

## طراحی کنترل کننده تصادفی ناهماهنگ برای کلاس خاصی از سیستم های پرش مارکوف خطی

مونا فرجی نیری<sup>۱</sup>، محمدرضا جاهد مطلق<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی پویش، m\_farajiniri@pooyesh.ac.ir

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، jahedmr@iust.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۹/۱۶ ویرایش اول: ۱۳۹۶/۷/۱۵ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۳

**چکیده:** هدف این مقاله طراحی کنترل کننده تصادفی کلیدزن ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف است. منظور از این ناهماهنگی، عدم تطابق بین کلیدزنی کنترل کننده و کلیدزنی سیستم است. این ناهماهنگی یکی از محدودیت‌هایی است که به هنگام کنترل سیستم‌های پرش مارکوف بروز می‌کند و دلیل آن نبود امکان تشخیص دقیق و بلادرنگ سیگنال کلیدزنی در سیستم پرش مارکوفی است. در این مقاله با بهره‌گیری از رویکردی جدید، اثرات تشخیص نادقیق وضعیت کلیدزنی در کنترل کننده لحاظ شده و علی‌رغم عدم تطابق بین تغییر وضعیت سیستم و تغییر وضعیت کنترل کننده، پایدارسازی سیستم صورت پذیرفته است. بدین منظور ابتدا اثر ناهماهنگی با تعریف دو زنجیره مارکوف مستقل اما پیرو برای سیستم و کنترل کننده معرفی شده و سپس با ساختاردهی سیستم حلقه بسته به صورت یک سیستم پرش مارکوف ناهمگن به طراحی کنترل کننده پرداخته شده است. اساس این طراحی بر تئوری لیاپانوف چندگانه‌ای استوار است که به شرایط کافی پایداری پذیری و طراحی کنترل کننده برای سیستم منجر می‌شود. کلیه روابط بدست آمده جهت بررسی پایداری پذیری و طراحی پایدارساز به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی بوده و نتایج شبیه‌سازی نشانگر مزایا و ویژگی‌های طرح پیشنهادی است.

**کلمات کلیدی:** کنترل تصادفی، کنترل ناهماهنگ، نامساوی ماتریسی خطی، سیستم پرش مارکوف خطی، سیستم پرش مارکوف ناهمگن.

### Asynchronous Stochastic Controller Design for a Class of Markov Jump Linear Systems

Mona Faraji-Niri, Mohammad Reza Jahed-Motlagh

**Abstract:** This paper investigates asynchronous controller design problem for a class of continuous-time Markov jump linear systems. The mentioned asynchronous phenomenon is a case in which the system and the controller Markov chains are not matched, however they are relevant according to certain probabilities. This phenomenon describes a realistic and practical situation which arises as a result of inaccurate observation of the system's Markov chain. The proposed design scheme considers the closed-loop system as a unified Markov jump linear system and utilizes the multiple Lyapunov function approach. By this approach, firstly, the stabilizability of the closed-loop system is ensured and then the asynchronous state-feedback controller is synthesized. The designed controller is formulated in terms of linear matrix inequalities; which are easy to check. A numerical example illustrates the usefulness of the developed method.

**Keywords:** Asynchronous Control, Linear Matrix Inequality, Markov Jump Linear System, Stochastic Control.

## ۱- مقدمه

امروزه ساختارهای پرش مارکوف با قابلیت خود در توصیف تغییرات ناگهانی در سیستم‌ها، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱-۱۰]. کاربردهای این سیستم را می‌توان در حوزه‌های متعددی همچون سیستم‌های اقتصادی [۸]، سیستم‌های قدرت [۹]، سیستم‌های زیستی [۱۰]، سیستم‌های چندعامله [۱۱]، سیستم‌های در معرض عیب [۱۲] و سیستم‌های کنترلی شبکه [۱۳] یافت. سیستم های پرش مارکوف کلاس خاصی از سیستم‌های کلیدزن تصادفی هستند. سیستم‌های کلیدزن تصادفی، ساختارهایی هستند که منطق کلیدزنی در آن‌ها از نوع تصادفی بوده و می‌توانند اثرات ناشی از تغییرات ناگهانی در اثر اغتشاشات داخلی و خارجی، تعمیرات و یا تغییرات اندرکنش‌های بین اجزای سیستم را مدل کنند [۱۴ و ۱۵]. سیستم های پرش مارکوف، شامل دسته‌ای از زیرسیستم‌ها (وضعیت‌های سیستم) هستند که کلیدزنی بین آن‌ها توسط قاعده مارکوفی با تعداد وضعیت‌های محدود صورت می‌گیرد [۱۵].

محققین بسیاری از مسائل پایداری [۲ و ۳ و ۵ و ۶]، پایداری [۵ و ۶ و ۱۶]، و طراحی کنترل کننده [۷ و ۱۷ و ۱۸] را برای سیستم‌های پرش مارکوف مورد بررسی قرار داده‌اند. اغلب پژوهش‌هایی که بر مسائل پایداری و کنترل این سیستم‌ها تعلق دارند، مبتنی بر یک فرض اساسی هستند که بر اساس آن پایدارسازی یا کنترل کننده کاملاً با سیستم تحت کنترل هماهنگ است [۱ و ۵-۷ و ۱۴-۱۸]. این فرض بدین معناست که فرآیند مارکوفی که تغییرات موده‌های کنترل کننده را مدیریت می‌کند دقیقاً با زنجیره مارکوف مدیریت کننده‌ی تغییرات موده‌های سیستم یکسان است. باید توجه داشت که این یک فرض دور از واقعیت است و هرچند منجر به سادگی تحلیل و طراحی می‌گردد اما کاربرد کنترل کننده را برای این سیستم‌ها بسیار محدود می‌کند. دلیل این امر آن است که، زنجیره مارکوف سیستم همواره به صورت دقیق قابل شناسایی نبوده و معمولاً مود فعال سیستم به صورت بلادرنگ در اختیار کنترل کننده قرار نمی‌گیرد. به عبارتی دیگر، از دیدگاه عملی، زنجیره مارکوف مدیریت کننده سیستم و کنترل کننده نامطابق هستند. این عدم تطابق اگر به درستی در نظر گرفته نشود کلیدزنی ناهمزمان سیستم و کنترل کننده باعث افت کارایی و یا حتی ناپایداری سیستم می‌گردد.

یک راه برای برخورد با این مسئله، طراحی کنترل کننده‌های مستقل از مود برای سیستم است [۱۵ و ۱۹]. منظور از کنترل کننده مستقل از مود سیستم، کنترل کننده‌ای است که کلیه تغییرات وضعیت سیستم را نادیده گرفته و درواقع فاقد کلیدزنی است. هرچند کنترل کننده‌ی مستقل از مود می‌تواند راه‌حلی ساده در مواقع عدم دسترسی به موده‌های سیستم باشد اما بسیار محافظه‌کار است [۱۹]. دلیل این محافظه‌کاری، ثابت ماندن کنترل کننده علی‌رغم تغییرات سیستم است. بدیهی است این نوع کنترل کننده نمی‌تواند در مواقع تغییرات شدید وضعیت سیستم پاسخ مناسبی برای آن فراهم سازد. به همین سبب اتخاذ رویکردی که بتواند عدم تطابق پیچیده‌ی موجود بین سیستم و کنترل کننده را لحاظ کند بسیار

ضروری است. بر خلاف کنترل کننده مستقل از مود، که از اطلاعات سیستم چشم پوشی می‌کند، یک کنترل کننده ناهمبستگی سعی در بهره‌گیری از اطلاعات بدست آمده از طریق مشاهده‌ی زنجیره‌ی مارکوف سیستم دارد.

