مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۵۴-۴۷

طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی برای سیستم‌های دارای عدم قطعیت گسسته-زمان با قید مثبت بودن سیستم حلقه بسته و سیگنال کنترلی

فائزه باقری [۱]، طاهره بینازاده [۲]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک ، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، fa.bagheri@sutech.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh@sutech.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۴/۵ ویرایش: ۱۳۹۶/۵/۹ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۲۴

چکیده: این مقاله سیستم‌های خطی گسسته-زمان مثبت و دارای عدم قطعیت در مدل سیستم را مورد مطالعه قرار می‌دهد. برخی پارامتر-های ماتریس سیستم در این‌جا ناشناخته است و تنها اطلاعاتی از باندهای پایین و بالای آن‌ها در اختیار می‌باشد. هدف از این مقاله، طراحی قانون کنترلی فیدبک خروجی در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری سیستم است. قانون کنترلی به نحوی طراحی می گردد که علاوه‌بر تضمین پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته، مثبت بودن سیستم حلقه بسته نیز تضمین گردد و این پیچیدگی هایی را به روند حل مسئله اضافه می‌کند. حالت دیگر بررسی شده در این مقاله، طراحی قانون کنترلی فیدبک خروجی است به نحوی که علاوه بر پایداری مجانبی و مثبت بودن سیستم حلقه بسته، قید مثبت بودن سیگنال کنترلی نیز برآورده گردد. تحقق این قید در برخی از سیستم های مثبت لازم و ضروری است. در این مقاله دو قضیه ارائه و اثبات شده است. همچنین شروط بیان شده در این قضایا به برنامه‌های خطی تبدیل گردیده است. در نهایت شبیه‌سازی کامپیوتری برای یک مثال عددی ارائه شده تا مؤید دست آوردهای تئوری مقاله باشد.

کلمات کلیدی: سیستم‌های گسسته-زمان مثبت، نایقینی مدل، فیدبک خروجی، برنامه‌های خطی.

Output-Feedback Controller Design for Uncertain Discrete-Time Systems with Positivity Constraint on the Closed-loop System and Control Signal

Faezeh Bagheri, Tahereh Binazadeh

Abstract: This paper studies the linear positive discrete-time systems with the uncertainty in the system model. Some parameters of system's matrix are unknown and only some information about their lower and upper bounds are available. The goal of this paper is design of output feedback control law in the presence of parametric uncertainties. The control law is designed in a way that in addition to asymptotic stability of the closed-loop system; it guarantees the positivity of the closed-loop system which adds some complexity in the process of problem solving. Another case has also been investigated in this paper is design of output feedback control law such that as well as the asymptotic stability and positivity of the closed-loop system; the control signal be also positive. The realization of this constraint is necessary in some positive systems. In this paper, two theorems are given and proved. Moreover, the conditions expressed in these theorems are converted to linear programming formats. Finally, computer simulations are presented to verify the theoretical results.

Keywords: Positive discrete-time systems, model uncertainty, output-feedback, Linear programing

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

۱- مقدمه

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی دارای متغیرهای حالت غیرمنفی هستند. به این گونه سیستم‌ها، سیستم مثبت می‌گویند [۱]. سیستم‌های مثبت بسیاری در شاخه‌های مختلف مهندسی علوم، مهندسی پزشکی و اقتصاد وجود دارند [۵-۲]. به عنوان مثال، مدل ریاضی برخی بیماری‌های عفونی و ویروسی [۶]، دینامیک پمپ آب [۷] و کنترل ازدحام جمعیت [۸] چند نمونه از کاربردهای عملی این سیستم‌ها می باشند.

اخیراً در مقالات، توجه زیادی به آنالیز و تجزیه-تحلیل سیستم‌های مثبت شده است. تعاریف و قضیه‌های پایه از سیستم‌های مثبت در مراجع [۹،۲] ارائه گردیده است. آنالیز پایداری در این سیستم‌ها با سیستم‌های عمومی تفاوت‌هایی دارد. ممکن است یک سیستم از نظر آنالیز پایداری لیاپانوفی ناپایدار باشد اما اگر این سیستم در کلاس سیستم‌های مثبت در نظر گرفته شود، سیستم پایدار شود با این قید که متغیرهای حالت تنها مقادیر مثبت بتوانند اختیار کنند و برای سیستم شرایط اولیه با مقادیر منفی تعریف نشده باشد [۱۰]. بنابراین پیدا کردن شروطی که بتوان پایداری این سیستم‌ها را بررسی کرد و مسئله‌ی طراحی پایدارساز را در این سیستم‌ها مورد مطالعه قرار داد، چالش‌های مخصوص خود را دارد که باید به دقت مورد مطالعه قرار گیرد.

