مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۵۸-۵۱

کنترل تطبیقی مقاوم برای کلاسی از سیستم‌های غیرخطی همراه با عدم قطعیت: رویکرد کنترل مود لغزشی انتگرالی

مهدی گلستانی[۱]، سعید عبادالهی[۲]، سید مجید اسماعیل‌زاده[۳]

[۱] باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، m.golestani@qiau.ac.ir

[۲] استادیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، s_ebadollahi@iust.ac.ir

[۳] استادیار دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، smailzadeh@iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۳/۱۴)

چکیده: در این مقاله، مسئله پایدارسازی زمان محدود کلاسی از سیستم‌های غیرخطی همراه با عدم قطعیت مورد بررسی قرار می‌گیرد و یک کنترل کننده بر اساس ترکیب کنترل مود لغزشی انتگرالی با فیدبک حالت زمان محدود معرفی می‌گردد. این کنترل کننده از دو بخش تشکیل شده است: یک بخش وظیفه رد کردن عدم قطعیت را داشته و بخش دیگر پایداری زمان محدود را فراهم می‌کند. همچنین، یک مکانیزم تطبیق بکار گرفته می‌شود تا پارامترهای نامعلوم سیستم را تخمین بزند. قانون کنترل پیشنهادی همگرایی زمان محدود متغیر لغزش را در حضور عدم قطعیت‌ها و پارامترهای نامعلوم تضمین می‌کند. با حذف فاز رسیدن، فازی که در آن متغیرهای حالت هنوز به سطح لغزش نرسیده‌اند و سیستم به هرگونه اغتشاش یا عدم قطعیتی حساس است، قوام سیستم در سراسر پاسخ تضمین می گردد. علاوه بر این، حد بالای اغتشاشات و عدم قطعیت‌های سیستم نیاز نیست که از قبل معلوم باشد و این ویژگی قابلیت کنترل کننده پیشنهادی را در پیاده سازی عملی بالا می‌برد. نتایج شبیه‌سازی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی را تایید می‌کند.

کلمات کلیدی: کنترل غیرخطی، کنترل تطبیقی مقاوم، کنترل مود لغزشی انتگرالی، فیدبک حالت زمان محدود.

Robust Adaptive Control for a Class of Uncertain Nonlinear Systems: Integral Sliding Mode Control Approach

Mehdi Golestani, Saeid Ebadollahi, Seyed Majid Smaeilzadeh

Abstract: This paper investigates the problem of finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems and a controller is proposed based on combination of integral sliding mode control with finite-time state feedback. The proposed controller consists of two parts. One part rejects matched uncertainties and the other part provides finite time stability. An adaption mechanism is also employed to estimate unknown parameters of the system. The proposed control law guarantees finite-time convergence of the sliding variable in the presence of uncertainties and unknown parameters. By elimination of the reaching phase, in which the system states are quite sensitive to any uncertainties or disturbances, the robustness of the system is guaranteed throughout the entire response. Furthermore, the upper bound of disturbance and uncertainties is not required to be known in advance which makes the suggested controller more flexible in terms of implementation.

Keywords: Nonlinear control, robust adaptive control, integral sliding mode control, finite time state feedback.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

۱- مقدمه

پایداری مجانبی سیستم‌های غیرخطی، بدون شک یکی از مهم‌ترین موضوعات در زمینه تئوری سیستم‌های غیرخطی است که بسیار مورد توجه قرار گرفته است. مفاهیم پایداری مجانبی و پایداری نمایی در سیستم‌های دینامیکی، همگرایی مسیرهای حالت سیستم را به سمت نقطه تعادل پایدار در یک افق زمانی بی‌نهایت تضمین می‌کنند. در بسیاری از کاربردها از جمله رباتیک [۱ و ۲]، هدایت موشک [۳] و کنترل وضعیت ماهواره [۴]، مطلوبست که مسیرهای سیستم دینامیکی در یک زمان محدود به نقطه تعادل پایدار همگرا شوند. رویکرد پایداری زمان‌محدود نه تنها همگرایی زمان‌محدود متغیرهای حالت سیستم را تضمین می‌کند بلکه عملکرد با دقت بسیار بالا را نیز به ارمغان می‌آورد [۵].

کنترل مود لغزشی به عنوان یک رویکرد کنترل مقاوم توجه پژوهشگران زیادی را به دلیل مزایای زیادی از جمله قوام در برابر عدم قطعیت، عدم حساسیت به اغتشاشات محدود، پاسخ سریع و عملکرد گذاری مناسب به خود جلب کرده است [۶]. مود لغزشی شامل دو فاز اصلی به نام‌های فاز دستیابی و فاز لغزش می‌باشد. در این روند ابتدا سطح لغزش مناسب به نحوی طراحی می‌گردد که معادلات حرکت بر روی سطح لغزش پایدار مجانبی باشند. در فاز دستیابی با توجه به اینکه شرایط اولیه متغیرهای حالت می‌تواند خارج از سطح لغزش قرار گیرد، قانون کنترلی به نحوی طراحی می‌گردد که دستیابی به سطح لغزش در زمان محدود محقق شود. به دنبال دستیابی به سطح لغزش، فاز لغزش آغاز می‌شود که عملکرد مناسب در این فاز به انتخاب مناسب سطح لغزش باز می‌گردد. در فاز دستیابی، متغیرهای حالت سیستم هنوز به سطح لغزش نرسیده و سیستم به هرگونه اغتشاش یا عدم قطعیت حساس می‌باشد بطوریکه عدم قطعیت‌های matched نیز می‌توانند منجر به ناپایداری سیستم گردند. در این فاز، از کنترل کننده مود لغزشی به منظور هدایت متغیرهای حالت سیستم به سوی سطح لغزش استفاده می‌گردد [۷].

