

# کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش تحریک-رویداد در سیستم‌های خطی دارای اغتشاش و نایقینی

فرزاد زارعی<sup>۱</sup>، محمد حسین شفیعی<sup>۲</sup>، اکبر رهیده<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، farzadzarei@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، shafiei@sutech.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه قدرت، دانشگاه صنعتی شیراز، rahide@sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۲۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۵/۵)

**چکیده:** در این مقاله پیاده سازی روش تحریک-رویداد<sup>۱</sup> بر روی کنترل کننده مد لغزشی<sup>۲</sup> در سیستم‌های خطی چند ورودی دارای اغتشاش سازگار و عدم قطعیت ساختاری در ماتریس حالت سیستم ارائه می‌گردد. روش تحریک-رویداد یک استراتژی زمانبندی برای افزایش فاصله به‌روز رسانی‌ها سیگنال کنترلی در حلقه فیدبک و در عین حال حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترلی است. در صورتی که سیگنال کنترلی یک سیستم پیوسته، از طریق یک سیستم دیجیتال محاسبه و یا از طریق شبکه به ورودی محرک اعمال گردد، افزایش فاصله نمونه برداری‌ها، کارایی کلی سیستم دیجیتال و یا پهنای باند شبکه را افزایش می‌دهد. هدف این مقاله ترکیب روش کنترل مد لغزشی با استراتژی تحریک-رویداد در راستای افزایش کارایی کلی سیستم دیجیتال و در عین حال حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترل است. همچنین برای رفع پدیده چترینگ ناشی از کنترل مد لغزشی، راهکاری بر مبنای استفاده از لایه‌های مرزی<sup>۳</sup> پویا ارائه می‌شود. اما به کارگیری لایه مرزی باعث به وجود آمدن چرخه حدی ناخواسته در مسیر حالت می‌شود. در این مقاله دامنه چرخه حدی با طراحی لایه مرزی و قانون کنترلی پویا و متناسب با فضای حالت به صورتی کاهش می‌یابد، که عدم رخداد نقطه تجمع<sup>۴</sup> درخواست به روز رسانی نیز تضمین گردد. نتایج شبیه سازی یک سیستم خطی با عدم قطعیت در ماتریس سیستم، نشان دهنده کارایی ترکیب روش تحریک-رویداد با کنترل مد لغزشی با رویکرد لایه مرزی است.

کلمات کلیدی: کنترل مد لغزشی، لایه مرزی، روش تحریک-رویداد، قانون تحریک<sup>۵</sup>، نقطه تجمع در به‌روز رسانی، لایه‌های مرزی.

## Event-Triggered based Sliding Mode Control of Uncertain Linear Systems

Farzad Zarei, Mohammad Hossein Shafiei, Akbar Rahideh

**Abstract:** This paper presents the implementation of the event-triggered technique on sliding mode control (SMC) method in the case of linear systems with bounded uncertainty. Event-triggered technique is a scheduling strategy to reduce the number of control updates in a feedback loop. The Main contribution of this paper is to implement event-triggered SMC on the linear multi-input linear systems with parameter uncertainties. Although the chattering is inevitable in SMC, to tackle this phenomenon, hysteresis bounds are offered to reduce the frequency of control updates; nevertheless it induces a limit cycle. By updating control law at hysteresis boundaries, as the event-triggering rule, system finally ends to limit cycle. Another contribution of this paper is to reduce the amplitude of this limit cycle according to the variable control input, while guaranteeing no request

<sup>۱</sup> Event-Triggered

<sup>۲</sup> Sliding Mode Control

<sup>۳</sup> Hysteresis bands

<sup>۴</sup> Accumulation Point or Zeno Behavior

<sup>۵</sup> Triggering Rule

for successive control updates too. In this paper by properly designing dynamic control law and hysteresis bands based on state trajectory, as the system moves towards the stable point, its amplitude decreases and the limit cycle amplitude fades accordingly. This method is illustrated by an example of linear system with uncertainty in the system matrix. Simulation results depict the applicability of SMC combination with the event-triggered technique.

**Keywords:** Sliding mode control, hysteresis band, event-triggered method, inter-execution time, triggering rule, accumulation point.

## ۱- مقدمه

کاربرد سیستم‌های کنترل دیجیتال پیشرفته، و در عین حال عملکرد چند منظوره پردازنده‌ها در حال گسترش است. در اکثر کنترل کننده‌های فیدبک حالت دیجیتال، سیگنال کنترل به صورت گسسته و با پروسورهای جاسازی شده در مسیر فیدبک، محاسبه و به محرک اعمال می‌گردد. در واقع در فاصله زمانی بین نمونه برداری‌ها، سیستم به صورت حلقه باز کنترل می‌گردد و سیگنال کنترلی توسط مدار نگهدارنده مرتبه صفر<sup>۱</sup> ثابت می‌ماند، تا اینکه قانون تحریک (قانون تریگر) دستور به روز رسانی سیگنال کنترلی را صادر کند. این پردازنده دیجیتال واقع در مسیر فیدبک، علاوه بر وظیفه کنترلی، قابلیت انجام چندین وظیفه را به صورت همزمان دارد. قابلیت اجرای وظایف جانبی بر روی یک پروسور در کنار کامل کردن حلقه کنترلی، هزینه پیاده سازی سخت افزاری سیستم‌های کنترلی پیچیده را کاهش می‌دهد [۱]. کاهش تعداد به‌روز رسانی‌های سیگنال کنترل منجر به زیاد شدن فاصله زمانی نمونه برداری و در نتیجه آزاد شدن منابع محاسباتی پردازشگر در مدارات یکپارچه<sup>۲</sup> و کاهش پهنای باند اشغال شده شبکه در سیستم‌های کنترل گسترده می‌شود [۵-۲]. در کنترل کننده‌های دیجیتال اولیه، از روش نمونه برداری پرودییک با فاصله زمانی ثابت استفاده می‌شد. معمولاً در این روش فاصله زمانی بین نمونه برداری‌ها از پیش معین و برای بدترین شرایط کنترلی طراحی می‌شود. افزایش محافظه کاری بدیهی‌ترین مشکل این انتخاب است. بنابراین در نسل بعدی کنترل کننده‌های فیدبکی، روش تحریک غیر پرودییک ارائه شد. روش تحریک-رویداد یکی از این روش‌های غیر پرودییک می‌باشد که عمدتاً زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که سنسورها و پروسور تنظیم کننده زمان نمونه برداری، در کنار هم قرار دارند. در روش تحریک-رویداد، زمانی سیگنال کنترل به‌روز رسانی می‌گردد که یک شرط خاص برآورده شود (رویداد)، به صورتی که پایداری و کارایی سیستم کنترلی حلقه بسته تضمین گردد [۱]. معمولاً برای آنالیز پایداری در روش تحریک-رویداد از روش‌های مبتنی بر لیاپانوف استفاده می‌شود [۶].

از طرف دیگر، روش کنترل مد لغزشی، یک رهیافت ساده و مقاوم در کنترل سیستم‌های خطی و غیر خطی با اغتشاشات دارای حد بالای

مشخص است [۷۸]. این روش کنترلی در دو گام اساسی انتخاب سطح لغزش و طراحی کنترل کننده برای دستیابی زمان محدود به سطح لغزش طراحی می‌شود [۹]. در عمل سیستم بر روی سطح لغزش نمی‌ماند و پدیده چترینگ (تغییرات فرکانس بالا حول سطح لغزش) را به دلیل عدم قطعیت‌های سیستم تجربه می‌نماید [۱۰]. پدیده چترینگ در سیستم‌های یکپارچه باعث فروماندگی پروسور در انجام وظایف و در نتیجه ناپایداری سیستم کنترلی شده و در سیستم‌های کنترلی تحت شبکه، پهنای باند کنترلی زیادی را به شبکه تحمیل می‌نماید. ایده استفاده از راهکار لایه مرزی در کنترل مد لغزشی، برای کاهش پدیده چترینگ در [۱۱] مطرح شد. از این رو یک ترکیب از کنترل مد لغزشی با روش تحریک-رویداد با بهره‌مندی از لایه مرزی به عنوان قانون تحریک قابل ارائه است [۱۲]. روش ارائه شده در این مرجع تنها برای یک سیستم با یک ورودی و دو متغیر حالت قابل کاربرد است و عمومیت لازم را ندارد. بعلاوه هرچند در این رویکرد فرکانس چترینگ تا حدودی کاهش می‌یابد، اما مشکل دامنه زیاد چترینگ سیگنال کنترلی همچنان باقی است. همچنین متغیرهای حالت سیستم وارد یک چرخه حدی ثابت حول نقطه تعادل می‌شوند و در صورت کاهش فاصله لایه مرزی برای کاهش دامنه چترینگ، فرکانس نوسانات به شدت افزایش می‌یابد.