اخیراً پایداری کلاس های مختلفی از سیستم‌های مثبت موضوع بحث محققان بوده است. پایداری سیستم‌های مثبت خطی و غیرخطی [۱]، سیستم‌های مثبت خطی متغیر با زمان [۱۱]، پایداری سیستم‌های مثبت مرتبه کسری [۱۲،۱۳]، پایداری سیستم‌های مثبت دارای تاخیر زمانی [۱۶-۱۴]، پایداری سیستم‌های مثبت کران‌دار [۱۷] و پایداری سیستم‌های مثبت کلیدزن [۲۰-۱۸] از آن جمله است.

در بسیاری از موضوع‌های مختلف دیگر مانند رویت پذیری [۲۲]، طراحی رویتگر [۲۵-۲۳] و طراحی فیدبک خروجی [۲۶،۲۷] نیز مطالعاتی بر روی سیستم‌های مثبت انجام شده است. البته اکثر مراجع ذکر شده، به مطالعه‌ی سیستم‌های مثبت پیوسته-زمان پرداخته‌اند و کمتر در مقالات سیستم‌های مثبت گسسته زمان مورد بررسی واقع شده‌اند.

این مقاله به بررسی مسئله‌ی پایدارسازی سیستم‌های گسسته-زمان مثبت خطی با استفاده از فیدبک خروجی در حضور عدم قطعیت مدل می‌پردازد. مهم‌ترین چالشی که این مقاله در روند طراحی کنترل کننده‌ی فیدبک خروجی با آن روبرو است آن است که علاوه بر تضمین پایداری مجانبی و مقاوم سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌ها، مثبت بودن سیستم حلقه بسته نیز باید تضمین گردد. طراحی قانون کنترلی که هم زمان این دو شرط را برآورده کند هدف این مقاله است. همچنین در برخی از سیستم‌های مثبت ورودی کنترلی نیز باید یک سیگنال مثبت باشد. لذا، حالت دومی که این مقاله به آن می‌پردازد آن است که قید مثبت بودن سیگنال کنترلی نیز علاوه بر قیود اول و دوم که قبلاً به آن اشاره شد در روند طراحی کنترل کننده لحاظ گردد.

در این مقاله یک لم و دو قضیه اصلی ارائه و اثبات گردیده که شروط لازم برای طراحی کنترل کننده‌ی فیدبک خروجی را منجر به نامساوی-هایی می‌سازد. همچنین برای حل شروط استخراج شده در این مقاله، از تبدیل آن به برنامه‌های خطی[۱] استفاده شده است. برنامه‌های خطی همانند نامساوی‌های ماتریس خطی برای حل عددی مسائل به کار می‌روند. از مزیت‌های برنامه‌های خطی نسبت به نامساوی‌های ماتریس خطی آن است که برای مسائل عددی بزرگ قابل استفاده می‌باشند و مشکل ناپایداری عددی در این مواقع ایجاد نمی شود.

در ادامه مقاله و در بخش دوم تعاریف و قضایای پایه ذکر شده اند. طراحی کنترل کننده و ارائه قضایایی در این زمینه و اثبات آنها در بخش سوم آورده شده است. همچنین در بخش چهارم شبیه‌سازی کامپیوتری و در بخش پنجم، نتیجه گیری بیان گردیده است.

۲- تعاریف اولیه

در این مقاله نماد $\overline{R}_+^n$ بیانگر فضای برداری n بعدی با المان‌های غیرمنفی ($\overline{R}_+^n = \{x \in R^n : |x_i \succeq 0\}$) و R_+^n فضای برداری n بعدی با المان‌های مثبت است ($R_+^n = \{x \in R^n : |x_i \succ 0\}$). سیستم خطی گسسته-زمان زیر را در نظر بگیرید

$$x(k+1) = Ax(k) \qquad (۱)$$

که $x \in \overline{R}_+^n$ بردار متغیرهای حالت سیستم و $A \in R^{n\times n}$ ماتریس سیستم است.

تعریف۱ [۱]: سیستم (۱) مثبت است اگر برای هر شرط اولیه‌ی $x_0 \in \overline{R}_+^n$ و درتمام زمان‌های $k \in N$، $x(k) \in \overline{R}_+^n$ باقی بماند (منظور بزگتر مساوی صفر بودن تمام المان‌های بردار حالت است).

قضیه ۱ [۱،۲]: سیستم (۱) مثبت است اگر و تنها اگر $A \succeq 0$ (ماتریس غیرمنفی) باشد.

