

# طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت پایداری سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل و قید دامنه ورودی

مریم السادات اسدی نیا<sup>۱</sup>، طاهره بینازاده<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، m.asadnia@sutec.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh@sutec.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۱۸)

**چکیده:** در این مقاله، مساله پایداری مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی با در نظر گرفتن عدم قطعیت های مدل و محدودیت بر روی دامنه سیگنال کنترلی مورد بررسی قرار می گیرد. هدف از پایداری مقاوم در اینجا، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت اشباع شده می باشد به نحویکه سیستم حلقه بسته حاصل، برای همه عدم قطعیت های مجاز، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله پایداری در دو حالت بررسی می شود. ابتدا، مساله پایداری مقاوم برای سیستم های سینگولار دارای تأخیر در حضور اشباع محرک و عدم قطعیت های مدل در نظر گرفته می شود. شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایداری مستقل از تأخیر بر اساس نامساوی های ماتریس خطی بیان شده است. علاوه بر آن تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، در قضیه مربوطه ارائه می گردد. در حالت دوم، معیارهای پایداری مقاوم وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و ورودی محدود، طی دو قضیه ارائه شده است. این قضایا در دو نسخه ارائه شده اند. در این قضایا، شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر در سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی برای تأخیر ثابت و تأخیر متغیر با زمان بیان گردیده است. ناحیه جذب سیستم حلقه بسته نیز برای حالت دوم تخمین زده شده است. در پایان، مثال های عملی و عددی ارائه شده است و نتایج شبیه سازی ها دستاوردهای تئوری مقاله را تایید می نمایند.

**کلمات کلیدی:** سیستم های سینگولار تأخیری، تأخیر متغیر با زمان، پایداری مقاوم، قید دامنه ورودی کنترلی، عدم قطعیت مدل.

## Design of Robust Control Law for Stabilization of Singular Systems with Time-Varying Delay in The Presence of Model Uncertainty and Input Amplitude Constraint

Maryamsadat Asadnia, Tahereh Binazadeh

**Abstract:** This paper investigates the problem of robust stabilization of uncertain singular systems with time-varying delay in the presence of model uncertainties and input amplitude constraint. Here, the purpose of robust stabilization is to design a saturated state feedback such that the closed-loop system is regular, impulse free and stable for all admissible uncertainties. The time-delay has been considered to be time-varying with known lower and upper bound. The problem of stabilization is studied in two cases. First, the robust stabilization problem is considered for the singular systems with time-varying delay in the presence of actuator saturation and model uncertainties. In this case, the existence conditions of robust stabilizing delay-independent state feedback controller are given via the linear matrix inequalities. Additionally, an estimation of the domain of attraction of the closed-looped system is proposed in the related theorem. In the second case, delay-dependent criteria for robust stability of uncertain time-delay singular systems with

constrained input is given in two theorems. These theorems investigate delay-independent stability conditions via the linear matrix inequalities for constant and time-varying delay. Also, the domain of attraction for the closed-looped system is estimated in this case, too. Finally, practical and numerical examples are given and simulation results verify the theoretical achievements of paper.

**Keywords:** Time-varying singular systems, Robust stability, Input amplitude constraint, Model uncertainty.

## ۱- مقدمه

سیستم های سینگولار<sup>۱</sup> که با نام های متفاوتی مانند سیستم های جبری دینامیکی<sup>۲</sup>، توصیفی<sup>۳</sup>، تعمیم یافته<sup>۴</sup>، نیمه حالت<sup>۵</sup>، ضمنی<sup>۶</sup> و... نیز شناخته می شوند، ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی هستند. از این رو این سیستم ها در مقایسه با سیستم های فضای حالت معمولی، در توصیف سیستم های فیزیکی توانا ترند. این حقیقت موجب شده تا سیستم های سینگولار کاربرهای بسیاری در زمینه مدلسازی و تحلیل سیستم های فیزیکی از قبیل سیستم های قدرت [۱]، فرایند های شیمیایی [۲]، مهندسی هوا فضا [۳]، رباتیک [۴]، سیستم های مکانیکی [۵]، سیستم های اقتصادی [۶] و... داشته باشند. به دلیل ساختار پیچیده تری که سیستم های سینگولار نسبت به سیستم های معمولی دارند، روش های کنترلی بکار گرفته شده برای تحلیل این سیستم ها از پیچیدگی بیشتری برخوردارند. به عنوان مثال، در کنترل سیستم های سینگولار علاوه بر پایداری، به مسائل دیگری از جمله رگولار و ضربه آزاد بودن نیز توجه می شود که اصطلاحاً به سیستم سینگولاری که این ویژگی ها را دارا باشد، سیستم مجاز<sup>۷</sup> می گویند. در دو دهه اخیر، تحقیقات زیادی در زمینه کنترل های سینگولار انجام شده است. اکثر مقالات در این حوزه، بر پایه تعمیم و گسترش تئوری سیستم های غیرسینگولار<sup>۸</sup> به سیستم های سینگولار شکل گرفته اند. برای مطالعه ی تاریخچه بتفصیل و تحقیقات پایه صورت گرفته در خصوص کنترل سیستم های سینگولار می توان به مراجع [۷-۹] رجوع نمود.

یکی از عوامل اصلی که موجب ناپایداری و عملکرد ضعیف در سیستم های کنترل می شود، تأخیر است. بنابراین، کنترل سیستم های دارای تأخیر یکی از مسائلی است که در سال های اخیر بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است و مقالات مختلفی نیز درحوزه تحلیل و طراحی سیستم های دارای تأخیر ارائه شده اند [۱۰-۱۴]. تأخیر در سیستم های سینگولار نیز رخ می دهد و بدلیل ماهیت این سیستم ها مساله کنترل در سیستم های سینگولار تأخیری در مقایسه با سیستم های دارای تأخیر

معمولی پیچیده تر است. با این وجود، کنترل سیستم های سینگولار تأخیر زمانی<sup>۹</sup> از موضوعاتی است که در پژوهش های اخیر به آن پرداخته شده است [۱۵-۱۷].

از سوی دیگر، به دلیل خطا در مدلسازی و تغییر در شرایط محیطی و اجرایی، اغلب در سیستم ها نایقینی وجود دارد [۱۹-۱۸]. یکی از راه های توصیف سیستم های نامعین، نایقینی پارامتری در معادلات حالت سیستم می باشد. از آنجا که نایقینی عملکرد مطلوب سیستم را تحت تأثیر قرار می دهد، بنابراین طراحی قانون کنترلی که بتواند در برابر نایقینی ها مقاوم عمل کند حائز اهمیت است. مسأله ی آنالیز پایداری مقاوم و همچنین پایداری سازی مقاوم سیستم های سینگولار نامعین [۲۰-۲۲] و سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی [۲۳-۲۵] مورد مطالعه محققان قرار گرفته است.

مساله مهم دیگری که در سیستم های عملی وجود دارد و باید به آن توجه داشت، محدودیت روی دامنه ورودی محرک ها می باشد. چنانچه این قید در حین طراحی قانون کنترلی در نظر گرفته نشود، پس از قرار گرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل کننده، در بسیاری از موارد پاسخ سیستم مطلوب نخواهد بود و حتی ممکن است سیستم حلقه بسته ناپایدار شود [۲۶-۲۷]. لذا طراحی قانون کنترلی با در نظر گرفتن اشباع محرک بسیار ضروری است. رویکردهای متنوعی در مقالات برای این منظور ارائه گردیده که بعضاً برای سیستم های سینگولار نامی آن هم بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت مدل و تأخیر زمانی می باشد [۲۸ و ۲۹]. در حوزه کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر و نایقینی با قید اشباع محرک مطالعاتی صورت گرفته [۳۰]، که منحصراً به بحث پایداری وابسته به تأخیر پرداخته اند.