رویکرد دیگری در مورد کنترل مد لغزشی بر اساس روش تحریک-رویداد برای سیستم کنترل خطی در [۱۳] ارائه شده است. همان نویسنده در [۱۴] این رویکرد را برای سیستم‌های تحت شبکه بسط داده است. همچنین از این تکنیک برای کنترل یک سیستم غیر خطی در [۱۵] نیز استفاده شده است. در واقع در تمامی آنها بر اساس قرار دادن خطای متغیر حالت در یک محدوده معین همانند روش نمونه برداری لیبزگ<sup>۳</sup> استفاده شده است. در روش این مراجع یک بازه لغزش در اطراف سطح لغزش تعریف شده و متغیرهای حالت سیستم به این بازه لغزشی همگرا می‌شود. ولی دامنه و فرکانس سیگنال کنترلی در نزدیکی سطح لغزش به دلیل چترینگ همچنان زیاد است. این مسئله موجب فرکانس نمونه برداری زیادی می‌شود که با اهداف روش تحریک-رویداد که همان کاهش تعداد به روز رسانی است، در تناقض است.

در اکثر مقالات هدف تنها رساندن متغیرهای حالت به نزدیکی سطح لغزش است و به وضعیت سیستم در نزدیکی سطح لغزش که با پدیده

<sup>۱</sup> Zero order hold circuit (ZOH)

<sup>۲</sup> Integrated Systems

<sup>۳</sup> Lebesgue Sampling

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_1 \eta + A_2 \xi, \\ \dot{\xi} &= A_3 \eta + A_4 \xi + (u + \delta_m). \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $u \in R^r$  بردار ورودی سیستم است و ابعاد ماتریسهای سیستم عبارتند از:  $A_1 \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ ،  $A_2 \in R^{(n-r) \times r}$ ،  $A_3 \in R^{r \times (n-r)}$  و  $A_4 \in R^{r \times r}$ . برای هر یک از این ماتریسها فرض می‌شود که،  $A_j = A_{jn} + \Delta A_j$ , for  $j = 1, \dots, 4$ . مقدار نامی و  $\Delta A_j$  عدم قطعیت ماتریس سیستم با فرض  $\| \Delta A_j \| < \mu_j$  است. همچنین،  $\eta \in R^{(n-r)}$  و  $\xi \in R^r$  متغیرهای حالت سیستم هستند و  $x = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}$  برای ارجاع به کل متغیرهای حالت سیستم استفاده می‌شود. در نهایت  $\delta_m \in R^r$  برای توصیف سیگنال اغتشاش در کانال ورودی به کار می‌رود و برای مقدار  $\gamma$  مثبت داریم،  $\| \delta_m \| < \gamma$ .

**تعریف ۱.** یک سیستم دارای پایداری زمان محدود است، اگر متغیرهای حالت آن، در یک زمان محدود به حالت ماندگار خود برسند.

در لم زیر شرط کافی برای دستیابی به پایداری زمان محدود متغیرهای حالت سیستم به سطح لغزش، آورده شده است:

**لم ۱ [۱۶].** یک سیستم کنترل با متغیر حالت  $x$  دارای پایداری زمان محدود به سطح لغزش یا نقطه تعادل است، اگر برای یک تابع لیاپانوف مثبت معین  $V(x)$ ، نامعادله زیر برقرار باشد:

$$\dot{V} < -cV^\alpha, \quad (2)$$

برای  $0 < \alpha < 1$  و  $c > 0$ .

### ۳- کنترل مد لغزشی

کنترل مد لغزشی در دو گام اساسی طراحی می‌شود؛ فاز لغزش و فاز دستیابی به سطح لغزش. در فاز لغزش، یک سطح لغزش به صورتی طراحی می‌گردد که اگر سیستم بر روی آن قرار داشته باشد، پایداری مجانبی سیستم تضمین شود. در فاز دستیابی به سطح لغزش، سیگنال کنترلی به نحوی طراحی می‌شود که متغیرهای حالت سیستم را در زمان محدود و با حداقل تاثیر از عدم قطعیت‌ها به سطح لغزش همگرا سازد.

#### ۳-۱ فاز لغزشی

در این فاز فرض می‌شود که متغیرهای حالت سیستم بر روی سطح لغزش قرار دارند. از این رو طراحی سطح لغزش باید به صورتی انجام

چترینگ مواجه است، چندان پرداخته نمی‌شود. در این مقاله، روش تحریک-رویداد بر روی کنترل کننده مد لغزشی در سیستمهای خطی چند ورودی دارای اغتشاش سازگار و عدم قطعیت در ماتریس سیستم به نحوی ارائه می‌گردد که بتوان متغیرهای حالت سیستم را با دامنه و فرکانس چترینگ بسیار کمتر از روش های مذکور، بر روی سطح لغزش قرار داد. ایده کلی روش پیشنهادی، ایجاد یک وابستگی بین سیگنال کنترلی، متغیرهای حالت و لایه‌های مرزی است به نحوی که بتوان لایه-های مرزی را به سطح لغزش نزدیک کرد، در حالی که در درخواست به روز رسانی‌ها نقطه تجمع (پدیده Zeno) ایجاد نشود. بنابراین در این مقاله با ایجاد یک رابطه متقابل بین سیگنال کنترل، بازه لغزشی و متغیرهای حالت سیستم، میزان چترینگ کاهش خواهد می‌یابد که دامنه آن محدود به عدم قطعیت‌های سیستم است.

سهم دیگر این مقاله در پیشبرد این روش، معرفی و طراحی یک بازه مجاز برای تغییرات لایه مرزی است. که اگر لایه‌های مرزی مستقل از این بازه (که تابعی از مکان متغیرهای حالت و اندازه سیگنال کنترلی است)، کاهش یابد، امکان بروز نقطه تجمع (درخواست پیاپی به روز رسانی در یک فاصله زمانی کوچک) وجود دارد. از طرف دیگر، حد بالای فاصله لایه مرزی تضمین می‌کند که متغیرهای حالت با رسیدن به لایه‌های مرزی از آنها خارج نشوند. سیستم دیجیتال می‌تواند بر اساس میزان بار تحمیل شده از سایر وظایف، فاصله لایه مرزی را در بازه تعیین شده تنظیم نماید. نکته مهم دیگر در کاربرد روش ارائه شده در این مقاله این است که وضعیت سیستم در درون و روی لایه مرزی با وجود عدم قطعیت موجود کاملاً کنترل شده و گذر متغیرهای حالت از یک مرز به مرز دیگر با سیگنال کنترلی طراحی شده تضمین می‌گردد. بعلاوه در اینجا پیاده سازی روش رویداد-تحریک برای سیستم‌های با بیش از دو متغیر حالت و چند ورودی توسعه داده شده است.

ادامه این مقاله به شکل زیر سازمان دهی شده است: در بخش ۲، تعاریف اولیه مورد نیاز ارائه می‌شود. در بخش ۳، گامهای اصلی کنترل مد لغزشی شامل فاز لغزش و فاز رسیدن به سطح لغزش در زمان محدود شرح داده می‌شود. در بخش ۴، حدود بالا و پایین لایه مرزی برای یک سیستم چند ورودی محاسبه می‌شود. در بخش ۵، روش پیشنهادی بر روی یک مثال پیاده سازی و در نهایت در بخش ۶ نتیجه گیری این مقاله ارائه می‌شود.

### ۲- اصول اولیه و بیان مسئله

سیستم خطی ذیل را در فرم رگولار در نظر بگیرید:

$$A_1 - A_2 K_2^{-1} K_1 < 0, \quad (7)$$

از این رو، اگر بردار  $K$  به نحوی انتخاب شود که نامساوی (۷) را برآورده سازد، دینامیک  $\eta$  بر روی سطوح لغزش دارای پایداری مجانبی است. یعنی،

$$\eta \rightarrow 0. \quad (8)$$

از طرف دیگر، با توجه به این که بر روی سطح لغزش داریم،  $\xi = -K_2^{-1} K_1 \eta$ ، در نتیجه معادله (۸) پایداری مجانبی دینامیک  $\xi$  را نیز تضمین می‌کند.