اگرچه کنترل مود لغزشی از ویژگی همگرایی سریع، مقاومت در برابر اغتشاش و عدم قطعیت، عملکرد مناسب پاسخ گذرا برخوردار است، ولیکن پدیده چترینگ به عنوان یکی از نقاط ضعف اصلی این رویکرد محسوب می‌شود. پدیده چترینگ یک رفتار فرکانس بالای ناشی از سیگنال کنترل ناپیوسته‌ای است که در کنترل مود لغزشی استفاده می‌گردد. این پدیده برای عملگرهای سیستم بسیار خطرناک می‌باشد و همچنین با تحریک مودهای مدل نشده سیستم می‌تواند منجر به ناپایداری سیستم حلقه بسته شود [۸]. تا کنون به منظور کاهش چترینگ روشهای گوناگونی از جمله روش لایه مرزی [۹]، روش مبتنی بر رویتگر [۱۰] و کنترل مود لغزشی مراتب بالاتر [۱۱] معرفی شده‌اند. علاوه بر این، از نقطه نظر عملی تعیین حد بالای اغتشاش و عدم قطعیت به دلیل پیچیدگی اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت سیستم کار نسبتاً سختی است. لذا طی سال‌های اخیر، طراحی قوانین کنترلی که در آن دانستن این حد مورد نیاز نباشد بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. در [۱۲ و ۱۳] با استفاده از قانون تنظیم بهره تطبیقی در ساختار کنترل مود لغزشی، دیگری نیاز به داشتن اطلاعات دقیق از اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت سیستم نیست. در [۱۴] قانون یک کنترلی تطبیقی بر اساس کنترل مود لغزشی ارائه شده است که نه تنها باعث از بین رفتن چترینگ می‌گردد، بلکه نیازی به داشتن حد بالای اغتشاش و عدم قطعیت نمی‌باشد.

کنترل مود لغزشی مراتب بالاتر نه تنها چترینگ را کاهش می‌دهد بلکه مزایای مهم کنترل مود لغزشی مرسوم را نیز حفظ می‌کند. به عنوان یک حالت خاص از کنترل مود لغزشی مراتب بالاتر، الگوریتم‌های مود لغزشی مرتبه-دوم [۱۵] و مود لغزشی مرتبه-دلخواه [۱۶] با تضمین همگرایی زمان محدود معرفی شده‌اند. اما این الگوریتم‌ها اجازه ردیابی سیگنال‌های هموار را با تنظیم تنها یک بهره می‌دهند و شرایط ساختاریافته‌ای برای تنظیم بهره وجود ندارد و لذا می‌بایست به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود.

فارغ از الگوریتم‌های فوق، رویکرد این مقاله بر اساس کنترل مود لغزشی انتگرالی می‌باشد بطوریکه با ترکیب قوام مود لغزشی مراتب بالاتر و فیدبک حالت زمان‌محدود، کنترل‌کننده پیشنهادی استخراج می‌گردد. هدف این روش پایدارسازی زمان محدود سیستم در حضور عدم قطعیت matched و unmatched، اغتشاشات خارجی و پارامترهای نامعلوم سیستم است. با معرفی یک قانون تطبیقی، پارامترهای نامعلوم سیستم تخمین زده می‌شود تا از محافظه‌کاری کاسته شود. همچنین با جایگزینی تابع علامت با تابع سیگموئید، نه تنها چترینگ حذف می‌شود بلکه حد بالای عدم قطعیت و اغتشاش نیاز نیست تا از قبل معلوم باشد. این ویژگی نیز می‌تواند در کاهش محافظه‌کاری بسیار موثر باشد. همچنین با حذف فاز دستیابی، قوام سیستم در سراسر پاسخ تضمین می‌گردد. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، پایداری سیستم اثبات می‌گردد.

۲- فرمول‌بندی مسئله

پیش از پرداختن به بیان مسئله، تعاریف و قضایای مورد نیاز ارائه می‌گردد.

تعریف ۱ [۱۷]- سیستم غیرخطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \quad f(0,t) = 0, \quad x \in R^n \tag{۱}$$

که در آن $f : U_0 \times R \to R^n$ در یک همسایگی باز $U_0 \times R$ از مبدأ پیوسته می‌باشد. نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان محدود محلی است اگر:
الف) در همسایگی باز $U \subseteq U_0$ از مبدأ پایدار مجانبی باشد.
ب) در U همگرای زمان محدود باشد بدین معنا که برای هر حالت اولیه $x_0 \in U / \{0\}$ یک زمان نشست وابسته به شرایط اولیه X_0 به صورت $T > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه هر پاسخ سیستم (۱) که با $x(t) = \upsilon(t, x_0) \in U / \{0\}$ نشان داده می‌شود دارای شرایط زیر باشد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

$$\begin{cases}\lim_{t\to T(x_0)}\upsilon(t,x_0)=0, & t\in[0,T(x_0)]\\ \upsilon(t,x_0)=0, & t\ge T(x_0)\end{cases} \quad (۲)$$

علاوه بر این، اگر $U=R^n$ باشد آنگاه مبدأ یک نقطه تعادل پایدار زمان محدود فراگیر است.

