مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۲۴-۱۳

کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش تحریک-رویداد در سیستم‌های خطی دارای اغتشاش و نایقینی

فرزاد زارعی [۱]، محمد حسین شفیعی [۲]، اکبر رهیده [۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، farzadzarei@gmail.com

[۲] دانشیار ، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، shafiei@sutech.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه قدرت، دانشگاه صنعتی شیراز، rahide@sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۲۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۵/۵)

چکیده: در این مقاله پیاده سازی روش تحریک-رویداد[۱] بر روی کنترل کننده مد لغزشی[۲] در سیستمهای خطی چند ورودی دارای اغتشاش سازگار و عدم قطعیت ساختاری در ماتریس حالت سیستم ارائه می‌گردد. روش تحریک-رویداد یک استراتژی زمانبندی برای افزایش فاصله به‌روز رسانی‌ها سیگنال کنترلی در حلقه فیدبک و در عین حال حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترلی است. در صورتی که سیگنال کنترلی یک سیستم پیوسته، از طریق یک سیستم دیجیتال محاسبه و یا از طریق شبکه به ورودی محرک اعمال گردد، افزایش فاصله نمونه برداری‌ها، کارایی کلی سیستم دیجیتال و یا پهنای باند شبکه را افزایش می‌دهد. هدف این مقاله ترکیب روش کنترل مد لغزشی با استراتژی تحریک-رویداد در راستای افزایش کارایی کلی سیستم دیجیتال و در عین حال حفظ پایداری و کارایی سیستم کنترل است. همچنین برای رفع پدیده چترینگ ناشی از کنترل مد لغزشی، راهکاری بر مبنای استفاده از لایه‌های مرزی[۳] پویا ارائه می‌شود. اما به کارگیری لایه مرزی باعث به وجود آمدن چرخه حدی ناخواسته در مسیر حالت می‌شود. در این مقاله دامنه چرخه حدی با طراحی لایه مرزی و قانون کنترلی پویا و متناسب با فضای حالت به صورتی کاهش می‌یابد، که عدم رخداد نقطه تجمع[۴] درخواست به روز رسانی نیز تضمین گردد. نتایج شبیه سازی یک سیستم خطی با عدم قطعیت در ماتریس سیستم، نشان دهنده کارایی ترکیب روش تحریک-رویداد با کنترل مد لغزشی با رویکرد لایه مرزی است.

کلمات کلیدی: کنترل مد لغزشی، لایه مرزی، روش تحریک-رویداد ، قانون تحریک[۵]، نقطه تجمع در به‌روز رسانی، لایه‌های مرزی.

Event-Triggered based Sliding Mode Control of Uncertain Linear Systems

Farzad Zarei, Mohammad Hossein Shafiei, Akbar Rahideh

Abstract: This paper presents the implementation of the event-triggered technique on sliding mode control (SMC) method in the case of linear systems with bounded uncertainty. Event-triggered technique is a scheduling strategy to reduce the number of control updates in a feedback loop. The Main contribution of this paper is to implement event-triggered SMC on the linear multi-input linear systems with parameter uncertainties. Although the chattering is inevitable in SMC, to tackle this phenomenon, hysteresis bounds are offered to reduce the frequency of control updates; nevertheless it induces a limit cycle. By updating control law at hysteresis boundaries, as the event-triggering rule, system finally ends to limit cycle. Another contribution of this paper is to reduce the amplitude of this limit cycle according to the variable control input, while guaranteeing no request

[۱] Event-Triggered

[۲] Sliding Mode Control

[۳] Hysteresis bands

[۴] Accumulation Point or Zeno Behavior

[۵] Triggering Rule

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

for successive control updates too. In this paper by properly designing dynamic control law and hysteresis bands based on state trajectory, as the system moves towards the stable point, its amplitude decreases and the limit cycle amplitude fades accordingly. This method is illustrated by an example of linear system with uncertainty in the system matrix. Simulation results depict the applicability of SMC combination with the event-triggered technique.

Keywords: Sliding mode control, hysteresis band, event-triggered method, inter-execution time, triggering rule, accumulation point.

۱- مقدمه

کاربرد سیستم‌های کنترل دیجیتال پیشرفته، و در عین حال عملکرد چند منظوره پردازنده ها درحال گسترش است. در اکثر کنترل کننده‌های فیدبک حالت دیجیتال، سیگنال کنترل به صورت گسسته و با پروسسورهای جاسازی شده در مسیر فیدبک، محاسبه و به محرک اعمال می‌گردد. در واقع در فاصله زمانی بین نمونه برداری‌ها، سیستم به صورت حلقه باز کنترل می‌گردد و سیگنال کنترلی توسط مدار نگهدارنده مرتبه صفر[۱] ثابت می‌ماند، تا اینکه قانون تحریک (قانون تریگر) دستور به‌روز رسانی سیگنال کنترلی را صادر کند. این پردازنده دیجیتال واقع در مسیر فیدبک، علاوه بر وظیفه کنترلی، قابلیت انجام چندین وظیفه را به صورت همزمان دارد. قابلیت اجرای وظایف جانبی برروی یک پروسسور در کنار کامل کردن حلقه کنترلی، هزینه پیاده سازی سخت افزاری سیستم‌های کنترلی پیچیده را کاهش می‌دهد [۱]. کاهش تعداد به‌روز رسانی‌های سیگنال کنترل منجر به زیاد شدن فاصله زمانی نمونه برداری و درنتیجه آزاد شدن منابع محاسباتی پردازشگر در مدارات یکپارچه[۲] و کاهش پهنای باند اشغال شده شبکه در سیستم‌های کنترل گسترده می‌شود [۵-۲].

در کنترل کننده‌های دیجیتال اولیه، از روش نمونه برداری پریودیک با فاصله زمانی ثابت استفاده می‌شد. معمولاً در این روش فاصله زمانی بین نمونه برداری‌ها از پیش معین و برای بدترین شرایط کنترلی طراحی می‌شود. افزایش محافظه کاری بدیهی‌ترین مشکل این انتخاب است. بنابراین در نسل بعدی کنترل کننده‌های فیدبکی، روش تحریک غیر پریودیک ارائه شد. روش تحریک-رویداد یکی از این روش‌های غیر پریودیک می‌باشد که عمدتاً زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که سنسورها و پروسسور تنظیم کننده زمان نمونه برداری، در کنار هم قرار دارند. در روش تحریک-رویداد، زمانی سیگنال کنترل به‌روز رسانی می‌گردد که یک شرط خاص برآورده شود (رویداد)، به صورتی که پایداری و کارایی سیستم کنترلی حلقه بسته تضمین گردد [۱]. معمولاً برای آنالیز پایداری در روش تحریک-رویداد از روش‌های مبتنی بر لیاپانوف استفاده می‌شود [۶].

از طرف دیگر، روش کنترل مد لغزشی، یک رهیافت ساده و مقاوم در کنترل سیستم‌های خطی و غیر خطی با اغتشاشات دارای حد بالای مشخص است [۷،۸]. این روش کنترلی در دو گام اساسی انتخاب سطح لغزش و طراحی کنترل کننده برای دستیابی زمان محدود به سطح لغزش طراحی می‌شود [۹]. در عمل سیستم بر روی سطح لغزش نمی‌ماند و پدیده چترینگ (تغییرات فرکانس بالا حول سطح لغزش) را به دلیل عدم قطعیت‌های سیستم تجربه می‌نماید [۱۰]. پدیده چترینگ در سیستم‌های یکپارچه باعث فرومانندگی پروسسور در انجام وظایفش و درنتیجه ناپایداری سیستم کنترلی شده و در سیستم‌های کنترلی تحت شبکه، پهنای باند کنترلی زیادی را به شبکه تحمیل می‌نماید. ایده استفاده از راهکار لایه مرزی در کنترل مد لغزشی، برای کاهش پدیده چترینگ در [۱۱] مطرح شد. از این‌رو یک ترکیب از کنترل مد لغزشی با روش تحریک-رویداد با بهره‌مندی از لایه مرزی به عنوان قانون تحریک قابل ارائه است [۱۲]. روش ارائه شده در این مرجع تنها برای یک سیستم با یک ورودی و دو متغیر حالت قابل کاربرد است و عمومیت لازم را ندارد. بعلاوه هرچند در این رویکرد فرکانس چترینگ تا حدودی کاهش می‌یابد، اما مشکل دامنه زیاد چترینگ سیگنال کنترلی همچنان باقی است. همچنین متغیرهای حالت سیستم وارد یک چرخه حدی ثابت حول نقطه تعادل می‌شوند و درصورت کاهش فاصله لایه مرزی برای کاهش دامنه چترینگ، فرکانس نوسانات به شدت افزایش می‌یابد.