### ۳-۲ فاز دستیابی

در فاز دستیابی، قانون کنترلی<sup>۱</sup> به صورتی طراحی می‌گردد که متغیرهای حالت سیستم در حضور اغتشاش سازگار (matched) یعنی اغتشاش موجود در کانال ورودی و همچنین عدم قطعیت‌های ناشی از نایقینی در ماتریسهای حالت سیستم، در زمان محدود به سطوح لغزش همگرا گردند. کاندید تابع لیانوف برای طراحی سیگنال کنترلی در این فاز عبارت است از،

$$V(S) = \frac{1}{2} S^T S \rightarrow \quad (9)$$

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} < 0,$$

بنابراین ابتدا باید  $\dot{S}$  محاسبه شود، داریم:

$$\dot{S} = K_1 \dot{\eta} + K_2 \dot{\xi} \quad (10)$$

با جایگزینی معادلات سیستم از (۱) در (۱۰) خواهیم داشت:

$$\dot{S} = K_1 \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$+ K_2 (u + \delta_m),$$

اگر قانون کنترلی به شکل زیر انتخاب شود،

$$u = K_2^{-1} \left( - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + v \right), \quad (12)$$

آنگاه معادله (۱۱) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\dot{S} = (\Delta(x) + v), \quad (13)$$

که در آن،  $\Delta(x) = [\Delta_i]_{r \times 1} = \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta A_2 \\ \Delta A_3 & \Delta A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + K_2 \delta_m$  و

$\Delta_i = [v_i]_{r \times 1}$ ، for  $i = 1, \dots, r$ . برای غلبه بر عدم قطعیت

و اغتشاش  $\delta_m$  تابع  $v_i$  به صورت،

$$v_i = -\beta_i \operatorname{sgn}(S_i), \quad (14)$$

انتخاب می‌گردد. مقدار  $\beta_i$  در این رابطه در بخش ۴ مقاله و بر اساس معادلات (۲۴-۲۲) به گونه‌ای انتخاب می‌گردد که عدم قطعیت‌های سیستم، اغتشاش کانال ورودی و خطای ناشی از اندازه گیری متغیر حالت به روش تحریک-رویداد را جبران نماید.

شود که معادلات سیستم بر روی سطح لغزش، به مبدا همگرا شود. فرض کنید سطح لغزش به صورت زیر تعریف شود:

$$S = K_1 \eta + K_2 \xi = 0, \quad (3)$$

اگر حالت‌های سیستم بر روی سطح لغزش قرار گیرند، خواهیم داشت:

$$\xi = -K_2^{-1} K_1 \eta$$

لغزش خطی به صورت،  $S = [S_i]_{r \times 1}$ ،  $i = 1, \dots, r$  است. ضرایب

سطح لغزش،  $K_1 \in R^{r \times (n-r)}$ ،  $K_2 \in R^{r \times r}$  می‌باشند که در اینجا

فرض می‌شود که ماتریس  $K_2$  معکوس پذیر باشد. در معادله سطح

لغزش  $i$ ام ( $S_i$ ) بردار  $K_i = [K_{i1}, K_{i2}]$  بردار نرمال صفحه عمود بر

صفحه  $S_i$  است [۱۷]. در این بردار،  $K_{i1}, K_{i2}$  به ترتیب سطرهای  $i$ ام

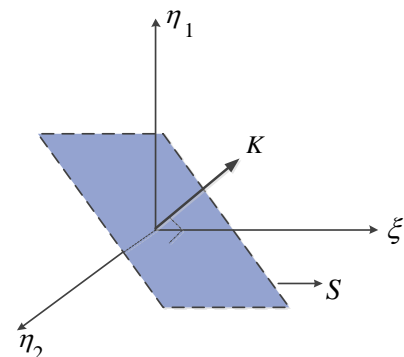
ماتریس‌های  $K_1, K_2$  هستند. برای مثال اگر در معادله (۱) داشته باشیم:

$r=1$  و  $n=3$ ، در این حالت  $K_1 = [k_1 \quad k_2]$  و  $K_2 \in R$ ، و

معادله سطح لغزش برابر  $S = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + K_2 \xi = 0$  خواهد بود.

در این مثال بردار  $K = [k_1 \quad k_2 \quad K_2]$  بردار نرمال صفحه است (شکل

(۱).



شکل ۱: سطح لغزش  $S$  و بردار نرمال عمود بر صفحه

به منظور پایداری مجانبی معادلات سیستم بر روی سطح لغزش، باید

ماتریس  $K$  به نحو مناسبی تعیین گردد. بدین منظور اگر تابع کاندید

لیانوف به صورت،

$$V(\eta) = \frac{1}{2} \eta^T \eta, \quad (4)$$

انتخاب شود، با توجه به اینکه بر روی سطح لغزش داریم:

$$\xi = -K_2^{-1} K_1 \eta$$

بر روی سطح لغزش برابر خواهد بود با:

$$\dot{\eta} = A_1 \eta - A_2 K_2^{-1} K_1 \eta, \quad (5)$$

بعلاوه مشتق زمانی تابع لیانوف عبارت است از:

$$\dot{V}(\eta) = \eta^T \dot{\eta} < 0 \quad (6)$$

$$= \eta^T (A_1 - A_2 K_2^{-1} K_1) \eta < 0.$$

مشتق این تابع لیانوف منفی معین است، اگر داشته باشیم،

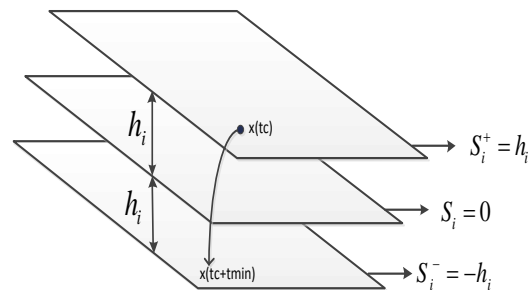
<sup>۱</sup> Control Law

## ۴- لایه مرزی

برای هر سطح لغزش  $S_i$  دو لایه مرزی موازی و قرینه نسبت به سطح لغزش، به عنوان معیار به روز رسانی (شرط تریگر) در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. این دو سطح موازی به صورت،

$$\begin{aligned} S_i^+ &= S_i - h_i = 0 \\ S_i^- &= S_i + h_i = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

و با پارامتر  $h_i > 0$  قابل تعریف می‌باشند. سیگنال کنترلی  $u_i$  بر روی  $S_i^+$  و  $S_i^-$  که به ترتیب لایه‌های موازی بالا و پایین سطح لغزش فرض می‌شوند، به روز رسانی خواهد شد. عبور متغیرهای حالت از این دو سطح به عنوان قانون به روز رسانی سیگنال کنترل (رخداد به روز رسانی) خواهد بود. بعد از نمونه برداری، سیگنال کنترل ورودی توسط مدار نگهدارنده مرتبه صفر تا به روز رسانی بعدی در لایه مرزی مقابل ثابت خواهد ماند. متغیرهای حالت سیستم در بین این دو لایه مرزی نوسان کرده و به سمت نقطه تعادل نزدیک می‌شود و در نهایت به چرخه حدی وارد می‌شوند. شکل ۲ حدود لایه مرزی نمونه  $S_i^+$  و  $S_i^-$  را نشان می‌دهد که در موازات سطح لغزش  $S_i$  قرار دارند:



شکل ۲: لایه‌های مرزی  $S_i^+$  و  $S_i^-$  در موازات با سطح لغزش

در روی لایه  $S_i^+$ ، قانون کنترلی  $u^+$  به سیستم اعمال شده و متغیرهای حالت سیستم را به سمت سطح لغزش  $S_i$  باز می‌گرداند. در زمانی که حالت سیستم به لایه مقابل آن،  $S_i^-$  برسد، قانون کنترلی  $u^-$  باز متغیرهای حالت سیستم را به سمت سطح لغزش  $S_i$  باز می‌گرداند. اکنون زمان  $t_c$  را به عنوان آخرین زمان نمونه برداری و  $x(t_c)$  را به عنوان متغیر حالت سیستم بر روی آخرین لایه مرزی ملاقات شده در نظر بگیرید.