در این مقاله، مسأله پایداری سازی مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر زمانی با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر با رویکردی نو و متفاوت مورد بررسی قرار می گیرد. ساختار در نظر گرفته شده برای سیستم های سینگولار دارای تأخیر، وجود ترم های نایقینی در فضای مدل می باشد که می تواند ناشی از عدم قطعیت های مدل و یا اغتشاشات خارجی باشد. هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت مقاوم با در نظر گرفتن اشباع محرک، به منظور مجاز نمودن سیستم حلقه بسته می باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله

<sup>1</sup> Singular Systems

<sup>2</sup> Algebraic-Differential

<sup>3</sup> Descriptor

<sup>4</sup> Generalized

<sup>5</sup> Semi-State

<sup>6</sup> Implicit

<sup>7</sup> Admissible System

<sup>8</sup> Non-Singular

<sup>9</sup> Time-Delay Singular Systems

**تعریف ۲-۳۱:** سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. آنگاه تعاریف زیر برقرار است:

۱. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را رگولار و ضربه آزاد گویند، اگر زوج  $(E, A)$  رگولار و ضربه آزاد باشد.

۲. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را پایدار گویند، اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  اسکالر  $\delta(\varepsilon) > 0$  وجود داشته باشد به نحویکه برای هر شرایط اولیه همساز  $\phi(t)$  که در شرط  $\sup_{-d_2 \leq t \leq 0} \|\phi(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$  صدق می کند، پاسخ سیستم (۱) شروط زیر را برآورده کند:

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \geq 0 \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

۳. سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) را مجاز گویند، اگر رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

**لم ۱-۲۴:** فرض کنید سیستم سینگولار همراه با تأخیر (۱) رگولار و ضربه آزاد باشد، آنگاه پاسخ چنین سیستمی بر روی بازه  $[0, \infty)$  یکتا و ضربه آزاد خواهد بود.

حال، سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان و قید اشباع محرک (۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d(t)) \\ &+ (B + \Delta B)\sigma(u(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0]$$

که در آن  $x(t) \in R^n$  بردار حالت،  $u(t) \in R^m$  بردار ورودی،  $\phi(t)$  بردار شرایط اولیه است که المان های آن توابع پیوسته می باشند. تأخیر زمانی  $d(t)$  یک تابع پیوسته و متغیر با زمان می باشد به نحویکه

$$0 < d_1 \leq d(t) \leq d_2, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq \mu < 1 \quad (5)$$

که در آن  $d_1$  و  $d_2$  کران پایین و بالا برای تأخیر زمانی و  $\mu$  حد بالای نرخ تغییرات تأخیر زمانی می باشند. به علاوه، تابع  $\sigma: R^m \rightarrow R^m$  اشباع ورودی می باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$\sigma(u) = [\sigma(u_1) \quad \sigma(u_2) \quad \dots \quad \sigma(u_m)]^T \quad (6)$$

که در آن  $\sigma(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{|u_i|, u_{i, \max}\}$  بوده و  $u_{i, \max} > 0$  ماکزیمم دامنه مجاز اندازه مولفه ورودی  $i$ -ام است. همچنین، ماتریس  $E \in R^{n \times n}$  سینگولار بوده و فرض می شود  $\text{rank} E = r < n$ . ماتریس های  $A, A_d$  و  $B$  ثابت، حقیقی و معلوم با ابعاد مناسب و ماتریس های  $\Delta A, \Delta A_d$  و  $\Delta B$  معرف نایقینی های پارامتری سیستم هستند که فرض می شود در رابطه زیر صادق باشند:

پایداری در دو حالت بررسی می شود. در حالت اول شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایداری به نحوی که پایداری سیستم حلقه بسته مستقل از تأخیر باشد، بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب حاصل می گردد. همچنین تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، طی قضیه ای بیان می شود. سپس، به بررسی مسأله پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار پرداخته می شود. در این حالت تأخیر زمانی، متغیر با زمان فرض شده و شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریس خطی جدیدی بیان می گردد و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته ارائه می شود. در پایان، به کمک مثال های ارائه شده و شبیه سازی صورت پذیرفته، کارایی قضایای پیشنهادی مقاله، نشان داده می شود و عملکرد مناسب قانون کنترلی مقاوم در حضور تأخیر بررسی می گردد.

ادامه مقاله بدین شرح می باشد. ابتدا در بخش ۲، سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک معرفی و تعاریف اولیه و قضایای پایه مربوط به آن مرور خواهد شد. سپس، قضایای ارائه شده برای حالت مستقل از تأخیر<sup>۱۱</sup> در بخش ۳-۱ و قضایای وابسته به تأخیر<sup>۱۱</sup> در بخش ۳-۲، شرایط وجود کنترل کننده پایداری مقاوم را بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب، برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر با در نظر گرفتن اشباع محرک، ارائه می دهند. برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، در بخش ۴ به ارائه مثال های شبیه سازی شده خواهیم پرداخت. در آخر نیز، جمع بندی مطالب و نتیجه گیری آورده شده است.

**تذکره:** در این مقاله، علامت  $K > 0$  نشانه آن است که ماتریس نمونه  $K$  مثبت معین و متقارن می باشد. همچنین علامت (\*) در ماتریس ها مبین عناصر متقارن است.

## ۲- توصیف سیستم و تعاریف اولیه

در این بخش ابتدا تعاریف پایه مربوط به سیستم های سینگولار دارای تأخیر ارائه می گردد.

**تعریف ۱-۳۱:** سیستم سینگولار نامی تأخیر زمانی نامقید (۱) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

۱. زوج  $(E, A)$  را رگولار گویند، اگر  $\det(sE - A)$  متحد با صفر نباشد.

۲. زوج  $(E, A)$  را ضربه آزاد گویند، اگر  $\text{deg}(\det(sE - A)) = \text{rank}(E)$ .

<sup>10</sup> Delay-Independent

<sup>11</sup> Delay-Dependent

زیر تعریف می شود [۳۶]:  
 $\alpha \in R^m$  و بردار  $H, F \in R^{m \times n}$  یک مجموعه ماتریس به صورت

$$W(\alpha, F, H) = \left\{ W \in R^{m \times n} : W = \begin{bmatrix} \alpha f_1 + (1 - \alpha) h_1 \\ \vdots \\ \alpha f_m + (1 - \alpha) h_m \end{bmatrix} \right\} \quad (13)$$

که در آن  $h_i$  معرف  $i$ -امین سطر ماتریس فیدبک کمکی و  $\alpha_i$  بیانگر  $i$ -امین المان بردار  $\alpha \in \psi(\alpha)$  می باشد. همچنین مجموعه  $\psi(\alpha)$  به صورت  $\psi(\alpha) = \{ \alpha \in R^m : \alpha_i = 0 \text{ or } 1 \}$  تعریف می شود. از بردار  $\alpha \in \psi(\alpha)$  برای انتخاب سطر های ماتریس  $F$  و  $H$  و تشکیل ماتریس جدید  $W(\alpha, F, H)$  استفاده می گردد. به منظور برآورده شدن قید اشباع محرک نیاز است که ماتریس فیدبک کمکی  $H$  شرط  $|h_i x| \leq u_{i \max}$  را به ازای  $i = 1, \dots, m$  برآورده کند. برای ماتریس فیدبک کمکی  $H$ ، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به  $x$  خطی است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(H) = \{ x \in \mathcal{R}^n : |h_i x| \leq u_{i \max}, i = 1, 2, \dots, m \} \quad (14)$$

حال، یک بیضی از میان زیر مجموعه های مجموعه  $\Gamma(H)$  به صورت  $\varepsilon(P, 1) = \{ x : x^T P x \leq 1 \}$  انتخاب می شود. که در آن  $P > 0$  است. یافتن ماتریس  $H$  به نحویکه شرط  $|h_i x| \leq u_{i \max}$  به ازای  $x$  های متعلق به مجموعه  $\varepsilon(P, 1)$  برآورده شود معادل با حل نامساوی ماتریس خطی زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_{i \max} & h_i \\ * & u_{i \max} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (15)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن  $\sigma(Fx(t)) = W(\alpha, F, H)x(t)$  با هدف کاهش محافظه کاری، معادلات سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)W(\alpha, F, H)x(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (16)$$

هدف، طراحی ماتریس های بهره  $F$  و  $H$  است به نحویکه سیستم حلقه بسته (۱۶) برای همه تاخیرهای متغیر با زمان که شرط (۵) و همه نایقینی هایی که شرط (۷) را ارضا می کنند، مجاز باشد.