رویکرد دیگری در مورد کنترل مد لغزشی بر اساس روش تحریک-رویداد برای سیستم کنترل خطی در [۱۳] ارائه شده است. همان نویسنده در [۱۴] این رویکرد را برای سیستم‌های تحت شبکه بسط داده است. همچنین از این تکنیک برای کنترل یک سیستم غیر خطی در [۱۵] نیز استفاده شده است. در واقع در تمامی آنها بر اساس قرار دادن خطای متغیر حالت در یک محدوده معین همانند روش نمونه برداری لبزگ[۳] استفاده شده است. در روش این مراجع یک بازه لغزش در اطراف سطح لغزش تعریف شده و متغیرهای حالت سیستم به این بازه لغزشی همگرا می‌شود. ولی دامنه و فرکانس سیگنال کنترلی در نزدیکی سطح لغزش به دلیل چترینگ همچنان زیاد است. این مسئله موجب فرکانس نمونه برداری زیادی می‌شود که با اهداف روش تحریک-رویداد که همان کاهش تعداد به روز رسانی است، در تناقض است.

در اکثر مقالات هدف تنها رساندن متغیرهای حالت به نزدیکی سطح لغزش است و به وضعیت سیستم در نزدیکی سطح لغزش که با پدیده

[1] Zero order hold circuit (ZOH)

[2] Integrated Systems

[3] Lebesgue Sampling

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

چترینگ مواجه است، چندان پرداخته نمی‌شود. در این مقاله، روش تحریک-رویداد بر روی کنترل کننده مد لغزشی در سیستمهای خطی چند ورودی دارای اعتشاش سازگار و عدم قطعیت در ماتریس سیستم به نحوی ارائه می‌گردد که بتوان متغیرهای حالت سیستم را با دامنه و فرکانس چترینگ بسیار کمتر از روش های مذکور، بر روی سطح لغزش قرار داد. ایده کلی روش پیشنهادی، ایجاد یک وابستگی بین سیگنال کنترلی، متغیرهای حالت و لایه‌های مرزی است به نحوی که بتوان لایه-های مرزی را به سطح لغزش نزدیک کرد، در حالی که در درخواست به‌روز رسانی‌ها نقطه تجمع (پدیده Zeno) ایجاد نشود. بنابراین در این مقاله با ایجاد یک رابطه متقابل بین سیگنال کنترل، بازه لغزشی و متغیرهای حالت سیستم، میزان چترینگ کاهش خواهد می‌یابد که دامنه آن محدود به عدم قطعیت‌های سیستم است.

سهم دیگر این مقاله در پیشبرد این روش، معرفی و طراحی یک بازه مجاز برای تغییرات لایه مرزی است. که اگر لایه‌های مرزی مستقل از این بازه (که تابعی از مکان متغیرهای حالت و اندازه سیگنال کنترلی است)، کاهش یابد، امکان بروز نقطه تجمع (درخواست پیاپی به‌روز رسانی در یک فاصله زمانی کوچک) وجود دارد. از طرف دیگر، حد بالای فاصله لایه مرزی تضمین می‌کند که متغیرهای حالت با رسیدن به لایه‌های مرزی از آنها خارج نشوند. سیستم دیجیتال می‌تواند بر اساس میزان بار تحمیل شده از سایر وظایف، فاصله لایه مرزی را در بازه تعیین شده تنظیم نماید. نکته مهم دیگر در کاربرد روش ارائه شده در این مقاله این است که وضعیت سیستم در درون و روی لایه مرزی با وجود عدم قطعیت موجود کاملاً کنترل شده و گذر متغیرهای حالت از یک مرز به مرز دیگر با سیکنال کنترلی طراحی شده تضمین می‌گردد. بعلاوه در اینجا پیاده سازی روش رویداد-تحریک برای سیستم‌های با بیش از دو متغیر حالت و چند ورودی توسعه داده شده است.

ادامه این مقاله به شکل زیر سازمان دهی شده است: در بخش ۲، تعاریف اولیه مورد نیاز ارائه می‌شود. در بخش ۳، گامهای اصلی کنترل مد لغزشی شامل فاز لغزش و فاز رسیدن به سطح لغزش در زمان محدود شرح داده می‌شود. در بخش ۴، حدود بالا و پایین لایه مرزی برای یک سیستم چند ورودی محاسبه می‌شود. در بخش ۵، روش پیشنهادی بر روی یک مثال پیاده سازی و در نهایت در بخش ۶ نتیجه‌گیری این مقاله ارائه می‌شود.

۲- اصول اولیه و بیان مسئله

سیستم خطی ذیل را در فرم رگولار در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_1\,\eta + A_2\,\xi,\\ \dot{\xi} &= A_3\,\eta + A_4\,\xi + (u+\delta_m),\end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن $u \in R^r$ بردار ورودی سیستم است و ابعاد ماتریسهای سیستم عبارتند از: $A_1 \in R^{(n-r)\times(n-r)}$ ، $A_2 \in R^{(n-r)\times r}$ ، $A_3 \in R^{r\times(n-r)}$ و $A_4 \in R^{r\times r}$. برای هر یک از این ماتریسها فرض می‌شود که ، $A_j = A_{jn} + \Delta A_j$, for $j = 1,..,4$. ماتریس A_{jn} مقدار نامی و ΔA_j عدم قطعیت ماتریس سیستم با فرض $\|\Delta A_j\| < \mu_j$ است. همچنین، $\eta \in R^{(n-r)}$ و $\xi \in R^r$ متغیرهای حالت سیستم هستند و $x = \begin{bmatrix}\eta\\ \xi\end{bmatrix}$ برای ارجاع به کل متغیرهای حالت سیستم استفاده می‌شود. در نهایت $\delta_m \in R^r$ برای توصیف سیگنال اغتشاش در کانال ورودی به کار می‌رود و برای مقدار γ مثبت داریم، $\|\delta_m\| < \gamma$.

تعریف ۱. یک سیستم دارای پایداری زمان محدود است، اگر متغیرهای حالت آن، در یک زمان محدود به حالت ماندگار خود برسند.

در لم زیر شرط کافی برای دستیابی به پایداری زمان محدود متغیرهای حالت سیستم به سطح لغزش، آورده شده است:

لم ۱ [۱۶]. یک سیستم کنترل با متغیر حالت x دارای پایداری زمان محدود به سطح لغزش یا نقطه تعادل است، اگر برای یک تابع لیاپانوف مثبت معین $V(x)$، نامعادله زیر برقرار باشد:

$$\dot{V} < -cV^{\alpha}, \qquad (۲)$$

برای $c > 0$ &$0 < \alpha < 1$.□

۳- کنترل مد لغزشی

کنترل مد لغزشی در دو گام اساسی طراحی می‌شود؛ فاز لغزش و فاز دستیابی به سطح لغزش. در فاز لغزش، یک سطح لغزش به صورتی طراحی می‌گردد که اگر سیستم بر روی آن قرار داشته باشد، پایداری مجانبی سیستم تضمین شود. در فاز دستیابی به سطح لغزش، سیگنال کنترلی به نحوی طراحی می‌شود که متغیرهای حالت سیستم را در زمان محدود و با حداقل تاثیر از عدم قطعیت‌ها به سطح لغزش همگرا سازد.