**لم ۲.** فرض کنید دو لایه مرزی  $S_i^+$  و  $S_i^-$  به موازات سطح لغزش  $S_i$  قرار دارند. اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \dot{S}_i^+ = \dot{S}_i(x(t_c)) < 0, & x(t_c) \in S_i^+ \\ \dot{S}_i^- = \dot{S}_i(x(t_c)) > 0, & x(t_c) \in S_i^- \end{cases} \quad (16.a)$$

آنگاه با به روز رسانی کنترل کننده در روی لایه‌ها، متغیرهای حالت سیستم در ناحیه بین دو لایه، باقی می‌مانند.

**اثبات:** برای باقی ماندن سیستم در لایه مرزی، باید مشتق تابع

لیاپانوف در فاز دستیابی،  $\dot{V}_i = S_i \dot{S}_i$  بر روی لایه‌های مرزی منفی باشد تا متغیرهای حالت سیستم را به سمت درون لایه لغزش میل دهد. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} x \in S_i^+ \rightarrow S_i > 0, \\ x \in S_i^- \rightarrow S_i < 0, \end{cases} \quad (17)$$

با توجه به اینکه بر روی سطوح لغزش با مشتقگیری از (۱۵)  $\dot{S}_i^+ = \dot{S}_i^- = \dot{S}_i$  برقرار است، لذا برای منفی شدن  $\dot{V}_i$  و با توجه به (۱۷) نیاز است تا (۱۶) برقرار باشد. □

اکنون با توجه به پیش نیازها و تعاریف ارائه شده قانون کنترل پیشنهادی بر روی لایه‌های مرزی ارائه می‌شود:

$$u = \begin{cases} u^+ = K_2^{-1} \left( -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ \xi_c \end{bmatrix} + v \right), & x(t_c) \in S^+ \\ u^- = K_2^{-1} \left( -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ \xi_c \end{bmatrix} + v \right), & x(t_c) \in S^- \end{cases} \quad (18)$$

که در آن مقدار  $v = [v_i]_{r \times 1}$  از معادله (۱۹) بدست می‌آید:

$$v_i = -\beta_i \operatorname{sgn}(S_i(x(t_c))) \quad (19)$$

برای آنالیز دستیابی زمان محدود متغیرهای حالت از یک لایه مرزی به لایه مرزی مقابل، سه ناحیه،  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  را در نظر بگیرید، که داریم:

$$\begin{cases} S_i^- > 0 \ \& \ S_i^+ > 0 & x \in R_1 \\ S_i^- > 0 \ \& \ S_i^+ < 0 & x \in R_2 \\ S_i^- < 0 \ \& \ S_i^+ < 0 & x \in R_3 \end{cases} \quad (20)$$

ناحیه  $R_1$  مربوط به فضای بالای  $S_i^+$  و ناحیه  $R_2$  مربوط به فضای بین دو لایه مرزی و در آخر ناحیه  $R_3$  نشان دهنده فضای حالت در زیر  $S_i^-$  است. به عنوان نمونه، شرط دستیابی زمان محدود برای  $S_i^-$  باید در دو ناحیه  $R_2$  و  $R_3$  اثبات گردد.

با توجه به این که به روز رسانی تنها بر روی لایه‌های مرزی انجام می‌شود، در زمانی که متغیرهای حالت بر روی سطح لایه‌ها قرار ندارند، خطای بین مقدار واقعی متغیر حالت و مقدار نمونه برداری شده قبلی وجود خواهد داشت که این خطا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t_c) - x(t) \\ &= \begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\eta \\ e_\xi \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

از معادله (۱۱) و با سیگنال کنترل طراحی شده (۱۸) خواهیم داشت:

معادلات (۲۶) و (۲۷) بر اساس لم ۱ پایداری زمان محدود به لایه مرزی  $S_i^-$  را برای این دو ناحیه اثبات می‌کند. همین اثبات را می‌توان برای دستیابی زمان محدود برای لایه مرزی  $S_i^+$  در ناحیه‌های  $R_1$  و  $R_2$  نیز انجام داد.

#### ۴-۱ بیشترین فاصله لایه مرزی

برای محاسبه مقدار حداکثر مجاز لایه مرزی که در لم ۲ برای نگه داشتن متغیرهای حالت سیستم بین لایه‌ها لازم است، باید حدود تغییرات  $\xi$  و  $\eta$  در دینامیک سیستم، مشخص باشد. بر روی لایه  $S_i^+$  یعنی زمانی که  $x(t) \in S_i^+$  بر اساس معادله (۱۵)، رابطه  $S_i^- - h_i = k_{1i}\eta + k_{2i}\xi - h_i = 0$  را  $(k_{2i} \in R^{1 \times r}$  و  $k_{1i} \in R^{1 \times (n-r)})$  در این صورت دینامیک  $\eta$  را می‌توان به شکل زیر بیان نمود،

$$\eta = -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} h_i, \quad (28)$$

توجه نمایید که سیگنال کنترل در روی  $S_i^+$  به روز می‌گردد، بنابراین معادله (۱۶.a) باید برقرار باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$k_{1i}(A_1\eta + A_2\xi) + k_{2i}(A_3\eta + A_4\xi + (u^+ + \delta_m)) < 0, \quad (29)$$

با جایگزینی (۲۸) در (۲۹) داریم:

$$k_{1i} \left( A_1 \left( -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} h_i \right) + A_2\xi \right) + \quad (30)$$

$$k_{2i} \left( A_3 \left( -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} h_i \right) + A_4\xi + (u^+ + \delta_m) \right) < 0,$$

با تعریف  $M_i \in R^{1 \times 1}$  و  $N_i \in R^{1 \times r}$  به شکل زیر،

$$N_i = k_{1i} \left( A_1 \left( -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} k_{2i} \right) + A_2 \right) + \quad (31)$$

$$k_{2i} \left( A_3 \left( -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} k_{2i} \right) + A_4 \right),$$

$$M_i = k_{1i} A_1 \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} + k_{2i} A_3 \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2},$$

معادله (۳۰) به شکل زیر ساده خواهد شد:

$$N_i \xi + k_{2i} (u + \delta_m) + M_i h_i < 0, \quad (32)$$

در بدترین شرایط (صفر شدن مشتق تابع لیاپانوف بر روی لایه مرزی) نامساوی (۳۲) به مساوی تبدیل خواهد شد و اگر دینامیک  $\xi$  را که بر

$$\dot{S}_i^- = -[K_{i1} \ K_{i2}] \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \quad (22)$$

$$[K_{i1} \ K_{i2}] \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta A_2 \\ \Delta A_3 & \Delta A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} +$$

$$K_{i2} \delta_m - \beta_i \operatorname{sgn}(S_i(x_{t_c})),$$

که در اینجا  $K_i = [K_{i1} \ K_{i2}]$  ردیف  $i$ th از ماتریس  $K = [K_1 \ K_2]$  می‌باشد. با استفاده از این حقیقت که وقتی متغیر حالت سیستم بین دو لایه مرزی قرار دارد، حداکثر فاصله بین دو لایه بالا و پایین مرزی یعنی حداکثر خطای اندازه‌گیری  $e_{max}$  برابر  $2h$  است، برای جمله اول و دوم در رابطه سمت راست معادله (۲۲) داریم:

$$\|K_i\| \|A_n\| \|e_{max}\| \leq 2h \|K_i\| \|A_n\|, \quad (23)$$

$$\|K_i\| \|A_\Delta\| \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \leq \|K_i\| \|A_\Delta\| \begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix}$$

بنابراین برای برقرار شدن معادله (۱۶) در  $S_i^-$  مقدار  $\beta_i$  و  $P_i$  بیان شده در معادله (۱۴) باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\beta_i \geq P_i(x(t_c)) + \beta_{0i}$$

$$\text{where } \begin{cases} P_i(x) = 2h \|A_n\| + \|K_i\| \|A_\Delta\| \begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix} + \|K_{i2} \delta_m\|, \\ \beta_{0i} > 0 \end{cases}$$

از این رو مشتق تابع لیاپانوف و معادلات (۹)، (۱۱)، (۲۲) و (۲۳)، معادله (۲۵) را نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}(S_i^-) = S_i^- (-K_i A_n e + K_i \Delta A x + K_{i2} \delta_m - \beta_i \operatorname{sgn}(S_i(x_{t_c})))$$

$$= S_i^- (K_i \Delta A x + K_{i2} \delta_m - K_i A_n e) \quad (25)$$

$$- S_i^- (\beta_i \operatorname{sgn}(S_i(x_{t_c})))$$

$$\leq |S_i^-| (\|K_i\| \|A_\Delta\| \|x(t_c)\| + \|K_{i2} \delta_m\| + 2h \|K_i\| \|A_n\|) - S_i^- (\beta_i \operatorname{sgn}(S_i(x_{t_c}))),$$

