مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۷۱-۵۹

کنترل فازی تطبیقی آونگ معکوس دوگانه با استفاده از رویتگر فازی تطبیقی

احسان سرابادانی تفرشی[۱]، ابولفتح نیک رنجبر[۲]

[۱] کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج
[۲] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، a.nikranjbar@kiau.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۳/۲۱)

چکیده: در این مقاله پایدارسازی و کنترل ردیاب آونگ معکوس دوگانه با دینامیک نامعلوم به‌عنوان فرآیند غیرخطی ناقص عملگر با پیچیدگی‌های کنترلی خاص، با استفاده از کنترل‌کننده ترکیبی فازی تطبیقی غیرمستقیم و رویتگر فازی تطبیقی با فرض عدم دسترسی به بخشی از متغیرهای حالت سیستم، مورد مطالعه قرارگرفته است. طبیعت ذاتی دینامیک سیستم تحت کنترل به علت در اختیار نبودن تعداد دسترسی‌های کنترلی برابر با درجات آزادی سیستم، مشکلات جدی در برپایی کنترل مؤثر فرآیند دارد. فرض عدم دسترسی به متغیرهای حالت به‌عنوان مهم‌ترین پارامترها در طراحی کنترل‌کننده برای فرآیند مذکور نیز برای نخستین بار با روش ترکیبی بیان شده، مورد مطالعه قرارگرفته است. حاصل شبیه‌سازی‌ها و مطالعات مقایسه‌ای با سایر منابع منتشرشده، نشان‌دهنده توانمندی و برتری رویکرد ترکیبی کنترل‌کننده و رویتگر فازی تطبیقی پیشنهادی در حذف اثر اختلالات خارجی و تغییر پارامترها و دست‌یابی به هر دو هدف پایدارسازی و ردیابی مؤثر و مقاوم فرآیند دارد.

کلمات کلیدی: رویتگر فازی تطبیقی، کنترل فازی غیرمستقیم، آونگ معکوس دوگانه.

Fuzzy Adaptive Observer Based Control of Double Inverted Pendulum

Ehsan Sarabadani Tafreshi, Abolfath Nikranjbar

Abstract: In this paper, stabilization and trajectory tracking control of the double inverted pendulum (DIP) as a benchmark under actuated highly nonlinear dynamical system, attributed with specific control complexities using hybrid observer based indirect fuzzy adaptive control is investigated. Due to inherent nature of the process that the equal number of control inputs as the degrees of freedom of the plant are not available, therefore, setting up the control action faces with serious challenges. Meanwhile, inaccessibility assumption to some state parameters as the most important factor in designing the controller by means of the proposed control method is for the first time addressed stabilizing the specified plant in this research. In order to illustrate the performance of the proposed approach, specific simulation software is developed in Matlab/Simulink platform. Set of conducted simulation results and comparative studies with the published papers addressing the same aim, showing the capability and excellence of the proposed hybrid fuzzy adaptive observer control approach achieving the targets in terms of establishing stabilization, trajectory tracking and robustifying the under controlled plant.

Keywords: Fuzzy Adaptive Observer, Indirect Fuzzy Control, Double Inverted Pendulum (DIP)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

۱- مقدمه

آونگ معکوس مسئله‌ی نمونه کنترلی در بررسی عملکرد سیستم-های کنترل با اهداف پایدارسازی است. کنترل آونگ معکوس دوگانه[1] به‌عنوان سیستم دینامیکی ناقص عملگر[2] با ویژگی تعداد عملگرهای کمتر از تعداد درجات آزادی آن، به‌مراتب چالش برانگیزتر از آونگ معکوس است به‌طوری که با افزایش تعداد رابط‌های آن، پیچیدگی‌ها و نامعینی‌های سیستم افزایش می‌یابد [۱].

به‌طور طبیعی سیستم‌های ناقص عملگر مراتب بالایی از ناپایداری دارند که معیار مناسبی از نقاط ضعف و قوت سیستم کنترلی است [۲, ۳]. آونگ معکوس دوگانه نیز مسئله مناسبی برای بررسی و شناخت انواع روش‌های کنترلی بر روی دینامیک سیستم‌های با مراتب بالای غیرخطی در نظر گرفته می‌شود [۴]. در اغلب مقالات روش‌های کنترلی مطرح‌شده برای آونگ معکوس دوگانه، بر مبنای استفاده از روش‌های خطی سازی است [۵]. لازم به ذکر است که برای سیستم‌های ناقص عملگر با مرتبه بالای غیرخطی، بدست آوردن نتایج مطلوب با به‌کارگیری مدل خطی سیستم، بسیار دشوار است [۶].

قابلیت‌های متنوع سیستم‌های فازی ازجمله روش‌های محاسباتی نه‌چندان پیچیده همراه با مطابقت مناسب با روش‌های تطبیقی در تخمین دینامیک پیچیده و ناشناخته سیستم‌ها، برخی از مزایای این روش‌ها در مقایسه سایر روش‌ها در توسعه روزافزون آن‌ها در کاربردهای کنترلی است [۷]. با عنایت به قابلیت‌های محرز سیستم‌های فازی در اهداف کنترلی سیستم‌های دینامیکی، در این پژوهش هدف معرفی و استفاده از رویتگر فازی تطبیقی به‌منظور تخمین بخشی از متغیرهای حالت سیستم با فرض عدم دسترسی به اندازه‌گیری متغیرهای حالت سیستم آونگ معکوس دوگانه که به‌طور معمول در ساختار کنترل‌کننده مورد بهره-برداری قرار می‌گیرند، است. با توجه به امکان به‌کارگیری سیستم‌های فازی در بخش‌های متنوع در رویکردهای کنترلی، کنترل‌کننده اصلی سیستم نیز بر مبنای روش کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم طراحی و در محیط نرم‌افزار متلب/سیمولینک شبیه‌سازی‌های لازم و مقایسه نتایج به منظور صحت سنجی روش با نتایج مرجع دیگری صورت گرفته است.