### ۳- پایدارسازی مقاوم سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

۳-۱ پایداری مقاوم مستقل از تأخیر سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

در این قسمت، بر مبنای لم ها و تعاریفی که در بخش قبل به آن اشاره شد، شرایط وجود کنترل کننده پایدار ساز مقاوم مستقل از تأخیر با

$$\begin{aligned} &[\Delta A(t) \quad \Delta A_d(t) \quad \Delta B(t)] \\ &= DJ(t) \begin{bmatrix} E_a & E_d & E_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن  $D, E_a, E_d$  و  $E_b$  ماتریس های معلوم ثابت با ابعاد مناسب هستند و ماتریس نامعلوم  $J(t)$  رابطه زیر را برآورده می کند:

$$J^T(t)J(t) \leq I, \quad \forall t \quad (8)$$

لم ۲- [۲۲]: برای ماتریس های داده شده  $C$  و  $G$  با ابعاد مناسب و  $O$  متقارن و هر  $J(t)$  که در شرط (۸) صدق کند، رابطه زیر برقرار است:

$$O + GJ(t)C + C^T J^T(t)G^T < 0 \quad (9)$$

اگر و تنها اگر اسکالر  $\lambda > 0$  وجود داشته باشد به نحویکه:

$$O + \lambda GG^T + \lambda^{-1} C^T C < 0 \quad (10)$$

تعریف ۳- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۴) را پایدار مقاوم گویند اگر سیستم (۴) در غیاب ورودی به ازای همه نایقینی های  $\Delta A$  و  $\Delta A_d$  که در رابطه (۷) صدق می کنند، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

تعریف ۴- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی (۴) را پایدارپذیر مقاوم گویند، اگر قانون کنترل  $u(t)$  وجود داشته باشد به نحویکه سیستم حلقه بسته از نقطه نظر تعریف (۳) پایدار مقاوم باشد.

در این مقاله، قانون کنترل برای سیستم (۴) به صورت فیدبک حالت خطی  $u = Fx$  در نظر گرفته می شود. بنابراین معادلات توصیف کننده سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)\sigma(Fx(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (11)$$

برای ماتریس فیدبک  $F$ ، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به  $x$  خطی است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(F) = \{ x \in \mathcal{R}^n : |f_i x| \leq u_{i \max}, i = 1, 2, \dots, m \} \quad (12)$$

که در آن  $f_i$  در واقع  $i$ -امین سطر ماتریس  $F$  می باشد. در این مقاله، به منظور کاهش محافظه کاری مساله اشباع محرک، از تکنیک اضافه کردن ماتریس فیدبک کمکی بهره گرفته می شود. این تکنیک سابقاً نیز در مراجع مختلف [۷ و ۸] برای پایدار سازی سیستم های همراه با تأخیر معمولی با قید اشباع ورودی بکار گرفته شده است. در این مقاله، این تکنیک برای پایدار سازی سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک استفاده می شود، به این صورت که، برای دو ماتریس

از آنجاییکه  $P^{-1}E = P^{-1}EP^T P^{-T}$ ، لذا اگر رابطه (۱۷) برقرار گردد آنگاه  $P^{-1}EP^T P^{-T} = P^{-1}PE^T P^{-T}$  خواهد بود. با این استدلال رابطه (۲۳) به صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= (Ex(t))^T P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}Ex(t) \\ &+ x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &- (1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری معادلات سیستم (۱۶) در رابطه فوق می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \\ &\tilde{B}W(\alpha, FP^T, HP^T) + (\tilde{B}W(\alpha, FP^T, HP^T))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه بالا برای سهولت  $B + \Delta B = \tilde{B}$ ،  $A + \Delta A = \tilde{A}$

قرار داده شده اند. با انتخاب  $FP^T = Y$ ،  $HP^T = L$ ، و جایگزینی در روابط فوق، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+ \tilde{B}W(\alpha, Y, L) + (\tilde{B}W(\alpha, Y, L))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

رابطه فوق را می توان بصورت یک فرم کوادراتیک برحسب متغیر

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t))]^T$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+ \tilde{B}W(\alpha, Y, L) + (\tilde{B}W(\alpha, Y, L))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d P^T P^{-T}x(t-d(t)) \\ &+ x^T(t-d(t))P^{-1}P\tilde{A}_d^T P^{-T}x(t) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \\ &= \xi^T(t)\tilde{\Sigma}\xi(t) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن ماتریس  $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$  یک ماتریس متقارن با المان های

زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11} &= \tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \tilde{B}W(\alpha, Y, L) \\ &+ (\tilde{B}W(\alpha, F, H))^T + Q \\ \tilde{\Sigma}_{12} &= \tilde{\Sigma}_{21}^T = \tilde{A}_d P^T \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= -(1-\mu)Q \end{aligned} \quad (28)$$

شرط مجاز بودن سیستم (۱۶) آن است که  $\tilde{\Sigma} < 0$  شود. بر اساس رابطه

(۷) ماتریس های  $\tilde{A}$ ،  $\tilde{B}$  و  $\tilde{A}_d$  را با  $A + DJ(t)E_a$ ،  $B + DJ(t)E_b$  و  $A_d + DJ(t)E_d$  در رابطه فوق جایگزین

می کنیم:

رویکرد نامساوی خطی ماتریسی و تخمین متناظری از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) طی قضیه زیر ارائه می شود.

**قضیه ۱-** سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۱۶) را با شروط داده شده (۵) و (۷) در نظر بگیرید، اگر ماتریس های  $L$ ،  $Y$ ،  $P$  و ماتریس  $Q > 0$  وجود داشته باشند به نحویکه:

$$EP^T = PE^T \geq 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} + DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T \\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P^{-1}E \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

که در آن  $\bar{E}_a = E_a P^T$ ،  $\bar{E}_d = E_d P^T + E_b W(\alpha, Y, L)$ ،  $l_i$  مین  $i$ -امین سطر از ماتریس  $L$  و  $\Sigma_{ij}$  ها توسط رابطه زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= AP^T + PA^T + BW(\alpha, Y, L) \\ &+ (BW(\alpha, F, H))^T + Q \\ \Sigma_{12} &= \Sigma_{21}^T = A_d P^T \\ \Sigma_{22} &= -(1-\mu)Q \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز  $F = YP^{-T}$  پایدار مقاوم خواهد بود. همچنین مجموعه زیر یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب می باشد:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\phi) &= \{ \phi \in C_{n, d_2} : \phi^T(0)P^{-1}E\phi(0) + \\ &\int_{-d_2}^0 \phi^T(\theta)P^{-1}QP^{-T}\phi(\theta)ds \leq 1, \forall \theta \in [-d_2, 0] \} = \\ &\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1}E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T})) \end{aligned} \quad (21)$$

**اثبات-** تابع  $V(x_t)$  زیر به عنوان کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) پیشنهاد می شود:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)P^{-1}Ex(t) \\ &+ \int_{t-d(t)}^t x^T(s)P^{-1}QP^{-T}x(s)ds \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $x_t = x(t+\theta)$ ،  $\theta \in [-d_2, 0]$  مشتق  $V(x_t)$  در راستای مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}^T(t)P^{-1}Ex(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &+ x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &- (1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (23)$$

حالت قضیه پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار همراه با تأخیر و قید اشباع محرک پیشنهاد می شود.