۳-۱ فاز لغزشی

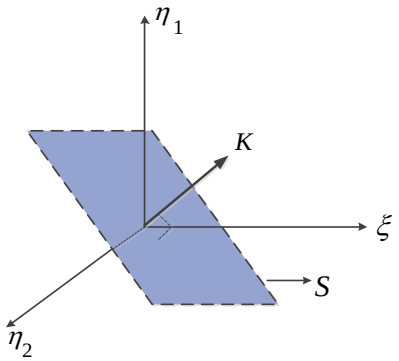
در این فاز فرض می‌شود که متغیرهای حالت سیستم بر روی سطح لغزش قرار دارند. از این رو طراحی سطح لغزش باید به صورتی انجام

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

شود که معادلات سیستم بر روی سطح لغزش، به مبدا همگرا شود. فرض کنید سطح لغزش به صورت زیر تعریف شود:

$$S = K_1\eta + K_2\xi = 0, \quad (۳)$$

اگر حالتهای سیستم بر روی سطح لغزش قرار گیرند، خواهیم داشت: $\xi = -K_2^{-1}K_1\eta$. در اینجا S شامل r (تعداد ورودی‌ها) سطح لغزش خطی به صورت، $S = \left[S_i\right]_{r\times 1}$, $i = 1,..,r$ است. ضرائب سطح لغزش، $K_1 \in R^{r\times(n-r)}$ ، $K_2 \in R^{r\times(r)}$ می‌باشند که در اینجا فرض می‌شود که ماتریس K_2 معکوس پذیر باشد. در معادله سطح لغزش iام (S_i) بردار $K_i = [K_{i1}, K_{i2}]$ بردار نرمال صفحه عمود بر صفحه S_i است [۱۷]. در این بردار، K_{i1}, K_{i2} به ترتیب سطرهای iام ماتریس های K_1, K_2 هستند. برای مثال اگر در معادله (۱) داشته باشیم: $r = 1$ و $n = 3$، در این حالت $K_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ و $K_2 \in R$، و معادله سطح لغزش برابر $S = k_1\eta_1 + k_2\eta_1 + K_2\xi = 0$ خواهد بود. در این مثال بردار $K = [k_1\ k_2\ K_2]$ بردار نرمال صفحه است (شکل ۱).



شکل ۱: سطح لغزش S و بردار نرمال عمود بر صفحه

به منظور پایداری مجانبی معادلات سیستم بر روی سطح لغزش، باید ماتریس K به نحو مناسبی تعیین گردد. بدین منظور اگر تابع کاندید لیاپانوف به صورت،

$$V(\eta) = \frac{1}{2}\eta^T\eta, \quad (۴)$$

انتخاب شود، با توجه به اینکه بر روی سطح لغزش داریم: $\xi = -K_2^{-1}K_1\eta$، با جایگزینی آن در (۱) معادلات دینامیکی سیستم بر روی سطح لغزش برابر خواهد بود با:

$$\dot{\eta} = A_1\eta - A_2K_2^{-1}K_1\eta, \quad (۵)$$

بعلاوه مشتق زمانی تابع لیاپانوف عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\eta) &= \eta^T\dot{\eta} < 0 \\ &= \eta^T\left(A_1 - A_2K_2^{-1}K_1\right)\eta < 0.\end{aligned} \quad (۶)$$

مشتق این تابع لیاپانوف منفی معین است، اگر داشته باشیم،

$$A_1 - A_2K_2^{-1}K_1 < 0, \quad (۷)$$

از این‌رو، اگر بردار K به نحوی انتخاب شود که نامساوی (۷) را برآورده سازد، دینامیک η بر روی سطوح لغزش دارای پایداری مجانبی است. یعنی،

$$\eta \to 0. \quad (۸)$$

از طرف دیگر، با توجه به این که بر روی سطح لغزش داریم، $\xi = -K_2^{-1}K_1\eta$، در نتیجه معادله (۸) پایداری مجانبی دینامیک ξ را نیز تضمین می‌کند.

۳-۲ فاز دستیابی

در فاز دستیابی، قانون کنترلی[۱] به صورتی طراحی می‌گردد که متغیرهای حالت سیستم در حضور اغتشاش سازگار (matched) یعنی اغتشاش موجود در کانال ورودی و همچنین عدم قطعیت‌های ناشی از نایقینی در ماتریسهای حالت سیستم، در زمان محدود به سطوح لغزش همگرا گردند. کاندید تابع لیانوف برای طراحی سیگنال کنترلی در این فاز عبارت است از،

$$\begin{aligned}&V(S) = \frac{1}{2}S^TS \ \to \\ &\dot{V}(S) = S^T\dot{S} < 0,\end{aligned} \quad (۹)$$

بنابراین ابتدا باید $\dot{S}$ محاسبه شود، داریم:

$$\dot{S} = K_1\dot{\eta} + K_2\dot{\xi} \quad (۱۰)$$

با جایگزینی معادلات سیستم از (۱) در (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= K_1\left[A_1, A_2\right]\begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} + K_2\left[A_3, A_4\right]\begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} \\ &+K_2\left(u+\delta_m\right),\end{aligned} \quad (۱۱)$$

اگر قانون کنترلی به شکل زیر انتخاب شود،

$$u = K_2^{-1}\left(-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} + \nu\right), \quad (۱۲)$$

آنگاه معادله (۱۱) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\dot{S} = \left(\Delta(x) + \nu\right), \quad (۱۳)$$

که در آن، $\Delta(x) = \left[\Delta_i\right]_{r\times 1} = \begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta A_1 & \Delta A_2 \\ \Delta A_3 & \Delta A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta \\ \xi\end{bmatrix} + K_2\delta_m$ و $\nu = \left[\nu_i\right]_{r\times 1}$, for $i = 1,..,r$. برای غلبه بر عدم قطعیت Δ_i و اغتشاش δ_m تابع ν_i به صورت،

$$\nu_i = -\beta_i\, sgn\left(S_i\right), \quad (۱۴)$$

انتخاب می‌گردد. مقدار β_i در این رابطه در بخش ۴ مقاله و بر اساس معادلات (۲۴-۲۲) به گونه‌ای انتخاب می‌گردد که عدم قطعیت‌های سیستم، اغتشاش کانال ورودی و خطای ناشی از اندازه گیری متغیر حالت به روش تحریک-رویداد را جبران نماید.

[۱] Control Law

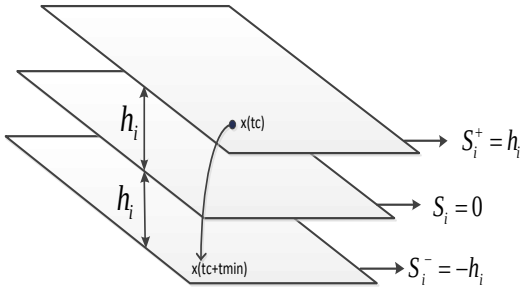
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

٤- لایه مرزی

برای هر سطح لغزش S_i دو لایه مرزی موازی و قرینه نسبت به سطح لغزش، به عنوان معیار به روز رسانی (شرط تریگر) در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. این دو سطح موازی به صورت،

$$\begin{aligned} S_i^+ &= S_i - h_i = 0 \\ S_i^- &= S_i + h_i = 0 \end{aligned}, \qquad (۱۵)$$

و با پارامتر $h_i > 0$ قابل تعریف می‌باشند. سیگنال کنترلی u_i بر روی S_i^+ و S_i^- که به ترتیب لایه‌های موازی بالا و پایین سطح لغزش فرض می‌شوند، به‌روزرسانی خواهد شد. عبور متغیرهای حالت از این دو سطح به عنوان قانون به‌روز رسانی سیگنال کنترل (رخداد به‌روز رسانی) خواهد بود. بعد از نمونه برداری، سیگنال کنترل ورودی توسط مدار نگهدارنده مرتبه صفر تا به‌روز رسانی بعدی در لایه مرزی مقابل ثابت خواهد ماند. متغیرهای حالت سیستم در بین این دو لایه مرزی نوسان کرده و به سمت نقطه تعادل نزدیک می‌شود و در نهایت به چرخه حدی وارد می‌شوند. شکل ۲ حدود لایه مرزی نمونه S_i^+ و S_i^- را نشان می‌دهد که در موازات سطح لغزش S_i قرار دارند:



شکل ۲: لایه‌های مرزی S_i^+ و S_i^- در موازات با سطح لغزش

در روی لایه S_i^+، قانون کنترلی u^+ به سیستم اعمال شده و متغیرهای حالت سیستم را به سمت سطح لغزش S_i باز می‌گرداند. در زمانی که حالت سیستم به لایه مقابل آن، S_i^- برسد، قانون کنترلی u^- باز متغیرهای حالت سیستم را به سمت سطح لغزش S_i باز می‌گرداند. اکنون زمان t_c را به عنوان آخرین زمان نمونه برداری و $x(t_c)$ را به عنوان متغیر حالت سیستم بر روی آخرین لایه مرزی ملاقات شده در نظر بگیرید.

لم ۲. فرض کنید دو لایه مرزی S_i^+ و S_i^- به موازات سطح لغزش S_i قرار دارند. اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\dot{S}_i^+ = \dot{S}_i(x(t_c)) < 0 \qquad , x(t_c) \in S_i^+ \qquad (۱۶.a)$$

$$\dot{S}_i^- = \dot{S}_i(x(t_c)) > 0 \qquad , x(t_c) \in S_i^- \qquad (۱۶.b)$$

آنگاه با به‌روز رسانی کنترل کننده در روی لایه‌ها، متغیرهای حالت سیستم در ناحیه بین دو لایه، باقی می‌مانند.