۲- سیستم‌های مکانیکی ناقص عملگر

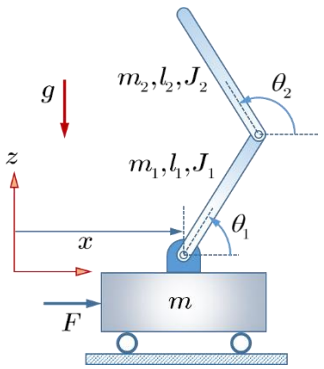
برای سیستم‌های مکانیکی کامل عملگر[3] در دهه گذشته گستره‌ای از روش‌های کنترل مؤثر اعم از بهینه، مقاوم و تطبیقی ارائه شده‌اند [۸]. این روش‌ها برای سیستم‌های کامل عملگر به علت بهره‌مندی از ویژگی‌های خاص که طراحی کنترل‌کننده را تسهیل می‌کنند، با دشواری زیادی همراه نیست. درحالی‌که برای سیستم‌های ناقص عملگر اغلب تعدادی از شرایط ساختاری تسهیل‌کننده طراحی کنترل‌کننده در دسترس نیست. بعلاوه خواص نامطلوب دیگر مانند درجات آزادی بالاتر و رفتار غیر مینیمم فاز در این سیستم‌ها مشاهده می‌شود که موجب دشوارتر شدن طراحی کنترل‌کننده و عدم کسب نتایج مطلوب‌تر به نسبت سیستم‌های کامل عملگر می‌گردد. برخی از تعاریف لازم در توصیف سیستم‌های مکانیکی ناقص عملگر در ادامه ارائه می‌شوند.

۱-۲- مدل مکانیکی سیستم آونگ معکوس دوگانه

سیستم آونگ معکوس دوگانه، یکی از نمونه‌های رایج سیستم‌های دینامیکی است که همچنان در حوزه کنترل غیرخطی، توجهات زیادی را به خود معطوف کرده است. مطابق شکل ۱ ، این سیستم شامل یک ریل مستقیم خطی، یک‌پایه قابل حرکت بر روی این ریل و دو آونگ است. آونگ زیرین از یک انتها به مرکز پایه متحرک و در انتهای دیگر به آونگ بالایی لولا شده و هر دو آونگ آزادانه می‌توانند حول محور عمود بر صفحه ریل دوران کنند. هر دو آونگ در اهداف کنترلی لازم است که در شرایط ناپایدار و به‌صورت قائم قرار گیرند که بدون وجود تلاش کنترلی مؤثر، خواهند افتاد. فرض می‌شود که پایه متحرک بر روی پایه افقی بدون اصطکاک می‌تواند آزادانه به سمت چپ و راست حرکت کند و نیروی F، تنها نیروی کنترلی مؤثر وارد بر سیستم است. جرم پایه متحرک m و جرم آونگ‌ها به ترتیب برابر m_2, m_1 با طول‌های L_2, L_1 و ممان‌های اینرسی J_2, J_1 می‌باشند. برای زوایای آونگ‌ها نیز از نمادهای θ_2, θ_1 استفاده شده است. مدل دینامیکی آونگ معکوس دوگانه را می‌توان با استفاده از تئوری پایه دینامیک تحلیلی، استخراج نمود. در این روش بر اساس معادله لاگرانژ مطابق رابطه (۱) برای استخراج مدل دینامیکی سیستم استوار است [۹]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad ,i=1,2,...,\mathrm{n} \qquad (۱)$$

که در آن $L(=T-V)$ لاگرانژین، T انرژی جنبشی کل و V انرژی پتانسیل کل سیستم است. q_i ها متغیرهای تعمیم یافته برای معرفی کلیه حرکت‌های مستقل سیستم هستند. همچنین Q_i نیروهای خارجی تعمیم‌یافته در راستای q_i است.



شکل ۱: شماتیکی از نحوه قرارگیری اجزای آونگ معکوس دوگانه

[1] Double-Inverted Pendulum (DIP)
[2] Under-actuated
[3] Full-actuated

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

در این پژوهش مدل دینامیکی حاکم بر آونگ دوگانه معکوس با فرض عدم اعمال نیروی خارجی در لولاها، با استفاده از روش لاگرانژ به‌صورت عمومی رابطه (۲) استخراج می‌شود [۵].