اکنون پایداری زمان محدود، در دو ناحیه  $R_2$  و  $R_3$  بررسی می‌شود؛

**ناحیه  $R_2$ .** در این ناحیه  $S_i^- > 0$  در نتیجه  $|S_i^-| = S_i^-$  است و اگر  $x(t_c) \in S_i^+$  باشد، از معادلات (۱۸)، (۲۴) و (۲۵) داریم،

$$\dot{V}(S_i^-) \leq -\beta_{i0} |S_i^-| = -\sqrt{2} \beta_{i0} V(S_i^-)^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

**ناحیه  $R_3$ .** در این ناحیه  $x(t_c) \in S_i^-$  داریم  $S_i^- < 0$ ، که نتیجه می‌دهد  $|S_i^-| = -S_i^-$ . با استفاده از معادلات (۱۸)، (۲۴) و (۲۵) داریم،

$$\dot{V}(S_i^-) \leq -\beta_{i0} |S_i^-| = -\sqrt{2} \beta_{i0} V(S_i^-)^{\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

#### ۴-۲ کمترین فاصله لایه‌های مرزی

کاهش لایه مرزی، به صورت مستقل از مکان فضای حالت و اندازه سیگنال کنترل، امکان ایجاد تجمع در خواست نمونه برداری را به وجود می‌آورد و یا امکان دارد حداقل فاصله زمانی از پیش تعیین شده بین نمونه برداری‌ها نقض گردد. جهت تضمین عدم تجاوز از حداقل فاصله زمانی یک حد پایین برای پارامتر  $h_i$  باید تعیین شود. به صورت معمول می‌توان از ماتریس انتقال حالت برای تعیین زمان حرکت متغیرهای حالت از لایه پایین  $S^-$  به لایه بالای  $S^+$  استفاده نمود. در یک سیستم خطی، معادلات زمانی از بردار حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$x(t) = e^{A(t-t_c)} x(t_c) + \int_{t_c}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (39)$$

که در اینجا  $e^{At}$  ماتریس انتقال حالت است. سیستم می‌تواند از لایه پایین  $x(t_c) \in S^-$  به لایه بالا  $x(t_{min}) \in S^+$  یا بالعکس، در یک زمان حداقل  $t_{min}$  منتقل گردد. با توجه به اینکه حداقل فاصله سطوح  $S^+$  و  $S^-$  برابر  $2h_{min}$  است، داریم:

$$Kx(t_{min}) = 2h_{min}. \quad (40)$$

حداقل فاصله زمانی بین نمونه برداری‌های متوالی در یک سیستم کنترل عبارت است از  $t_{min}$ ، که این مقدار می‌تواند به عنوان یک مقدار بزرگتر یا مساوی زمان نمونه برداری سنسور انتخاب گردد. محاسبه (۴۰) برای یافتن  $h_{min}$  به صورت کلی ساده نیست، زیرا تمام بازه عدم قطعیت‌ها و اغتشاش باید در بدست آوردن این مینیمم به حساب آیند.

$$h_{min} = \inf_{\delta, \Delta} f(t_{min}, \delta, \Delta), \quad (41)$$

برای بدترین شرایط پایداری سیستم، کمترین اندازه لایه مرزی  $h_{min}$  در بازه تغییرات  $\delta$  و  $\Delta$  باید تعیین گردد. بنابراین جهت ادامه محاسبات در این مورد باید ضابطه  $f$  (معادلات سیستم) مشخص باشد.

#### ۵- بخش شبیه سازی

برای سادگی در نشان دادن روند ارائه شده در بالا، سیستم دو حالتی و تک ورودی با عدم قطعیت ساختاری به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta x_1 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}, \quad (42)$$

که در آن  $x \in R^2$  و  $u \in R$  به ترتیب متغیر حالت و ورودی کنترلی است. همچنین در اینجا فرض شده،  $a = 1$  که  $|\theta| < a$  یک ثابت مثبت و بیان کننده حد بالای عدم قطعیت فرض شده در سیستم است.

ماتریس نامی سیستم عبارت است از،  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس ورودی

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و بعلاوه ماتریس  $\Delta A = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  عدم قطعیت مربوط به

روی  $S_i^+$  قرار دارد با  $\xi_{max}$  نامگذاری کنیم، در این حالت  $\xi_{max}$  به شکل زیر از مساوی قرار دادن (۳۲) بدست می‌آید:

$$\xi_{max} = -\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} M_i h_i - \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} k_{2i} (u^+ + \delta_m), \quad (33)$$

از طرف دیگر از معادله (۳) و نامگذاری دینامیک  $\xi_i$  بر روی سطح لغزش  $S_i$  به صورت  $\xi_i$  داریم،

$$\dot{\xi}_i = -\frac{k_{2i}^T}{\|k_{2i}\|_2} k_{1i} \eta, \quad (34)$$

برای محاسبه حداکثر تغییرات دینامیک  $\xi_i$ ، (۳۴) را از (۳۳) کم می‌نماییم؛

$$\Delta \xi_i = \xi_{max} - \xi_{S_i} = -\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} M_i h_i + \frac{k_{2i}^T}{\|k_{2i}\|_2} k_{1i} \eta - \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} k_{2i} (u^+ + \delta_m), \quad (35)$$

در اینجا  $\Delta \xi_i$  حداکثر تغییرات دینامیک  $\xi_i$  بین سطح لغزش  $S_i$  و لایه  $S_i^+$  است. با نگاشت  $\Delta \xi_i$  بر روی  $K_i$  (با استفاده از ضرب داخلی)، حداکثر فاصله لایه مرزی  $S_i^+$  از سطح لغزش بدست می‌آید:

$$h_i = \begin{bmatrix} k_{1i} & k_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \xi_i \end{bmatrix} = -k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} M_i h_i + k_{1i} \eta - k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} k_{2i} (u^+ + \delta_m), \quad (36)$$

بنابراین،

$$h_i = \left( 1 + k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} M_i \right)^{-1} \times \left( k_{1i} \eta - k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} k_{2i} (u^+ + \delta_m) \right), \quad (37)$$

معادله (۳۷) باید برای تمام تغییرات دینامیک  $\xi_i$  و  $\eta$  برقرار باشد، تا متغیرهای حالت را بین لایه مرزی نگه دارد، پس:

$$h_{max_i} = \min_{\eta, \xi} \left[ \left( 1 + k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} M_i \right)^{-1} \times \left( k_{1i} \eta - k_{2i} \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2} k_{2i} (u^+ + \delta_m) \right) \right] \quad (38)$$

از این رویکرد می‌توان برای یافتن ماکزیمم لایه مرزی از  $S^-$  به  $S^+$  استفاده نمود. به این ترتیب معادله مشابه (۳۸) برای  $S^-$  نیز محاسبه می‌شود و  $h$  حداقل مقدار محاسبه شده از این دو مقدار خواهد بود.