قضیه۲ [۱،۹]: ماتریس A غیرمنفی است ($A \succeq 0$) اگر و تنها اگر تمام درایه‌های آن غیرمنفی باشند.

[۱] Linear programing (LP)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

تذکر ۱: در این مقاله نماد $A\succeq 0$ به معنای این است که تمام المان‌های ماتریس $A=[a_{ij}]$ غیرمنفی باشند. به عبارتی المان‌های $a_{ij}\geq 0$ برای هر $i,j=1,2,....n$ باشند و منظور مثبت نیمه معین بودن ماتریس A نیست.

قضیه ۳ [۲۲]: فرض کنید سیستم (۱) مثبت باشد آن‌گاه عبارت‌های زیر با هم معادلند:

الف) سیستم (۱) پایدار مجانبی است.

ب) وجود دارد $\lambda\in R_{+}^{n}$ به نحوی که

$$(A-I)\lambda\prec 0 \qquad (۲)$$

اثبات: به پیوست رجوع شود.

در این مقاله هدف طراحی کنترل کننده در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری سیستم است. برای این منظور ابتدا یک لم ارائه و اثبات می‌گردد.

ماتریس $\mathbf{A}\in R^{n\times n}$ در نظر بگیرید. فرض کنید المان‌های این ماتریس نامعلوم و محدود باشد. لذا ماتریس بین دو حد پایین و بالا همانند $\mathbf{A}^{+}\preceq\mathbf{A}\preceq\mathbf{A}^{-}$ قرار می‌گیرد. در لم بعد با استفاده از اطلاعات مربوط به ماتریس‌های $\mathbf{A}^{-}$ و $\mathbf{A}^{+}$، اطلاعاتی راجع به خود ماتریس $\mathbf{A}$ استخراج می‌گردد.

لم ۱: فرض کنید $\mathbf{A}^{+}\preceq\mathbf{A}\preceq\mathbf{A}^{-}$ است. به عبارت دیگر هر درایه‌ی ماتریس $\mathbf{A}$ از درایه‌ی نظیرش در ماتریس $\mathbf{A}^{+}$ کوچکتر مساوی و از درایه‌ی نظیرش در ماتریس $\mathbf{A}^{-}$ بزرگتر مساوی است. همچنین، فرض کنید که، این ماتریس‌ها دارای ویژگی‌های زیر هستند:

- تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\mathbf{A}^{+}$ درون دایره‌ی واحد هستند.

- تمام المان‌های ماتریس $\mathbf{A}^{-}$ بزرگتر مساوی صفر هستند.

آن‌گاه، در مورد ماتریس $\mathbf{A}$ می‌توان گفت که این ماتریس غیرمنفی بوده و همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن نیز درون دایره‌ی واحد است.

اثبات: نامساوی $\mathbf{A}\preceq\mathbf{A}^{-}$ بیان می‌کند که تک تک المان‌های ماتریس $\mathbf{A}$ بزرگتر مساوی المان نظیر آن در ماتریس $\mathbf{A}^{-}$ است در نتیجه غیر-منفی بودن تمام المان‌های ماتریس $\mathbf{A}$ واضح است (رجوع به قضیه ۱).

از طرفی چون ماتریس $\mathbf{A}^{+}$ دارای مقادیر ویژه‌ی درون دایره‌ی واحد است پس طبق قضیه ۳ یک بردار $\lambda\succ 0$ وجود دارد که $(\mathbf{A}^{+}-I)\lambda\prec 0$ است. با توجه به نامساوی $\mathbf{A}\preceq\mathbf{A}^{+}$ به راحتی می‌توان نشان داد که، شرط $(\mathbf{A}-I)\lambda\prec 0$ نیز برقرار است (کافی است شرط پایداری مجانبی به صورت المان به المان بازنویسی شود). در نتیجه بنابر قضیه ۳ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\mathbf{A}$ نیز درون دایره‌ی واحد است و پایداری مجانبی آن اثبات می‌گردد.