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=Q_i \qquad (۲)$$

که در آن ماتریس‌های جرم M، نیروی جانب مرکز C و بردار نیروهای گرانشی G مطابق روابط (۳) تا (۶) هستند.

$$M(q)=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= m+m_1+m_2 \\ M_{12} &= (m_1l_1+m_2L_1)\cos(q_2) \\ M_{13} &= (m_2l_2)\cos(q_3) \\ M_{21} &= (m_1l_1+m_2L_1)\cos(q_2) \\ M_{22} &= m_1l_1^2+m_2L_1^2+J_1 \\ M_{23} &= (m_2l_2L_1)\cos(q_2-q_3) \\ M_{31} &= (m_2l_2)\cos(q_3) \\ M_{32} &= (m_2l_2L_1)\cos(q_2-q_3) \\ M_{33} &= m_2l_2^2+J_2 \end{aligned} \qquad (۳)$$

$$G(q)=\begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1l_1g+m_2L_1g)\sin(q_2) \\ -(m_2l_2g)\sin(q_3) \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

$$C(q,\dot{q})=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0 \\ C_{12} &= -(m_1l_1+m_2L_1)\sin(q_2) \\ C_{13} &= -(m_2l_2)\dot{q}_3\sin(q_3) \\ C_{21} &= 0 \\ C_{22} &= 0 \\ C_{23} &= (m_2l_2L_1)\dot{\theta}_2\sin(q_2-q_3) \\ C_{31} &= 0 \\ C_{32} &= -(m_2l_2L_1)\dot{q}_2\sin(q_2-q_3) \\ C_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad (۵)$$

$$Q_i=\begin{bmatrix} F & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (۶)$$

در ضرایب فوق l_1, l_2 فاصله مرکز جرم میله‌های پایینی و بالایی از مرکز دوران، J_1, J_2 لختی هر یک از میله‌ها حول مرکز جرم و g شتاب گرانش زمین است. مطابق روابط (۲) الی (۶)، دینامیک آونگ معکوس دوگانه فرآیند سه درجه آزادی با یک ورودی است که به لحاظ تقسیم‌بندی در گروه سیستم‌های ناقص عملگر قرارگرفته و ذاتاً ازنظر کنترلی مشکل‌تر است. برای توصیف مدل فضای حالت مینیمال آن به شش متغیر حالت نیاز است که به‌طور متداول این متغیرها شامل متغیرهای توصیف موقعیت و سرعت حرکت افقی پایه متحرک و موقعیت و سرعت‌های زاویه‌ای آونگ‌ها در نظر گرفته می‌شوند [۲].

۳- طراحی رویتگر بر پایه کنترل‌کننده فازی تطبیقی

توصیف مدل دینامیکی غیرخطی ناشناخته مرتبه n کامل عملگر مطابق رابطه (۷) است:

$$\begin{cases} x^n = f(x,\dot{x},...,x^{n-1})+g(x,\dot{x},...,x^{n-1})u+d \\ y = x \end{cases} \qquad (۷)$$

در رابطه فوق $x \in R$ بردار حالت، $u \in R$ سیگنال کنترلی ورودی به سیستم، $y \in R$ خروجی سیستم، d اغتشاشات محدود خارجی و f و g توابع نامشخص ولی محدود و پیوسته هستند. بازنویسی معادله (۷) در فضای حالت به‌منظور اجرای اهداف کنترلی ضروری است که با انتخاب متغیرهای حالت، به‌صورت رابطه مناسب زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax+B[f(x)+g(x)u+d] \\ y = Cx \end{cases} \qquad (۸)$$

که در آن

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $x=[x,\dot{x},...,x^{n-1}]^T \in R^n$ بردار حالت و y خروجی سیستم است. فرض می‌شود کلیه x_iها به علت دشواری یا عدم دسترسی و یا پرهزینه بودن اندازه‌گیری، در دسترس نیستند. همچنین فرض کنترل‌پذیری (۸)، ضرورت محدود شدن $g(x)$ به‌صورت $0<g(x)\le g_H$، با شرط $g(x)\neq 0$ برای کلیه xها در محدوده مشخص $U_c \subset R^n$ را به همراه دارد. همچنین فرض شده که d اغتشاش خارجی محدود است.

تعریف ارائه‌شده در رابطه (۸) برای سیستم‌های دینامیکی ناقص عملگر با توجه به عدم وجود ورودی کنترلی، به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B[f(x) + d] \\ y = Cx\end{cases} \quad (۹)$$

که در آن به‌صورت مشابه، خواص ماتریس‌های B, A و اغتشاشات ورودی d حفظ شده است.

با توجه به تعریف رابطه ۸ برای سیستم هایی که کلیه متغیر های حالت، غیر قابل دسترس هستند و رابطه ۹ که سیستم های دینامیکی ناقص عملگر بدون ورودی کنترلی را توضیح میدهد، با توجه به سیستم آونگ معکوس دوگانه در رابطه (۲)، معادله حالت سیستم با استفاده از تعاریف دینامیک سیستم‌های کامل عملگر و ناقص عملگر، به‌صورت یکپارچه (۱۰) تعریف می‌شود. که در آن ماتریس A به گونه ای انتخاب شده که متغیر های حالت غیر قابل دسترس در معادله حاضر شوند و همچنین به علت تک ورودی بودن سیستم تنها یک درایه از ماتریس g وجود دارد. در رابطه زیر $u = f$ نیروی وارد به پایه است.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\end{array}\right]}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix} + \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{array}\right]}_{B}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ f_1\\ 0\\ f_2\\ 0\\ f_3\end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ g_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{g(x)} u + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ d_1\\ 0\\ d_2\\ 0\\ d_3\end{bmatrix}}_{d}\right) \quad (۱۰)$$