در رابطه با سیستم‌های پرش مارکوف، پژوهش‌هایی تحت عنوان طراحی کنترل کننده ناهمبستگی برای این سیستم‌ها صورت پذیرفته است [۲۰-۲۵]. نکته قابل ذکر آن است که، در اغلب این پژوهش‌ها ماهیت ناهمبستگی مربوط به حالت‌های پیوسته در دینامیک‌ها بوده و با عدم تطابق حالت‌های زنجیره‌های مارکوف کاملاً متفاوت است. درواقع، در پژوهش‌های یادشده ناهمبستگی به معنای وجود تاخیر بین حالت‌های سیستم و کنترل کننده است که از طریق تعریف تاخیر زمانی به صورت متغیری قطعی و از پیش تعریف شده [۲۳]، و یا متغیری تصادفی با توزیع احتمالاتی خاص در سیستم حلقه‌بسته [۲۲ و ۲۴ و ۲۵] بررسی می‌شود. از جمله پژوهش‌های اختصاص یافته به مسئله‌ی عدم تطابق زنجیره‌های مارکوف [۲۰] و [۲۱] هستند. در پژوهش [۲۱]، مسئله‌ی ناهمبستگی بین موده‌های سیستم و کنترل کننده با تعریف دو زنجیره‌ی مارکوف کاملاً متفاوت مطرح شده که بر اساس تئوری جدایی‌پذیری به طراحی کنترل کننده منجر می‌گردد. رویکرد مذکور بسیار محافظه‌کارانه است. در واقع با این که زنجیره کنترل کننده با سیستم متفاوت است اما اطلاعاتی از آن را دربردارد که چشم‌پوشی از این اطلاعات منجر به محافظه‌کاری می‌گردد. فرض متفاوت بودن زنجیره‌ها در [۲۱] توسط [۲۰] از میان برداشته می‌شود اما این رویکرد [۲۰] خود تنها محدود به طراحی فیلتر بوده و وجود تعداد زیاد پارامترهای طراحی در آن باعث دشواری در تست شرایط و پیاده‌سازی عملی آن‌ها است.

با توجه به آن‌چه که ذکر شد، پرداختن به مسئله‌ی طراحی یک کنترل کننده با فرض دسترسی نادقیق آن به وضعیت‌های سیستم و دست‌یافتن به شروطی با قابلیت تست ساده و پیاده‌سازی عملی بسیار حائز اهمیت است. هدف این مقاله دست‌یافتن به اهداف مذکور است. بدین ترتیب روش ارائه شده در این مقاله در دو بخش قابل پیگیری است. در بخش نخست، ابتدا اثر عدم تطابق بین سیستم و کنترل کننده به صورت دو زنجیره مارکوف مجزا اما وابسته به هم بیان شده و در ادامه با توجه به وجود این زنجیره‌های دوگانه، سیستم به صورت یک مجموعه‌ی مارکوفی ناهمگن، یا به طور دقیق‌تر تکه‌های همگن [۱۷ و ۲۶]، ساختاردهی مجدد می‌گردد. دلیل این ساختاردهی آن است که زنجیره‌ی مشاهده‌شده در عمل به زنجیره‌ی سیستم وابسته است. از آنجایی که زنجیره‌ی سیستم یک سیگنال متغیر با زمان به صورت تکه‌ای است، لذا ویژگی‌های احتمالاتی (نرخ‌های گذار [۱۵]) زنجیره مشاهده‌شده نیز متغیر با زمان به صورت تکه‌ای خواهند بود. بنابراین کل سیستم می‌تواند به صورت یک سیستم پرش مارکوف تکه‌ای همگن در نظر گرفته شود. در یک ساختار مارکوفی تکه‌ای همگن نرخ‌های گذار متغیر با زمان بوده اما در بازه‌ی زمانی مشخصی ثابت هستند [۱۷ و ۲۶]. در بخش دوم، با

$$\Lambda_{N \times N} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن نرخ های گذار از رابطه (۳) پیروی می کنند.

$$\Pr\{r_{t+h} = j \mid r_t = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij} h + o(h) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii} h + o(h) & i = j \end{cases} \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $\lambda_{ij}$  معرف نرخ گذار از  $i$  مود در لحظه  $t$  به مود  $j$  در لحظه  $t+h$  است که شرایط زیر را برقرار می سازد،

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

$$\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} \quad (5)$$

که شرط (۴) بدین معناست که نرخ های گذار منفی نیستند و شرط (۵) نیز بدین معناست که حرکت سیستم از مود  $i$  به یکی از مودهای  $j$  با احتمال یک تضمین شده است. همچنین فرض بر آن است که زنجیره مارکوف کاهش ناپذیر است یعنی احتمال حرکت سیستم از یک مود به مود دیگر در تعداد قابل شمارشی از کلیدزنی ها (پرش ها) صورت می گیرد [۱۵].

در معادله (۱)،  $A(r_t, t)$  و  $B(r_t, t)$  ماتریس های سیستم هستند که وابسته به مود بوده و ابعاد مناسبی دارند. به منظور لحاظ کردن عدم قطعیت ها در مدل، ماتریس های دینامیک سیستم به صورت  $B(r_t, t) = B(r_t) + \Delta B(r_t, t)$  و  $A(r_t, t) = A(r_t) + \Delta A(r_t, t)$  عریف شده اند که در آن ها  $A(r_t)$  و  $B(r_t)$  ماتریس های معلوم و  $\Delta B(r_t, t)$  و  $\Delta A(r_t, t)$  ماتریس هایی نامعلوم و وابسته به مود هستند که اثر عدم قطعیت متغیر با زمان و کران محدود را بیان می کنند. این عدم قطعیت ها به صورت (۶) هستند،

$$\begin{aligned} \Delta A(r_t, t) &= D_A(r_t) F_A(r_t, t) E_A(r_t), \\ \Delta B(r_t, t) &= D_B(r_t) F_B(r_t, t) E_B(r_t) \end{aligned} \quad (6)$$

ماتریس های  $D_A(r_t)$ ،  $D_B(r_t)$ ،  $E_A(r_t)$  و  $E_B(r_t)$  معلوم و حقیقی بوده و ماتریس های  $F_A(r_t, t)$  و  $F_B(r_t, t)$  نامعلوم و متغیر با زمان هستند که عناصر قابل سنجش با معیار لگک<sup>۱</sup> با شرایط زیر را دارند،

$$F_B^T(r_t, t) F_B(r_t, t) \leq I, \quad F_A^T(r_t, t) F_A(r_t, t) \leq I$$

**نکته ۱-** از این پس به منظور سادگی در علامت گذاری ها از عبارت  $r_t = i$  به منظور اشاره به مود  $i$  ام بهره برده می شود. بنابراین ماتریس های سیستم به صورت  $A(i)$ ،  $B(i)$ ،  $\Delta A(i)$ ،  $\Delta B(i)$ ،  $F_A(i)$ ،  $F_B(i)$ ،  $D_A(i)$ ،  $D_B(i)$ ،  $E_A(i)$  و  $E_B(i)$  می باشد.

استفاده از ساختار ارائه شده، به طراحی کنترل کننده بر مبنای تئوری لیاپانوف پرداخته می شود. بدین منظور تابع لیاپانوفی از نوع چندگانه در نظر گرفته می شود که تنها به مودهای کنترل کننده وابسته بوده و به صورت غیرمستقیم مودهای سیستم را نیز لحاظ می کند. براساس این تابع لیاپانوف ابتدا پایداری پذیری سیستم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت کنترل کننده ناهماهنگ طراحی می گردد. شایان ذکر است که سیستم پرش مارکوف برای سادگی به صورت خطی در نظر گرفته شده و به منظور عمومیت دهی به مسئله، شامل عدم قطعیت های دینامیک کران محدود از نوع متغیر با زمان فرض گشته است. به دلیل رویکرد خاص مبتنی بر سیستم های پرش مارکوفی تکه ای همگن، تمام روابط و طراحی ها به صورت مجموعه ای از روابط نامساوی ماتریسی خطی حاصل شده اند که قابلیت حل پذیری بالایی توسط نرم افزارها و روش های بهینه سازی موجود دارند. روش ارائه شده، به دلیل استفاده از اطلاعات مربوط به تغییر وضعیت در سیستم، نسبت به کنترل کننده مستقل از مود [۱۹] از لحاظ محافظه کاری ارجحیت دارد. همچنین، این کنترل کننده نسبت به کنترل کننده های ناهماهنگ مشابه [۲۰ و ۲۱] قابلیت لحاظ کردن زنجیره های مستقل اما پیرو را بین سیستم و کنترل کننده داشته و از نظر قابلیت حل پذیری و سادگی روابط بر آن ها برتری دارد. نتایج شبیه سازی این روش بر روی سیستم نمونه، نمایانگر ویژگی های آن است.