۳-۵ محاسبه بیشترین فاصله لایه مرزی

از معادله (۱۵) برای حد بالای لایه مرزی داریم:

$$\begin{aligned} S^+ &= S - h = k_1 x_1 + k_2 x_2 - h = 0 \\ S^- &= S + h = k_1 x_1 + k_2 x_2 + h = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

سیگنال کنترلی (۴۷) تنها در لایه‌های مرزی (۴۸) به‌روز می‌گردد، بنابراین داریم:

$$u = \begin{cases} u^+ = -\frac{k_1}{k_2} x_2(t_c) - (P(x(t_c)) + \beta_0) \rightarrow x(t_c) \in S^+ \\ u^- = -\frac{k_1}{k_2} x_2(t_c) + (P(x(t_c)) + \beta_0) \rightarrow x(t_c) \in S^- \end{cases} \quad (49)$$

برای این سیستم، شرایط دستیابی در زمان محدود توسط معادلات (۲۶)،

(۲۷) و لم ۱ بدست می‌آید. کم کردن حد بالای دینامیک  $x_2$  در  $S_i^+$

از دینامیک سیستم بر روی سطح لغزش  $S_i$  نتیجه می‌دهد:

$$\Delta_{x_2} = \frac{-k_2 u^+ - h \theta}{k_1 - k_2 \theta} + \frac{k_1}{k_2} x_1, \quad (50)$$

همچنین از معادله (۳۶) مقدار  $h_{max}$  از نگاهت  $\Delta_{x_2}$  بر روی بردار  $K$

معین خواهد شد:

$$h_{max} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} h_{max} &= \frac{-k_2^2 u^+ - k_2 h_{max} \theta}{k_1 - k_2 \theta} + k_1 x_1 \\ &= \frac{-k_2^2 u^+}{k_1} + (k_1 - k_2 \theta) x_1 \end{aligned} \quad (52)$$

از معادله (۵۲) برای  $h_{max}$  خواهیم داشت:

$$h_{max} \leq \begin{cases} \frac{-k_2^2 u^+}{k_1} + (k_1 + k_2 a) x_1 & , x_1 > 0 \\ \frac{-k_2^2 u^+}{k_1} + (k_1 - k_2 a) x_1 & , x_1 < 0 \end{cases} \quad (53)$$

به همین صورت کمترین اندازه لایه مرزی  $S_i^-$  در سمت مقابل عبارت خواهد بود از:

$$h_{max}^* \leq \begin{cases} \frac{k_2^2 u^-}{k_1} - (k_1 - k_2 a) x_1 & , x_1 > 0 \\ \frac{k_2^2 u^-}{k_1} - (k_1 + k_2 a) x_1 & , x_1 < 0 \end{cases} \quad (54)$$

مقدار  $h_{max}$  و  $h_{max}^*$  را می‌توان به ازای حدود دینامیک  $c < x_1 < d$  بدست آورد که  $c$  و  $d$  بیان کننده حدود تغییرات متغیر حالت  $x_1$  است. ماکزیمم اندازه لایه متغیر مرزی  $h_u$  در هر مرحله، از مینیمم  $h_{max}$  و  $h_{max}^*$  در بازه تغییرات دینامیک‌های سیستم به دست می‌آید.

$$h_u = \min \left( h_{max}[c,d], h_{max}^*[c,d] \right) \text{ یعنی}$$

ماتریس سیستم می‌باشند. سیستم در فرم رگولار و دارای یک ورودی و

عدم قطعیت محدود است. همچنین داریم،  $K = [k_1, k_2]$  و

$x = [x_1, x_2]^T$  برای این سیستم باید دو مرحله طراحی سطح لغزش

و طراحی کنترل کننده برای دستیابی زمان محدود، انجام شود.

۱-۵ طراحی سطح لغزش

با فرض  $S$  به عنوان یک سطح لغزش خطی بر اساس معادله (۳)

داریم:

$$S = K x = 0, \quad (43)$$

از طرف دیگر، با استفاده از (۴) به عنوان تابع کاندید لیاپانوف بر

حساب  $x_1$  داریم،

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2, \quad (44)$$

همچنین، از معادله (۷) شرط لازم بردار  $K$  برای پایداری سطح لغزش

عبارت است از:

$$\frac{k_1}{k_2} > \theta, \quad (45)$$

بنابراین اگر  $\frac{k_1}{k_2} > a$  انتخاب شود (با توجه به این که  $|\theta| < a$ )، شرط

(۴۵) محقق خواهد شد که در اینجا  $K = [k_1, k_2] = [1.2 \ 1]$  انتخاب

می‌گردد. در نتیجه با حرکت بر روی سطح لغزش، دینامیک  $x_1$  به مبدا

همگرا خواهد شد. بنابراین با توجه به رابطه (۴۳)  $x_2 \rightarrow 0$ ، که

پایداری مجانبی سیستم را بر روی سطح لغزش تضمین می‌کند.

۲-۵ فاز دستیابی زمان محدود

با استفاده از معادله (۹)، در فاز دستیابی، تابع کاندید لیاپانوف بر

حساب متغیر لغزش ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$V(S) = \frac{1}{2} S^2 \rightarrow \dot{V}(S) = S \dot{S} < 0, \quad (46)$$

سپس، از معادله (۱۲)، سیگنال کنترل متغیر به صورت زیر طراحی می

شود:

$$\begin{cases} u = -\frac{k_1}{k_2} x_2 + v \\ v = -\beta \operatorname{sgn}(S), \\ \beta > P + \beta_0 \end{cases} \quad (47)$$

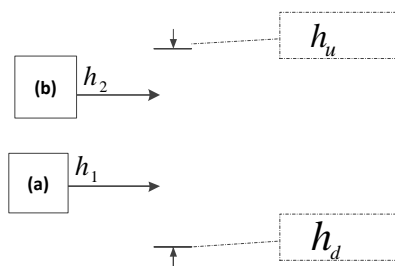
در اینجا،

$$\|K\| \|\Delta A\| \|x(t_c)\| + \|K_2 \delta_m\| + 2h \|K\| \|A_n\| \leq \max_{\theta, x} \left( \|k_1 \theta x_1\| \right) + 2h \|K\| \leq P(h)$$

بنابراین با  $\|A_n\| = 1$  و  $\beta_0 > 0$  داریم:

$P(h) \geq 1.2 \|\theta\| \|x(t_c)\| + 2h$  که در حقیقت تابع  $P(h)$  بر

حساب  $h$  محاسبه خواهد شد.



Sliding surface

شکل ۳: فاصله مجاز تغییرات  $h_i$

بر طبق آنچه که در بخش ۴-۱ بیان گردید (بخش ۳-۵ مثال عددی)، بیشترین فاصله لایه مرزی بر اساس لم ۲، تضمین می‌نماید که متغیرهای حالت با برخورد به لایه‌های مرزی از آن خارج نمی‌شوند. در واقع با روشی که در این مقاله ارائه گردیده است، سیستم با کاهش فاصله لایه مرزی (در هر به‌روز رسانی) متغیرهای حالت را با خود به سمت سطح لغزش هدایت می‌کند و پایداری سیستم را نتیجه می‌دهد.

کمترین فاصله لایه مرزی بر اساس بخش ۴-۲ (بخش ۴-۵ مثال عددی)، تضمین می‌نماید که فاصله زمانی بین دو به‌روز رسانی متوالی از  $t_{min}$  تعیین شده کمتر نشود. با رعایت کمترین فاصله لایه مرزی از رخداد نقطه تجمع (پدیده مخرب Zeno) در درخواست‌های به‌روز رسانی، اجتناب می‌گردد.

اما در مورد اثر پارامتر  $h$  در رفتار سیستم حلقه بسته، با انتخاب پارامتر  $h$  نزدیک به باند بالا، فاصله زمانی به‌روز رسانی‌ها به قیمت کاهش سرعت همگرایی سیستم، افزایش می‌یابد. اما اگر مقدار پارامتر  $h$  نزدیک به باند پایین انتخاب گردد، سرعت همگرایی سیستم افزایش خواهد یافت، ولی فاصله زمانی به‌روز رسانی‌ها کاهش می‌یابد. این مبحث به طور کمی در بخش نتایج عددی نشان داده می‌شود.

### ۶-۵ نتایج عددی

در این بخش، سیستم (۴۲) با ماتریس سیستم و ماتریس ورودی داده شده و حد بالای عدم قطعیت سیستم برابر با  $a = 1$  فرض شده است. بردار  $K$  جهت جبران عدم قطعیت در دینامیک  $x_1$  است که باید در (۴۵) صادق باشد. به عنوان مثال بردار  $K$  می‌تواند به صورت،  $K = [1.2 \ 1]$  انتخاب شود. لایه مرزی بر اساس معادلات (۵۴) و (۵۵) عبارتند از:

$$h_{max} \leq \begin{cases} \frac{-u^+}{1.2} + (2.2)x_1 & , x_1 > 0 \\ \frac{-u^+}{1.2} + (0.2)x_1 & , x_1 < 0 \end{cases} \quad (61)$$

و

### ۴-۵ محاسبه کمترین اندازه لایه مرزی

کمترین فاصله لایه مرزی از سطح لغزش بر طبق معادله (۳۹) بدست

می‌آید،

$$x(t) = e^{At} x(t_c) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau u^-, \quad (55)$$

که در اینجا  $e^{At}$  ماتریس انتقال حالت سیستم است، و داریم:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & \frac{-1+e^{\theta t}}{\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

در  $S^- \in x(t_c)$  معادله (۵۵) تبدیل می‌شود به،

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & \frac{-1+e^{\theta t}}{\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_c) \\ x_2(t_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-t}{\theta} + \frac{e^{\theta t}}{\theta^2} \\ t \end{bmatrix} u^-, \quad (57)$$

حال فرض کنید که متغیرهای حالت سیستم از لایه مرزی  $S_i^-$  به لایه  $S_i^+$  در یک حداقل زمان  $t_{min}$  منتقل خواهند شد. مکان متغیرهای حالت سیستم بعد از طی شدن  $t_{min}$  بر اساس معادله (۵۷) عبارت خواهند بود از:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_{min}) \\ x_2(t_{min}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta t_{min}} x_1(t_c) - \frac{x_2(t_c)}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}} x_2(t_c)}{\theta} - \frac{t_{min} u^-}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}} u^-}{\theta^2} \\ x_2(t_c) + t_{min} u^- \end{bmatrix}, \quad (58)$$

بعد از طی شدن این زمان، حالت سیستم در  $S^+ \in x(t_{min})$  قرار دارد.