در این پژوهش بدون کاستن از کلیت روش ارائه‌شده، به‌منظور کاهش حجم محاسبات، فرض بر در دسترس و قابل اندازه‌گیری بودن متغیرهای حالت موقعیت‌های پایه و آونگ‌ها یعنی (x_1, x_3, x_5) بوده و لذا برای تخمین سه متغیر حالت دیگر شامل سرعت‌های پایه و آونگ‌ها یعنی (x_2, x_4, x_6)، طراحی رویتگر مناسب ضرورت دارد مطابق فرض فوق ماتریس C به‌صورت (۱۱) تعریف می‌شود.

$$y = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{array}\right]}_{C}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

۱-۳- تخمین زننده فازی

در این مقاله از تقریب زننده فازی در تقریب دینامیک ناشناخته فرضی سیستم تحت کنترل استفاده می‌شود. سیستم فازی مورداستفاده از نوع ممدانی با توابع عضویت مقدم مثلثی و تالی منفرد با استنتاج ممدانی ضرب و غیر فازی سازی میانگین مراکز استفاده‌شده است. پیش از تشریح روش طراحی رویتگر فازی تطبیقی در بردار حالت فرآیند، بررسی بخشی از ویژگی خاص سیستم‌های تخمین زننده فازی لازم است [۹, ۱۰].

نکته ۱: تابع $y(x)$ نامعلوم فرض می‌شود که طبق قوانین تخمین فازی، مطابق قواعد ذیل به‌صورت $\hat{y}(x)$ تخمین زده می‌شود :

$$R_{\hat{y}}^{(m)}: \text{ If } x_1 \text{ is } Y_{x_1}^{m} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } Y_{x_n}^{m}, \quad \text{THEN } \hat{y}(x) \text{ is } Y_{\hat{y}}^{m}. \quad (۱۲)$$

که در آن $m = 1,\dots,Q$ و Q مجموع تعداد قوانین فازی برای هر مدل فازی است. $Y_{x_i}^{m}(i=1,\dots,n)$ مجموعه فازی مرتبط با $x_i(i=1,\dots,n)$ هستند و $Y_{\hat{y}}^{m}$ تالی منفرد فازی مربوط به $\hat{y}(x)$ هستند. با استفاده از فازی سازی ضرب و غیر فازی سازی میانگین مراکز، خروجی مدل فازی $\hat{y}(x)$، به شکل زیر تعریف می - شود [۹]:

$$\hat{y}(x) = \theta^T \xi(x) \quad (۱۳)$$

که در آن $\theta = [Y_{\hat{y}}^{1}, Y_{\hat{y}}^{2}, \dots, Y_{\hat{y}}^{Q}]^T$ بردار قابل تنظیم پارامترهای تالی منفرد سیستم فازی است که مطابق قواعد تطبیق که از تحلیل پایداری سیستم حاصل می‌شوند، تنظیم می‌گردد.

بردار رگرسور[1] فازی $\xi(x) = [\xi^1(x), \dots, \xi^M(x)]^T$ مندرج در رابطه (۱۳) نیز به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\xi^j(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} Y_{x_i}^{j}(x_i)}{\sum_{j=1}^{Q}\left[\prod_{i=1}^{n} Y_{x_i}^{j}(x_i)\right]}, \quad j = 1,\dots,Q \quad (۱۴)$$

۲-۳- طراحی رویتگر فازی تطبیقی

عدم دسترسی به متغیرهای حالت به دلایل مختلف، موجب بروز مشکلات جدی در طراحی سیستم‌های کنترلی هستند. طراحی رویتگر فازی تطبیقی بر مبنای ایده تخمین قابل اتکأ متغیرهای حالت با استفاده از اطلاعات ورودی و خروجی همراه با ورودی مرجع استوار است. دینامیک رویتگر فازی جهت تخمین بردار حالت مطابق رابطه (۱۵) تعریف می‌شود [۹, ۱۱]:

[1] Fuzzy regressor

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\left[f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - v\right] + L_o(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = \hat{x}\end{cases} \quad (۱۵)$$

که در آن $L_o = [l_1, l_2, ..., l_n]^T$ بردار بهره رویتگر است. بردار بهره رویتگر طوری طراحی می‌شود که چند جمله‌ای معادله مشخصه $A - LC$ اکیداً هورویتز[۱] گردد. $f(\hat{x})$ و $g(\hat{x})$ به ترتیب تقریب توابع نامعلوم $f(x)$ و $g(x)$ بر حسب بردار حالت تخمینی $\hat{x}$ هستند. عبارت کنترل مقاوم v نیز برای جبران سازی خطای تقریب و تخمین تعریف شده است.

بدیهی است متغیر حالت تخمین زده‌شده در رابطه (۱۵) با توجه به دینامیک ناشناخته فرآیند که در قالب توابع $f(x)$ و $g(x)$ توصیف می‌شود، قابل تحقق نیست. بنابراین تخمین متغیر حالت که از ویژگی‌های تخمین سیستم‌های فازی مندرج در رابطه (۱۳) بهره می‌برد، مطابق بحث بعد، برپا می‌شود.