قضیه ۱ [۲۱]: سیستم غیرخطی توصیف شده با معادله (۱) را درنظر بگیرید. فرض کنید که یک تابع C^1 (بطور پیوسته مشتق‌پذیر) به صورت $V(x,t)$ تعریف شده در یک همسایگی $\hat{U}\subset R^n$ از مبدأ و اعداد حقیقی $\alpha>0$ و $0<\lambda<1$ وجود دارند بطوریکه $V(x,t)$ در $\hat{U}$ مثبت معین بوده و $\dot{V}(x,t)+\alpha V^{\lambda}(x,t)\le 0$ در $\hat{U}$ برقرار باشد. آن‌گاه مبدأ نقطه تعادل زمان محدود سیستم (۱) است. همچنین زمان نشست T به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$T\le\frac{V^{1-\lambda}(x_0,0)}{\alpha(1-\lambda)} \quad (۳)$$

نکته: اگر $\hat{U}=R^n$ و $V(x,t)$ به صورت شعاعی نامحدود باشد (یعنی اگر $\|x\|_\infty\to\infty$، آنگاه $V(x,t)\to\infty$)، در این صورت مبدأ پایدار زمان محدود فراگیر می‌باشد.

قضیه ۲ [۲۰]: فرض کنید $D_1=diag[1,2,\ldots,(n-1),n]$، $D_2=diag[n+d,n-1+2d,\ldots,2+(n-1)d,1+nd]$ و $d\in(0,1)$ یک عدد گویا که صورت و مخرج آن اعداد صحیح فرد باشند، $A_0\in R^{n\times n}$ و $B\in R^n$ نیز ماتریس‌هایی به فرم همبسته کنترل‌کننده باشند، یعنی

$$A_0=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

آنگاه اعداد حقیقی مثبت $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$، یک ماتریس متقارن مثبت معین $P\in R^{n\times n}$ و یک بردار $K=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ به نحوی وجود دارند که شرایط زیر برآورده می‌شود:

$$\begin{aligned}&PA+A^TP\le -I\\&\alpha_1 I\le PD_1+D_1P\le\beta_1 I\\&\alpha_2 I\le PD_2+D_2P\le\beta_2 I\end{aligned} \quad (۴)$$

در حالیکه $A=A_0-BK$.

قضیه ۳ [۲۰]: سیستم غیرخطی متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2+\Delta f_1(x,u,t),\\&\dot{x}_2=x_3+\Delta f_2(x,u,t),\\&\vdots\\&\dot{x}_n=u_0+\Delta f(x,u,t),\end{aligned} \quad (۵)$$

این سیستم توسط کنترل کننده فیدبک حالت زیر قابل پایدارسازی زمان محدود فراگیر می‌باشد.

$$u_0=-L^{n+1}r^{(n+1)d}K\zeta \quad (۶)$$

که در آن r و L به صورت زیر به روزرسانی می‌شوند

$$\begin{aligned}&\dot{r}=-\frac{L}{4\beta_2}r^d+\frac{L}{4\beta_2}\frac{\|\zeta\|^2}{r^{2-d}},\quad r(0)=r_0>0\\&\text{and}\\&\dot{L}=\frac{\mathrm{sgn}(\|\zeta\|)}{\alpha_1}L\rho(t)\varpi(r,\zeta),\quad L(0)=M\ge 1\end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)^T$ با $\zeta_i=\frac{x_i}{L^i r^{n-i+1+id}}$، بردار سطری K و ثوابت α_1، β_2، در قضیه ۱ ارائه شده اند، $\rho(t)$ یک تابع غیرمنفی، $\varpi(r,\zeta)$ یک تابع مثبت پیوسته و M یک ثابت به قدر کافی بزرگ می‌باشد.

۲-۲- بیان مسئله

سیستم غیرخطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2+\Delta f_1(x,u,t),\\&\dot{x}_2=x_3+\Delta f_2(x,u,t),\\&\vdots\\&\dot{x}_n=f(x)+h(x)w^T(x)\theta+g(x)u,\end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $h(x)$ یک تابع هموار معلوم، $f(x)$ و $g(x)$ توابع نامعلوم ($f(0)=0$)، $x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in R^n$ و $u\in R$ به ترتیب متغیرهای حالت و ورودی سیستم می‌باشند. همچنین $w(x)\in R^l$ برداری از توابع معلوم و $\theta\in R^l$ پارامترهای نامعلوم سیستم می‌باشند. $\Delta f_i: R^n\times R\times R_+\to R,\ i=1,\ldots,n-1$ نیز توابع نامعلوم پیوسته نسبت به آرگومانهایشان می‌باشند که فرض زیر را برآورده می‌کنند.

فرض ۱[۱۷]: به ازای هر $(x,u,t)\in R^n\times R\times R$، یک تابع پیوسته معلوم $\rho(t)$ و ثابت c وجود دارد به نحوی که

$$|\Delta f_i(x,u,t)|\le\rho(t)\sum_{j=1}^{i}\left(|x_j|^{m_{i,j}}\right)+c\sum_{j=1}^{i}\left(|x_j|^{n_{i,j}}\right) \quad (۹)$$

که در آن $m_{i,j}$ و $n_{i,j}$ به ترتیب ناتساویهای $1\le m_{i,j}\le\frac{i}{j}$ و $n_{i,j}=\frac{n-i+1+(i+1)d}{n-j+2+jd}$ را برآورده می‌کنند.