اثبات: برای باقی ماندن سیستم در لایه مرزی، باید مشتق تابع لیاپانوف در فاز دستیابی، $\dot{V}_i = S_i \dot{S}_i$ بر روی لایه‌های مرزی منفی باشد تا متغیرهای حالت سیستم را به سمت درون لایه لغزش میل دهد. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} x \in S_i^+ \rightarrow S_i > 0, \\ x \in S_i^- \rightarrow S_i < 0, \end{cases} \qquad (۱۷)$$

با توجه به اینکه بر روی سطوح لغزش با مشتقگیری از (۱۵) $\dot{S}_i^+ = \dot{S}_i^- = \dot{S}_i$ برقرار است، لذا برای منفی شدن $\dot{V}_i$ و با توجه به (۱۷) نیاز است تا (۱۶) برقرار باشد. □

اکنون با توجه به پیش نیازها و تعاریف ارائه شده قانون کنترل پیشنهادی بر روی لایه های مرزی ارائه می شود:

$$u = \begin{cases} u^+ = K_2^{-1}\left(-\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{t_c} \\ \xi_{t_c} \end{bmatrix} + v \right), x(t_c) \in S^+ \\ u^- = K_2^{-1}\left(-\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{t_c} \\ \xi_{t_c} \end{bmatrix} + v \right), x(t_c) \in S^- \end{cases}, \qquad (۱۸)$$

که در آن مقدار $v = \left[v_i \right]_{r \times 1}$ از معادله (۱۹) بدست می‌آید:

$$v_i = -\beta_i \; sgn\left(S_i\left(x_{t_C} \right) \right) \qquad (۱۹)$$

برای آنالیز دستیابی زمان محدود متغیرهای حالت از یک لایه مرزی به لایه مرزی مقابل، سه ناحیه، R_1، R_2 و R_3 را درنظر بگیرید، که داریم:

$$\begin{cases} S_i^- > 0 \;\; \& \; S_i^+ > 0 & x \in R_1 \\ S_i^- > 0 \;\; \& \; S_i^+ < 0 & x \in R_2 \\ S_i^- < 0 \;\; \& \; S_i^+ < 0 & x \in R_3 \end{cases}, \qquad (۲۰)$$

ناحیه R_1 مربوط به فضای بالای S_i^+ و ناحیه R_2 مربوط به فضای بین دو لایه مرزی و در آخر ناحیه R_3 نشان دهنده فضای حالت در زیر S_i^- است. به عنوان نمونه، شرط دستیابی زمان محدود برای S_i^- باید در دو ناحیه R_2 و R_3 اثبات گردد.

با توجه به این که به روزرسانی تنها بر روی لایه‌های مرزی انجام می‌شود، در زمانی که متغیرهای حالت بر روی سطح لایه‌ها قرار ندارند، خطای بین مقدار واقعی متغیر حالت و مقدار نمونه برداری شده قبلی وجود خواهد داشت که این خطا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t_c) - x(t) \\ &= \begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\eta \\ e_\xi \end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

از معادله (۱۱) و با سیگنال کنترل طراحی شده (۱۸) خواهیم داشت:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

$$\dot{S}_i^- = -\begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{2n} \\ A_{3n} & A_{4n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\eta \\ e_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta A_2 \\ \Delta A_3 & \Delta A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + K_{i2}\delta_m - \beta_i \, sgn\left(S_i\left(x_{t_c}\right)\right), \tag{۲۲}$$

که در اینجا $K_i = \begin{bmatrix} K_{i1} & K_{i2} \end{bmatrix}$ ردیف ith از ماتریس $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ می‌باشد. با استفاده از این حقیقت که وقتی متغیر حالت سیستم بین دو لایه مرزی قرار دارد، حداکثر فاصله بین دو لایه بالا و پایین مرزی یعنی حداکثر خطای اندازه گیری e_{max} برابر $2h$ است، برای جمله اول و دوم در رابطه سمت راست معادله (۲۲) داریم:

$$\|K_i\|\|A_n\|\|e_{max}\| \le 2h\|K_i\|\|A_n\|, \tag{۲۳}$$
$$\|K_i\|\|A_\Delta\|\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \le \|K_i\|\|A_\Delta\|\left\|\begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix}\right\|$$

بنابراین برای برقرار شدن معادله (۱۶) در S_i^- مقدار β_i و P_i بیان شده در معادله (۱۴) باید در رابطه زیر صدق کند:

(۲۴)

$$\beta_i \ge P_i\left(x(t_c)\right) + \beta_{0i}$$
$$\text{where} \begin{cases} P_i(x) = 2h\|A_n\| + \|K_i\|\|\Delta A\|\left\|\begin{bmatrix} \eta(t_c) \\ \xi(t_c) \end{bmatrix}\right\| + \|K_{i2}\delta_m\|, \\ \beta_{0i} > 0 \end{cases}$$

از این‌رو مشتق تابع لیاپانوف و معادلات (۹)، (۱۱)، (۲۲) و (۲۳) ، معادله (۲۵) را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(S_i^-\right) &= S_i^-\left(-K_iA_ne + K_i\Delta A\, x + K_{i2}\delta_m - \beta_i\, sgn\left(S_i\left(x_{t_c}\right)\right)\right) \\ &= S_i^-\left(K_i\Delta A\, x + K_2\delta_m - K_iA_ne\right) - S_i^-\left(\beta_i\, sgn\left(S_i\left(x_{t_c}\right)\right)\right) \\ &\le \left|S_i^-\right|\left(\|K_i\|\|\Delta A\|\|x(t_c)\| + \|K_2\delta_m\| + 2h\|K_i\|\|A_n\|\right) - S_i^-\left(\beta_i\, sgn\left(S_i\left(x_{t_c}\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{۲۵}$$

اکنون پایداری زمان محدود، در دو ناحیه R_2 و R_3 بررسی می‌شود؛

ناحیه R_2. دراین ناحیه $S_i^- > 0$ در نتیجه $S_i^- = \left|S_i^-\right|$ است و اگر $x\left(t_c\right) \in S_i^+$ باشد، از معادلات (۱۸)، (۲۴) و (۲۵) داریم،

$$\dot{V}\left(S_i^-\right) \le -\beta_{i0}\left|S_i^-\right| = -\sqrt{2}\,\beta_{i0}V\left(S_i^-\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۲۶}$$

ناحیه R_3. در این ناحیه $x\left(t_C\right) \in S_i^-$ و داریم $S_i^- < 0$، که نتیجه می‌دهد $S_i^- = -\left|S_i^-\right|$. با استفاده از معادلات معادلات (۱۸)، (۲۴) و (۲۵) داریم،

$$\dot{V}\left(S_i^-\right) \le -\beta_{i0}\left|S_i^-\right| = -\sqrt{2}\,\beta_{i0}V\left(S_i^-\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{۲۷}$$

معادلات (۲۶) و (۲۷) بر اساس لم ۱ پایداری زمان محدود به لایه مرزی S_i^- را برای این دو ناحیه اثبات می‌کند. همین اثبات را می‌توان برای دستیابی زمان محدود برای لایه مرزی S_i^+ در ناحیه‌های R_1 و R_2 نیز انجام داد.