**قضیه ۲-** سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان (۱۶) با شروط داده شده (۵) و (۷) پایدار مقاوم است، اگر ماتریس های  $Y, L, P > 0, Q_i > 0, i = 1, 2, Z_i > 0, i = 1, \dots, 5, T > 0$  و  $N_i, M_i, S_i, i = 1, \dots, 5$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحویکه نامساوی های ماتریسی خطی (۳۵) و (۳۶) زیر برقرار باشند:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Phi & K \\ K^T & V \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (36)$$

که در آن

$$K = \begin{bmatrix} d_2 N_1 & d_{12} M_1 & d_{12} S_1 & \bar{E}_a^T & \\ d_2 N_2 & d_{12} M_2 & d_{12} S_2 & \bar{E}_d^T & \\ d_2 N_3 & d_{12} M_3 & d_{12} S_3 & 0 & \\ d_2 N_4 & d_{12} M_4 & d_{12} S_4 & 0 & \\ d_2 N_5 & d_{12} M_5 & d_{12} S_5 & 0 & \end{bmatrix} \quad (37)$$

و ماتریس  $V = \text{diag}(V_1 \ V_2 \ \dots \ V_4)$  با عناصر روی قطر زیر:

$$\begin{aligned} V_1 &= -d_2 Z_1, & V_2 &= -d_{12}(Z_1 + Z_2) \\ V_3 &= -d_{12} Z_2, & V_4 &= -I \end{aligned} \quad (38)$$

همچنین ماتریس متقارن  $\Phi$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T + AT + DD^T \\ &+ BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T, \\ \Phi_{12} &= N_2^T - N_1 + S_1 - M_1 + A_d^T, \\ \Phi_{13} &= M_1 + N_3^T, \quad \Phi_{14} = -S_1 + N_4^T, \\ \Phi_{15} &= N_5^T - ET + P + DD^T \\ &+ (AT + BW(\alpha, Y, L))^T, \\ \Phi_{22} &= (\mu - 1)Q_3 + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T \\ \Phi_{23} &= M_2 - N_3^T + S_3^T - M_3^T \\ \Phi_{24} &= -S_2 - N_4^T + S_4^T - M_4^T \\ \Phi_{25} &= TA_d^T + S_5^T - N_5^T - M_5^T \\ \Phi_{33} &= -Q_1 + M_3 + M_3^T, \quad \Phi_{34} = -S_3 + M_4^T \\ \Phi_{35} &= M_5^T, \quad \Phi_{44} = -Q_2 - S_4 - S_4^T, \\ \Phi_{45} &= -S_5^T, \quad \Phi_{55} = d_2 Z_1 + d_{12} Z_2 - 2ET \end{aligned} \quad (40)$$

در رابطه (۳۷)،  $\bar{E}_d = E_d T$  و  $\bar{E}_a = E_a T + E_b W(\alpha, Y, L)$  می باشد. به علاوه، مجموعه  $\Lambda_2(\rho) \leq 1$  تخمینی از ناحیه جذب خواهد بود:

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$\bar{E}_d$  و  $\bar{E}_a$  در صورت قضیه (۱) بعد از رابطه (۱۹) تعریف شده اند. همچنین ماتریس  $\Sigma$  در رابطه (۲۰) آورده شده است. با استناد به لم (۲) رابطه فوق برای همه  $J(t)$  هایی که در نامساوی (۸) صدق می کنند برقرار است اگر و تنها اگر اسکالر  $\lambda > 0$  وجود داشته باشد به نحویکه

$$\lambda \Sigma + \lambda^2 \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

با تغییر متغیرهای  $\lambda P$  و  $\lambda D$  به  $P$  و  $D$  رابطه (۳۰) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\Sigma + \begin{bmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

با استفاده از قضیه متمم شر، نامساوی ماتریسی خطی زیر حاصل می شود:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T \\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

اگر نامساوی ماتریسی فوق برقرار باشد، آنگاه:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\xi(t)(-\hat{\Sigma})\xi(t) \leq -\lambda_{\min}(-\hat{\Sigma})\|x_t\|^2 \quad (33)$$

و نتایج زیر را در بر خواهد داشت:

$$\begin{aligned} x^T P^{-1} E x &\leq V(x_t) < V(x_t(0)) = \\ &\phi^T(0) P^{-1} E \phi(0) + \int_{-d(t)}^0 \phi^T(\theta) P^{-1} Q P^{-T} \phi(\theta) ds \\ &\leq \max_{\theta \in [-d, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1} E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1} Q P^{-T})) \\ &= \Lambda_1(\phi) \end{aligned} \quad (34)$$

روابط فوق اذعان می دارد که اگر  $\Lambda_1(\phi) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T P^{-1} E x \leq 1$  خواهد بود، بنابراین همه مسیرهای  $x(t)$  که از  $\Lambda_1(\phi) \leq 1$  شروع می شوند درون باقی  $x^T P^{-1} E x \leq 1$  می ماند و بدان وسیله قید  $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۱۹) برآورده می شود.

**۳-۲** پایداری مقاوم وابسته به تأخیر سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر و قید اشباع محرک

در این بخش، پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم (۱۶) در دو حالت بررسی می شود. حالت اول، تأخیر زمانی را متغیر با زمان در نظر گرفته به نحویکه در شرط (۵) صدق کند و طی قضیه ای شرط وجود کنترل کننده پایدار ساز و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) ارائه می شود. سپس تأخیر زمانی، ثابت فرض می شود و در این

$$d_2 \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds \geq 0 \quad (47)$$

که در آن  $\xi(t) = [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{14} \ \xi_{15}]^T$  و

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= x^T(t) T^{-1}, \quad \xi_{12} = x^T(t-d(t)) T^{-1}, \\ \xi_{13} &= x^T(t-d_1) T^{-1}, \quad \xi_{14} = x^T(t-d_2) T^{-1}, \\ \xi_{15} &= \dot{x}^T(t) T^{-1}, \end{aligned}$$

حال، مشتق  $V(x_t)$  در مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\dot{x}^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \{x^T(t) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t) - \\ &x^T(t-d_i) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t-d_i)\} \\ &+ x^T(t) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t) \\ &- (1-d(t)) x^T(t-d(t)) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t-d(t)) \\ &+ d_2 \dot{x}^T(t) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(t) + d_{12} \dot{x}^T(t) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(t) \\ &- \int_{t-d_2}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-d_1}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (48)$$

با اضافه کردن روابط (۴۳) - (۴۷) را به رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \xi^T(t) (\tilde{\Phi} + d_2 N Z_1^{-1} N^T \\ &+ d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T + d_{12} M Z_2^{-1} M^T) \xi(t) \\ &- \int_{t-d(t)}^t [\xi^T(s) N + \dot{x}(s) Z_1] Z_1^{-1} [\xi^T(t) N + \dot{x}(t) Z_1]^T ds \\ &- \int_{t-d_2}^t [\xi^T(s) S + \dot{x}(s) (Z_1 + Z_2)] (Z_1 + Z_2)^{-1} \\ &[\xi^T(t) N + \dot{x}(t) (Z_1 + Z_2)]^T ds \\ &- \int_{t-d_1}^t [\xi^T(s) M + \dot{x}(s) Z_2] Z_2^{-1} [\xi^T(t) M + \dot{x}(t) Z_2]^T ds \\ &\leq \xi^T(t) [\tilde{\Phi} + d_2 N Z_1^{-1} N^T + d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T \\ &+ d_{12} M Z_2^{-1} M^T] \xi(t) = \xi^T(t) \bar{\Delta} \xi(t) \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن

$$\begin{aligned} N &= [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_5]^T \\ M &= [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_5]^T \\ S &= [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_5]^T \end{aligned}$$