با تعریف خطای تقریب حالت $\tilde{x} = x - \hat{x}$ و خروجی $\tilde{y} = y - \hat{y}$، دینامیک خطای رویتگر فازی حاصل از اختلاف (۱۵) با رویتگر فازی بر مبنای تقریب توابع $\hat{f}(\hat{x})$ و $\hat{g}(\hat{x})$ مطابق رابطه (۱۶)، تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = (A - L_oC)\tilde{x} + B[\tilde{f}(x,\hat{x}) + \tilde{g}(x,\hat{x})u + v + d] \\ \tilde{y} = C\tilde{x}\end{cases} \quad (۱۶)$$

که در آن عبارات $\tilde{f}(x,\hat{x})$ و $\tilde{g}(x,\hat{x})$ به ترتیب خطای تخمین توابع $f(x)$ و $g(x)$ هستند که مطابق رابطه (۱۷) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases}\tilde{f}(x,\hat{x}) = f(x) - \hat{f}(\hat{x}) \\ \tilde{g}(x,\hat{x}) = g(x) - \hat{g}(\hat{x})\end{cases} \quad (۱۷)$$

$\hat{f}(\hat{x})$و $\hat{g}(\hat{x})$ نیز به ترتیب تخمینی از $f(x)$ و $g(x)$ بر اساس بردار حالت تخمینی $\hat{x}$ هستند.

با توجه به خواص تقریب توابع سیستم‌های فازی تطبیقی مطابق نکته ۱، سیستم با تابع پیوسته غیرخطی (۸) را می‌توان با سیستم فازی تطبیقی به همراه پارامتر بهینه θ^* و تعداد کافی از توابع پایه $\xi(x)$ مطابق رابطه (۱۸) تخمین زد:

$$\begin{cases}f(x) = \theta_f^{*T}\xi_f(x) + \varepsilon_f \\ g(x) = \theta_g^{*T}\xi_g(x) + \varepsilon_g\end{cases} \quad (۱۸)$$

که در آن ε_f و ε_g خطای کران‌دار تخمین بهینه هستند.

جهت برپایی تخمین فازی تطبیقی مطابق رابطه (۱۸)، تابع تخمین $f(x)$ و $g(x)$ نیز مشابه رابطه (۱۸) و مطابق زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{cases}\hat{f}(\hat{x}\,|\,\hat{\theta}_f) = \hat{\theta}_f^T\xi_f(\hat{x}) = \xi_f^T(\hat{x})\hat{\theta}_f \\ \hat{g}(\hat{x}\,|\,\hat{\theta}_f) = \hat{\theta}_g^T\xi_g(\hat{x}) = \xi_g^T(\hat{x})\hat{\theta}_g\end{cases} \quad (۱۹)$$

که در آن $\hat{\theta}_f$ و $\hat{\theta}_g$ بردارهای پارامتر تالی قواعد فازی و ξ_f و ξ_g بردار توابع پایه فازی هستند.

با این توصیف، تقریب تابع $\tilde{f}(x,\hat{x})$ از رابطه (۱۷) بصورت (۲۰) تعریف می‌شود:

$$\tilde{f}(x,\hat{x}) = \theta_f^{*T}\xi_f(x) + \varepsilon_f - \hat{\theta}_f^T\xi_f(\hat{x}) \quad (۲۰)$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\theta_f^{*T}\xi_f(x)$ در رابطه (۲۰) و مرتب نمودن رابطه، تابع خطای تقریب به‌صورت زیر می‌شود:

$$\tilde{f}(x,\hat{x}) = \tilde{\theta}_f^T\xi_f(\hat{x}) + \varepsilon_f + w_f \quad (۲۱)$$

که در رابطه فوق $\tilde{\theta}_f = \theta_f^* - \hat{\theta}_f$ پارامتر تطبیقی خطای تخمین است و عبارت اغتشاش w_f به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$w_f(t) = \theta_f^{*T}\tilde{\xi}_f(x,\hat{x}) \quad (۲۲)$$

که $\tilde{\xi}_f(x,\hat{x}) = \xi_f(x) - \hat{\xi}_f(\hat{x})$ خطای توابع پایه فازی است.

موارد مطرح‌شده برای $\tilde{g}(x,\hat{x})$ نیز مطابق روش بیان‌شده برای $\tilde{f}(x,\hat{x})$ صادق بوده و درنهایت رابطه (۲۳) حاصل می‌شود:

$$\tilde{g}(x,\hat{x}) = \tilde{\theta}_g^T\xi_g(\hat{x}) + \varepsilon_g + w_g \quad (۲۳)$$

که در آن عبارت w_g به‌صورت رابطه (۲۴) بیان می‌شود:

$$w_g(t) = \theta_g^{*T}\tilde{\xi}_g(x,\hat{x}) \quad (۲۴)$$

با تعریف خطای رویتگر w_o و خطای تخمین ε_a بصورت زیر:

$$\begin{cases}w_o = w_f(t) + w_g(t)u = \theta_f^{*T}\tilde{\xi}_f(x,\hat{x}) + \theta_g^{*T}\tilde{\xi}_g(x,\hat{x})u \\ \varepsilon_a = \varepsilon_f + \varepsilon_g u\end{cases} \quad (۲۵)$$

سیستم رویتگر پیشنهادی در رابطه (۱۵) و دینامیک خطای رویتگر در رابطه (۱۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[\hat{\theta}_f^T\xi_f(\hat{x}) + \hat{\theta}_g^T\xi_g(\hat{x})u - v] + L_o(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x}\end{cases} \quad (۲۶)$$

[۱] Hurwitz

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = (A - L_o C)\tilde{x} + B[\tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x})u + v + w] \\ \tilde{y} = C\tilde{x}\end{cases} \quad (۲۷)$$

که در آن $w = w_0 + \varepsilon_a + d$ عبارت اغتشاش کلی است. خطای تقریب خروجی $\tilde{y}$ نیز به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{y} = H(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x})u + v + w] \quad (۲۸)$$

که در رابطه فوق، $H(s)$ تابع تبدیل مناسب معلوم با قطب‌های پایدار بر اساس تحقق $(A - L_o C, B, C)$ است.