با جایگزینی (۵۸) در قسمت  $S^+$  معادله (۴۸) داریم:

$$k_1 \left( e^{\theta t_{min}} x_1(t_c) - \frac{x_2(t_c)}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}} x_2(t_c)}{\theta} - \frac{t_{min} u^-}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}} u^-}{\theta^2} \right) + k_2 (x_2(t_c) + t_{min} u^-) = 2h, \quad (59)$$

در نتیجه با انتخاب  $h_d = \max h$ ، حد پایین مجاز تغییرات  $h$  به دست

می‌آید.

در نهایت در روش پیشنهادی، به منظور نزدیکتر شدن به نقطه تعادل، مقدار  $h$  می‌تواند به تدریج کاهش یابد (اما باید همواره در بازه زیر انتخاب شود):

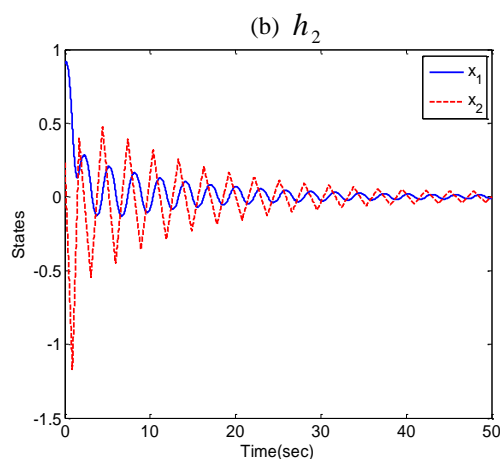
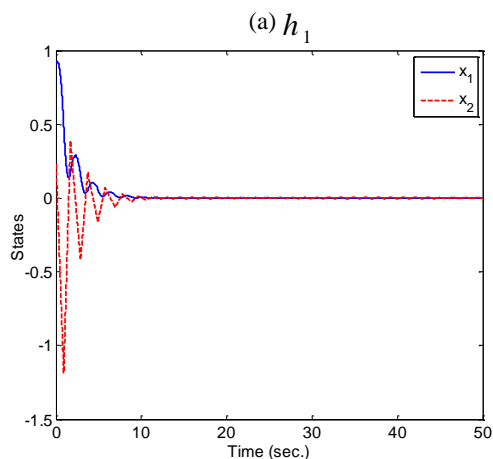
$$h_d < h < h_u, \quad (60)$$

به این ترتیب مقدار  $h$  وابسته به فضای حالت سیستم و اندازه سیگنال کنترل خواهد بود، که تضمین می‌کند که حد پایین فاصله زمانی به‌روز رسانی رعایت شود.

### ۵-۵ آنالیز تاثیر تغییر مقدار $h$ در بازه مجاز

همان گونه که در شکل ۳ دیده می‌شود، می‌توان مقدار  $h$  را در

باند مجاز انتخاب نمود:



شکل ۴: پاسخ زمانی سیستم کنترل

شکل ۵ تغییرات  $h_1, h_2$  را در بازه مجاز نمایش می‌دهد که همواره در محدوده  $h_d < h < h_u$  تغییر می‌کنند. حد بالای  $h_u$  بر اساس معادلات (۵۳) و (۵۴) محاسبه شده‌اند و مقدار  $h_d$  بر اساس (۵۹) بدست آمده است. همانگونه که شکل ۵(a) دیده می‌شود وقتی مقدار  $h$  نزدیک به حد پایین است، در این صورت متغیرهای حالت سیستم، همگرایی سریعتری دارند ولی فاصله زمانی نمونه برداری‌ها به صورتی که در شکل ۶ نشان داده شده است، کاهش می‌یابد.

با انتخاب  $h$  در مقدار مجاز ارائه شده در (۶۰) می‌توان بار پردازشی پرسوسور و یا پهنای باند شبکه ناشی از پروسه کنترلی را با افزایش فاصله زمانی بین به‌روز رسانی‌ها تنظیم کرد.

$$h_{max}^* \leq \begin{cases} \frac{u^-}{1.2} - (0.2)x_1 & , x_1 > 0 \\ \frac{u^-}{1.2} - (2.2)x_1 & , x_1 < 0 \end{cases} \quad (62)$$

مقدار  $h_u$  عبارت است از  $h_u = \min(h_{max}, h_{max}^*)$ . در صورتی که پارامتر  $h$  کوچکتر از  $h_u$  انتخاب گردد، متغیرهای حالت، درون لایه مرزی باقی می‌مانند. در این شبیه سازی مقدار زمان مینیمم عبارت است از  $t_{min} = 0.9(\text{sec.})$ . در صورتی که فاصله لایه مرزی بر اساس (۶۰) انتخاب گردد، فاصله زمانی به‌روز رسانی از این مقدار کمتر نخواهد شد.

همچنین برای سیگنال کنترلی داریم:

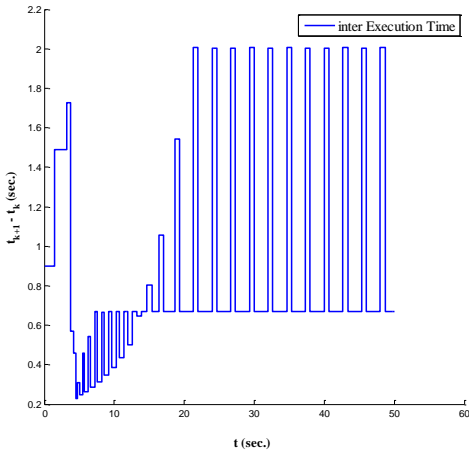
$$u = \begin{cases} u^+ = -1.2x_2(t_c) - (1.2|x_1(t_c)| + 2h + 0.004) \rightarrow x(t_c) \in S^+ \\ u^- = -1.2x_2(t_c) + (1.2|x_1(t_c)| + 2h + 0.004) \rightarrow x(t_c) \in S^- \end{cases} \quad (63)$$

این سیستم برای دو مقدار  $h$  با مقادیر  $h = h_{min} + \frac{1}{3}(h_u - h_{min})$  و

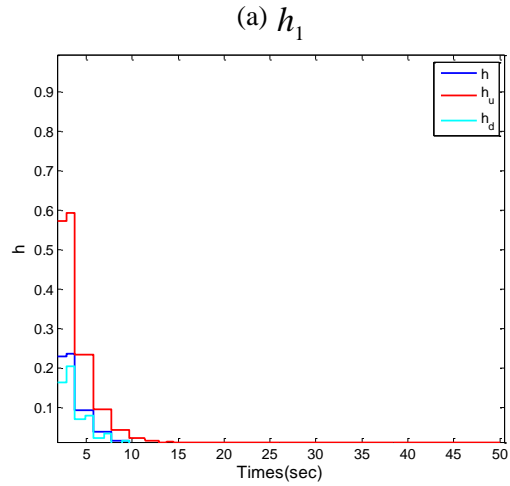
$h = h_{min} + \frac{4}{5}(h_u - h_{min})$  شبیه سازی شده است ( $h_1 < h_2$ ).