ساختار این مقاله بدین ترتیب است، در بخش ۲ تعاریف اولیه ذکر شده و مسئله کنترل ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف بیان گشته است. در بخش ۳ با استفاده از رویکرد سیستم های پرش مارکوف ناهمگن، ابتدا پایداری پذیری سیستم بررسی گشته و در ادامه، طراحی کنترل کننده صورت پذیرفته است. بخش ۴ به نتایج شبیه سازی و مقایسه های مربوطه اختصاص یافته و بخش ۵ حاوی جمع بندی، نتیجه گیری و پیشنهادهای برای ادامه پژوهش جاری است.

## ۲- تعاریف اولیه و بیان مسئله

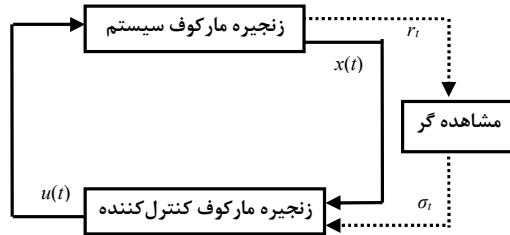
برای معرفی سیستم پرش مارکوف خطی، فضای احتمالاتی  $(\Omega, F, \rho)$  با فرض های رایج در نظر گرفته می شود [۲۰] که در آن  $\rho$  به ترتیب فضای نمونه، جبر وقایع و سنجی احتمال در فضای نمونه هستند. در این صورت سیستم پرش مارکوف خطی نامعین به صورت معادله (۱) در فضای احتمالاتی بیان می گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r_t, t)x(t) + B(r_t, t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, r_{t_0} = r_0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  بردار حالت های سیستم با بعد  $m$   $u(t) \in \mathbf{R}^m$  بردار ورودی سیستم با بعد  $m$  و  $x_0$  بردار شرایط اولیه برای سیستم است. پارامتر  $\{r_t, t \geq 0\}$  معرف یک زنجیره ی مارکوف همگن و پیوسته- زمان است که مقادیری گسسته خود را از مجموعه ی متناهی  $\{1, 2, \dots, N\}$  اتخاذ می کند. این زنجیره مارکوف ماتریس گذاری به صورت (۲) دارد،

<sup>۱</sup> Lebesgue

وضعیت صحیح از کنترل کننده می شود. برای غلبه بر این مشکل لازم است ساختار کنترلی اثرات این عدم انطباق بین زنجیره مارکوف سیستم و زنجیره مارکوف مشاهده شده از سیستم را لحاظ کند. چنین ساختاری که یک ساختار ناهماهنگ نامیده می شود و در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: ساختار کنترلی ناهماهنگ مارکوفی

در ادامه، با توجه به بیانی که از مسئله کنترل ناهماهنگ برای سیستم های مارکوفی ارائه گشت به طراحی این ساختار پرداخته شده است. اما پیش از آغاز این طراحی تعدادی از تعاریف مهم و کاربردی بیان می گردند.

**تعریف ۱-** [۱۷ و ۲۶] یک فرآیند مارکوف با تعداد حالات محدود بر مجموعه  $N = \{1, 2, \dots, N\}$  همگن است اگر احتمالات گذار آن از وضعیت  $i$  به وضعیت  $j$  در تمامی زمانها مطابق رابطه  $\Pr\{r_{t+h} = j | r_t = i\} = p(i, j, h)$  باشد که در آن  $p(\cdot)$  معرف تابع احتمال است. به همین ترتیب یک فرآیند مارکوف ناهمگن است اگر نرخ های گذار آن در رابطه  $\Pr\{r_{t+h} = j | r_t = i\} = p(i, t, j, t+h)$  عبارتی یک فرآیند مارکوف ناهمگن (همگن) است اگر نرخ های گذار آن متغیر با زمان (ثابت با زمان) باشند.

**تکته ۲-** نرخ های گذار فرآیند مارکوف کنترل کننده، متغیر با زمان هستند اما تغییرات زمانی آنها به صورت لحظه ای نیست. در واقع تغییرات زمانی نرخ های گذار زنجیره  $\sigma_t$  به دلیل وابستگی آن به زنجیره  $r_t$  است. لذا آن جایی که  $r_t$  یک سیگنال متغیر با زمان به صورت تکه ای است، لذا نرخ های گذار  $\sigma_t$  نیز متغیر با زمان به صورت تکه ای هستند. بنابراین زنجیره  $\sigma_t$  در واقع یک زنجیره مارکوف تکه ای همگن است. منظور از زنجیره تکه ای همگن، زنجیره ای با نرخ های گذار متغیر با زمان، اما ثابت در بازه های مشخص است.

**تکته ۳-** سیستم (۱) یک سیستم پرش مارکوف همگن و خطی است اما کنترل کننده ی مربوط به آن بر اساس یک زنجیره مارکوف تکه ای همگن کلید می زند. از این رو، سیستم حلقه بسته (کنترل شده) دارای دو زنجیره مارکوف مجزا بوده و به عنوان یک سیستم یکپارچه، ساختاری با پرش مارکوف تکه ای همگن است.

**تعریف ۲-** [۱۵] برای هر وضعیت آغازین  $r_0$  و به ازای هر بردار از شرایط اولیه  $x_0$  سیستم (۱) با  $u(t) = 0$  پایدار مقاوم تصادفی است اگر شرط (۱۰) به ازای تمامی عدم قطعیت های ممکن برقرار گردد،

$E_B(i)$  و  $E_A(i)$  خواهند بود. علاوه بر این زمان آغازین  $t_0 = 0$  بوده و حالت و وضعیت آغازین یعنی  $r_0$  و  $x_0$  معلوم فرض شده اند. برای سیستم (۱)، کنترل کننده به صورت،

$$u(t) = K(\sigma_t)x(t) \quad (۷)$$

در نظر گرفته شده است. ماتریس  $K(\sigma_t)$  بهره کنترل کننده و دارای ابعاد مناسب است که باید به منظور پایدارسازی مقاوم و تصادفی سیستم طراحی گردد.  $\{\sigma_t, t \geq 0\}$  معرف زنجیره مارکوفی است که کلیدزنی بین کنترل کننده های کاندید  $K(\sigma_t)$  را برای پایدارسازی مدیریت می کند. این زنجیره نیز یک زنجیره پیوسته-زمان با مقادیر گسسته است که در مجموعه متناهی  $M = \{1, 2, \dots, M\}$  با ماتریس گذار (۸) بیان می شود.

$$P^{r_{t+h}} = \begin{bmatrix} p_{11}^{r_{t+h}} & p_{12}^{r_{t+h}} & \dots & p_{1M}^{r_{t+h}} \\ p_{21}^{r_{t+h}} & p_{22}^{r_{t+h}} & \dots & p_{2M}^{r_{t+h}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1}^{r_{t+h}} & p_{M2}^{r_{t+h}} & \dots & p_{MM}^{r_{t+h}} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

عناصر ماتریس گذار (۸) مطابق با (۹) تعریف شده اند، و در آن  $p_{mm}^{r_{t+h}} \geq 0$  نرخ گذار از وضعیت  $m$  در زمان  $t$  به وضعیت  $n$  در زمان  $t+h$  بوده و شرط  $p_{mm}^{r_{t+h}} = -\sum_{n=1, n \neq m}^M p_{mn}^{r_{t+h}}$  را نیز برقرار می سازد که پیش تر در مورد آن شرح داده شده است.

$$\Pr\{\sigma_{t+h} = n | \sigma_t = m\} = \begin{cases} p_{mn}^{r_{t+h}} h + o(h) & m \neq n \\ 1 + p_{mm}^{r_{t+h}} h + o(h) & m = n \end{cases} \quad (۹)$$

طبق رابطه (۹) مشخص است که زنجیره  $\sigma_t$  به دلیل نرخ های گذار وابسته به  $r_t$  از این زنجیره پیروی می کند اما باید توجه داشت که زنجیره  $r_t$  از نظر تصادفی از زنجیره  $\sigma_t$  مستقل است. این بدین معناست که حالت بعدی در زنجیره  $\sigma_t$  تنها به حالت قبلی خود این زنجیره وابسته بوده و به طور تصادفی با حالت های زنجیره  $r_t$  در ارتباط نیست. از این پس همانند نکته ذکر شده در توجه ۱، به منظور سادگی برای اشاره به بهره های کنترل کننده از  $K(m)$  در حالت  $\sigma_t = m$  استفاده خواهد شد.