۳- طراحی کنترل کننده

سیستم گسسته زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k),\quad x(0)=x_0\in R_{+}^{n}\\ y(k)&=Cx(k)\end{aligned} \qquad (۳)$$

فرض ۱: ماتریس A دارای نایقینی های پارامتری با حدود معلوم است به نحوی که می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت

$$A^{-}\preceq A\preceq A^{+}$$

که ماتریس‌های A^{+} و A^{-} معلوم هستند. به عبارت دیگر هر درایه‌ی ماتریس A از درایه‌ی نظیرش در ماتریس A^{+} کوچکتر مساوی و از درایه‌ی نظیرش در ماتریس A^{-} بزرگتر مساوی است. $x\in R^{n}$ بردار متغیرهای حالت، $B\in R^{n\times p}$ و $C^{T}\in\overline{R}_{+}^{n}$ ماتریس‌های ثابت، $u\in R^{p\times 1}$ ورودی و $y(k)\in R$ خروجی سیستم است. در ادامه به مطالعه مسئله در دو بخش پرداخته شده است. در حالت اول بدون در نظر گرفتن قید بر روی سیگنال کنترلی و در حالت دوم با در نظر گرفتن قید مثبت بودن بر روی آن، مسئله طراحی قانون کنترلی فیدبک خروجی جهت پایدارسازی و مثبت نمودن سیستم حلقه بسته مطالعه می‌گردد.

۳-۱- طراحی کنترل کننده بدون قید بر روی سیگنال کنترلی

در این بخش هدف آن است که یک کنترل‌کننده فیدبک خروجی $u(k)=Ky(k)$ طراحی شود که پایداری مجانبی و مثبت بودن سیستم حلقه بسته زیر را با وجود نایقینی در ماتریس سیستم حفظ نماید.

$$\begin{aligned} x(k+1)&=Ax(k)+BKy(k)\\ &=Ax(k)+BKCx(k)\\ &=(A+BKC)x(k)\\ &=A_{cl}x(k)\end{aligned} \qquad (۴)$$

قضیه ٤: قانون کنترلی فیدبک استاتیک خروجی $u(k)=Ky(k)$ وجود دارد که بر اساس آن سیستم حلقه بسته (۴) برای هر ماتریس A که در فرض ۱ صادق باشد، مثبت و پایدار مجانبی باشد اگر و تنها اگر، بردارهای $z\in R^{p}$ و $\lambda\in R^{n}$ وجود داشته باشند که در نامساوی‌های زیر صدق کنند:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

$$A^{+}\lambda + Bz - \lambda I \prec 0 \quad (۵)$$

$$\lambda \succ 0 \quad (۶)$$

$$C\lambda \succ 0 \quad (۷)$$

$$C\lambda A^{-} + BzC - C\lambda I + I \succeq 0 \quad (۸)$$

$$C\lambda \succeq 1 \quad (۹)$$

در این حالت بهره K از رابطه زیر حاصل می شود:

$$K = \frac{1}{C\lambda} z \quad (۱۰)$$

که، پارامترهای $z \in R^{p}$ و $\lambda \in R^{n}$ هر جواب ممکن از برنامه‌ی خطی (۵) الی (۹) هستند.

اثبات: بنابر رابطه‌ی (۴)، A_{cl} به صورت زیر خواهد بود:

$$A_{cl} = (A + BKC)$$

که در این صورت با توجه به این که $A^{-} \preceq A \preceq A^{+}$ است، لذا:

$$A^{-} + BKC \preceq A + BKC \preceq A^{+} + BKC \quad (۱۱)$$

با تعریف

$$A_{cl}^{-} = A^{-} + BKC$$

$$A_{cl}^{+} = A^{+} + BKC$$

آن‌گاه رابطه‌ی (۱۱) معادل است با:

$$A_{cl}^{-} \preceq A_{cl} \preceq A_{cl}^{+}$$

در این مقاله، $C^{T} \in \overline{R}_{+}^{n}$ بوده و حداقل یک درایه غیرصفر آن مثبت است. پس به آسانی می‌توان نشان داد اگر $\lambda \succ 0$ باشد آن‌گاه حاصلضرب $C\lambda \succ 0$ یک اسکالر مثبت خواهد بود. لذا از رابطه‌ی (۱۰)، $z = C\lambda K$ است. پس، بردار z یک ضریب مثبت از بردار K خواهد بود. اگر z در شرط (۵) جایگذاری شود، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$(A_{cl}^{+} - I)\lambda \prec 0, \quad \lambda \succ 0 \quad (۱۲)$$

که بنابر قضیه ۳ عبارت فوق تضمین می‌نماید که تمامی مقادیر ویژه A_{cl}^{+} درون دایره‌ی واحد است. لذا با برقراری شروط (۵) و (۶) و با توجه به این که $A_{cl} \preceq A_{cl}^{+}$ است، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته نیز بر اساس لم ۱ تضمین می‌شود. از طرف دیگر اگر $z = C\lambda K$ درشرط (۸) جایگذاری شود و طرفین نامساوی بر اسکالر مثبت $C\lambda$ تقسیم شود، نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-} + BKC \succeq (I - \frac{1}{C\lambda} I) \quad (۱۳)$$

