $h$  مصالحه ای بین خطای ردیابی و انرژی کنترلی انجام داد.

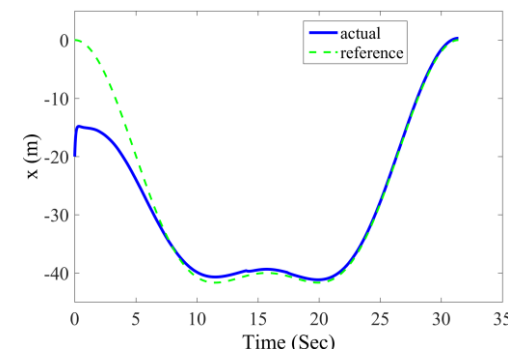


شکل ۶: اثر زمان پیش بین  $h$  روی عملکرد سیستم کنترلی (خطای ردیابی موقعیت زاویه ای مرجع (۲۷))

در مانور دوم، هدف ردیابی مدل مرجع با معادلات زیر می باشد:

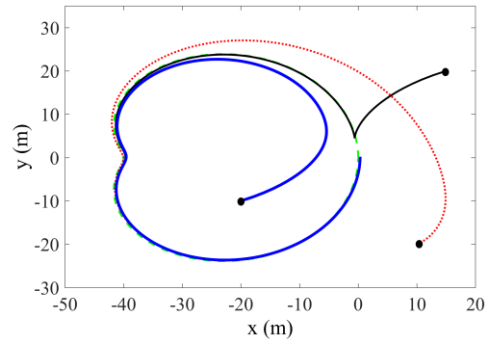
$$\begin{aligned} x_r &= (20 + 15 \cos(0.2t)) \cos(0.2t) - 35 \\ y_r &= (20 + 15 \cos(0.2t)) \sin(0.2t) \end{aligned} \quad (28)$$

با توجه به رابطه (۲۸) موقعیت اولیه مسیر مرجع  $\mathbf{x}_r(0) = (0, 0, \pi/2)^T$  می باشد. همچنین موقعیت اولیه واقعی ربات در جهت رعایت اختصار، در این مانور تنها چند نمودار انتخاب و رسم شده است. شکل های ۷ و ۸ به ترتیب مقایسه پاسخ های زمانی موقعیت ربات و میسر ربات در صفحه x-y را با پاسخ های مرجع نشان می دهند.

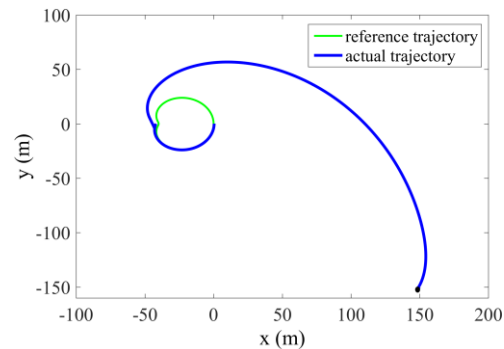


شکل ۷-الف: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۸) (تغییرات زمانی x)

- Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, vol. 229, pp. 97 – 108, 2014.
- [4] M. Asif and M. J. Khan, "Feedforward and Feedback Kinematic Controllers for Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking," Journal of Automation and Control Engineering, vol. 83, pp. 178-182, 2015.
- [5] K. J. Kalinski and M. Mazur, "Optimal control at energy performance index of the mobile robots following dynamically created trajectories," Mechatronic, vol. 37, pp. 79-88, 2016.
- [6] C. Samson, "Time-varying feedback stabilization of car like wheeled mobile robot," International Journal of Robotics Research, vol. 12, pp. 55-64, 1993.
- [7] F. Pourboghrat and M. P. Karlsson, "Adaptive control of dynamic mobile robots with nonholonomic constraints," Computers & Electrical Engineering, vol. 28, pp. 241-253, 2002.
- [8] F. N. Matins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho and T. F. Bastosfilho, "An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking," Control Engineering Practice, vol. 16, pp. 1354-1363, 2008.
- [9] J. X. Xu, Z. Q. Guo and T. H. Lee, "Design and Implementation of Integral Sliding-Mode Control on an Underactuated Two-Wheeled Mobile Robot," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 61, pp. 3672-3681, 2014.
- [10] M. Asif, M. J. Khan and N. Cai, "Adaptive sliding mode dynamic controller with integrator in the loop for nonholonomic wheeled mobile robot trajectory tracking," Int. J. Control, vol. 87, pp. 964-975, 2014.
- [11] Kh. A. Keymasi and S. Ali A. Moosavian, "Adaptive Sliding Mode Control of a Wheeled Mobile Robot Towing a Trailer," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Jour of Sys and Control Eng, pp. 1 – 15, 2014.
- [12] C. Y. Chen, T. H. S. Li, Y. C. Yeh and C. C. Chang, "Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots," Mechatronics, vol. 19, pp. 156-166, 2009.
- [13] Kh. Shojaei, A. M. Shahri and A. Tarakameh, "Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties," Robotics and Computer-