٤- تحلیل پایداری

خطای تقریب در رابطه (۲۸)، قابل بازنویسی به‌صورت زیر نیز است [۱۱].

$$\tilde{y} = H(s)L(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x})u + v^l + w^l] \quad (۲۹)$$

که در رابطه فوق

$$\xi_f^l(\hat{x}) = L^{-1}(s)\xi_f(\hat{x}), \quad \xi_g^l(\hat{x}) = L^{-1}(s)\xi_g(\hat{x})$$

$$v^l = L^{-1}(s)v, \quad \omega^l = L^{-1}(s)(\omega + \delta)$$

$$\delta = \tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x})u - L(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x})u]$$

و $L(s)$ تابع تبدیل دلخواهی است که $L^{-1}(s)$ تابع تبدیل پایداری بوده $H(s)L(s)$ تابع تبدیل اکیداً حقیقی[1] است.

بر اساس تعریف کالمن برای تابع تبدیل اکیداً حقیقی $H(s)L(s)$، ماتریس مثبت معین متقارن P می‌توان یافت که

$$\begin{cases}A_C^T P + P A_C = -Q \\ P B_C = C_C^T\end{cases} \quad (۳۰)$$

Q ماتریس مثبت معین متقارن، $A_C = A - L_o C$، $B_C = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ و $C_C = C$ است. با این توصیف مدل تحقق فضای حالت رابطه (۲۹) به شکل زیر است.

$$\begin{cases}\dot{\tilde{z}} = A_c \tilde{z} + B_c[\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x})u + v^l + w^l] \\ \tilde{y} = C_C \tilde{z}\end{cases} \quad (۳۱)$$

نکته ۲: مقادیر w و δ بصورت $\|w\| \le w_H$ و $\|\delta\| \le \delta_H$ فرض می‌شوند که در آن‌ها w_H و δ_H مقادیر کران بالای ثابت مثبتی هستند. فرض $\|w\| \le w_H$ به دلیل قضیه تقریب و اختلال خارجی محدود معقول است و همچنین فرض $\|\delta\| \le \delta_H$ نیز به دلیل

[1] Strictly Proper Rational

$\|\delta\| \le \beta_1 \|\tilde{\theta}_f\| + \beta_2 \|\tilde{\theta}_g\|$، $\|\tilde{\theta}_f\| \le 2M_f$ و $\|\tilde{\theta}_g\| \le 2M_g$ موردپذیرش است.

قضیه ۱: با توجه به سیستم (۹)، که نکته های ۱ و ۲ را تأکید می‌کند، $\hat{\theta}_f$ و $\hat{\theta}_g$ توسط قوانین به‌روزرسانی (۳۲) و (۳۳) تنظیم می‌شوند:

$$\dot{\hat{\theta}}_f = \begin{cases}\gamma_1 \xi_f^l(\hat{x})\tilde{y}, & if\ \left(\|\hat{\theta}_f\| < M_f\right) \\ & or\left(\|\hat{\theta}_f\| = M_f\ and\right. \\ & \left.\left(\xi_f^l(\hat{x})\tilde{y}\right)^T \hat{\theta}_f \le 0\right) \\ P_f[.], & if\ \left(\|\hat{\theta}_f\| = M_f\ and\right. \\ & \left.\left(\xi_f^l(\hat{x})\tilde{y}\right)^T \hat{\theta}_f > 0\right)\end{cases} \quad (۳۲)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_g = \begin{cases}\gamma_2 \xi_g^l(\hat{x})\tilde{y}u, & if\ \left(\|\hat{\theta}_g\| < M_g\right) \\ & or\left(\|\hat{\theta}_g\| = M_g\ and\right. \\ & \left.\left(\xi_g^l(\hat{x})\tilde{y}u\right)^T \hat{\theta}_g \le 0\right) \\ P_g[.], & if\ \left(\|\hat{\theta}_g\| = M_g\ and\right. \\ & \left.\left(\xi_g^l(\hat{x})\tilde{y}u\right)^T \hat{\theta}_g > 0\right)\end{cases} \quad (۳۳)$$

که در آن عبارت‌های $P_f[.]$ و $P_g[.]$ مطابق رابطه (۳۴) تعریف می‌شوند:

$$P_f[.] = \gamma_1 \xi_f^l(\hat{x})\tilde{y} - \gamma_1 \frac{\left(\xi_f^l(\hat{x})\tilde{y}\right)^T \hat{\theta}_f}{\|\hat{\theta}_f\|^2}\hat{\theta}_f$$

$$P_g[.] = \gamma_2 \xi_g^l(\hat{x})\tilde{y}u - \gamma_2 \frac{\left(\xi_g^l(\hat{x})\tilde{y}u\right)^T \hat{\theta}_g}{\|\hat{\theta}_g\|^2}\hat{\theta}_g \quad (۳۴)$$

همچنین عبارت‌های مقاوم‌ساز کنترل‌کننده v نیز طبق رابطه (۳۵) محاسبه می‌شود:

$$v = -\rho\,\mathrm{sign}(\tilde{y}), \quad \rho \ge w_H + \delta_H,$$
$$\mathrm{sign}(\tilde{y}) = \begin{cases}1, & \tilde{y} \ge 0 \\ -1, & \tilde{y} < 0\end{cases} \quad (۳۵)$$