۴-۱ بیشترین فاصله لایه مرزی

برای محاسبه مقدار حداکثر مجاز لایه مرزی که در لم ۲ برای نگه داشتن متغیرهای حالت سیستم بین لایه ها لازم است، باید حدود تغییرات ξ و η در دینامیک سیستم، مشخص باشد. بر روی لایه S_i^+ یعنی زمانی که $x(t) \in S_i^+$، بر اساس معادله (۱۵)، رابطه $S_i - h_i = k_{1i}\eta + k_{2i}\xi - h_i = 0$ بر قرار است. ($k_{1i} \in R^{1\times(n-r)}$ و $k_{2i} \in R^{1\times r}$). در این صورت دینامیک η را می‌توان به شکل زیر بیان نمود،

$$\eta = -\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}h_i, \tag{۲۸}$$

توجه نمایید که سیگنال کنترل در روی S_i^+ به روز می‌گردد، بنابراین معادله (۱۶.a) باید برقرار باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$k_{1i}\left(A_1\eta + A_2\xi\right) + k_{2i}\left(A_3\eta + A_4\xi + \left(u^+ + \delta_m\right)\right) < 0, \tag{۲۹}$$

با جایگزینی (۲۸) در (۲۹) داریم:

$$k_{1i}\left(A_1\left(-\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}h_i\right) + A_2\xi\right) + k_{2i}\left(A_3\left(-\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}k_{2i}\xi + \frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}h_i\right) + A_4\xi + \left(u^+ + \delta_m\right)\right) < 0, \tag{۳۰}$$

با تعریف $N_i \in R^{1\times r}$ و $M_i \in R^{1\times 1}$ به شکل زیر،

$$N_i = k_{1i}\left(A_1\left(-\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}k_{2i}\right) + A_2\right) + k_{2i}\left(A_3\left(-\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2}k_{2i}\right) + A_4\right), \tag{۳۱}$$
$$M_i = k_{1i}A_1\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2} + k_{2i}A_3\frac{k_{1i}^T}{\|k_{1i}\|_2^2},$$

معادله (۳۰) به شکل زیر ساده خواهند شد:

$$N_i\xi + k_{2i}\left(u + \delta_m\right) + M_ih_i < 0, \tag{۳۲}$$

در بدترین شرایط (صفر شدن مشتق تابع لیاپانوف بر روی لایه مرزی) نامساوی (۳۲) به مساوی تبدیل خواهد شد و اگر دینامیک ξ را که بر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

روی S_i^+ قرار دارد با $\xi_{\max}$ نامگذاری کنیم، در این حالت $\xi_{\max}$ به شکل زیر از مساوی قرار دادن (۳۲) بدست می‌آید:

$$\xi_{\max} = -\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} M_i h_i - \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} k_{2i}\left(u^+ + \delta_m\right), \quad (۳۳)$$

از طرف دیگر از معادله (۳) و نامگذاری دینامیک ξ بر روی سطح لغزش S_i به صورت ξ_{S_i} داریم،

$$\xi_{S_i} = -\frac{k_{2i}^T}{\|k_{2i}\|_2^2} k_{1i}\eta, \quad (۳۴)$$

برای محاسبه حداکثر تغییرات دینامیک ξ، (۳۴) را از (۳۳) کم می‌نماییم؛

$$\Delta\xi_i = \xi_{\max} - \xi_{S_i} = -\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} M_i h_i + \frac{k_{2i}^T}{\|k_{2i}\|_2^2} k_{1i}\eta - \frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} k_{2i}\left(u^+ + \delta_m\right), \quad (۳۵)$$

در اینجا $\Delta\xi_i$ حداکثر تغییرات دینامیک ξ بین سطح لغزش S_i و لایه S_i^+ است. با نگاشت $\Delta\xi_i$ بر روی K_i (با استفاده از ضرب داخلی)، حداکثر فاصله لایه مرزی S_i^+ از سطح لغزش بدست می آید:

$$h_i = \begin{bmatrix} k_{1i} & k_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\xi_i \end{bmatrix} = -k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} M_i h_i + k_{1i}\eta - k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} k_{2i}\left(u^+ + \delta_m\right), \quad (۳۶)$$

بنابراین،

$$h_i = \left(1 + k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} M_i\right)^{-1} \times \left(k_{1i}\eta - k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} k_{2i}\left(u^+ + \delta_m\right)\right), \quad (۳۷)$$

معادله (۳۷) باید برای تمام تغییرات دینامیک ξ و η برقرار باشد، تا متغیرهای حالت را بین لایه مرزی نگه دارد، پس:

$$h_{max_i} = \min_{\eta,\xi}\left[\left(1 + k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} M_i\right)^{-1} \times \left(k_{1i}\eta - k_{2i}\frac{N_i^T}{\|N_i\|_2^2} k_{2i}\left(u^+ + \delta_m\right)\right)\right] \quad (۳۸)$$

از این رویکرد می‌توان برای یافتن ماکزیمم لایه مرزی از S به S^- نیز استفاده نمود. به این ترتیب معادله مشابه (۳۸) برای S^- نیز محاسبه می‌شود و h حداقل مقدار محاسبه شده از این دو مقدار خواهد بود.

۴-۲ کمترین فاصله لایه‌های مرزی

کاهش لایه مرزی، به صورت مستقل از مکان فضای حالت و اندازه سیگنال کنترل، امکان ایجاد تجمع در خواست نمونه برداری را به وجود می‌آورد و یا امکان دارد حداقل فاصله زمانی از پیش تعیین شده بین نمونه برداری‌ها نقض گردد. جهت تضمین عدم تجاوز از حداقل فاصله زمانی یک حد پایین برای پارامتر h_i باید تعیین شود. به صورت معمول می‌توان از ماتریس انتقال حالت برای تعیین زمان حرکت متغیرهای حالت از لایه پایین S^- به لایه بالای S^+ استفاده نمود. در یک سیستم خطی، معادلات زمانی از بردار حالت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$x(t) = e^{A(t-t_c)}x(t_c) + \int_{t_c}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau, \quad (۳۹)$$

که دراینجا e^{At} ماتریس انتقال حالت است. سیستم می‌تواند از لایه پایین $x(t_c)\in S^-$ به لایه بالا $x(t_{min})\in S^+$ و یا بالعکس، در یک زمان حداقل t_{min} منتقل گردد. با توجه با اینکه حداقل فاصله سطوح S^- و S^+ برابر $2h_{\min}$ است، داریم:

$$Kx(t_{min}) = 2h_{min}. \quad (۴۰)$$

حداقل فاصله زمانی بین نمونه برداریهای متوالی در یک سیستم کنترل عبارت است از t_{min}، که این مقدار می‌تواند به عنوان یک مقدار بزرگتر یا مساوی زمان نمونه برداری سنسور انتخاب گردد. محاسبه (۴۰) برای یافتن h_{min} به صورت کلی ساده نیست، زیرا تمام بازه عدم قطعیت‌ها و اغتشاش باید در بدست آوردن این مینیمم به حساب آیند.

$$h_{min} = \inf_{\delta,\Delta} f\left(t_{min},\delta,\Delta\right), \quad (۴۱)$$

برای بدترین شرایط پایداری سیستم، کمترین اندازه لایه مرزی h_{min} در بازه تغییرات δ و Δ باید تعیین گردد. بنابراین جهت ادامه محاسبات در این مورد باید ضابطه f (معادلات سیستم) مشخص باشد.

۵- بخش شبیه سازی

برای سادگی در نشان دادن روند ارائه شده در بالا، سیستم دو حالته و تک ورودی با عدم قطعیت ساختاری به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta x_1$$
$$\dot{x}_2 = u \quad , \quad (۴۲)$$

که درآن $x\in R^2$ و $u\in R$ به ترتیب متغیر حالت و ورودی کنترلی است. همچنین در اینجا فرض شده، $|\theta|<a$ که $a=1$ یک ثابت مثبت و بیان کننده حد بالای عدم قطعیت فرض شده در سیستم است. ماتریس نامی سیستم عبارت است از، $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$، ماتریس ورودی $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ و بعلاوه ماتریس $\Delta A=\begin{bmatrix}\theta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ عدم قطعیت مربوط به

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

ماتریس سیستم می‌باشند. سیستم در فرم رگولار و دارای یک ورودی و عدم قطعیت محدود است. همچنین داریم، $K=\left[k_1,k_2\right]$ و $x=\left[x_1\ ,x_2\right]^T$. برای این سیستم باید دو مرحله طراحی سطح لغزش و طراحی کنترل کننده برای دستیابی زمان محدود، انجام شود.

۵-۱ طراحی سطح لغزش

با فرض S به عنوان یک سطح لغزش خطی بر اساس معادله (۳) داریم:

$$S = K x = 0, \tag{۴۳}$$

از طرف دیگر، با استفاده از (۴) به عنوان تابع کاندید لیاپانوف بر حسب x_1 داریم،

$$V\left(x_1\right)=\frac{1}{2}x_1^2, \tag{۴۴}$$

همچنین، از معادله (۷) شرط لازم بردار K برای پایداری سطح لغزش عبارت است از:

$$\frac{k_1}{k_2}>\theta, \tag{۴۵}$$

بنابراین اگر $\frac{k_1}{k_2}>a$ انتخاب شود (با توجه به این که $|\theta|<a$)، شرط (۴۵) محقق خواهد شد که در اینجا $K=\left[k_1,k_2\right]=\left[1.2\ 1\right]$ انتخاب می‌گردد. در نتیجه با حرکت بر روی سطح لغزش، دینامیک X_1 به مبدا همگرا خواهد شد. بنابراین با توجه به رابطه (۴۳) $x_2\to 0$، که پایداری مجانبی سیستم را بر روی سطح لغزش تضمین می‌کند.