فرض ۲: بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض می‌شود که $f(x)$ و $g(x)$ توابع نامعلوم ولی کرانداری هستند که می‌توانند به دو قسمت نامی و عدم قطعیت‌دار تجزیه شوند.

$$\begin{cases}f(x)=\bar{f}(x)+\Delta f(x)\\g(x)=\bar{g}(x)+\Delta g(x)\end{cases} \quad (۱۰)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

فرض کنید که عدم قطعیت‌ها ناتساوی های $\|\Delta f(x)\| \le \xi$ و $\|\Delta g(x)\,\bar{g}^{-1}(x)\| \le 1-\alpha$ را ارضا کنند که در آن ξ یک حد بالا بوده و $0 < \alpha \le 1$. همچنین ناتساوی دوم از نقطه نظر فیزیکی بدین معناست که نسبت عدم قطعیت به ترم‌های معین کمتر از ۱ می‌باشد.
فرض کنید که قانون فیدبک به صورت زیر تعریف شود:

$$u = \bar{g}^{-1}(x)\left(-\bar{f}(x)+v\right) \qquad (۱۱)$$

که در آن v قانون کنترل کمکی می‌باشد. با اعمال قانون کنترل فوق، برای کانال آخر سیستم (۸) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= \bar{f}(x)+\Delta f(x)+\left(\bar{g}(x)+\Delta g(x)\right)\bar{g}^{-1}(x)\\ &\quad\times\left(-\bar{f}(x)+v\right)+h(x)w^T(x)\theta\\ &= \bar{f}(x)+\Delta f(x)-\bar{f}(x)+v-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)\\ &\quad+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)v+h(x)w^T(x)\theta\\ &= \left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)v+\Delta f(x)\\ &\quad-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)+h(x)w^T(x)\theta\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

لذا سیستم (۸) به صورت زیر بازنویسی می گردد

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2+\Delta f_1(x,u,t),\\ \dot{x}_2 &= x_3+\Delta f_2(x,u,t),\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= \left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)v+\Delta f(x)\\ &\quad-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)+h(x)w^T(x)\theta,\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

۳- طراحی کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم

در این بخش، هدف ارائه یک روش ساختاریافته به منظور طراحی یک کنترل کننده تطبیقی مقاوم زمان محدود برای سیستم (۸) می‌باشد.
یک سطح لغزش انتگرالی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$s(x(t)) = x_n(t)-x_n(t_0)-\int_{t_0}^{t}u_0\,d\tau \qquad (۱۴)$$

که در آن u_0 در قضیه ۳ بیان شده است. چنانچه پارامتر θ نامعلوم باشد، قانون کنترل زیر به منظور پایدارسازی زمان محدود سیستم (۸) همراه با عدم قطعیت و پارامترهای نامعلوم معرفی می گردد

$$v = u_0-\chi\,\mathrm{sgn}(s)-h(x)w^T(x)\hat{\theta} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\hat{\theta}$ بیانگر تخمین پارامتر نامعلوم θ می‌باشد. عبارت دوم رابطه فوق شامل بهره χ می‌باشد که ناتساوی زیر را برآورده می کند

$$\chi \ge \frac{(1-\alpha)\left(\|\bar{f}(x)\|+\|h(x)w^T(x)\hat{\theta}\|+\|u_0\|\right)+\xi+\eta}{\alpha} \qquad (۱۶)$$

که در آن α و ξ در فرض ۲ ارائه شده اند و همچنین $\eta > 0$.

قضیه ٤: سیستم غیرخطی (۸) را در نظر بگیرید. پایدارسازی زمان محدود این سیستم تضمین می گردد اگر قانون کنترل به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned}u &= -\bar{g}^{-1}(x)\Big(\bar{f}(x)+L^{n+1}r^{(n+1)d}K\zeta\\ &\quad+\chi\,\mathrm{sgn}(s)+h(x)w^T(x)\hat{\theta}\Big)\\ \dot{r} &= -\frac{L}{4\beta_2}r^d+\frac{L}{4\beta_2}\frac{\|\zeta\|^2}{r^{2-d}},\ r(0)=r_0>0\\ \dot{L} &= \frac{\mathrm{sgn}(\|\zeta\|)}{\alpha_1}L\rho(t)\varpi(r,\zeta),\ L(0)=M\ge 1\\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\,w(x)\,h(x)\,s\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

اثبات: تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V_1(s,\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta},\ \Gamma=\Gamma^T>0,\ \ \tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta} \qquad (۱۸)$$