و γ_1, γ_2 ثابت‌های مثبت انتخابی حائز اهمیت در نرخ همگرایی روش هستند. با این توصیف بردار خطای رویتگر $\tilde{x}(t)$ به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود خواهد بود.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

اثبات: با انتخاب تابع لیاپانوف[1] به‌صورت

$$V = \frac{1}{2}\tilde{z}^T P\,\tilde{z} + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_f^T\tilde{\theta}_f + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_g^T\tilde{\theta}_g \qquad (۳۶)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{z}}^T P\,\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{z}^T P\,\dot{\tilde{z}} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_f^T\dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_g^T\dot{\tilde{\theta}}_g \qquad (۳۷)$$

با جایگذاری از روابط (۳۲) تا (۳۵) در رابطه (۳۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & \frac{1}{2}\dot{\tilde{z}}^T\left(A_c^T P + PA_c\right)\tilde{z} + \tilde{z}^T PB_c\tilde{\theta}_f^T\xi_f^l \\ & + \tilde{z}^T PB_c\tilde{\theta}_g^T\xi_g^l u + \tilde{z}^T PB_c w^l \\ & + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_f^T\dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_g^T\dot{\tilde{\theta}}_g\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

همچنین با جایگذاری از روابط $PB_c\tilde{z} = C\tilde{z} = \tilde{y}$، $\dot{\tilde{\theta}}_f = -\dot{\hat{\theta}}_f$ و $\dot{\tilde{\theta}}_g = -\dot{\hat{\theta}}_g$ در (۳۷) و مرتب نمودن (۳۸)، رابطه فوق به‌صورت (۳۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & \frac{1}{2}\dot{\tilde{z}}^T Q\tilde{z} + \tilde{y}\left(\tilde{\theta}_f^T\xi_f^l + \tilde{\theta}_g^T\xi_g^l u + v^l + w^l\right) \\ & + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_f^T\dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_g^T\dot{\tilde{\theta}}_g\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

تا زمانی که $\tilde{y}(v^l + w^l) \le 0$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V} \le {} & -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|\tilde{z}\|^2 + \tilde{y}\left(\tilde{\theta}_f^T\xi_f + \tilde{\theta}_g^T\xi_g u\right) \\ & + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_f^T\dot{\hat{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_g^T\dot{\hat{\theta}}_g\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

با انتخاب قوانین به‌روزرسانی (۳۲) و (۳۳)، رابطه (۴۰) به‌صورت (۴۱) ساده می‌شود.

$$\dot{V} \le -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|\tilde{z}\|^2 \qquad (۴۱)$$

با توجه به تئوری پایداری لیاپانوف، $\tilde{z}(t)$، $\tilde{\theta}_f$ و $\tilde{\theta}_g$ به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود می‌شوند.

محدود بودن خطای تخمین بردار حالت مطابق شرط کران‌دار بودن حل سیستم نامتغیر با زمان در قالب نمایش فضای حالت مطابق نکته ۲ بیان می‌شود، است.

نکته ۲ : برای سیستم نامتغیر با زمان توصیف‌شده در قالب فضای حالت (۴۲)

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0\end{cases} \qquad (۴۲)$$

که در آن $x(t) \in R^n$ ، $u(t) \in R^m$ و $A \in R^{n\times n}$ ماتریس پایدار و $B \in R^{n\times m}$ است، نامعادله ذیل برای کلیه پاسخ‌های (۴۳) برقرار است.

$$\|x(t)\| \le k_1 + k_2\|u(t)\|_2^{\alpha} \qquad (۴۳)$$

که k_1 پارامتر نمایی میرای با زمان از شرط اولیه x_0 و k_2 ضریب مثبت تابع مقادیر ویژه ماتریس A است.

بر اساس نکته ۲ با توجه به نمایش فضای حالت خطای تخمین بردار حالت $\tilde{x}(t)$ مطابق رابطه (۲۷)، پاسخ دستگاه فوق مطابق (۴۴) می‌باشد.

$$\tilde{x}(t) = \phi(t,0)\tilde{x}(0) + \int_0^T \phi(t,\tau)BU_1(\tau)d\tau \qquad (۴۴)$$

که در آن $U_1 = \tilde{\theta}_f^T\xi_f + \tilde{\theta}_g^T\xi_g u + v + w$ است. با استفاده از قاعده نابرابری نکته ۲، نتیجه (۴۵) حاصل خواهد شد.

$$\|\tilde{x}(t)\| \le C_1 + \left(C_2 + C_3\|\tilde{\theta}_f\|_2^{\varepsilon} + C_4\|\tilde{\theta}_g\|_2^{\varepsilon}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad (۴۵)$$

که در آن C_1 عبارت نمایی نزولی به صفر با شرایط اولیه x_0 و C_2، C_3 و C_4 مقادیر مثبت قابل محاسبه‌اند.

مطابق روابط (۴۳) و (۴۵)، $\|\tilde{x}(t)\|$ به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود است اگر پارامترهای خطای تخمین تطبیقی $\|\tilde{\theta}_f\|$ و $\|\tilde{\theta}_g\|$ محدود باشند.