کنترل کننده (۷) یک کنترل کننده ناهماهنگ با سیستم است چرا که زنجیره مارکوف مدیریت کننده کلیدزنی در آن با زنجیره مارکوف تنظیم کننده ی پرش در سیستم متفاوت است. البته، لازم به ذکر است که هر چند دو زنجیره نامطابق هستند اما براساس احتمالات مشخصی (مطابق رابطه (۹))، به یکدیگر مرتبط می باشند.

انگیزه اصلی برای در نظر گرفتن یک ساختار کنترلی ناهماهنگ، مسئله عدم دسترسی به وضعیت های سیستم در هر لحظه است. در واقع تشخیص وضعیت فعال سیستم به صورتی دقیق و صحیح عملاً با دشواری هایی مواجه است. تشخیص وضعیت فعال توسط مشاهده گری از زنجیره مارکوف صورت می گیرد، دقیق نبودن این مشاهده منجر به تشخیص نادقیق وضعیت فعال و باعث بروز عدم قطعیت در انتخاب

هدف این بخش پرداختن به مسئله پایداری پذیری و طراحی پایدار ساز تصادفی ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی است. در ابتدا یک شرط کافی برای پایداری پذیری سیستم با کنترل کننده فیدبک حالت ناهماهنگ بدست آمده و سپس کنترل کننده به نحوی طراحی می گردد که سیستم (۱) پایدار مقاوم تصادفی گردد. شرط پایداری پذیری و روابط طراحی کنترل کننده همگی به صورت مجموعه ای از نامساوی های ماتریسی خطی بدست آمده اند که به صورت سیستماتیک و با استفاده از ابزارهای موجود به سادگی قابل حل هستند. قانون کنترلی به صورت (۷) در نظر گرفته شده و با جایگزینی در معادله (۱)، دینامیک سیستم حلقه بسته به صورت (۱۱) بدست می آید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}(r_t, \sigma_t, t)x(t) \\ x(t_0) = x_0, r_{i_0} = r_0 \end{cases} \quad (11)$$

به صورتی که ماتریس حلقه بسته سیستم به صورت (۱۲) است.

$$\bar{A}(r_t, \sigma_t, t) = A(r_t, t) + B(r_t, t)K(\sigma_t) \quad (12)$$

قضیه ای که در ادامه خواهد آمد، شرط کافی برای پایداری پذیری سیستم است.

**قضیه -** سیستم نامعین (۱) تحت بهره های کنترلی (۷) پایداری پذیر در مفهوم مقاوم تصادفی است اگر مجموعه ای از ماتریس های متقارن، مثبت معین و وابسته به وضعیت  $X(m)$ ، مجموعه ای از ماتریس های وابسته به وضعیت  $Y(m)$  و همچنین اسکالارهای مثبت و وابسته به وضعیت  $\varepsilon A(i)$  و  $\varepsilon B(i)$  به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه روابط نامساوی ماتریسی خطی زیر به ازای تمامی  $m \in \underline{M}$  و  $i \in \underline{N}$  برقرار گردند،

$$\begin{bmatrix} J(i, m) & X(m)E_A^T(i) & Y^T(m)E_B^T(i) & \underline{S}(i, m) \\ E_A(i)X(m) & -\varepsilon_A(i)I & 0 & 0 \\ E_B(i)Y(m) & 0 & -\varepsilon_B(i)I & 0 \\ \underline{S}^T(i, m) & 0 & 0 & -\underline{Z}(m) \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

که در آن داریم،

$$J(i, m) = X(m)A^T(i) + A(i)X(m) + Y^T(m)B^T(i) + B(i)Y(m) + \varepsilon_A(i)D_A^T(i)D_A^T(i) + \varepsilon_B(i)D_B^T(i)D_B^T(i) + p_{mm}^i X(m) \quad (14)$$

$$\underline{S}(i, m) = \left[ \sqrt{p_{m1}^i} X(m), \dots, \sqrt{p_{mm-1}^i} X(m), \sqrt{p_{mm+1}^i} X(m), \dots, \sqrt{p_{mM}^i} X(m) \right] \quad (15)$$

$$\underline{Z}(m) = \text{diag} [X(1), \dots, X(m-1), X(m+1), \dots, X(M)] \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} E \left\{ \|x(t)\|^2 dt \mid x_0, r_0 \right\} < \infty \quad (10)$$

که در این رابطه،  $E\{\cdot\}$  امید مشروط به مقادیر اولیه  $x_0$  و  $r_0$  است.

**لم ۱- [۲۷]** اگر  $Y$  ماتریس متقارن،  $H$  و  $E$  ماتریس هایی با ابعاد مناسب و  $F$  ماتریسی با شرط  $F^T F \leq I$  باشد، آنگاه نامساوی های زیر برقرار و معادل هستند،

$$- \text{به ازای هر } \varepsilon > 0 \quad HFE + E^T F^T H^T \leq \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1} E^T E$$

برقرار است.

$$- Y + HFE + E^T F^T H^T < 0$$

و فقط اگر  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد که  $Y + \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$  برقرار باشد.

**لم ۲- [۱۵]** نامساوی ماتریس خطی  $M = \begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & Z \end{bmatrix}$  را در نظر

بگیرید که در آن  $X$  و  $Z$  ماتریس هایی متقارن و  $Y$  ماتریسی با ابعاد مناسب باشد. در این صورت  $M$  مثبت معین است اگر و فقط اگر  $X > 0$  بوده و  $X - Y^T Z^{-1} Y > 0$  برقرار باشد. به رابطه دوم مکمل شرا گفته می شود.

با معرفی سیستم، ساختار کنترل کننده ی ناهماهنگ، تعاریف و لم ها، اکنون مسئله ای این مقاله بدین صورت بیان می گردد:

(۱) بدست آوردن شرایط پایداری پذیری برای سیستم پرش مارکوف خطی و نامعین تحت کنترل کننده ناهماهنگ.

(۲) طراحی بهره های کنترل کننده ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی به طوری که سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم تصادفی گردد.

**تکته ۴-** در این مقاله فرض بر آن است که نرخ های گذار مربوط به زنجیره مارکوف سیستم و نرخ های گذار مربوط به زنجیره مارکوف مشاهده شده (که توسط کنترل کننده مورد استفاده قرار می گیرند)، از پیش موجود و فراهم هستند. به عبارتی دیگر تعداد وضعیتها و نرخ های گذار آنها، پارامترهای طراحی نیستند. در حالت کلی، برای دستیابی به اطلاعات ماتریس های گذار باید آزمایش هایی عملی بر روی سیستم صورت پذیرد و یا از داده های ذخیره شده در طول مدت عملکرد پیشین سیستم (داده های حافظه سیستم) بهره برده شود. روش های متعدد و معروفی برای به دست آوردن نرخ های گذار سیگنال های مارکوفی وجود دارد که به تعدادی از آنها در [۲۸] اشاره شده است. نخستین راه استفاده از الگوریتم های تخمین آماری و دومین راه استفاده از تکنیک های گرافیکی است [۲۸] و [۲۹]. روش اول هنگامی کارائی دارد که تعداد کل نرخ های گذار اندک باشد اما روش دوم برای تعداد زیاد نرخ های گذار مناسب است.