می باشد. برای آنکه سیستم (۱۶) مجاز باشد می بایست  $\bar{\Delta} < 0$  باشد. با استفاده از قضیه متمم شر می توان نشان داد که منفی معین بودن ماتریس  $\bar{\Delta}$  معادل با منفی معین بودن ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & d_2 N & d_{12} M & d_{12} S \\ * & -d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & -d_{12} (Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & -d_{12} Z_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\rho) &= \max_{\theta \in [0, d_1]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1} P T^{-1}) \right. \right. \\ &+ d_1 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_1 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_2 T^{-1}) \\ &+ d_2 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_3 T^{-1}) \left. \right] + \|\phi(\theta)\|^2 \\ &\left[ \frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1} Z_1 T^{-1}) \right. \\ &\left. \left. + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1} Z_2 T^{-1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

**اثبات -** تابع لیاپانوف زیر برای سیستم (۱۶) در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t-d_i}^t x^T(s) T^{-1} Q_i T^{-1} x(s) ds \\ &+ \int_{t-d(t)}^t x^T(s) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(s) ds \\ &+ \int_{-d_2 t + \theta}^0 \int_{t-d_2}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta \\ &+ \int_{-d_2 t + \theta}^{-d_1} \int_{t-d_2}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (42)$$

از طرف دیگر، برای هر ماتریس  $\bar{S}_i, i = 1, \dots, 5$  و  $\bar{M}_i, i = 1, \dots, 5$  و  $T > 0$  معادلات زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) T^{-1} + \dot{x}^T(t) T^{-1}] \\ \times [-E\dot{x}(t) + \tilde{A}x(t) + \tilde{A}_d x(t-d(t)) + \tilde{B}\sigma(Fx)] = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{N}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{N}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{N}_3 + x^T(t-d_2) \bar{N}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{N}_5] \\ \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{S}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{S}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{S}_3 + x^T(t-d_2) \bar{S}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{S}_5] \\ \times \left[ x(t-d(t)) - \int_{t-d_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds - x(t-d_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{M}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{M}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{M}_3 + x^T(t-d_2) \bar{M}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{M}_5] \\ \times \left[ x(t-d_1) - \int_{t-d(t)}^{t-d_1} \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

در روابط فوق  $\tilde{A}_d = A_d + \Delta A_d$ ,  $\tilde{B} = B + \Delta B$ ,  $\tilde{A} = A + \Delta A$  برای  $\bar{S}_i = T^{-1} S_i T^{-1}$  و  $\bar{N}_i = T^{-1} N_i T^{-1}$ ,  $\bar{M}_i = T^{-1} M_i T^{-1}$   $i = 1, \dots, 5$  می باشد. از طرف دیگر، برای هر ماتریس متقارن مثبت نیمه معین  $X$  رابطه زیر به ازای مقادیر تأخیر که رابطه (۵) را برآورده می کنند برقرار است [۱۳]:

که در آن:

$$\lambda \Theta + \lambda^2 \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (55)$$

برای تبدیل نامساوی ماتریسی غیر خطی فوق به یک نامساوی ماتریسی خطی از تغییر متغیرهای  $\lambda P, \lambda Z, \lambda Q_i, \lambda M_i, \lambda N_i$  و  $\lambda T$  و  $S_i$  به ترتیب به جای  $P, Z, Q_i, M_i, N_i, T$  استفاده می کنیم:

$$\Theta + \begin{bmatrix} DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

با استفاده از قضیه متمم شر، برقراری نامساوی ماتریسی خطی فوق معادل با منفی معین بودن ماتریس  $\hat{\Delta}$  که در رابطه (۳۵) تعریف شده می باشد. اگر نامساوی ماتریسی (۳۵) برقرار باشد آنگاه

$$\dot{V}(x_t) \leq -\xi^T(t)(-\hat{\Delta})\xi(t) \leq -\lambda_{\min}(-\hat{\Delta})\|x_t\|^2 \quad (57)$$

و متعاقباً:

$$\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T \end{bmatrix} \quad (51)$$

که در آن ماتریس  $\tilde{\Phi} \in R^{5 \times 5}$  متقارن می باشد و عناصر آن در رابطه (۵۲) تعریف شده اند. (تعریف مابقی عناصر  $\hat{\Phi}$  از تقارن آن استخراج می گردد.)

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{11} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T + AT + BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T \\ \hat{\Phi}_{12} &= N_2^T - N_1 + S_1 - M_1 + A_d T, \\ \hat{\Phi}_{13} &= M_1 + N_3^T, \quad \hat{\Phi}_{14} = -S_1 + N_4^T, \\ \hat{\Phi}_{15} &= N_5^T - ET + P + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T \\ \hat{\Phi}_{22} &= (\mu - 1)Q_3 + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T \\ \hat{\Phi}_{23} &= M_2 - N_3^T + S_3^T - M_3^T \\ \hat{\Phi}_{24} &= -S_2 - N_4^T + S_4^T - M_4^T \\ \hat{\Phi}_{25} &= TA_d^T + S_5^T - N_5^T - M_5^T \\ \hat{\Phi}_{33} &= -Q_1 + M_3 + M_3^T, \quad \hat{\Phi}_{34} = -S_3 + M_4^T, \\ \hat{\Phi}_{35} &= M_5^T, \quad \hat{\Phi}_{44} = -Q_2 - S_4 - S_4^T, \\ \hat{\Phi}_{45} &= -S_5^T, \quad \hat{\Phi}_{55} = d_2 Z_1 + d_{12} Z_2 - 2ET \end{aligned} \quad (52)$$

اکنون، در رابطه (۵۰)، رابطه (۵۱) را جایگزین ماتریس  $\tilde{\Phi}$  می کنیم:

$$\Theta + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

که در آن  $\Theta$  برابر است با:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & d_2 N & d_{12} M & d_{12} S \\ * & -d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & -d_{12}(Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & -d_{12} Z_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

با توجه به لم (۲) رابطه (۵۳) برقرار است اگر:

$$V(x_t) = x^T(t)T^{-1}PT^{-1}x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)T^{-1}QT^{-1}x(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s)T^{-1}ZT^{-1}x(s)dsd\theta \quad (63)$$

با بکار بستن روندی مشابه با اثبات قضیه (۲)، نامساوی ماتریسی خطی (۵۹) حاصل خواهد شد. اگر LMI فوق برقرار باشد، آنگاه  $V(x_t(t))$  منفی می باشد. در نتیجه:

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \leq \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1}) \right] + \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \lambda_{\max}(T^{-1}ZT^{-1}) \right] \right\} = \Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \quad (64)$$

اگر  $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T Px \leq 1$  خواهد بود در نتیجه همه مسیرهای  $x(t)$  که از  $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  شروع می شوند درون  $x^T Px \leq 1$  باقی می ماند و به این طریق قید  $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۶۰) برآورده می شود.

#### ۴- شبیه سازی کامپیوتری

در این بخش، شبیه سازی هایی انجام می پذیرد تا عملکرد قانون کنترلی مقاوم پیشنهادی نشان داده شود. برای این منظور، یک مثال کاربردی و یک مثال عددی در نظر گرفته شده اند. مثال ۱: سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۴) را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

ماتریس های نایقینی به فرم مجاز زیر در نظر گرفته می شوند

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B] = DJ(t)[E_a \quad E_d \quad E_b] \quad (66)$$

که در آن،

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, J(t) = \sin(t)$$

تأخیر زمانی  $d(t)$  و قید دامنه ورودی از روابط زیر پیروی می کند:

$$1 \leq d(t) \leq 3, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq 1, \quad -1 \leq u(t) \leq 1 \quad (68)$$

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \leq \max_{\theta \in [0, d_2]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + d_1 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_1 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_2 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_3 T^{-1}) \right] + \|\phi(\theta)\|^2 \left[ \frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1}Z_1 T^{-1}) + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1}Z_2 T^{-1}) \right] \right\} = \Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \quad (58)$$

آنگاه اگر مجموعه  $\Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  باشد حتماً  $x^T Px \leq 1$  خواهد بود و همه مسیرهای  $x(t)$  که از  $\Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  شروع می شوند درون  $x^T Px \leq 1$  باقی می ماند و بدان وسیله قید  $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$  به سبب نامساوی ماتریسی (۳۶) برآورده می شود.