شکل ۱۰-الف: مسیرهای ربات در ردیابی مدل مرجع (۲۸) به ازای شرایط اولیه مختلف



شکل ۱۰-ب: مسیر ربات در ردیابی مدل مرجع (۲۸) به ازای شرایط اولیه دور از مسیر مرجع

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روش کنترل پیش‌بین برای طراحی کنترل کننده غیرخطی چند ورودی-چندخروجی به شکل تحلیلی و بهینه به منظور ردیابی مسیر مرجع توسط ربات متحرک چرخدار با قید هولونومیک توسعه داده شد. در ادامه با انتخاب خروجی‌های مناسب، ورودی‌های کنترلی مناسب برای پایدارسازی سیستم استخراج گردید. در بخش تحلیل و ارزیابی، دینامیک خطای ردیابی کنترل کننده پیشنهادی استخراج شده و پایداری تمامی حالت‌های سیستم مورد بررسی قرار گرفت. در پایان نتایج شبیه‌سازی‌ها در مانورهای مختلف، عملکرد مناسب سیستم کنترلی پیشنهادی در رسیدن به اهداف مورد نظر را نشان داد.

## مراجع

- [1] C. Wang, Z. Liang and Q. Jia, "Dynamic feedback robust stabilization of nonholonomic mobile robots based on visual servoing," Journal of Control Theory Application., vol. 8, pp. 139-144, 2010.
- [2] S. Blažič, "A novel trajectory-tracking control law for wheeled mobile robots," Mechatronics Robotics and Autonomous Systems., vol. 59, pp. 1001-1007, 2011.
- [3] A. Keymasi, B. M. Rahimi and S. Ali A. Moosavian, "Non-Model-Based Control for a Wheeled Mobile Robot Towing two Trailers,"

- [21] D. Gu and H. Hu, "Design Receding Horizon Tracking Control of Wheeled Mobile Robots," IEEE Transactions on Robotics, vol. 14, pp. 743 – 749, 2006.
- [22] م. میرزائی، ح. میرزائی نژاد، س. وحیدی، د. حیدریان، م. ج. خسروجردی، "کنترل و تخمین غیرخطی لغزش طولی تأیر جهت استفاده در سیستم ترمز ضد قفل خودروهای سواری،" مجله کنترل، جلد ۵، ص ۵۱-۴۲، ۱۳۹۱.
- [23] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, "A novel method for non-linear control of wheel slip in anti-lock braking systems," Control Engineering Practice, vol. 18, pp. 918-926, 2010.
- [24] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, "A new approach for modelling and control of two-wheel anti-lock brake systems", Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, vol. 225, pp. 179-192, 2011.
- [25] H. Mirzaeinejad, M. Mirzaei and R. Kazemi, "Enhancement of vehicle braking performance on split-k roads using optimal integrated control of steering and braking systems," Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, vol. 230, pp. 401-415, 2016.
- [26] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A stable tracking control method for an autonomous mobile robot," International Conference on Robotics and Automation, USA, pp. 384-389, 1990.
- [27] W. H. Chen, D. J. Balance and P. J. Gawthrop, "Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach," Automatica, vol. 39, pp. 633-641, 2003.
- [28] J. J. E. Slotine and W. Li, "Applied Nonlinear Control," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- Integrated Manufacturing, vol 27, pp.194–204, 2011.
- [14] Kh. A. Keymasi and S. Ali A. Moosavian, "Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot," IEEE-ASME Transactions on Mechatronics, vol 19, pp 943 – 953, 2014.
- [15] S.G.Tzafestas, K.M. Deliparaschos and G.P. Moustris, "Fuzzy logic path tracking control for autonomous non-holonomic mobile robots: design of system on a chip," Robotics and Autonomous Systems, vol. 58, pp. 1017-1027, 2010.
- [16] Z. P. Jinag and H. Nijmeijer, "control of mobile robots: A case study in backstepping," Robotics and Autonomous Systems, vol. 33, pp. 1393-1399, 1997.
- [17] R. Fierro and F. L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics," In Proc. 34th IEEE CDC, New Orleans, LA, pp. 3805–3810, 1995.
- [18] R. J. Wai and C. M. Liu, "Design of dynamic petri recurrent fuzzy neural network and its application to path-tracking control of nonholonomic mobile robot," Computers & Electrical Engineering, vol. 56, pp. 2667-2683, 2009.
- [19] M. H. Khooban, "Design an intelligent proportional-derivative (PD) feedback linearization control for nonholonomic-wheeled mobile robot," Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 26, pp. 1833-1843, 2014.
- [20] P. Coelho and U. Nunes, "Design Path-following control of mobile robots in presence of uncertainties," IEEE Transactions on Robotics, vol. 21, pp. 252 – 261, 2005.