### ۳- بررسی پایداری پذیری و طراحی پایدار ساز

#### تصادفی ناهماهنگ

<sup>۱</sup> Schur Complement.

$$LV(x(t), i, m) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} x(t+h)^T P(m) x(t+h) + 1/h \left[ \sum_{n=1, n \neq m}^M p_{mn}^i h x(t+h)^T P(n) x(t+h) + (1 + p_{mm}^i h) P(m) x(t+h) - 1/h x(t)^T P(m) x(t) \right] \right\} = \quad (20)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} x(t+h)^T P(m) x(t+h) + \sum_{n=1}^M p_{mn}^i x(t+h)^T P(n) x(t+h) + 1/h [x(t+h)^T P(m) x(t+h) - x(t)^T P(m) x(t)] \right\}$$

رابطه (۲۰) پس از ساده سازی به صورت (۲۱) در می آید.

$$LV(x(t), i, m) = x(t)^T [\bar{A}^T(i, t) P(m) + P(m) \bar{A}(i, t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^M p_{mn}^i P(n)] x(t) \quad (21)$$

بر اساس (۲۱)، اگر نامساوی (۲۲) برقرار باشد آنگاه  $LV(x(t), i, m) < 0$  برقرار خواهد بود.

$$\bar{A}^T(i, t) P(m) + P(m) \bar{A}(i, t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^M p_{mn}^i P(n) < 0 \quad (22)$$

بر اساس اثبات اشاره شده در تئوری ۴ بخش ۲، ۲ از [۱۵]، برقراری نامساوی  $LV(x(t), i, m) < 0$  به معنای برقراری تعریف پایداری تصادفی مقاوم (۱۰) برای سیستم حلقه بسته (۱۱) است. اگر عبارت  $(A(i) + \Delta A(i, t)) + (B(i) + \Delta B(i, t)) K(m)$  جایگزین  $\bar{A}(i, m, t)$  در نامساوی (۲۲) شود، نامساوی (۲۳) بدست می آید.

$$A^T(i) P(m) + P(m) A(i) + K^T(m) B^T(i) P(m) + P(m) B(i) K(m) + P(m) \Delta A(i, t) + \Delta A^T(i, t) P(m) + P(m) \Delta B(i, t) K(m) + K^T(m) \Delta B^T(i, t) P(m) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^M p_{mn}^i P(n) < 0 \quad (23)$$

با استفاده از عبارت های (۶) که توصیف کننده عدم قطعیت های موجود در دینامیک سیستم هستند و برقراری  $\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P(m) = 0$  با توجه به خاصیت (۵) از زنجیره مارکوف، نامساوی (۲۳) به صورت (۲۴) در می آید.

در این صورت بهره های پایدار ساز از رابطه  $K(m) = Y(m) X(m)^{-1}$  بدست می آیند.

**اثبات** - تابع لیاپانوفی به صورت مربعی و وابسته به زنجیره مشاهده شده به صورت (۱۷) در نظر گرفته شده است.

$$V(x(t), r_t, \sigma_t) = x^T(t) P(\sigma_t) x(t) \quad (17)$$

این تابع به صورت یک تابع لیاپانوف چندگانه<sup>۱</sup> فرض شده است تا اثرات تغییرات دینامیک و بهره های کنترلی را لحاظ کند. زوج  $(r_t, \sigma_t)$  در  $V(x(t), r_t, \sigma_t)$  مقادیر خود را از مجموعه  $N \times M$  اخذ کرده و  $P(m)$  معرف ماتریس های مثبت معین متقارن به ازای  $m \in M$  است. این تابع لیاپانوف به صورت مستقیم به وضعیتهای زنجیره مارکوف سیستم وابستگی ندارد بلکه از طریق زنجیره مشاهده شده با آن مرتبط می شود. مولد ضعیف<sup>۲</sup> [۱۵] برای این تابع لیاپانوف به صورت (۱۸) است.

$$LV(x(t), i, m) = \lim_{h \rightarrow 0} 1/h (E[V(x(t+h), r_{t+h}, \sigma_{t+h}) | x(t) = x(t), r_t = i, \sigma_t = m] - V(x(t), i, m)) \quad (18)$$

این مولد ضعیف در طول مسیر سیستم پرش مارکوف خطی به صورت رابطه (۱۹) محاسبه می شود که مبتنی بر قانون احتمالات کل است.

$$LV(x(t), i, m) = \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} h \left[ \sum_{n=1, n \neq m}^M p_{mn}^j h x(t+h)^T P(n) x(t+h) + (1 + p_{mm}^j h) x(t+h)^T P(m) x(t+h) \right] + (1 + \lambda_i h) \left[ \sum_{n=1, n \neq m}^M p_{mn}^i h x(t+h)^T P(n) x(t+h) + (1 + p_{mm}^i h) x(t+h)^T P(m) x(t+h) \right] - x(t)^T P(m) x(t) \right\} \quad (19)$$

با توجه به استقلال احتمالاتی دو زنجیره مارکوف  $r_t$  و  $\sigma_t$ ، رابطه ی،

$$Pr(r_{t+h} = j, \sigma_{t+h} = n | r_t = i, \sigma_t = m) = Pr(r_{t+h} = j | r_t = i)$$

$$\sigma_{t+h} = n, \sigma_t = m) = Pr(\sigma_{t+h} = n | r_t = i, \sigma_t = m)$$

برای احتمالات گذار برقرار است. بدین ترتیب، رابطه (۲۰) نوشته می شود.

<sup>۱</sup> Multiple Lyapunov Function

<sup>۲</sup> Infinitesimal Generator

در نهایت با تعریف  $Y(m) = K(m)X(m)$  و استفاده از نامساوی (۲۹)، نامساوی (۳۰) حاصل می گردد. این نامساوی با استفاده از لم ۲ به صورت مجموعه ای از شروط به فرم نامساوی های ماتریسی خطی (۱۳) درمی آید.

$$\begin{aligned} & X(m)A^T(i) + A(i)X(m) + X(m)K^T(m)B^T(i) + \\ & B(i)K(m)X(m) + \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^T(i) + \varepsilon_A^{-1}(i) \\ & X(m)E_A^T(i)E_A(i)X(m) + \varepsilon_B(i)D_B(i)D_B^T(i) + \\ & \varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)X(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m)X(m) + \\ & \underline{S}(i, m)\underline{Z}^{-1}(m)\underline{S}^T(i, m) + p_{mm}^i X(m) < 0 \end{aligned} \quad (۳۰)$$

بدین ترتیب اثبات تکمیل است. ■

لازم به ذکر است که، قضیه ارائه شده وابسته به پارامترهای طراحی  $\varepsilon_B(i)$  و  $\varepsilon_A(i)$  است. این پارامترها که از لم ۱ نتیجه شده اند، درجه قوام ساختار طراحی شده را مشخص می کنند. هر چند لم ۱ به ازای هر مقداری از این پارامترها برقرار است اما اندازه آن ها در محافظه کاری نتایج موثر است. از همین رو بهتر است این مقدار به صورت آگاهانه انتخاب گردند. به طور کلی دو دیدگاه برای انتخاب این پارامترها مطرح است. دیدگاه اول انتخاب آن ها بر اساس درجه قوامی از پیش توصیه شده است دیدگاه دوم بهینه سازی این پارامترهاست [۲۷]. با توجه به این که بهینه ساز این پارامترها منجر به روابط نامساوی دوخطی ماتریسی می گردد که با دشواری های بسیار در حل مواجه هستند در این مقاله از رویکرد اول بهره برده شده است.

**توجه ۵-** به دلیل وجود عدم قطعیت در سیستم (۱)، قضیه ارائه شده یک شرط کافی برای بررسی پایداری پذیری سیستم و طراحی کنترل کننده است. توسعه شروط مذکور به صورت شروط لازم و کافی برای سیستم های مارکوف تحت کنترل ناهماهنگ نیازمند بررسی و پژوهش های تکمیلی می باشد.

**توجه ۶-** کنترل کننده ناهماهنگ حالت عمومی تری از کنترل هماهنگ و مستقل از وضعیت است. در واقع به ازای  $I_i$  و  $\sigma_i$  یکسان، نتایج به دست آمده در این مقاله حالت هماهنگ مورد اشاره در قضیه ۱۴ در [۱۵] و حالت مستقل از وضعیت در قضیه ۳۸ از [۱۵] را دربر می گیرد.

#### ۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی روش ارائه شده، یک کنترل کننده ناهماهنگ برای سیستم خطی پرش مارکوفی که در [۱۵] مورد اشاره قرار گرفته، طراحی و شبیه سازی شده است. نتایج بدست آمده از این طراحی با کنترل کننده هماهنگ با سیستم و کنترل کننده مستقل از وضعیت سیستم، مورد مقایسه قرار گرفته است. در واقع در این شبیه سازی ها نشان داده شده است که ساختار کنترل ناهماهنگ نه تنها قابلیت لحاظ کردن اثرات عدم انطباق را دارد بلکه کارایی قابل قبولی

$$\begin{aligned} & A^T(i)P(m) + P(m)A(i) + K^T(m)B^T(i)P(m) + \\ & P(m)B(i)K(m) + P(m)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) + \\ & E_A^T(i)F_A^T(i, t)D_A^T(i)P(m) + P(m)D_B(i)F_B(i, t) \\ & E_B^T(i)K(m) + K^T(m)E_B^T(i)F_B^T(i, t)D_B^T(i)P(m) + \\ & \sum_{n=1}^M p_{mn}^i P(n) < 0 \end{aligned} \quad (۲۴)$$

بر اساس آن چه که در لم ۱ ذکر شد، اگر اسکالره های حقیقی و مثبت  $\varepsilon_A(i)$  و  $\varepsilon_B(i)$  طبق نامساوی های (۲۵) و (۲۶) برای بخش های غیرقطعی سیستم موجود باشند، آنگاه با استفاده از این نامساوی ها رابطه (۲۴) به صورت (۲۷) درمی آید.

$$\begin{aligned} & P(m)D_A(i)F_A(i, t)E_A(i) + E_A^T(i)F_A^T(i, t)D_A^T(i) \\ & P(m) \leq \varepsilon_A(i)P(m)D_A(i)D_A^T(i)P(m) + \\ & \varepsilon_A^{-1}(i)E_A^T(i)E_A(i) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} & P(m)D_B(i)F_B(i, t)E_B(i)K(m) + K^T(m)E_B^T(i) \\ & F_B^T(i, t)D_B^T(i)P(m) \leq \varepsilon_B(i)P(m)D_B(i)D_B^T(i) \\ & P(m) + \varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

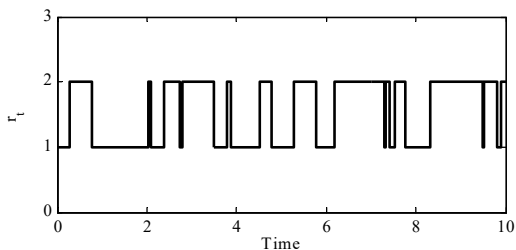
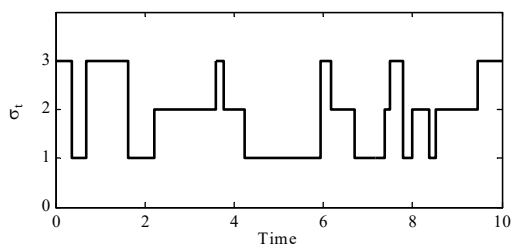
$$\begin{aligned} & A^T(i)P(m) + P(m)A(i) + K^T(m)B^T(i)P(m) + \\ & P(m)B(i)K(m) + \varepsilon_A(i)P(m)D_A(i)D_A^T(i)P(m) + \\ & \varepsilon_A^{-1}(i)E_A^T(i)E_A(i) + \varepsilon_B(i)P(m)D_B(i)D_B^T(i)P(m) + \\ & \varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m) + \sum_{n=1}^M p_{mn}^i P(n) < 0 \end{aligned} \quad (۲۷)$$

همان طور که مشاهده می شود، رابطه (۲۷) در واقع یک شرط غیرخطی برحسب  $P(m)$  و  $K(m)$  است. به منظور تبدیل این نامساوی ماتریسی به یک نامساوی ماتریسی خطی،  $X(m) = P^{-1}(m)$  تعریف شده و عبارت (۲۷) از سمت راست و چپ در  $X(m)$  ضرب می شود. در این صورت رابطه (۲۸) بدست می آید.

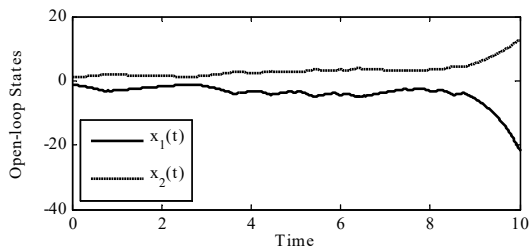
$$\begin{aligned} & X(m)A^T(i) + A(i)X(m) + X(m)K^T(m)B^T(i) + \\ & B(i)K(m)X(m) + \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^T(i) + \varepsilon_A^{-1}(i) \\ & X(m)E_A^T(i)E_A(i)X(m) + \varepsilon_B(i)D_B(i) \\ & D_B^T(i) + \varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)X(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m) \\ & X(m) + X(m) \left[ \sum_{n=1}^M p_{mn}^i X^{-1}(n) \right] X(m) < 0 \end{aligned} \quad (۲۸)$$

در این مرحله  $\underline{S}(i, m)$  و  $\underline{Z}(m)$  مطابق با (۱۵) و (۱۶) تعریف شده و عبارت  $X(m) \left[ \sum_{n=1}^M p_{mn}^i X^{-1}(n) \right] X(m)$  در نامساوی (۲۸)، به صورت (۲۹) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} & X(m) \left[ \sum_{n=1}^M p_{mn}^i X^{-1}(n) \right] X(m) = \\ & \underline{S}(i, m)\underline{Z}^{-1}(m)\underline{S}^T(i, m) + p_{mm}^i X(m) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

شکل ۲: تغییرات بین دو وضعیت از زنجیره مارکوف سیستم  $(\sigma_1)$ شکل ۳: تغییرات بین دو وضعیت از زنجیره مارکوف کنترل کننده  $(\sigma_2)$ 

شکل ۴ حالت های سیستم کنترل نشده را تحت کلیدزنی شکل ۲ نمایش می دهد. همان طور که از این شکل بر می آید سیستم کنترل نشده ناپایدار و طراحی کنترل کننده برای آن ضروری است.



شکل ۴: حالت های سیستم پرش مارکوف کنترل نشده

در ابتدا لازم است پایداری پذیر بودن سیستم بررسی گردد، بدین منظور بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی (۱۳)–(۱۶) در قضیه به ازای انتخاب پارامترهای قوام [۲۷]  $\varepsilon A(2) = \varepsilon B(2) = \varepsilon A(1) = \varepsilon B(1) = 0.5$  بدست می آیند که پایداری پذیر بودن سیستم را آشکار می سازد.

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.01 \\ 0.01 & 0.21 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.09 \\ 0.09 & 0.19 \end{bmatrix},$$

$$X(3) = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.09 \\ 0.09 & 0.19 \end{bmatrix}, Y(1) = \begin{bmatrix} -0.3391 & 0.01 \\ 0.0147 & -0.34 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$Y(2) = \begin{bmatrix} -0.31 & 0.01 \\ 0.01 & -0.32 \end{bmatrix}, Y(3) = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.01 \\ 0.01 & -0.33 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب بهره های کنترل کننده ناهماهنگ به صورت (۳۶) بدست می آیند.

همانند یک ساختار هماهنگ داشته و علاوه بر این، محافظه کاری کمتری نسبت به ساختار مستقل از وضعیت نیز فراهم می سازد. لازم به ذکر است که برای بدست آوردن نتایج شبیه سازی در این بخش، از نرم افزار MATLAB 2016a و به منظور حل روابط نامساوی ماتریسی خطی از [۳۰] استفاده شده است.

**مثال:** یک سیستم پرش مارکوف با دو وضعیت، یعنی  $N = 2$  در نظر گرفته شده است. هر وضعیت دارای عدم قطعیت های دینامیکی پارامتری از نوع متغیر با زمان و کران محدود است. این سیستم دارای بردار حالت دو بعدی به صورت  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$  و بردار ورودی کنترلی به صورت  $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]$  است. وضعیت های نامی سیستم کلیدزن مارکوفی به همراه ماتریس های عدم قطعیت آن ها مطابق با روابط (۳۱) و (۳۲) هستند.