مشتق این تابع لیاپانوف در مسیر سیستم (۸) و با استفاده از قانون کنترل (۱۷) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(s,\tilde{\theta}) &= s\Big(\left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)v+\Delta f(x)\\ &\quad-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)+h(x)w^T(x)\theta-u_0\Big)\\ &\quad-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\\ &= s\Big(\left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)\left(u_0-\chi\,\mathrm{sgn}(s)-h(x)w^T(x)\hat{\theta}\right)\\ &\quad+\Delta f(x)-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)+h(x)w^T(x)\theta-u_0\Big)\\ &\quad-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\\ &= s\Big(-\left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)\chi\,\mathrm{sgn}(s)-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)\\ &\quad+\Delta f(x)+h(x)w^T(x)\tilde{\theta}-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)h(x)w^T(x)\hat{\theta}\\ &\quad+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)u_0-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\\ &= s\Big(-\left(1+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\right)\chi\,\mathrm{sgn}(s)-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)\bar{f}(x)\\ &\quad+\Delta f(x)-\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)h(x)w^T(x)\hat{\theta}+\Delta g(x)\bar{g}^{-1}(x)u_0\Big)\\ &\quad+s\,h(x)w^T(x)\tilde{\theta}-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\\ &\le -\chi|s|+(1-\alpha)\chi|s|+(1-\alpha)\|\bar{f}(x)\||s|+\xi|s|\\ &\quad+(1-\alpha)\|h(x)w^T(x)\hat{\theta}\||s|+(1-\alpha)\|u_0\||s|\\ &\quad+s\,h(x)w^T(x)\tilde{\theta}-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\\ &\le -\alpha\chi|s|+\Big\{(1-\alpha)\left(\|\bar{f}(x)\|+\|h(x)w^T(x)\hat{\theta}\|+\|u_0\|\right)+\xi\Big\}|s|\\ &\quad+s\,h(x)w^T(x)\tilde{\theta}-\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\hat{\theta}}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

لذا، با انتخاب الگوریتم به‌روزرسانی پارامترها به صورت زیر

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\,w(x)\,h(x)\,s \qquad (۲۰)$$

خواهیم داشت:

$$\dot{V}_1(s,\tilde{\theta}) \le -\eta|s| \qquad (۲۱)$$

رابطه فوق همگرایی زمان محدود متغیر لغزش و محدود بودن خطای تخمین پارامتر را تضمین می‌کند. لذا خمینه $\{x\in R^n:\ s=0\}$ در حضور عدم قطعیت و پارامتر نامعلوم حاصل می‌گردد. وقتی $s=0$، داریم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

$$s(x(t)) = x_n(t) - x_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} u_0 d\tau = 0 \qquad (۲۲)$$

رابطه فوق می‌تواند به صورت زیر بازنویسی گردد

$$\dot{s} = \dot{x}_n(t) - u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_n(t) = u_0 \qquad (۲۳)$$

از طرفی طبق رابطه (۶) از قبل داشتیم

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + \Delta f_1(x,u,t), \\ &\dot{x}_2 = x_3 + \Delta f_2(x,u,t), \\ &\vdots \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n + \Delta f_{n-1}(x,u,t), \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

از مقایسه رابطه (۲۳) و (۲۴) با سیستم ارائه شده در قضیه ۳ می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای حالت سیستم در زمان محدود علی‌رغم وجود عدم قطعیت، اغتشاش و پارامترهای نامعلوم به سمت صفر همگرا می‌شوند.

اگرچه قانون کنترل زمان محدود (۱۷) پایداری و قوام سیستم را تضمین می‌کند، ولی از نظر کاربردی تعیین حد بالای χ به دلیل اغتشاشات خارجی و پیچیدگی عدم قطعیت سیستم کار ساده‌ای نیست. همچنین قانون کنترل پیشنهادی شامل تابع علامت می‌باشد که می‌تواند منجر به پدیده چترینگ گردد. یک راه برای کاهش چترینگ جایگزینی تابع علامت با تابع اشباع $sat(s/\varepsilon)$ است که در آن ε عرض لایه مرزی است. لازم به تذکر است که مقدار بزرگ ε می‌تواند منجر به خطای حالت دائمی شود و مقدار کوچک آن قادر نخواهد بود چترینگ را حذف کند. لذا باید مقدار آن متناسب با هر سیستم انتخاب گردد.

در این قسمت، تابع علامت با تابع سیگموئید جایگزین می‌شود. به منظور تنظیم تطبیقی بهره کنترل کننده χ و پارامتر τ، یک رویکرد خودتنظیم ارائه می‌گردد. لذا قانون کنترل (۱۷) به صورت زیر اصلاح میگردد.:

$$\begin{aligned} u = &-\bar{g}^{-1}(x)\Big(\bar{f}(x) + L^{n+1} r^{(n+1)d} K\zeta \\ &+ \hat{\chi}\,\phi(\hat{\tau}, s) + h(x) w^T(x)\hat{\theta} \Big) \\ \dot{r} = &-\frac{L}{4\beta_2} r^d + \frac{L}{4\beta_2}\frac{\|\zeta\|^2}{r^{2-d}}, \quad r(0) = r_0 > 0 \\ \dot{L} = &\frac{\mathrm{sgn}(\|\zeta\|)}{\alpha_1} L\rho(t)\varpi(r,\zeta), \; L(0) = M \geq 1 \\ \dot{\hat{\theta}} = &\Gamma w s h(x) \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

درحالیکه $\phi(\hat{\tau}, s)$ بیانگر یک تابع سیگموئید به صورت زیر است

$$\phi(\hat{\tau}, s) = \frac{1 - \exp(-\hat{\tau} s)}{1 + \exp(-\hat{\tau} s)} \qquad (۲۶)$$

در کنترل کننده (۲۵)، دو پارامتر $\hat{\chi}$ و $\hat{\tau}$ به صورت زیر به‌روز می‌شوند:

$$\dot{\hat{\chi}} = \lambda_1 s\, g(x) \frac{1 + \exp(-\hat{\tau} s)}{1 - \exp(-\hat{\tau} s)} \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) \qquad (۲۷)$$

$$\dot{\hat{\tau}} = \lambda_2\, g(x) \frac{(1 + \exp(-\hat{\tau} s))^2}{2\exp(-\hat{\tau} s)} \hat{\chi}^{-1} \mathrm{sgn}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) \qquad (۲۸)$$

که $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ پارامترهای تنظیم هستند.