**قضیه ۳-** سیستم سینگولار (۱۶) را با  $d_1 = d_2 = \tau$  و  $\mu = 0$  در نظر بگیرید، اگر ماتریس های  $L, Y, Q, Z > 0, P > 0$  و ماتریس های  $N_i, i = 1, \dots, T > 0$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحویکه:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} + DD^T & \Psi_{12} & \Psi_{13} + DD^T & \tau N_1 & \bar{E}_a^T \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \tau N_2 & \bar{E}_d^T \\ * & * & \Psi_{33} & \tau N_3 & 0 \\ * & * & * & -\tau Z & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (60)$$

که در آن  $\Psi_{ij}$  و  $\bar{E}_d = E_d T$  و  $\bar{E}_a = E_a T + E_b W(\alpha, Y, L)$  رابطه زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= AT + BW(\alpha, Y, L) \\ &+ (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + N_1 + N_1^T + Q \\ \Psi_{12} &= A_d T - N_1 + N_2^T \\ \Psi_{13} &= (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + P - ET + N_3^T \\ \Psi_{22} &= -N_2 - N_2^T - Q, \quad \Psi_{23} = -N_3 + TA_d^T, \\ \Psi_{33} &= \tau Z - 2ET \end{aligned} \quad (61)$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز  $F = T^{-1}Y$  پایدار مقاوم خواهد بود و مجموعه  $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$  یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب خواهد بود:

$$\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) = \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left( \lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(Q) \right) + \|\dot{\phi}(\theta)\|^2 \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(Z) \right\} \quad (62)$$

**اثبات -**  $V(x_t)$  را کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) با تأخیر زمانی ثابت  $\tau$  در نظر می گیریم:

مثال ۲: در نظریه مدارهای الکتریکی، مدل های مدارهای خطوط انتقال و نیز مدار معادل برخی المان های جزئی (PEEC)، به معادلات دیفرانسیل تأخیردار خنثی (NDE) منجر می شود [۳۳]. از آنجاییکه حل عددی معادلات تأخیری نوع NDE سخت است، رویکرد پیشنهادی در مراجع مختلف [۱۳، ۳۴] آن است که ابتدا معادلات را به صورت معادلات سینگولار تأخیری از نوع تأخیردار عقب افتاده (RDE) بازنویسی کرده و سپس آنها را حل نمود. یک مدار الکتریکی با المان های جزئی با معادلات زیر قابل توصیف است [۳۵]:

$$\begin{cases} C_0 \dot{y}(t) + G_0 y(t) + C_1 \dot{y}(t-d(t)) \\ \quad + G_1 y(t-d(t)) = B_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (71)$$

که در آن  $C_0$  یک ماتریس قطری و  $G_0$ ،  $C_1$  و  $G_1$  ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. همانطور که واضح است این دسته معادلات تأخیری از نوع NDE می باشند. معادلات فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \bar{G}_0 y(t) + \bar{C}_1 \dot{y}(t-d(t)) \\ \quad + \bar{G}_1 y(t-d(t)) + \bar{B}_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (72)$$

که در آن بردار  $y(t) \in R^n$  و شامل ولتاژ و جریان گره های مدار می باشد، همچنین تمامی ماتریس های  $\bar{C}_1$ ،  $\bar{G}_0$ ،  $\bar{G}_1$  و  $\bar{B}_0$  دارای مقادیر حقیقی با ابعاد مناسب هستند. با تعریف:

$$\eta(t) = y(t), \quad \zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) \quad (73)$$

دسته معادلات سیستم (۷۲) قابل تبدیل به معادلات سینگولار تأخیری RDE به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + Bu(t) \\ \eta(t) = \phi(t), \quad t \in (-d_2, 0) \\ \zeta(t) = \dot{\phi}(t) - \bar{G}_0 \phi(t), \quad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (73)$$

که در آن  $x(t) = [\eta^T(t) \quad \zeta^T(t)]^T$  و بردار شرایط اولیه است که المان های آن توابع پیوسته مشتق پذیر می باشند و

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & I_{n \times n} \\ 0 & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \\ A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{C}_1 + \bar{G}_1 \bar{G}_0 & \bar{G}_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

مدار الکتریکی با معادل PEEC شامل یک سلف و یک خازن را با پارامترهای داده شده زیر در نظر بگیرید [۳۴]:

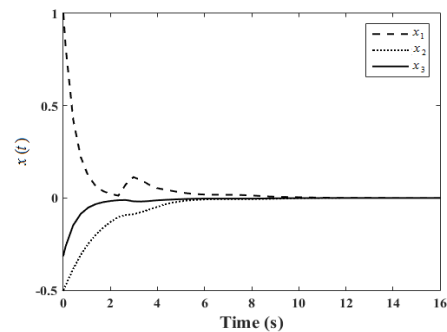
هدف طراحی کنترل کننده پایدار ساز مقاوم وابسته به تأخیر می باشد به نحویکه ضمن برآورده شدن قید اشباع، سیستم حلقه بسته داده شده پایدار مقاوم باشد. بدین منظور، طبق قضیه (۲) می بایست به حل LMI (۳۵) و (۳۶) بپردازیم. از نرم افزار متلب برای حل LMI استفاده شده است. نتایج بدست آمده به صورت زیر می باشد:

$$L = L_1 = \begin{bmatrix} -0.7918 & -0.5351 & -0.5394 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad T = \begin{bmatrix} 1.9681 & -0.3307 & -0.6283 \\ -0.3307 & 0.8752 & 0.0175 \\ -0.6283 & 0.0175 & -0.1437 \end{bmatrix} \quad (69)$$

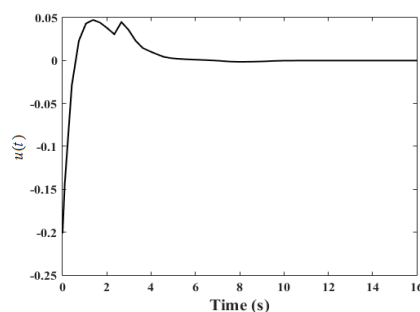
و نهایتاً کنترل کننده فیدبک حالت مقاوم پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = lT^{-1}x(t) = [0.2845 \quad -0.5527 \quad 2.4424]x(t) \quad (70)$$

حال، سیستم سینگولار نامعین تأخیر زمانی (۵) با پارامترها و قیود داده شده را به ازای شرایط اولیه  $\phi(t) = [1 \quad -0.5 \quad -0.3]^T$ ،  $t \in [-3, 0]$  سازی کرده و نتایج بدست آمده را مورد بررسی قرار می دهیم. شکل (۱) وضعیت حالت های سیستم حلقه بسته را به تصویر می کشد. نتایج حاکی از آن است که کنترل کننده طراحی شده ضمن دفع مطلوب ناپیوستگی، منجر به پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته گردیده است. همچنین در شکل (۲)، که وضعیت سیگنال کنترلی را نمایش می دهد، ملاحظه می کنید که قید اشباع ورودی نیز برآورده شده است.