اگر شرط (۱۳) بخواهد برقرار باشد باید تک تک المان‌های ماتریس حلقه بسته (A_{cl}) بزرگتر مساوی تک تک المان‌های ماتریس قطری زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{C\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\frac{1}{C\lambda} \end{bmatrix} = diag[1-\frac{1}{C\lambda}\ ,\ \cdots\ ,\ 1-\frac{1}{C\lambda}] \quad (۱۴)$$

از آنجاییکه $C\lambda \succ 1$ است لذا تحقق شرط (۱۳) مثبت بودن A_{cl}^{-} را تضمین می‌کند. حال بر اساس لم ۱ و با توجه به این که $A_{cl}^{-} \preceq A_{cl}$ است، در نتیجه شروط (۸) و (۹) مثبت بودن A_{cl} را نیز نتیجه می‌دهد. پس با برقراری روابط (۵) الی (۹) هر دو قید پایداری مجانبی و مثبت بودن سیستم حلقه بسته تضمین می گردد.

۳-۲- طراحی کنترل کننده با در نظر گرفتن قید بر روی سیگنال کنترلی

در این بخش هدف آن است که قانون کنترل پایدار ساز و مثبت ساز با قید مثبت بودن سیگنال کنترلی برای سیستم (۳) به صورت زیر طراحی شود:

$$u(k) = Ky(k) \succeq 0 \quad (۱۵)$$

قضیه ۵: قانون کنترلی فیدبک استاتیک خروجی مثبت $u(k) = Ky(k) \succeq 0$ وجود دارد به نحوی که سیستم حلقه بسته (۴) را برای هر ماتریس A که در فرض ۱ صادق باشد، مثبت و پایدار مجانبی نماید اگر و تنها اگر بردارهای $z \in R^{p}$ و $\lambda \in R^{n}$ وجود داشته باشند که در نامساوی‌های زیر صدق کنند:

$$A^{+}\lambda + Bz - \lambda I \prec 0 \quad (۱۶)$$

$$\lambda \succ 0 \quad (۱۷)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

$$C\lambda \succ 1 \tag{۱۸}$$

$$C\lambda A^{-} + BzC - C\lambda I + I \succeq 0 \tag{۱۹}$$

$$z \succeq 0 \tag{۲۰}$$

در این حالت بردار K به صورت زیر خواهد بود:

$$K = \frac{1}{C\lambda} z \tag{۲۱}$$

اثبات: برقراری شروط (۱۶) الی (۱۹) پایداری مجانبی و مثبت بودن سیستم حلقه بسته را بر اساس قضیه (۴) تضمین می‌کند. حال از رابطه‌ی (۲۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} u(k) &= Ky(k) \\ &= KCx(k) \\ &= \frac{1}{C\lambda} zCx(k) \end{aligned}$$

که در آن $C\lambda$ یک اسکالر مثبت است. پس اگر طرفین تساوی فوق در اسکالر $C\lambda$ ضرب شوند، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$C\lambda u = zCx(k) \succeq 0$$

با توجه به این که سیستم حلقه بسته براساس برقراری شروط (۱۶) الی (۱۹) پایدار مجانبی و مثبت است لذا متغیر حالت $x(k)$ نیز مثبت بوده و با استفاده از رابطه فوق جهت مثبت بودن سیگنال کنترلی u کافی است zC مثبت باشد. از طرفی چون، $C^T \in \overline{R}_+^n$ است لذا کافیست $z \succeq 0$ باشد تا سیگنال کنترلی مثبت شود.

٤- شبیه سازی کامپیوتری

در این بخش یک مثال عددی ارائه می‌گردد تا کارایی روش مطرح شده نشان داده شود. برای حل نامساوی های ذکر شده در قضایا به یک ابزار حل عددی نیاز است. در اینجا از نرم افزار MATLAB و از تابع linprog استفاده شده است. نکته‌ای که حائذ اهمیت است آن است که چون در روابط ارائه شده در قضایای ۴ و ۵، تک تک المان‌های بردار ها و ماتریس ها مد نظر است می‌توان روابط ماتریسی را به روابط برداری با استفاده از ابزاری مانند vec تبدیل کرد و سپس شروط را برای تک تک المان بردارها بررسی کرد. اگر $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ باشد که $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ستون‌های ماتریس A می‌باشند آن‌گاه:

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

همچنین اگر $M \in R^{m\times n}$ و $N \in R^{m\times n}$ باشند آن‌گاه ضرب کرونیکر آن‌ها برابر است با:

$$P = M \otimes N = \begin{bmatrix} m_{11}N & \cdots & m_{1n}N \\ m_{12}N & \cdots & m_{12}N \\ \vdots & & \vdots \\ m_{m1}N & \cdots & m_{mn}N \end{bmatrix}$$

برای هر ماتریس M, N و X با ابعاد مناسب خواهیم داشت:

$$vec(MXN) = N^T \otimes M vec(X) \tag{۲۲}$$

در ادامه برای شبیه سازی و پیاده سازی عددی، شروط قضایا باید به فرم ماتریسی استاندارد برنامه‌ی linprog در آورده می‌شوند و سپس کنترل کننده طراحی می‌گردد. برای نمونه رابطه‌ی (۱۹) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$-C\lambda(A^{-} - I) - BzC \preceq I$$

سپس با استفاده از عملگر vec نامساوی فوق به نامساوی برداری زیر تبدیل می‌گردد. در رابطه‌ی فوق چون $C\lambda$ اسکالر است، زمانی که از جمله‌ی اول vec گرفته شود $C\lambda$ از عملگر vec بیرون می‌آید. برای جمله‌ی دوم از رابطه‌ی (۲۲) استفاده می‌گردد و چون z بردار است از جایگذاری $vec(z) = z$ نیز استفاده شده است.

$$-C\lambda vec(A^{-} - I) - C^T \otimes Bz \preceq vec(I)$$

با توجه به مطالب بیان شده شرایط پایدارسازی با فیدبک خروجی در قضیه ۵ نظیر نامساوی‌های زیر است:

$$\begin{aligned} &(A^{+} - I)\lambda + Bz \prec 0 \\ &-\lambda \prec 0 \\ &-C\lambda \preceq -1 \\ &-C\lambda vec(A^{-} - I) - C^T \otimes Bz \preceq vec(I) \\ &-z \preceq 0 \end{aligned}$$

که در این روابط تمامی جملات برداری هستند. این نامساوی‌ها به فرم نامساوی استاندارد خطی زیر بیان می‌شود:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

$$\begin{pmatrix} A^{+}-I & B \\ -I & 0 \\ 0 & -I \\ -C & 0 \\ -vec(A^{-}-I)C & -C^{T}\otimes B \end{pmatrix} W \preceq \begin{pmatrix} -\varepsilon \mathbf{1} \\ -1 \\ vec(I) \end{pmatrix} \qquad (۲۳)$$

که $W=\begin{bmatrix}\lambda \\ z\end{bmatrix}$ بردار مجهول پارامترها، $\mathbf{1}$ بیانگر بردار با المان‌های یک با ابعاد $(2n+p)\times 1$ به فرم $\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\end{bmatrix}^{T}$ و $\varepsilon \succ 0$ یک اسکالر مثبت کوچک است که شرط منفی بودن روابط مربوطه را تضمین کند. تابع linprog در MATLAB بردار W را محاسبه و پارامترهای مجهول λ و z را بدست می‌دهد و سپس بر اساس آن بردار K محاسبه می‌گردد. در مثال بعد روند طراحی بر این اساس انجام شده است.

مثال : سیستم (۳) را به ازای ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix}\theta_1 & -0.2\\ -0.3 & \theta_2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\end{bmatrix}.$$

پارامترهای θ_1 و θ_2 نامعلوم ولی محدود هستند ($|\theta_i|\le 0.1$). لذا، ماتریس A دارای عدم قطعیت پارامتری است و $A^{-}\preceq A\preceq A^{+}$ است که:

$$A^{-}=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.2\\ -0.3 & -0.1\end{bmatrix}, A^{+}=\begin{bmatrix}+0.1 & 0.1\\ -0.2 & +0.1\end{bmatrix}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ماتریس A^{-} قید مثبت بودن را بر اساس تعریف ۱ دارا نیست. جواب حاصل از حل برنامه خطی (۲۳) با فرض $\varepsilon=100e^{-8}$ به صورت زیر است:

$$W^{T}=[5.6917\ ,\ 5.1709\ ,0.0576\ ,\ 28.6495],$$

لذا پارامترهای مجهول به دست آمده برابرند با:

$$z=\begin{bmatrix}0.0576\\ 28.6495\end{bmatrix},\ \lambda=\begin{bmatrix}5.6917\\ 5.1709\end{bmatrix}.$$
$$K=\frac{1}{C\lambda}z=\begin{bmatrix}0.0265\\ 13.1872\end{bmatrix}.$$