وضعیت اول،

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 0.1 & 1.0 \end{bmatrix}, D_A(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_A(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$D_B(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_B(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

وضعیت دوم،

$$A(2) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.0 & -0.25 \end{bmatrix}, D_A(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_A(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$D_B(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_B(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

این سیستم دارای ماتریس گذاری به صورت (۳۳) است.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

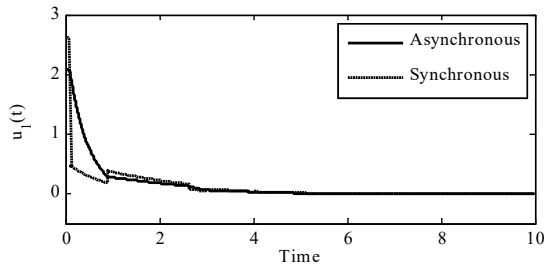
فرض بر آن است که زنجیره مارکوف مشاهده شده، سه وضعیتی یعنی دارای  $M = 3$  است. ماتریس نرخ های گذار برای این زنجیره مطابق با (۳۴) فرض شده اند.

$$P^1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 & -1.1 \end{bmatrix},$$

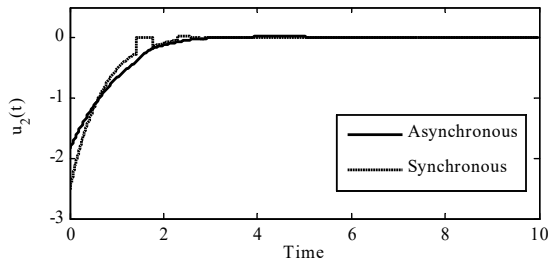
$$P^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1.5 & -2.5 & 1 \\ 1 & 0.2 & -1.2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

یک تحقق از فرآیند مارکوف  $P_i$  در شکل ۲ و همچنین یک تحقق از زنجیره مارکوف  $\sigma_i$  در شکل ۳ نشان داده شده است.

را به مبدا هدایت کرده و ورودی های کنترلی مناسبی را فراهم نموده است.



شکل ۶ (الف): سیگنال  $u_1(t)$  ناشی از کنترل کننده هماهنگ و ناهماهنگ مورد طراحی



شکل ۶ (ب): سیگنال  $u_2(t)$  ناشی از کنترل کننده هماهنگ و ناهماهنگ مورد طراحی

در مقایسه بین کنترل کننده هماهنگ و ناهماهنگ باید گفت که کنترل کننده ناهماهنگ رفتاری نزدیک به کنترل کننده کاملا هماهنگ با سیستم دارد. این تشابه هم از نظر سرعت همگرایی پاسخ ها به مبدا و هم از جنبه همواری سیگنال کنترلی در اشکال مشهود است. در واقع کنترل کننده ناهماهنگ می تواند با اثرات عدم انطباق بین زنجیره مارکوف سیستم و کنترل کننده برخورد کند و با این وجود کارایی بسیار مناسبی در مقایسه با کنترل کننده کاملا هماهنگ را فراهم سازد. بدیهی است هر چه خطای مشاهده و تخمین زنجیره مارکوف سیستم بیشتر باشد تفاوت بین ساختار ناهماهنگ و هماهنگ بیش تر خواهد شد. در چنین حالت هایی بهره گیری از ساختارهای ناهماهنگ کاملا ضروری خواهد بود.

به منظور مقایسه عملکرد ساختار ناهماهنگ و مستقل از وضعیت برای این سیستم، کنترل کننده مستقل از وضعیت طبق قضیه ۳۸ از [۱۵] به شرح (۳۸) طراحی شده است.

$$K = \begin{bmatrix} -2.9551 & 0.4308 \\ 0.4437 & -3.200 \end{bmatrix} \quad (38)$$

میزان محافظه کاری دو ساختار با دو معیار زمان نشست،  $T_s$ ، برای پاسخ حالت ها و تغییرات کلی برای سیگنال کنترلی،  $TV$ ، مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج حاصل از سیستم کنترل شده تحت این دو ساختار در جدول ۱ نمایش داده شده اند.

$$\|x(t)\|_2 \leq 1.5\% \|x(0)\|_2, \quad t > T_s \quad (39)$$

$$K(1) = \begin{bmatrix} -1.6376 & 0.1522 \\ 0.1545 & -1.6552 \end{bmatrix},$$

$$K(2) = \begin{bmatrix} -1.3399 & 0.1743 \\ 0.1418 & -0.9095 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

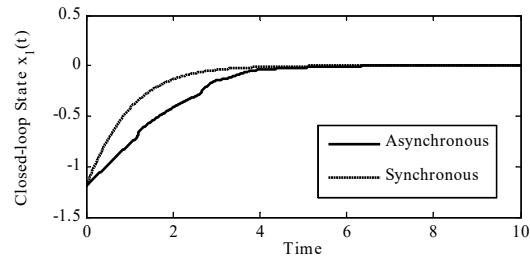
$$K(3) = \begin{bmatrix} -1.6981 & 0.1435 \\ 0.1467 & -1.7233 \end{bmatrix}$$

به منظور بررسی کارایی کنترل کننده ناهماهنگ، این ساختار با کنترل کننده هماهنگ با وضعیت های سیستم مورد مقایسه قرار گرفته است. در این حالت بهره های کنترل کننده هماهنگ بر اساس قضیه ۱۴ در [۱۵] مطابق با (۳۷) بدست می آیند.

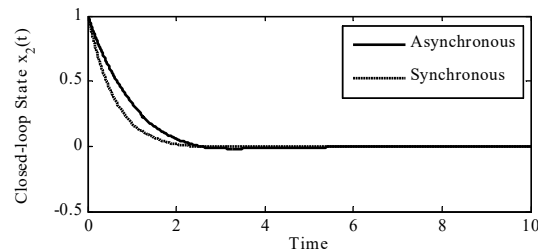
$$K(1) = \begin{bmatrix} -2.2133 & 0.1779 \\ 0.1944 & -2.2160 \end{bmatrix},$$

$$K(2) = \begin{bmatrix} -0.9172 & -0.2744 \\ -0.2795 & -0.7090 \end{bmatrix} \quad (37)$$

با در نظر گرفتن  $x_1(0) = -1.2, x_2(0) = 1, r_0 = 1, \sigma_0 = 3$  حالت  $x_1(t)$  از سیستم کنترل شده تحت طراحی های هماهنگ و ناهماهنگ در شکل ۵ (الف) و حالت  $x_2(t)$  از سیستم کنترل شده تحت این دو طراحی در شکل ۵ (ب) نشان داده شده اند.



شکل ۵ (الف): حالت  $x_1(t)$  از سیستم پرش مارکوف مورد شبیه سازی تحت کنترل هماهنگ و ناهماهنگ



شکل ۵ (ب): حالت  $x_2(t)$  از سیستم پرش مارکوف مورد شبیه سازی تحت کنترل هماهنگ و ناهماهنگ

این پاسخ ها به ازای تحقق های ۲ و ۳ بوده و سیگنال های کنترلی نظیر آن ها نیز در اشکال ۶ (الف) و ۶ (ب) نشان داده شده اند. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که کنترل کننده ناهماهنگ حالت های سیستم ها

بگیرد. مستقل کردن این ساختارها از زنجیره سیستم و طراحی آن‌ها به صورتی که تنها به زنجیره مشاهده شده وابسته باشند گامی مهم در نزدیک‌تر کردن این ساختارها از حالت نظری به حالت‌های عملی و کاربردی است.

### مراجع

- [1] P. Shi, F. Li, "A survey on Markovian jump systems: Modeling and design", *Int J Control Autom*, 13(1), 1-16, 2015.
- [2] C.C. Lutz and D.J. Stilwell, "Stability and disturbance attenuation for markov jump linear systems with time-varying transition probabilities", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 61(5), 1413-1418, 2016.
- [3] L. Zhang, Y. Leng, P. Colaneri, "Stability and stabilization of discrete-time semi-Markov jump linear systems via semi-Markov kernel approach", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 61(2), 503-508, 2016.
- [4] M. Faraji-Niri, M. R. Jahed-Motlagh and M. Barkhordari-Yazdi, "Stochastic stabilization of uncertain Markov jump linear systems with time varying transition rates", 22nd Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 1186-1191, Tehran, Iran, 20-22 May 2014.
- [5] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, M. Barkhordari-Yazdi, "Stochastic stability and stabilization of a class of piecewise-homogeneous Markov jump linear systems with mixed uncertainties", *Int J. Robust Nonlin*, DOI: 10.1002/mc.3602, 2016.
- [6] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, "Stochastic Stability and Stabilization of Markov jump linear system with instantly time-varying transition probabilities", *ISA Trans.* 65, 51-61, 2016.
- [7] نسبیة ظهرايي، حميد رضا مومني، اميرحسين ابوالمعصومي، "کنترل مود لغزشی سیستم های پرش مارکوف همراه با تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم"، *مجله کنترل*، جلد ۶ شماره ۳، صفحات ۷۰-۶۱، ۱۳۹۱.
- [8] L.E.O. Svensson, N. Williams, "Optimal monetary policy under uncertainty: A Markov jump linear quadratic approach", *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 90, 275-293, 2008.
- [9] M. Rasheduzzaman, M.O. Rolla, T. Paul, and J.W. Kimball, "Markov jump linear system analysis of microgrid stability", *American Control Conference*, pp. 5062 – 5066, Portland, USA, 4-6 June 2014.
- [10] F.R. Pour Safaei, K. Roh, S.R. Proulx, and J.P. Hespanha, "Quadratic control of stochastic hybrid systems with renewal transitions", *Automatica*, 50(11), 2822–2834, 2014.
- [11] B.C. Wang, J.F. Zhang, "Distributed output feedback control of Markov jump multi-agent systems", *Automatica*, 49(5), 1397–1402, 2013.
- [12] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, and M. Barkhordari-Yazdi, "Stabilization of active fault-tolerant control systems by uncertain