شکل ۱: وضعیت پاسخ حالت های سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایدار ساز مقاوم



شکل ۲: پاسخ سیگنال کنترلی سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایدار ساز مقاوم

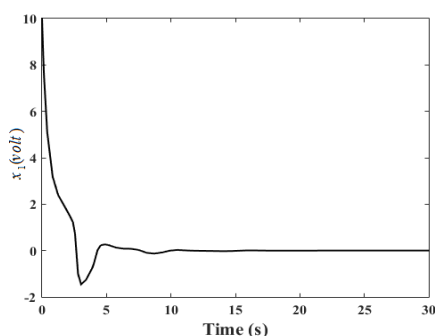
$$\alpha = 0, l = [0.0574 \quad -0.0176 \quad -0.0852 \quad -0.0091] \quad (A1)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.2662 & -0.1774 & 0.0826 & 0.0336 \\ -0.1774 & 0.4847 & -0.0775 & 0.0067 \\ 0.0826 & -0.0775 & 0.9589 & -0.1803 \\ 0.0336 & 0.0067 & -0.1803 & 1.0951 \end{bmatrix}$$

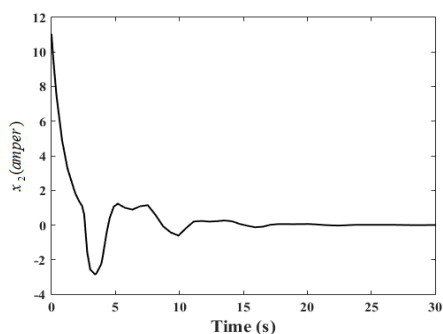
در نتیجه کنترل کننده فیدبک حالت پایداری برای سیستم داده شده (بر اساس قضیه ۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = [0.2912 \quad 0.0522 \quad -0.1166 \quad -0.0368]x(t) \quad (A2)$$

برای بررسی کارایی کنترل کننده طراحی شده، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده شده تحت کنترل کننده (A2) به ازای تابع اولیه  $\phi(t) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$  و  $\theta \in [0 \quad 1]$  شبیه سازی کرده و نتایج شبیه سازی در شکل های ۳-۶ آورده شده است.



شکل ۳: پاسخ زمانی متغیرهای حالت  $x_1$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۴: پاسخ زمانی متغیرهای حالت  $x_2$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول

$$\bar{G}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \bar{G}_0(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \Delta \bar{C}_1(t) = \begin{bmatrix} \Delta_3 & 0 \\ 0 & \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (A5)$$

که  $\Delta_i$  ها نایقینی های پارامتری بوده و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$|\Delta_1| \leq 1.6, \quad |\Delta_2| \leq 0.05, \quad |\Delta_3| \leq 0.1, \quad |\Delta_4| \leq 0.3 \quad (A6)$$

بردارهای  $\eta(t)$  و  $\zeta(t)$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\eta(t) = y(t) = [x_1 \quad x_2]^T \quad (A7)$$

$$\zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) = [x_3 \quad x_4]^T$$

که در آن  $x_1$  ولتاژ خازن و  $x_2$  جریان سلف بوده و متغیرهای  $x_3$  و  $x_4$  تعریف شده اند تا سیستم با معادلات تأخیری نوع NDE را به سیستم با معادلات سینگولار دارای تأخیر نوع RDE تبدیل کنند. با این تعریف ماتریس های زیر جهت توصیف سیستم حاصل می گردد:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ -1 & -1.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A8)$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J(t) = \sin(t)$$

در ادامه دو سناریوی مختلف ارائه می گردد و در هر مورد بر اساس تکنیک های پیشنهادی در مقاله، کنترل کننده مناسب طراحی و عملکرد مطلوب آن نشان داده می شود.

**سناریوی اول:** سیستم سینگولار دارای تأخیر با پارامترهای (A8) لحاظ می گردد. تأخیر زمانی از روابط زیر پیروی می کنند:

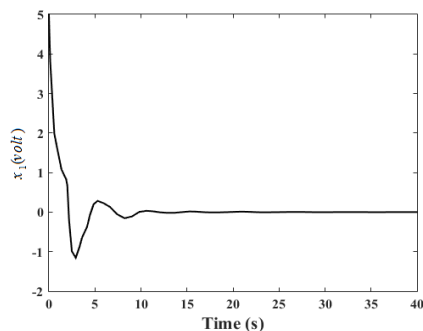
$$1 \leq d(t) \leq 3, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq 1 \quad (A9)$$

همچنین سیگنال کنترلی می بایست قید زیر را برآورده سازد:

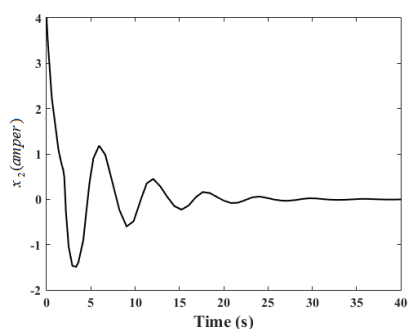
$$-0.1 \leq u(t) \leq 0.1 \quad (A10)$$

هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت  $u(t) = [\alpha f + (1-\alpha)h]x(t)$  می باشد به نحوی که ضمن برآورده کردن قید اشباع، سیستم حلقه بسته مجاز نیز باشد. از حل LMI های (A5) و (A6) با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج زیر به دست می آید:

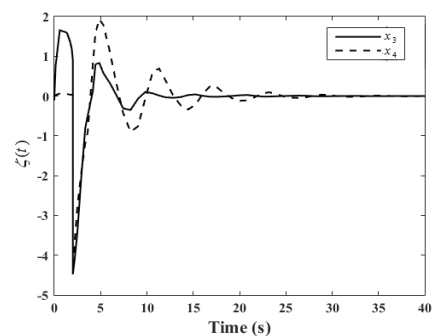
مطلوب قضایای ارائه شده در این مقاله برای کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر ثابت عملی دارد.



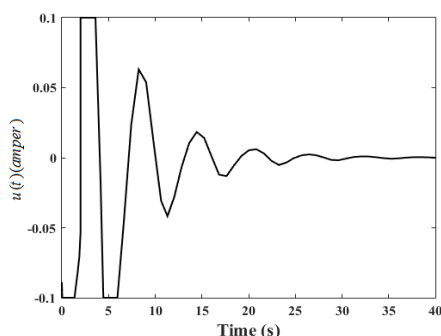
شکل ۵: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_1$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



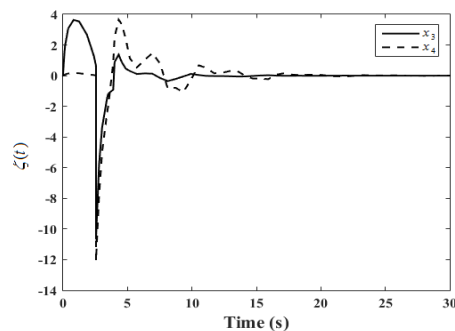
شکل ۶: پاسخ زمانی متغیر حالت  $x_2$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



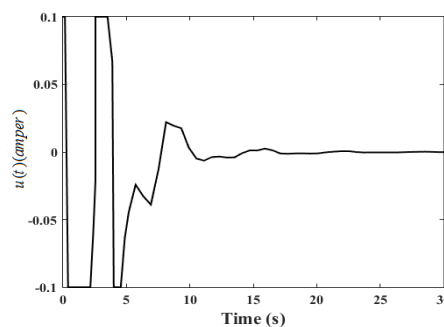
شکل ۷: پاسخ زمانی متغیر حالت  $z(t) = [x_3 \ x_4]^T$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۸: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۹: پاسخ زمانی متغیرهای حالت  $z(t) = [x_3 \ x_4]^T$  تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۱۰: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی دوم

همانطور که در شکل (۶) مشاهده می کنید سیگنال کنترلی به اشباع رفته اما با این وجود کنترل کننده طراحی شده در این بخش منجر به پایداری سیستم حلقه بسته گردیده است. نتایج حاصل حاکی از آن است که تکنیک پیشنهاد شده در مقاله از کارایی لازم برای کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان و در حضور اشباع محرک برخوردار است.