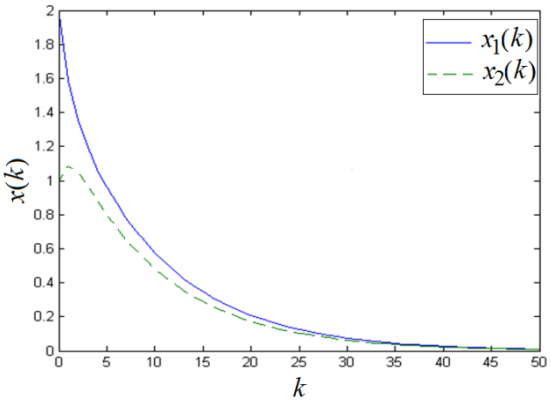
با بررسی ماتریس A_{cl}^{-} مشاهده می‌گردد که بردار K آن را غیرمنفی ساخته است:

$$A_{cl}^{-}=A^{-}+BKC=\begin{bmatrix}0.4285 & 0.3285\\ 0.2291 & 0.4291\end{bmatrix}$$

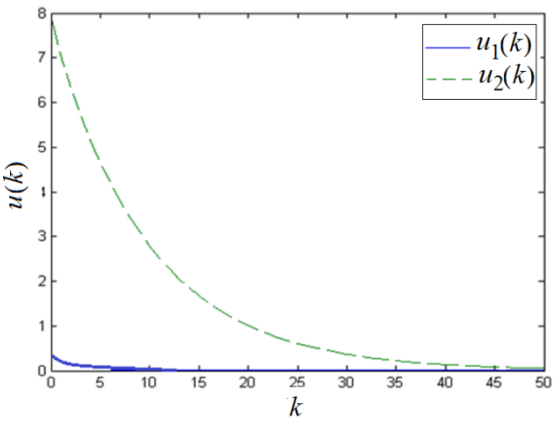
همچنین بردار K منجر به A_{cl}^{+} غیر منفی با مقادیر ویژه درون دایره واحد شده است.

$$A_{cl}^{+}=A^{+}+BKC=\begin{bmatrix}0.6285 & 0.3285\\ 0.2291 & 0.6291\end{bmatrix}$$
$$\lambda_i(A_{cl}^{+}):=\{0.3545,\ 0.9031\}$$

شکل ۱ پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته را به ازای شرایط اولیه‌ی $x_0=(1,\ 2)$ نشان می‌دهد. همچنین، پاسخ زمانی مؤلفه‌های بردار کنترلی در شکل ۲ آورده شده است.



شکل ۱: نمودار متغیر های بردار حالت بر حسب زمان



شکل ۲ : نمودار مؤلفه های بردار کنترل بر حسب زمان

همان‌طور که از اشکال ۱ و۲ مشاهده می‌گردد سیستم حلقه بسته مثبت و پایدار مجانبی است و قید مثبت بودن سیگنال کنترلی نیز محقق شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله پایدارسازی سیستم های مثبت خطی گسسته-زمان با حضور عدم قطعیت در مدل سیستم و با استفاده از کنترل‌کننده‌ی فیدبک خروجی بررسی شد. شرایط لازم برای آن که سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی و مثبت باشد، ارائه شد. همچنین روش پیشنهادی با در نظر گرفتن قید مثبت بودن سیگنال کنترلی نیز بررسی گردید. علاوه بر آن شروط ارائه شده در قضایا به ساختار مناسب جهت حل توسط برنامه‌های خطی تبدیل شد. در نهایت شبیه‌سازی عددی کارایی روش کنترلی ارائه شده را نشان داد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

پیوست:

اثبات قضیه ۳: سیستم مثبت $x(k+1)=Ax(k)$ را در نظر بگیرید. رابطه زیر برای پاسخ سیستم صادق است:

$$x(k)-x(0)=(A-I)\sum_{i=0}^{k-1}x(i)$$

اگر سیستم پایدار مجانبی باشد آنگاه $\lim_{k\to\infty}x(k)\to 0$ و لذا داریم:

$$-x(0)=(A-I)\sum_{i=0}^{\infty}x(i)$$

با توجه به اینکه $x(i)$ بردار متغیر حالت یک سیستم مثبت در لحظه i ام است، لذا با تعریف بردار مثبت $\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}x(i)\succ 0$ و از منفی بودن سمت چپ عبارت فوق نتیجه می شود که $(A-I)\lambda\prec 0$ است. لذا بندهای اول و دوم در قضیه ۳ با یکدیگر معادلند. جهت توضیحات تکمیلی در این موضوع به مرجع [۲۲] مراجعه نمایید.