۵-۲ فاز دستیابی زمان محدود

با استفاده از معادله (۹)، در فاز دستیابی، تابع کاندید لیاپانوف بر حسب متغیر لغزش ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$V\left(S\right)=\frac{1}{2}S^2\ \ \to\ \ \dot{V}\left(S\right)=S\dot{S}<0, \tag{۴۶}$$

سپس، از معادله (۱۲)، سیگنال کنترل متغیر به صورت زیر طراحی می شود:

$$\begin{cases} u=-\frac{k_1}{k_2}x_2+\nu \\ \nu=-\beta\, sgn\left(S\right), \\ \beta>P+\beta_0 \end{cases} \tag{۴۷}$$

در اینجا،

$$\|K\|\|\Delta A\|\|x(t_c)\|+\|K_2\delta_m\|+2h\|K\|\|A_n\|\le\max_{\theta,x}\left(|k_1\theta\, x_1|\right)+2h\|K\|\le P(h)$$

بنابراین با $\|A_n\|=1$ و $\beta_0>0$ داریم: $P(h)\ge 1.2|\theta|\|x(t_c)\|+2h$. که در حقیقت تابع $P(h)$ بر حسب h محاسبه خواهد شد.

۵-۳ محاسبه بیشترین فاصله لایه مرزی

از معادله (۱۵) برای حد بالای لایه مرزی داریم:

$$\begin{aligned} S^+&=S-h=k_1\ x_1+\ k_2x_2-h=0 \\ S^-&=S+h=k_1\ x_1+\ k_2x_2+h=0 \end{aligned}' \tag{۴۸}$$

سیگنال کنترلی (۴۷) تنها در لایه‌های مرزی (۴۸) به‌روز می‌گردد، بنابراین داریم:

$$u=\begin{cases} u^+=-\frac{k_1}{k_2}x_2(t_c)-\left(P\left(x(t_c)\right)+\beta_0\right)\to\ \ x(t_c)\in S^+ \\ u^-=-\frac{k_1}{k_2}x_2(t_c)+\left(P\left(x(t_c)\right)+\beta_0\right)\to\ \ x(t_c)\in S^- \end{cases}, \tag{۴۹}$$

برای این سیستم، شرایط دستیابی در زمان محدود توسط معادلات (۲۶)، (۲۷) و لم ۱ بدست می‌آید. کم کردن حد بالای دینامیک x_2 در $S_i{}^+$ از دینامیک سیستم بر روی سطح لغزش S_i نتیجه می‌دهد:

$$\Delta_{x_2}=\frac{-k_2u^+-h\,\theta}{k_1-k_2\theta}+\frac{k_1}{k_2}x_1, \tag{۵۰}$$

همچنین از معادله (۳۶) مقدار h_{max} از نگاشت Δ_{x_2} بر روی بردار K معین خواهد شد:

$$h_{max}=\left[0\quad\Delta_{x_2}\right]\left[\begin{matrix}k_1\\k_2\end{matrix}\right], \tag{۵۱}$$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} h_{max}&=\frac{-k_2^2\,u^+-k_2\,h_{max}\,\theta}{k_1-k_2\,\theta}+k_1\,x_1 \\ &=\frac{-k_2^2u^+}{k_1}+\left(k_1-k_2\theta\right)x_1 \end{aligned}\ , \tag{۵۲}$$

از معادله (۵۲) برای h_{max} خواهیم داشت:

$$h_{max}\le\begin{cases} \frac{-k_2^2u^+}{k_1}+\left(k_1+k_2a\right)x_1 & ,x_1>0 \\ \frac{-k_2^2u^+}{k_1}+\left(k_1-k_2a\right)x_1 & ,x_1<0 \end{cases}, \tag{۵۳}$$

به همین صورت کمترین اندازه لایه مرزی $S_i{}^-$ در سمت مقابل عبارت خواهد بود از:

$$h_{max}^*\le\begin{cases} \frac{k_2^2u^-}{k_1}-\left(k_1-k_2a\right)x_1 & ,x_1>0 \\ \frac{k_2^2u^-}{k_1}-\left(k_1+k_2a\right)x_1 & ,x_1<0 \end{cases}, \tag{۵۴}$$

مقدار h_{max} و h_{max}^* را می‌توان به ازای حدود دینامیک $c<x_1<d$ بدست آورد که c و d بیان کننده حدود تغییرات متغیر حالت x_1 است. ماکزیمم اندازه لایه متغیر مرزی h_u در هر مرحله، از مینیمم h_{max}^* و h_{max} در بازه تغییرات دینامیکهای سیستم به دست می‌آید. یعنی $h_u=\min\left(h_{max_{[c,d]}},h_{max_{[c,d]}}^*\right)$.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

۵-۴ محاسبه کمترین اندازه لایه مرزی

کمترین فاصله لایه مرزی از سطح لغزش بر طبق معادله (۳۹) بدست می‌آید،

$$x(t) = e^{At}x(t_c) + \int_0^t e^{A\tau}B\,d\tau\,u^-, \quad (۵۵)$$

که در اینجا e^{At} ماتریس انتقال حالت سیستم است، و داریم:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & \frac{-1+e^{\theta t}}{\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (۵۶)$$

در $x(t_c) \in S^-$ معادله (۵۵) تبدیل می‌شود به،

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta t} & \frac{-1+e^{\theta t}}{\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_c) \\ x_2(t_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-t}{\theta} + \frac{e^{\theta t}}{\theta^2} \\ t \end{bmatrix} u^-, \quad (۵۷)$$

حال فرض کنید که متغیرهای حالت سیستم از لایه مرزی S_i^- به لایه S_i^+ دریک حداقل زمان t_{min} منتقل خواهند شد. مکان متغیرهای حالت سیستم بعد از طی شدن t_{min} بر اساس معادله (۵۷) عبارت خواهند بود از:

$$\begin{bmatrix} x_1(t_{min}) \\ x_2(t_{min}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta t}x_1(t_c) - \frac{x_2(t_c)}{\theta} + \frac{e^{\theta t}x_2(t_c)}{\theta} - \frac{t\,u^-}{\theta} + \frac{e^{\theta t}\,u^-}{\theta^2} \\ x_2(t_c) + t\,u^- \end{bmatrix}, \quad (۵۸)$$

بعد از طی شدن این زمان، حالت سیستم در $x(t_{min}) \in S^+$ قرار دارد.

با جایگزینی (۵۸) در قسمت S^+ معادله (۴۸) داریم:

$$k_1\left(e^{\theta t_{min}}x_1(t_c) - \frac{x_2(t_c)}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}}x_2(t_c)}{\theta} - \frac{t_{min}\,u^-}{\theta} + \frac{e^{\theta t_{min}}\,u^-}{\theta^2}\right) \quad (۵۹)$$
$$+ k_2\left(x_2(t_c) + t_{min}\,u^-\right) = 2h,$$

در نتیجه با انتخاب $h_d = \max_\theta h$، حد پایین مجاز تغییرات h به دست می آید.

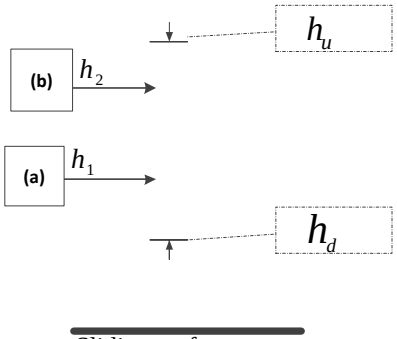
در نهایت در روش پیشنهادی، به منظور نزدیکتر شدن به نقطه تعادل، مقدار h می‌تواند به تدریج کاهش یابد (اما باید همواره در بازه زیر انتخاب شود:

$$h_d < h < h_u, \quad (۶۰)$$

به این ترتیب مقدار h وابسته به فضای حالت سیستم و اندازه سیگنال کنترل خواهد بود، که تضمین می‌کند که حد پایین فاصله زمانی به‌روز رسانی رعایت شود.