قضیه ۵: سیستم غیرخطی (۸) را در نظر بگیرید. چنانچه سطح لغزش (۱۴) انتخاب شده و قانون کنترل (۲۵) با قوانین تطبیق (۲۷) و (۲۸) اعمال گردند، آنگاه پایدار زمان محدود سیستم غیرخطی (۸) در حضور اغتشاش خارجی، عدم قطعیت و پارامترهای نامعلوم تضمین می‌گردد.

اثبات: تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V_2(s) = \frac{1}{2} s^2 \qquad (۲۹)$$

با مشتق‌گیری از این تابع لیاپانوف نسبت به زمان خواهیم داشت

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{\partial V_2}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial \hat{\chi}}\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \hat{\tau}}\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} \right) \qquad (۳۰)$$

اولین عبارت در سمت راست معادله فوق برابر است با

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \hat{\chi}}\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} \\ &= s\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial}{\partial \hat{\chi}}\Big\{ -\bar{g}^{-1}(x)\Big(\bar{f}(x) + L^{n+1} r^{(n+1)d} K\zeta \Big) \\ &\quad + \hat{\chi}\,\phi(\hat{\tau}, s) + h(x) w^T(x)\hat{\theta} \Big\} \dot{\hat{\chi}} \\ &= -s\frac{\partial s}{\partial u}\bar{g}^{-1}(x)\frac{1 - \exp(-\hat{\tau} s)}{1 + \exp(-\hat{\tau} s)}\dot{\hat{\chi}} \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

اکنون، جایگذاری (۲۷) در (۳۱) نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}_2 = -\lambda_1 s^2 \left|\frac{\partial s}{\partial u}\right| < 0 \qquad (۳۲)$$

دومین عبارت در سمت راست معادله (۳۰) برابر است با

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \hat{\tau}}\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} \\ &= -s\frac{\partial s}{\partial u} g^{-1}(x)\,\hat{\chi}\,\frac{2s\exp(-\hat{\tau} s)}{(1 + \exp(-\hat{\tau} s))^2}\dot{\hat{\tau}} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

از جایگذاری (۲۸) در (۳۳) خواهیم داشت

$$\dot{V}_2 = -\lambda_2 s^2 \left|\frac{\partial s}{\partial u}\right| < 0 \qquad (۳۴)$$

با استفاده از (۳۲) و (۳۴) می‌توان نتیجه گرفت $\dot{V}_2 < 0$. ■

٤- شبیه‌سازی

به منظور ارزیابی عملکرد قانون کنترل پیشنهادی در این مقاله، سیستم زیر را در نظر بگیرید

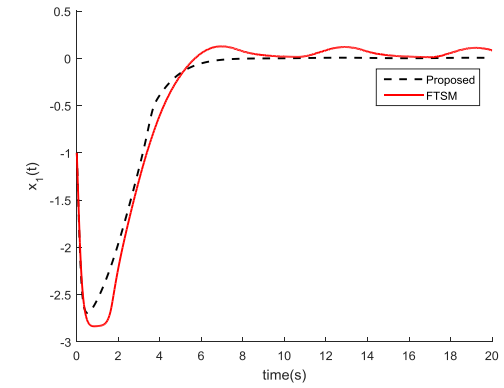
$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + d_1(x,t), \\ &\dot{x}_2 = \big(3 + \cos(x_1)\big)\theta - x_1^2 - 1.5x_2 + 2\sin(x_2) \\ &\qquad + \big(3 + \cos(x_1)\big)u(t) + d_2(x,t), \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

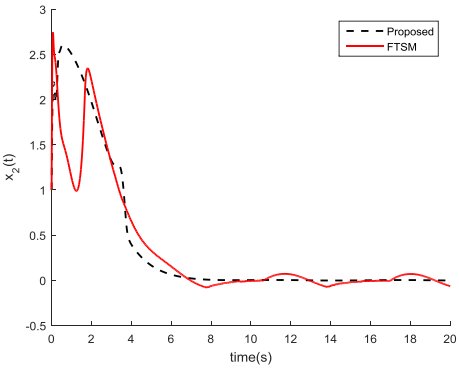
که θ پارامتر نامعلوم سیستم است و به منظور شبیه‌سازی فرض می‌شود که $\theta=1$ باشد. عدم قطعیت unmatched به صورت $d_1(x,t)=10\exp(-t)\sin(x_1)$ و عدم قطعیت matched سیستم و اغتشاشات خارجی به صورت $d_2(x,t)=-30\sin(t)x_1^2-2\cos(t)x_2+10t\exp(-0.4t)+10\cos(t)$ می‌باشد. شرایط اولیه و پارامترهای کنترل به صورت زیر ارائه می‌شوند: $x(0)=[-1,1]^T$، $\alpha_1=0.2$، $\beta_2=6$، $d=1/3$، $K=[\quad 1\quad .$، $L(0)=2$، $r(\ 0=)$، $\hat{\theta}(\ 0=)$، $\eta=0\ .$ و $\Gamma=3$.