شکل ۴ پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم را برای شرایط اولیه  $x(0) = [0.9 \ 0.25]$  نشان می‌دهد. همان گونه که نشان داده شده کاهش

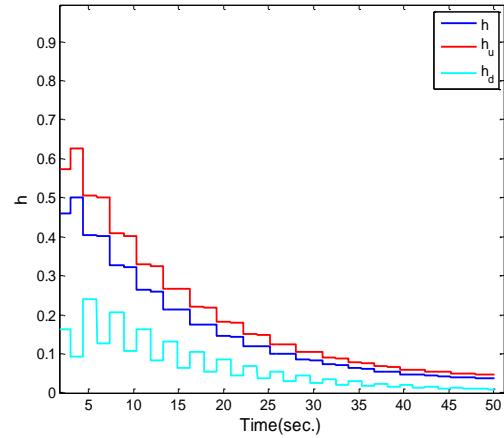
سریعتر لایه مرزی ( $h$  کوچکتر) همگرایی سریعتر متغیرهای حالت را نتیجه خواهد داد.



شکل ۷: کاهش  $h$  خارج از اندازه مجاز

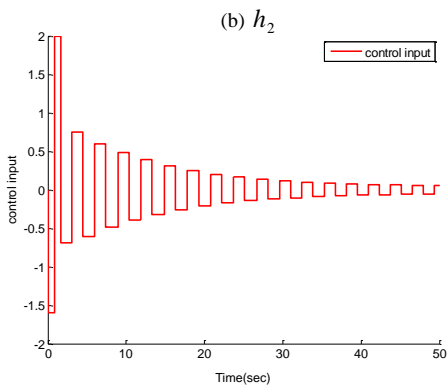
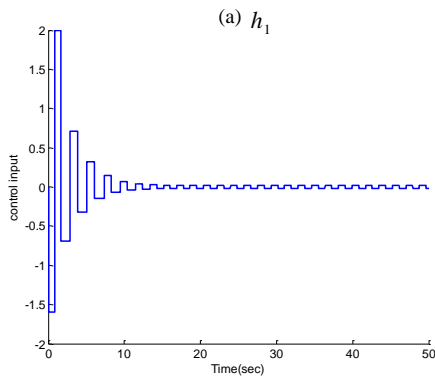


(b)  $h_2$

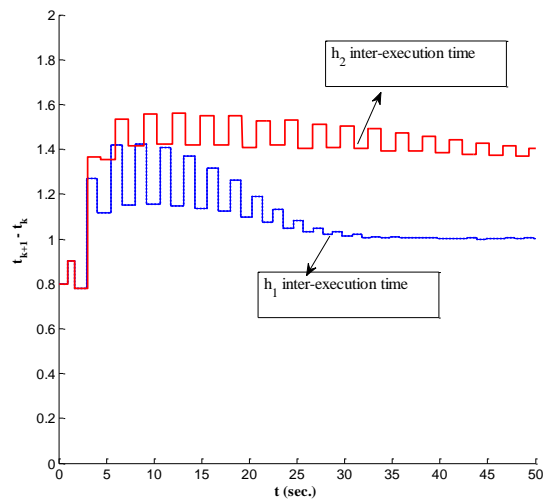


شکل ۵: لایه‌های مرزی (a)  $h=h_1$  (b)  $h=h_2$  ( $h_1 < h_2$ )

شکل ۸ سیگنال کنترل ورودی را در دو مقدار انتخابی  $h$  نشان می‌دهد، به صورتی که با حرکت سیستم به سمت نقطه تعادل، دامنه سیگنال کاهش یافته ولی دچار چترینگ با فرکانس بالا نمی‌شود.



شکل ۸: سیگنال کنترل در ثانیه ۵ برای دو مقدار (a)  $h=h_1$  (b)  $h=h_2$  به ترتیب برابر است با ۰٫۱ و ۰٫۴



شکل ۶: فاصله زمانی به‌روز رسانی‌های متوالی

اگر پارامتر  $h$  مستقل از مقدار کنترل ورودی و مکان فضای حالت کاهش یابد امکان نقض حد پایین به‌روز رسانی وجود دارد (شکل ۷ را ببینید).

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله جهت تنظیم و به حداقل رساندن فرکانس به‌روز رسانی سیگنال کنترلی، با پرهیز از چترینگ فرکانس بالا، یک رهیافت از

- [6] X. Chen and F. Hao, "Periodic event-triggered state-feedback and output-feedback control for linear systems," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol.13, no.4, pp.1-9, 2015.
- [7] سجاد موسی پور، قاسم علیزاده، سهراب خان محمدی، «طراحی قانون هدایت بهینه مقاوم سه بعدی برای موشک با استفاده از کنترل مد لغزشی و کنترل SDR»، مجله کنترل، دوره ۶، شماره ۲، صفحات ۵۵-۶۴، ۱۳۹۱.
- [8] وحید بهنام گل، ایمان محمد زمان، احمد رضا ولی، نعمت ا... قهرمانی، «طراحی قانون هدایت با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه دوم زمان محدود»، مجله کنترل، دوره ۵، شماره ۳، صفحات ۳۶-۴۴، ۱۳۹۰.
- [9] C. Edwards and S. K. Spurgeons, "Sliding mode control: theory and applications," *CRC Press, Taylor and Francis Group*, 1998.
- [10] K. D. Young, V. Utkin and U. Ozguner, "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.7, no.3, pp. 328-342, May 1992.
- [11] H. Lee, V. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Annual Reviews in Control*, vol.31, no.2, pp. 179-188, 2007.
- [12] P. Marti, M. Velasco, A. Camacho, E. X. Martin, J. M. Fuertes, "Networked sliding mode control of the double integrator system using the event-driven self-triggered approach," In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, 2011.
- [13] A. K. Behera, et al., "Event-triggered sliding mode control for robust stabilization of linear multivariable systems," *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, Springer International Publishing, pp. 155-175, 2015.
- [14] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, "Decentralized event-triggered sliding mode control," In *the proceedings of 10th Asian Control conference (ASCC)*, pp. 1-5, May 2015.
- [15] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, "Event-triggered sliding mode control for a class of nonlinear systems," *international Journal of control*, vol.89, no.9, pp. 1916-1931, 2016.
- [16] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol.38, no.3, pp. 751-766. 2000.
- [17] L. Leithold, "The Calculus with Analytic Geometry". *Harper & Row*, Vol.1. 1972
- ترکیب کنترل مد لغزشی و روش تحریک-رویداد ارائه گردید. این روش ترکیبی برای سیستم‌های کنترل خطی چند ورودی دارای عدم قطعیت در ماتریس سیستم و اغتشاش سازگار با کانال ورودی، فرمول بندی شد. با این روش فرکانس و دامنه چترینگ بهبود یافت و سیگنال کنترل و لایه مرزی، متناسب با مکان فضای حالت کاهش یافت؛ به صورتی که حتی در مجاورت نقطه تعادل فرکانس نمونه برداری افزایش نیافته و در اندازه سیگنال کنترلی نیز صرفه جویی شده است. دامنه چرخه حدی القاء شده از لایه مرزی با همگرایی لایه‌ها به سطح لغزش کاهش یافت، درحالی که حد پایین فاصله نمونه برداری حفظ شود. همچنین در این مقاله یک باند مجاز برای کاهش فاصله لایه مرزی ارائه گردید، که با رعایت حد بالای این باند مجاز، متغیرهای حالت از لایه مرزی خارج نمی‌شوند. بعلاوه با رعایت حد پایین این باند مجاز، عدم رخداد نقطه تجمع در درخواست به‌روز رسانی‌ها تضمین می‌گردد. نتایج شبیه سازی‌ها کارایی این روش را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شبیه سازی نشان داده شد، متغیرهای حالت می‌تواند به اندازه قابل قبولی، تا جایی که اغتشاشات محو‌نشده‌ی اجازه دهند، به نقطه تعادل نزدیک شوند.

## مراجع

- [1] P. Tabuada, "Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp.1680-1685.2007.
- [2] M. Mazo, A. Anta and P. Tabuada, "An ISS self-triggered implementation of linear controllers," *Automatica*, vol. 46, no.8, pp. 1310-1314, 2010.
- [3] M. Velasco, J. M. Fuertes, C. Lin, P.Marti and S.Brandt, "A control approach to bandwidth management in networked control systems," In: *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2004)*, pp.2343-2348.2004.
- [4] R. Postoyan, P.Tabuada, D. Nešić and A. Anta, "Event-triggered and self-triggered stabilization of distributed networked control systems," In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 2011)*, pp. 2565-2570.2011.
- [5] X. Wang and M. D. Lemmon, "Asymptotic stability in distributed event-triggered networked control systems with delays," In: *American Control Conference (ACC 2010)*, pp. 1362-1367, 2010.