$$TV = \sum_{t=0}^{\infty} \|u(t + \Delta) - u(t)\| \quad (40)$$

شایان ذکر است که به منظور افزایش اطمینان، میانگینی از نتایج برای ۱۵۰ تحقق مستقل از سیستم گزارش شده است.

جدول ۱: مقایسه کنترل کننده‌های ناهماهنگ و مستقل از وضعیت برای سیستم

مثال		
نوع کنترل کننده	تغییرات کلی سیگنال کنترلی	زمان نشست میانگین
ناهماهنگ	۰/۰۰۱۹	۵/۱۹۲
مستقل از وضعیت	۱/۲۳۱۴	۹/۵۲۲

همان‌طور که از جدول ۱ برمی‌آید، کنترل کننده ناهماهنگ در مقایسه با کنترل کننده مستقل از وضعیت از محافظه‌کاری کمتری برخوردار است. اما باید توجه داشت که این کاهش محافظه‌کاری به بهای طراحی و پیاده‌سازی تعداد بیشتری از بهره‌های کنترلی است. لذا در این ساختارها محافظه‌کاری و هزینه، از نقطه نظر طراح، در دو سوی یک طیف قرار دارند.

### ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله طراحی کنترل کننده ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی مورد بررسی قرار گرفته است. پدیده ناهماهنگی مورد اشاره، ناشی از عدم انطباق‌هایی بین زنجیره مارکوف سیستم و زنجیره مارکوف کنترل کننده است و در صورتی که به درستی با آن برخورد نشود منجر به افت کارایی و یا گاهی ناپایداری سیستم می‌گردد. بدین منظور در این مقاله یک کنترل کننده ناهماهنگ برای سیستم طراحی شده است. اصول این طراحی بر تئوری لیاپانوف چندگانه استوار بوده و با دید جدیدی از سیستم به صورت یک ساختار مارکوفی ناهمگن صورت پذیرفته است. حاصل این امر شروطی به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی، به منظور بررسی پایداری پذیری و طراحی بهره‌های کنترلی است. ساختار کنترلی ناهماهنگ ارائه شده به دلیل عدم وابستگی مستقیم به وضعیت‌های سیستم ساختاری عملی‌تر و واقع‌گرایانه‌تر از کنترل کننده هماهنگ است و بر خلاف آن تنها به وضعیت‌های مشاهده شده از سیستم وابستگی دارد. مقایسه نتایج شبیه‌سازی این کنترل کننده با کنترل کننده هماهنگ نشان می‌دهد که کارایی کنترل کننده مذکور، علی‌رغم استقلال از وضعیت‌های سیستم، هم‌چنان قابل توجه و مناسب است و به همین سبب از دیدگاه عملی بر کنترل کننده هماهنگ ارجحیت دارد. همچنین این کنترل کننده بر ساختار مستقل از وضعیت نیز ارجحیت دارد و محافظه‌کاری کمتری در پاسخ به نتایج را فراهم می‌سازد. بدیهی است بهای این کاهش محافظه‌کاری، تعداد بهره‌های بیشتر کنترلی است که باید طراحی و پیاده‌سازی شوند. لازم به ذکر است که، روش پیشنهادی می‌تواند در طراحی انواع دیگر کنترل کننده‌ها با قابلیت‌های مختلف، از جمله کنترل کننده‌های بهینه، مقاوم و یا چندمنظوره نیز مورد استفاده قرار

- [22] R. Zhang, Y. Zhang, Y. Zhao, J. Liao, B. Li, "Extended  $H_\infty$  estimation for two-dimensional Markov jump systems under asynchronous switching", *Math. Probl. Eng.* DOI: 10.1155/2013/734271, 2012.
- [23] J. Wen, L. Peng, S.K. Nguang, "Asynchronous  $H_\infty$  control of constrained Markovian jump linear systems with average dwell time", *Int. J. Sensor Wireless Comm. Contr.* 3, 45-58, 2013.
- [24] Y. Zhang, R. Zhang, A.G. Wu, "Asynchronous  $l_2-l_\infty$  filtering for Markov jump systems", *Australian Control Conference*, 99-103, Perth, Australia, 2013.
- [25] R. Zhang, Y. Zhang, C. Hu, M.Q.H. Meng, Q. He, "Asynchronous  $H_\infty$  filtering for a class of two-dimensional Markov jump systems", *IET Control Theory Appl.* 6, 979-984, 2012.
- [26] L. Zhang, " $H_\infty$  estimation for discrete-time piecewise homogeneous Markov jump linear system", *Automatica* 49, 2570-2576, 2009.
- [27] L. Xie, "Output-feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty", *Int. J. Control* 63, 741-750, 1996.
- [28] M. Xie, and CD. Lai, "Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function", *Reliab. Eng. Syst. Safe.* 52(1), 87-93, 1996.
- [29] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, S.N. Kavuri, and K. Yin, "A review of process fault detection and diagnosis. Part III. Process history based methods", *Comput. Chem. Eng.* 27(3), 327-346, 2003.
- [30] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, 284-289, 2004.
- nonhomogeneous Markovian jump models", *Complexity*, 21, 318-329, 2016.
- [13] L. Qiu, S. Li, B. Xu, and G. Xu, " $H_\infty$  control of networked control systems based on Markov jump unified model", *Int J Robust Nonlinear Control*, 25(15), 2770-2786, 2015.
- [14] O.L.V. Costa, M.G. Todorov, M.D. Fragoso, "Continuous-Time Markov Jump Linear Systems", Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.
- [15] E.K. Boukas, "Stochastic Switching Systems: Analysis and Design", Birkhäuser, Basel, 2005.
- [16] N.K. Kwon, B.Y. Park, and P. Park, "Less conservative stabilization conditions for Markovian jump systems with incomplete knowledge of transition probabilities and input saturation", *Optimal Control Applications and Methods.*, 37(6), 1207-1216, 2016.
- [17] L. Zhang, " $H_\infty$  control of a class of piecewise homogeneous Markov jump linear systems", *7th Asian Control Conference*, Hong Kong, China, 197-202, 27-29 Aug 2009.
- [۱۸] بهزاد کفاش، زهرا نیکویی نژاد، علی دلاورخلفی، "یک الگوریتم تکراری برای حل مسایل کنترل بهینه تصادفی با استفاده از زنجیر مارکوف"، *مجله کنترل*، جلد ۱۰، شماره ۲، صفحات ۴۳-۳۵، ۱۳۹۵.
- [19] R.C.L.F. Oliveira, A.N. Vargas, J.B.R. do Val, P.L.D. Peres, "Mode-independent  $H_2$  control of a DC motor modeled as a Markov jump linear system", *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 22 (5), 1915-1919, 2014.
- [20] Z.G. Wu, P. Shi, H. Su, J. Chu, "Asynchronous  $l_2-l_\infty$  filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities", *Automatica* 50, 180-186, 2014.
- [21] Z. Shu, J. Xiong, J. Lam, "Asynchronous output-feedback stabilization of discrete-time Markovian jump linear systems", *51st IEEE Conference on Decision and Control*, 1307-1312, Maui, HI, 2012.