به منظور نشان دادن مزایای قانون کنترل پیشنهادی، قانون کنترل مود لغزشی پایانی سریع FTSM مرجع [۱۸] تحت شرایط یکسان شبیه‌سازی می‌گردد تا مقایسه منصفانه‌ای حاصل گردد. از آنجایی که مرجع [۱۹] یک قانون کنترل مقاوم برای سیستم‌های غیرخطی ارائه داده است، لذا این کنترل‌کننده این مرجع برای مقایسه انتخاب شده است. همچنین عدم قطعیت و اغتشاش خارجی به اندازه کافی سخت در نظر گرفته شده تا بتوان نتیجه‌گیری خوبی از نحوه عملکرد دو کنترل‌کننده داشت.

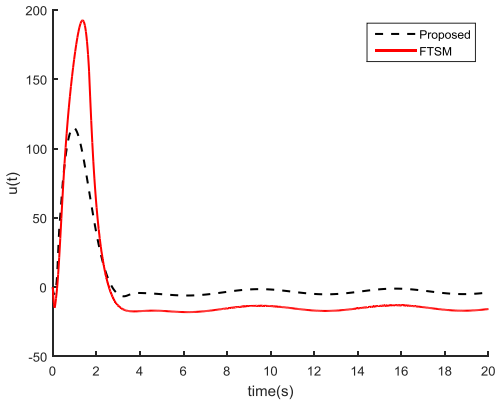
نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۱ تا ۴ نمایش داده شده است. پاسخ زمانی x_1 و x_2 سیستم حلقه بسته در شکل‌های ۱ و ۲ ارائه شده است. همانطور که به وضوح دیده می‌شود متغیرهای حالت سیستم تحت قانون کنترل پیشنهادی هم از نظر پاسخ گذرا و هم پاسخ حالت ماندگار رفتار بسیار بهتری را نسبت به FTSM از خودت نشان داده‌اند و کنترل‌کننده پیشنهادی به خوبی قادر است بر عدم قطعیت و اغتشاش غلبه کرده و عملکرد مناسب و قابل قبولی داشته باشد. شکل ۳ پاسخ زمانی کنترل‌کننده‌ها را نشان می‌دهد. کاملا واضح است که حداکثر تلاش کنترل مورد نیاز برای رویکرد پیشنهادی نسبت به FTSM به مراتب کمتر است. اهمیت این موضوع در کاربردهای عملی بیشتر مشخص می‌شود زیرا محدودیت فیزیکی بر روی عملگر وجود دارد و عملگر قادر به تولید هر میزان گشتاور و نیرو نمی‌باشد. همچنین انرژی سیگنال کنترل $(\int_0^{t_f}u^2d\tau)$ نیز در جدول ۱ ارائه شده است. بر طبق این جدول، کنترل کننده پیشنهادی با صرف انرژی بسیار کمتری قادر به کنترل سیستم است. تخمین پارامتر نامعلوم سیستم در شکل ۴ نمایش داده شده است. اگرچه خطای تخمین پارامتر به صفر همگرا نشده است ولی طبق انتظار محدود مانده است و هدف کنترلی برآورده شده است.



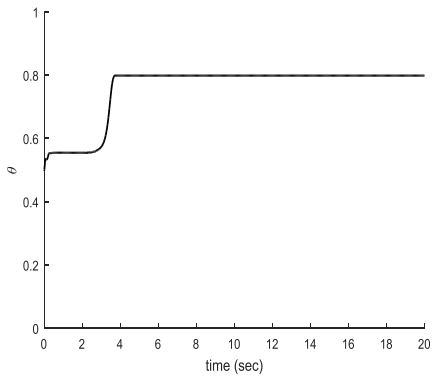
شکل ۱. متغیر حالت x_1



شکل ۲. متغیر حالت x_2



شکل ۳. سیگنال کنترل



شکل ۴. تخمین پارامتر نامعلوم سیستم

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

به منظور بررسی بیشتر کارآمدی کنترل‌کننده‌ها، شاخص‌های عملکردی زیر در نظر گرفته می‌شود.

الف) $Integral\ Squared\ Error\left(ISE\right)=\int_0^T x^2(t)dt$

این شاخص به خطاهای بزرگ بیشتر از خطاهای کوچک اهمیت می‌دهد و در واقع نشان می‌دهد که کدام کنترل‌کننده سریع‌تر نتیجه می‌دهد. هرچه ISE کمتر باشد، سرعت همگرایی بالاتر خواهد بود.

ب) $Integral\ Absolute\ Error\ (IAE)=\int_0^T \left|x(t)\right|dt$

شاخص ISE کمتر، نشان‌دهنده نوسان کمتری برای مسیرهای حالت سیستم است.