مراجع

[1] M. Wassim, Haddad, V. chellaboina, and Q. Hai, Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems, Prinseton University Prees, 2010.

[2] T. Kaczorrek, Positive 1D and 2D Systems, Spring: London, 2002

[3] L. Farina and S. Rinaldi, Positive Linear Systems, Wiley-Interscience: New York, 2000.

[4] A. Rantezer, "Scable control of positive systems," European Journlal of Control, vol. 24, pp. 72-80, 2015.

[5] W. M. Haddad and V. Chellaboina, "Stability and dissipativity theory for nonnegative dynamical systems: a unified analysis framework for biological and physiological systems," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 6, pp. 35-65, 2005.

[6] E. H. Vargas, P. Colaneri, R. Middleton, and et. al., "Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escapes," International Journal of Robust Nonlinear Control, vol. 21, pp. 1093-1111, 2011.

[7] B. Roszak and E. J. Davision, "Optimal complementary control for positive stable LTL systems," Automatica, vol. 50, pp. 1401-1406, 2014.

[8] R. Shoten, F. Wirth and D. Leith, "A positive systems model of TCP-like congestion control: asymptotic results," IEEE/ACM Transactions on Networking (TON), vol. 14, no. 3, pp. 616-629, 2006.

[9] A. Beman, M. Neumann and R. J. Stern, Nonnegative Matrices in Dynamic Systems, Wiley, New York, 1989.

[10] A. Rahimabadi and H. Taghirad, "Corner stability in nonlinear autonomous systems," Nonlinear Dynamics, vol. 80, no. 1-2, pp. 959-968, 2015.

[11] B. Roszak, J. Edward and division, "Necessary band sufficient condition for stability of positive systems," System & Control Letters, Vol. 58, pp. 474-481, 2009.

[12] T. Kaczorek, "Practical stability and asymptotic stability of positive fractional 2D linear systems," Asian Journal of Control, vol. 12, no. 2, pp. 200-207, 2010.

[13] T. Kaczorek, "Stability and stabilization of positive fractional linear systems by state-feedbacks," Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, vol. 58, no. 4, pp. 537-554, 2010.

[14] X. Liu, W. Y and L. Wang, "Stability analysis of positive systems with bounded time-varing delays," IEEE Transaction on Circuits and Systems-II, vol. 56, no. 7, pp. 600-604, 2009.

[15] X. Liu, W. Y and L. Wang, "Stability analysis for continuous-time positive systems with time-varying delays," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 57, no. 4, pp. 1024-1028, 2010.

[16] T. Kaczorek, "Stability of positive continuous-time systems with delays," Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, vol.57, no. 4, pp. 395-398, 2010.

[17] M. Ati Rahimi and F. Tadeo, "Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls," IEEE Transaction on Circuits and Systems, vol. 54, no. 7, pp.151-155, 2007.

[18] L. Gurvits, R. Shorten and O. Mason, "On the stability of switched positive linear systems," IEEE Transaciton on Automatic Control, vol. 52, no. 6, pp. 1099-1103, 2007.

[19] X. D. Zhao, L. X. Zhang, P. Shi and M. Liu, "Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching," Automatica, vol. 48, pp. 1132-1137, 2012.

[20] J. Zhang and Z. Han, and J. Huang, "Stabilization of discrete-time positive switched systems," Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 32, no. 3, pp. 1129-1145, 2013.

[21] J. Liu, K. Zhang, G. Pang and H. Wei, "Controller synthesis for constrained discrete-time switched positive linear systems," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 19, pp. 1-12, 2016.

[22] M. A. Rami and F. Tadeo, "Positive observation problem for linear descrete positive systems," Proceeding 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006.

[23] M. A. Rami, F. Tadeo and U. Helmke, "Positive observers for linear positive systems

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]

and implications," International Journal of Control, vol. 84, no. 4, pp. 716-725, 2011.

[24] P. Li and J. Lam, "Positive state-bounding observers for positive interval continuous-time systems with time delay," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 22, no.11, pp. 1244-1257, 2011.

[25] G. Wang, B. Li, Q. Zhang, and C. Yang, "Positive observer design for discrete-time positive system with missing data in output," Neurocomputing, vol. 168, pp. 427-434, 2015.

[26] Y. Cao, J. Lam, and Y. Sun, "Static output feedback stabilization: an ILMI approach," Automatica, vol. 34, no. 12, pp. 1641-1645, 1998.

[27] M. Ait Rami, "Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems," System & Control Letters, vol. 60, pp. 704-708, 2011.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.1.1]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.47]