**سناریوی دوم:** در این بخش، مدل PEEC با پارامترهای داده شده (۷۸) را با تأخیر ثابت  $d_1 = d_2 = 2$  و سیگنال کنترلی با دامنه محدود  $|u| \leq 0.1$  در نظر گرفته و برای طراحی کنترل کننده مشابه آنچه در سناریوی قبل گفته شد عمل می کنیم. با مد نظر قراردادن قضیه (۲) و با کمک نرم افزار MATLAB نتایج زیر حاصل می شود:

$$u(t) = [-0.0231 \ -0.0728 \ -0.0654 \ -0.0454]x(t) \quad (۸۳)$$

به منظور تحلیل کارایی کنترل کننده طراحی شده (۸۵)، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده شده در رابطه (۷۸) و با تأخیر ثابت، به ازای تابع اولیه  $\phi(t) = [5 \ 4 \ 0]^T$  و  $\theta \in [-7 \ 10]$  می کنیم. شکل های ۷-۱۰ نتایج حاصل از شبیه سازی ها را نشان می دهد. همانطور که پیداست، علی رغم محدودتر کردن دامنه سیگنال کنترلی، کنترل کننده پیشنهادی در حضور قید اشباع محرک منجر به پایداری سیستم حلقه بسته شده است. بنابراین نتایج حاصل، حکایت از کارایی

- [5] L. SH. You, and B. S. Chen, "Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic constrained mechanical systems: a unified viewpoint," *International Journal of Control*, vol. 58, no. 3, pp. 587-612, 1993.
- [6] D. G. Luenberger, and A. Arbel, "Singular dynamic Leontief systems," *Econometrica*, vol. 45, no. 4, pp. 991-995, 1977.
- [7] A. Azarfard, H. Toossian Shandiz, and M. Shafiee, "Adaptive feedback control for linear singular systems," *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 22, pp. 132-142, 2014.
- [8] J. Y. Ishihara, and M. H. Terra, "On the Lyapunov theorem for singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions*, vol. 47, no. 11, pp. 1926-1930, 2002.
- [9] Ch. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, *Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems*, Applied Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2013.
- [10] L. Zhang, E. K. Boukas, A. Haidar, "Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation," *Automatica*, vol. 44, pp. 2691-2695, 2008.
- [11] Y. Y. Cao, and T. Hu, "Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 233-240, 2002.
- [12] T. Binazadeh, and M. Yousefi, "Designing a cascade-control structure using fractional-order controllers: time delay fractional-order proportional-derivative controller and fractional-order sliding-mode controller," *ASCE's Journal of Engineering Mechanics*, doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001234, 2017.
- [13] M. Yousefi, and T. Binazadeh, "Delay-independent sliding mode control of time-delay linear fractional order systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, doi: 0142331216678059, 2017.
- [14] M. Hosseini Toodeshki, S. Hosseinnia, and J. Askari, "Adaptive robust control of uncertain systems with state and input delay," *International Journal of Control, Automation and systems*, vol. 8, no. 6, pp. 1212-1220, 2010.
- [15] H. Gao, and C. Wang, "Comments and further results on: A descriptor system approach to Hinf control of linear time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 520-525, 2003.
- [16] U. Ascher, and L. R. Petzold, "The numerical solution of delay-differential-algebraic equations of retarded and neutral type," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 32, pp. 1635-1657, 1995.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسأله پایداری سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر بررسی شد. ابتدا، برای سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی متغیر با زمان، شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت، مستقل از تأخیر، با در نظر گرفتن اشباع محرک با هدف مجاز نمودن سیستم حلقه بسته در قالب قضیه ای ارائه شد. سپس قضایای پایداری مقاوم وابسته به تأخیر برای این سیستم ها در دو نسخه تأخیر متغیر با زمان و تأخیر ثابت، شرایط پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده را از نقطه نظر LMI نتیجه دادند. در انتها، از مثالهای عددی و عملی شبیه سازی شده برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، استفاده شد.

## پیوست

**قضیه - (لیاپانوف - کراسوفسکی)** سیستم سینگولار دارای تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. اگر سیستم (۱) ضربه آزاد و رگولار باشد و ثوابت مثبت  $U$ ،  $\sigma$  و  $\zeta$  و  $R$  و  $C[-d, \Phi] \rightarrow R \times C[-d, \Phi]$  وجود داشته باشند، به نحویکه:

$$\sigma \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq U \|x_t\|^2 \quad (84)$$

$$\dot{V}(x_t) \leq -\zeta \|x_t\|^2$$

و تابع  $V(x_t)$  برای  $x_t$  هایی که در معادله (۱) صدق می کنند، مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه سیستم (۱) پایدار مجانی می باشد. [۳۷]

**قضیه - (متمم شر)** دو گزاره زیر معادلند [۳۷]:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (85)$$

$$(ii) \quad A_{22} < 0 \quad \& \quad A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^T < 0 \quad (86)$$

## مراجع

- [1] S. Ayasun, CH.O. Nwankpa, and H.G. Kwatny, "An efficient method to compute singularity induced bifurcations of decoupled parameter-dependent differential algebraic power system model," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 167, no. 1, pp. 435-453, 2005.
- [2] R. Gani, and I.T. Cameron, "Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem," *Chemical Engineering and Science*, vol. 47, no. 5, pp. 1311-1315, 1992.
- [3] Y. Liu, and X. Wen, *Variable structure Control for singular systems*, South China University of technology Press, Guangzhou, 1997.
- [4] H. Krishnan, and N. H. Mcclamroch, "Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1885-1897, 1994.

- [28] Y. Liu, Y. Kao, Sh. Gu, and H. R. Karimi, "Soft variable structure controller design for singular systems," *Jornal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 4, pp. 1613-1626, 2015.
- [29] Y. Liu, C. Zhang, and C. Gao, "Dynamic soft variable structure control of singular systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 8, pp. 3345-3352, 2012.
- [30] Y. Ma, and L. Fu, "Robust exponential stability and memory state feedback control for uncertain singular time-delay systems with saturating actuators," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 328-338, 2016.
- [31] L. Dai, *Singular Control Systems*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [32] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *System Control Letter*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.
- [33] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli, "Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 1, pp. 212-215, 1999.
- [34] D. Yue, and Q. L. Han, "A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 51, no. 12, pp. 685-689, 2004.
- [35] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang, "A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application to PEEC models with retardation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 261-273, 2000.
- [36] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.
- [37] L. L. Liu, J. G. Peng, B. W. Wu, "On parameterized Lyapunov-Krasovskii functional techniques for investigating singular time-delay systems," *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, pp. 703-708, 2011.
- [17] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [18] H. Chenarani, and T. Binazadeh, "Flexible structure control of unmatched uncertain nonlinear systems via passivity-based sliding mode technique," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, doi: 10.1007/s40998-017-0012-x, 2017.
- [19] A.R. Hakimi, and T. Binazadeh, "Robust generation of limit cycles in nonlinear systems: application on two mechanical systems," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 12, no. 4, pp. 041013(1-8), 2017.
- [20] E. Uezato, and M. Ikeda, "Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and control of descriptor systems," *Proceedings of the 38th conference on decision and control, Phoenix, Arizona USA*, vol. 4, pp. 4092-4097, 1999.
- [21] R. Lu, H. Su, and A. Xue, *The robust control theory of singular systems*, Science Press, Beijing, 2008.
- [22] S.Y. Xu, and J. Lam, *Robust control and filtering of singular systems*, Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [23] L. Wu, and W. X. Zheng, "Passivity-based sliding mode control of uncertain singular time-delay systems," *Automatica*, vol. 45, pp. 2120-2127, 2009.
- [24] S. Xu, P. Van Dooren, R. Stefan, and J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 1122-1128, 2002.
- [25] N. Chaibi, E. H. Tissir, "Delay-dependent robust stability of singular systems with time-varying delay," *International Journal of Control and Information*, vol. 28, no. 2, pp. 147-162, 2011.
- [26] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Design of robust controller for a class of uncertain discrete-time systems subject to actuator saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, doi: 10.1109/TAC.2016.2580662, 2017.
- [27] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Robust time-varying output tracking control in the presence of actuator saturation," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, doi: 0142331216650022, 2017.