ج) $Integral\ Time-weighted\ Absolute\ Error\left(ITAE\right)=\int_0^T t\left|x(t)\right|dt$

این شاخص به خطاهای ماندگار بیشتر از خطاهای اولیه اهمیت می‌دهد. ضعف اصلی ITAE این است که به خطاهای اولیه حتی اگر شدید هم باشد اهمیت نمی‌دهد. این نقص توسط ISE و IAE به صورت همزمان برطرف می‌شود. لذا این سه شاخص عملکردی در نظر گرفته می‌شوند تا ارزیابی منصفانه‌ای صورت گیرد که کدام کنترل‌کننده عملکرد بهتری داشته است. نتایج عملکرد دو کنترل‌کننده در جدول ۲ ارائه شده است تا بتوان قضاوت بهتری در مورد آنها داشت.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک رویکرد جدید برای پایدارسازی زمان‌محدود کلاسی از سیستم‌های غیرخطی همراه با عدم قطعیت و پارامتر نامعلوم ارائه شد. قانون کنترل تطبیقی مقاوم زمان محدود این مقاله با استفاده از رویکرد کنترل مود لغزشی انتگرالی خودتنظیم حاصل شده است. یک مکانیزم تطبیقی به منظور تخمین پارامترهای نامعلوم سیستم ازائه شد. با جایگزینی تابع علامت با تابع سیگموئید در این قانون کنترل جدید، نه تنها پدیده چترینگ حذف شد بلکه حد بالای عدم قطعیت و اغتشاش دیگر نیاز نیست تا از قبل معلوم باشد. این ویژگی قانون کنترل را از نظر پیاده‌سازی عملی بسیار منعطف و کارامد می‌سازد. همچنین با حذف فاز رسیدن، قوام سیستم در سراسر پاسخ تضمین می‌گردد. همگرایی زمان محدود متغیرهای حالت سیستم و قوام کنترل کننده توسط تئوری لیاپانوف ضمانت می‌شود. در نهایت، برتری قانون کنترل این مقاله نسبت به قانون FTSM از طریق شبیه‌سازی مورد تایید قرار گرفت.

جدول ۱: مقایسه انرژی موردنیاز قانون کنترل پیشنهادی با FTSM

کنترل‌کننده	انرژی
قانون پیشنهادی	1.43×10^4
FTSF	3.75×10^4

جدول ۲: شاخص‌های عملکردی

کنترلر	متغیر حالت	ISE	IAE	ITAE
پیشنهادی	x_1	1.4×10^4	7.4×10^3	1.3×10^4
FTSF	x_1	1.8×10^4	9.1×10^3	2.6×10^4
پیشنهادی	x_2	1.5×10^4	7.7×10^3	1.4×10^4
FTSF	x_2	1.2×10^4	7.3×10^3	2.1×10^4

مراجع

[1] Galicki, A. Finite-time control of robotic manipulators, Automatica, 2015, 51, 49-54

[2] Galicki, A. Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulators, Automatica, 2016, 67, 165-170

[3] Golestani, M.; Mohammadzaman, I.; Yazdanpanah, M.J.; Vali, A.R. Application of finite-time integral sliding mode to guidance law design. J. Dyn. Syst-T. ASME 2015, 137, 114501-4

[4] Xiao, B.; Hu, Q.; Zhang, Y. Finite-Time Attitude Tracking of Spacecraft With Fault-Tolerant Capability, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23, 1338–1350

[5] Yu, S.; Yu, X.; Shirinzadeh, B.; Man, Z. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. Automatica 2005, 41, 1957–1964

[6] Golestani M., Mobayen S., Tchier F, Adaptive finite-time tracking control of uncertain non-linear n-order systems with unmatched uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 2016, DOI: 10.1049/iet-cta.2016.0163

[7] Mobayen, S. Finite-time robust-tracking and model-following controller for uncertain dynamical systems. J. Vib. Control, 2014, 22, 1117-1127

[8] Furat, M.; Ekber, I. Second-order integral sliding-mode control with experimental application. ISA Trans. 2014, 53, 1661-1669

[9] Xu, H.J.; Mirmirani, M.D.; Ioannou, P.A. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. J. Guid. Control Dynam. 2004, 27, 829-838

[10] Yang, J.; Zolotas, A.; Chen, W.H.; Michail, K.; Li, S.H. Robust control of nonlinear MAGLEV suspension system with mis-matched uncertainties via DOBC approach. ISA Trans. 2011, 50, 389-396

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]

[11] Taleb, M.; Plestan, F.; Bououlid, B. An adaptive solution for robust control based on integral high-order sliding mode concept. Int. J. Robust Nonlinear Control 2014, 25, 1201–1213

[12] Mobayen, S. An adaptive fast terminal sliding mode control combined with global sliding mode scheme for tracking control of uncertain nonlinear third-order systems, 2015, DOI 10.1007/s11071-015-2180-4

[13] Mobayen, S.; Tchier, F. Design of an adaptive chattering avoidance global sliding mode tracker for uncertain non-linear time-varying systems, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2016, *DOI:* 0142331216644046.

[14] Zong, Q.; Zhao, Z.-S; Zhang J. Higher order sliding mode control with self-tuning law based on integral sliding mode. IET Control Theory Appl. 2010, 4, 1282–1289

[15] Ferrara A., Rubagotti M.: 'Second-order sliding mode control of a mobile robot based on a harmonic potential field', IET Control Theory Appl., 2008, 2, (9), pp. 807–818

[16] Levant A.: 'Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence', IEEE Trans. Autom. Control, 2001, 46, (9), pp. 1447–1451

[17] Zhang, X., Feng, G., Sun, Y.: 'Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems', Automatica, 2012, 48, 499–504

[18] Mobayen, S. Fast Terminal Sliding Mode Controller Design for Nonlinear Second-Order Systems with Time-Varying Uncertainties. Complexity 2014, 21, 239-244

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.1.2]