۵-۵ آنالیز تاثیر تغییر مقدار h در بازه مجاز

همان گونه که در شکل ۳ دیده می شود، می‌توان مقدار h را در باند مجاز انتخاب نمود:



شکل ۳: فاصله مجاز تغییرات h_i

بر طبق آنچه که در بخش ۴-۱ بیان گردید (بخش ۵-۳ مثال عددی)، بیشترین فاصله لایه مرزی بر اساس لم ۲، تضمین می‌نماید که متغیرهای حالت با برخورد به لایه‌های مرزی از آن خارج نمی‌شوند. در واقع با روشی که در این مقاله ارائه گردیده است، سیستم با کاهش فاصله لایه مرزی (در هر به‌روز رسانی) متغیرهای حالت را با خود به سمت سطح لغزش هدایت می کند و پایداری سیستم را نتیجه می‌دهد.

کمترین فاصله لایه مرزی بر اساس بخش ۴-۲ (بخش ۵-۴ مثال عددی)، تضمین می‌نماید که فاصله زمانی بین دو به‌روز رسانی متوالی از t_{min} تعیین شده کمتر نشود. با رعایت کمترین فاصله لایه مرزی از رخداد نقطه تجمع (پدیده مخرب Zeno) در درخواست‌های به‌روز رسانی، اجتناب می گردد.

اما در مورد اثر پارامتر h در رفتار سیستم حلقه بسته، با انتخاب پارامتر h نزدیک به باند بالا، فاصله زمانی به‌روز رسانی‌ها به قیمت کاهش سرعت همگرایی سیستم، افزایش می‌یابد. اما اگر مقدار پارامتر h نزدیک به باند پایین انتخاب گردد، سرعت همگرایی سیستم افزایش خواهد یافت، ولی فاصله زمانی به‌روز رسانی‌ها کاهش می‌یابد. این مبحث به طور کمی در بخش نتایج عددی نشان داده می‌شود.

۵-۶ نتایج عددی

در این بخش، سیستم (۴۲) با ماتریس سیستم و ماتریس ورودی داده شده و حد بالای عدم قطعیت سیستم برابر با $a = 1$ فرض شده است. بردار K جهت جبران عدم قطعیت در دینامیک x_1 است که باید در (۴۵) صادق باشد. به عنوان مثال بردار K می تواند به صورت، $K = [1.2\ 1]$ انتخاب شود. لایه مرزی بر اساس معادلات (۵۴) و (۵۵) عبارتند از:

$$h_{max} \le \begin{cases} \frac{-u^+}{1.2} + (2.2)x_1 & ,x_1 > 0 \\ \frac{-u^+}{1.2} + (0.2)x_1 & ,x_1 < 0 \end{cases}, \quad (۶۱)$$

و

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

$$h_{max}^{*} \le \begin{cases} \dfrac{u^{-}}{1.2}-(0.2)x_1 & ,x_1>0 \\ \dfrac{u^{-}}{1.2}-(2.2)x_1 & ,x_1<0 \end{cases} , \qquad (۶۲)$$

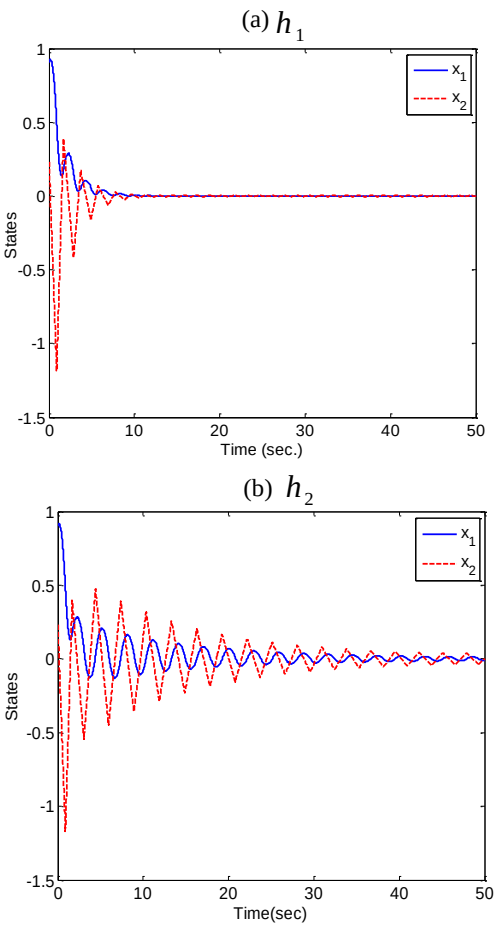
مقدار h_u عبارت است از $h_u = \min\left(h_{max}, h_{max}^{*}\right)$. در صورتی که پارامتر h کوچکتر از h_u انتخاب گردد، متغیرهای حالت، درون لایه مرزی باقی می‌مانند. در این شبیه سازی مقدار زمان مینیمم عبارت است از $t_{min} = 0.9(\text{sec.})$. در صورتی که فاصله لایه مرزی بر اساس (۶۰) انتخاب گردد، فاصله زمانی به‌روز رسانی از این مقدار کمتر نخواهد شد.

همچنین برای سیگنال کنترلی داریم:

$$u = \begin{cases} u^{+}=-1.2\,x_2(t_c)-\left(1.2|x_1(t_c)|+2h+0.004\right)\rightarrow x(t_c)\in S^{+} \\ u^{-}=-1.2\,x_2(t_c)+\left(1.2|x_1(t_c)|+2h+0.004\right)\rightarrow x(t_c)\in S^{-} \end{cases} , \qquad (۶۳)$$

این سیستم برای دو مقدار h با مقادیر $h_1 = h_{min} + \frac{1}{3}\left(h_u - h_{min}\right)$ و $h_2 = h_{min} + \frac{4}{5}\left(h_u - h_{min}\right)$ شبیه سازی شده است ($h_1 < h_2$).

شکل ۴ پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم را برای شرایط اولیه $x(0)=[0.9\ 0.25]$ نشان می‌دهد. همان گونه که نشان داده شده کاهش سریعتر لایه مرزی (h کوچکتر) همگرایی سریعتر متغیرهای حالت را نتیجه خواهد داد.

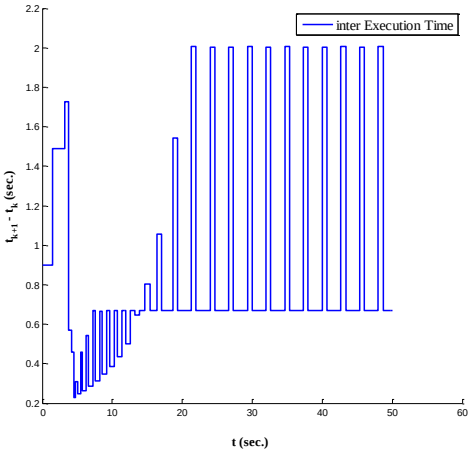


شکل ۴: پاسخ زمانی سیستم کنترل

شکل ۵ تغییرات h_1, h_2 را در بازه مجاز نمایش می‌دهد که همواره در محدوده $h_d < h < h_u$ تغییر می‌کنند. حد بالای h_u بر اساس معادلات (۵۳) و (۵۴) محاسبه شده‌اند و مقدار h_d بر اساس (۵۹) بدست آمده است. همانگونه که شکل ۵(a) دیده می‌شود وقتی مقدار h نزدیک به حد پایین است، در این صورت متغیرهای حالت سیستم، همگرایی سریعتری دارند ولی فاصله زمانی نمونه برداری‌ها به صورتی که در شکل ۶ نشان داده شده است، کاهش می‌یابد.

با انتخاب h در مقدار مجاز ارائه شده در (۶۰) می‌توان بار پردازشی پروسسور و یا پهنای باند شبکه ناشی از پروسه کنترلی را با افزایش فاصله زمانی بین به‌روز رسانی‌ها تنظیم کرد.

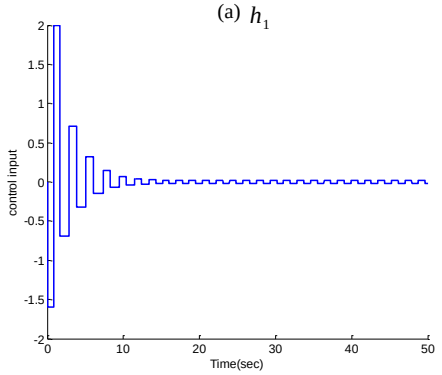
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]



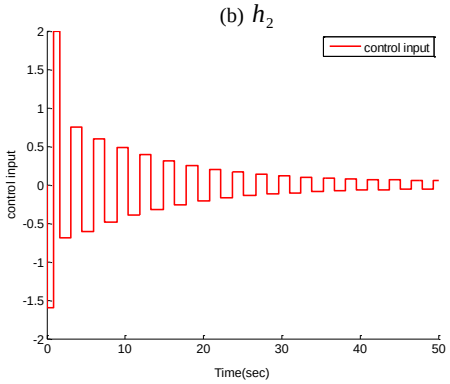
شکل ۷: کاهش h خارج از اندازه مجاز

شکل ۸ سیگنال کنترل ورودی را در دو مقدار انتخابی h نشان می‌دهد، به صورتی که با حرکت سیستم به سمت نقطه تعادل، دامنه سیگنال کاهش یافته ولی دچار چترینگ با فرکانس بالا نمی‌شود.

(a) h_1



(b) h_2

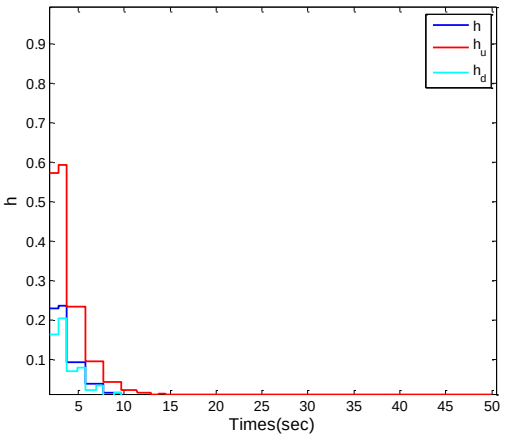


شکل ۸: سیگنال کنترل در ثانیه ۵ برای دو مقدار $h=h_1$ (a)، $h=h_2$ (b) به ترتیب برابر است با ۰٫۰۱ و ۰٫۰۴

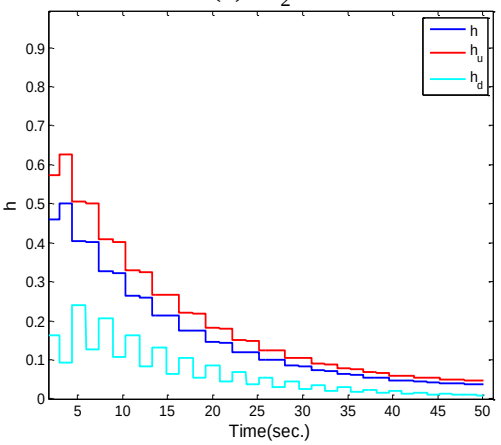
٦- نتیجه گیری

در این مقاله جهت تنظیم و به حداقل رساندن فرکانس به‌روز رسانی سیگنال کنترلی، با پرهیز از چترینگ فرکانس بالا، یک رهیافت از

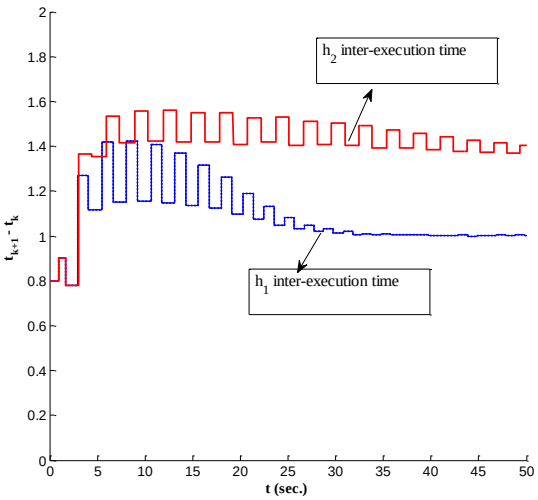
(a) h_1



(b) h_2



شکل ۵: لایه‌های مرزی (a) $h=h_1$ (b) $h=h_2 (h_1<h_2)$



شکل ۶: فاصله زمانی به‌روز رسانی‌های متوالی

اگر پارامتر h مستقل از مقدار کنترل ورودی و مکان فضای حالت کاهش یابد امکان نقض حد پایین به‌روز رسانی وجود دارد (شکل ۷ را ببینید).

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]

ترکیب کنترل مد لغزشی و روش تحریک-رویداد ارائه گردید. این روش ترکیبی برای سیستم‌های کنترل خطی چند ورودی دارای عدم قطعیت در ماتریس سیستم و اغتشاش سازگار با کانال ورودی، فرمول بندی شد. با این روش فرکانس و دامنه چترینگ بهبود یافت و سیگنال کنترل و لایه مرزی، متناسب با مکان فضای حالت کاهش یافت؛ به صورتی که حتی در مجاورت نقطه تعادل فرکانس نمونه برداری افزایش نیافته و در اندازه سیگنال کنترلی نیز صرفه جویی شده است. دامنه چرخه حدی القاء شده از لایه مرزی با همگرایی لایه‌ها به سطح لغزش کاهش یافت، درحالی که حد پایین فاصله نمونه برداری حفظ شود. همچنین در این مقاله یک باند مجاز برای کاهش فاصله لایه مرزی ارائه گردید، که با رعایت حد بالای این باند مجاز، متغیرهای حالت از لایه مرزی خارج نمی‌شوند. بعلاوه با رعایت حد پایین این باند مجاز، عدم رخداد نقطه تجمع در درخواست به‌روز رسانی‌ها تضمین می‌گردد. نتایج شبیه سازی‌ها کارایی این روش را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شبیه سازی نشان داده شد، متغیرهای حالت می‌تواند به اندازه قابل قبولی، تا جایی که اغتشاشات محو نشدنی اجازه دهند، به نقطه تعادل نزدیک شوند.

مراجع

[1] P. Tabuada, "Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks," *IEEE Transactions on, Automatic Control, vol.* 52, no. 9, pp.1680-1685.2007.

[2] M. Mazo, A. Anta and P. Tabuada, "An ISS self-triggered implementation of linear controllers," *Automatica, vol.* 46, no.8, pp. 1310-1314, 2010.

[3] M. Velasco, J. M. Fuertes, C. Lin, P.Marti and S.Brandt, "A control approach to bandwidth management in networked control systems," In: *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2004)*, pp.2343-2348.2004.

[4] R. Postoyan, P.Tabuada, D. Nešić and A. Anta, "Event-triggered and self-triggered stabilization of distributed networked control systems," In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 2011)*, pp. 2565-2570.2011.

[5] X. Wang and M. D. Lemmon, "Asymptotic stability in distributed event-triggered networked control systems with delays," In: *American Control Conference (ACC 2010)*, pp. 1362-1367, 2010.

[6] X. Chen and F. Hao, "Periodic event-triggered state-feedback and output-feedback control for linear systems," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol.13, no.4, pp.1-9, 2015.

[۷] سجاد موسی پور، قاسم علیزاده، سهراب خان محمدی، « طراحی قانون هدایت بهینه مقاوم سه بعدی برای موشک با استفاده از کنترل مد لغزشی و کنترل SDRE»، مجله کنترل، دوره ۶، شماره ۲، صفحات ۵۵-۶۴، ۱۳۹۱.

[۸] وحید بهنام گل ، ایمان محمد زمان ، احمد رضا ولی ، نعمت ا.... قهرمانی، «طراحی قانون هدایت با استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه دوم زمان محدود»، مجله کنترل، دوره ۵، شماره ۳، صفحات ۳۶-۴۴، ۱۳۹۰.

[9] C. Edwards and S. K. Spurgeons, "Sliding mode control: theory and applications," *CRC Press, Taylor and Francis Group*, 1998.

[10] K. D. Young, V. Utkin and U. Ozguner, "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.7, no.3, pp. 328-342, May 1992.

[11] H. Lee, V. Utkin, "Chattering suppression methods in sliding mode control systems," *Annual Reviews in Control*, vol.31, no.2, pp. 179-188, 2007.

[12] P. Marti, M. Velasco, A. Camacho, E. X. Martin, J. M. Fuertes,"Networked sliding mode control of the double integrator system using the event-driven self-triggered approach," In: IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), 2011.

[13] A. K. Behera, et al., "Event-triggered sliding mode control for robust stabilization of linear multivariable systems," *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, Springer International Publishing, pp. 155-175, 2015.

[14] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, "Decentralized event-triggered sliding mode control," In *the proceedings of 10th Asian Control conference (ASCC)*, pp. 1-5, May 2015.

[15] A. K. Behera and B. Bandyopadhyay, "Event-triggered sliding mode control for a class of nonlinear systems," *international Journal of control*, vol.89, no.9, pp. 1916-1931, 2016.

[16] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol.38, no.3, pp. 751-766. 2000.

[17] L. Leithold, "The Calculus with Analytic Geometry". *Harper & Row*, Vol.1. 1972

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.5.6]