۵-طراحی کنترل‌کننده فازی غیرمستقیم

با فرض در دسترس بودن متغیرهای حالت برای اندازه‌گیری و در غیاب اختلالات خارجی با توابع معلوم $f(x)$ و $g(x)$ در رابطه (۹)، قاعده کنترلی مدل معکوس با هدف خطی سازی دینامیک سیستم مداربسته مطابق رابطه (۴۶) تعریف می‌شود [۹-۱۱].

$$u = \frac{1}{g(x)}\left[-f(x) + y_m^{(n)} + K_c e\right] \qquad (۴۶)$$

با اعمال کنترل‌کننده مذکور به سیستم غیرخطی (۹) ، دینامیک خطای سیستم مداربسته مطابق رابطه (۴۷) به‌صورت مجانبی همگرا خواهد شد.

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_n e = 0 \qquad (۴۷)$$

[1] Lyapunov

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

که در آن $K_c=[k_1,k_2,...,k_n]$ ضریب بهره کنترل و بردار ثابت معلوم با ضرایب دلخواه برای دست‌یابی به عملکرد گذرای مطلوب سیستم مداربسته است. بیان فوق به عبارتی بدین معنی است که با شروع از شرایط اولیه دلخواه، خطای ماندگار برابر صفر شده $(\lim_{t\to\infty}|e(t)|=0)$ و ردیابی ورودی مرجع به‌صورت گذرای مناسبی توسط سیستم ردیابی می‌شود. اگرچه ردیابی مطلوب ورودی در شرایطی که دینامیک سیستم بیان‌شده در قالب توابع $f(x)$ و $g(x)$ نامعلوم بوده و متغیرهای حالت غیرقابل دسترسی و فرآیند در معرض اغتشاشات خارجی است، غیرممکن خواهد شد. در چنین شرایطی، راه‌حل پیشنهادی با اساس سیستم‌های کنترل فازی تطبیقی، استفاده از دو تخمین‌گر فازی جهت تقریب مناسب و مقاوم حالت‌ها جهت محاسبه قابل اتکا دینامیک نامعلوم فرآیند جهت استفاده در طراحی کنترل‌کننده است. در این رویکرد به‌طور مشخص، توابع نامعلوم با مقادیر تخمینی $\hat{f}(x)$ و $\hat{g}(x)$ جایگزین شده و با افزودن بخش کنترل مقاوم u_α، کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم مطابق رابطه (۴۸) حاصل می‌شود.

$$u=\frac{1}{\hat{g}(\hat{x}|\hat{\theta}_g)}[-\hat{f}(\hat{x}|\hat{\theta}_f)+y_m^{(n)}+K_c\hat{e}-u_\alpha] \quad (۴۸)$$

با اعمال (۴۸) در (۹) و پس از مرتب‌سازی رابطه و بازنویسی دینامیک خطای سیستم مداربسته، رابطه (۴۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{e}=Ae+B\{&[\hat{f}(\hat{x}|\hat{\theta}_f)-f(x)]\\&+[\hat{g}(\hat{x}|\hat{\theta}_g)-g(x)]u\}\\&+Bu_\alpha-Bd-BK_c\hat{e}\end{aligned} \quad (۴۹)$$

با جایگذاری از (۲۱)، (۲۳) و (۲۵) در معادله فوق، نتیجه به رابطه (۵۰) ختم می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{e}=Ae-BK_c\hat{e}-B[&\xi_f^T(\hat{x})\tilde{\theta}_f+\xi_g^T(\hat{x})\tilde{\theta}_g u]\\&+Bu_\alpha-Bw\end{aligned} \quad (۵۰)$$

قضیه ۲: در صورت انتخاب کنترل‌کننده فازی تطبیقی زیر برای سیستم غیرخطی (۹)

$$u=\frac{1}{\hat{\theta}_g^T\xi_g(\hat{x})}[-\hat{\theta}_f^T\xi_f(\hat{x})+y_m^{(n)}+K_c\hat{e}-u_\alpha] \quad (۵۱)$$
$$u_\alpha=-v$$

که در آن $\hat{\theta}_f$ و $\hat{\theta}_g$ طبق قوانین (۳۲) و (۳۳) تنظیم می‌شوند، خطای ردیابی $\tilde{e}$ به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود خواهد بود.

اثبات: با استفاده از تعریف

$$\begin{aligned}\tilde{e}&=e-\hat{e}\\&=(y_m-x)-(y_m-\hat{x})\\&=-x+\hat{x}=-\tilde{x}\end{aligned} \quad (۵۲)$$

و اعمال آن در (۵۰)، به رابطه خطای زیر خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}\dot{e}=(A-BK_c)e-B[&\xi_f^T(\hat{x})\tilde{\theta}_f+\xi_g^T(\hat{x})\tilde{\theta}_g u\\&-K_c\tilde{e}]+B(u_\alpha-w)\end{aligned} \quad (۵۳)$$

با توجه به دینامیک خطای ردیابی (۵۳)، پاسخ دستگاه معادله دیفرانسیل خطی فوق به‌صورت (۵۴) خواهد بود.

$$e(t)=\phi(t,0)e(0)+\int_0^T\phi(t,\tau)BU_2(\tau)d\tau \quad (۵۴)$$

که در آن U_2 به صورت زیر است:

$$U_2=\tilde{\theta}_f^T\xi_f+\tilde{\theta}_g^T\xi_g u-K_c\tilde{e}-u_\alpha+w$$

با استفاده از قاعده نابرابری نکته ۲، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\|e(t)\|\le D_1+\Big(&D_2+D_3\|\tilde{\theta}_f\|_2^\alpha+\\&D_4\|\tilde{\theta}_g\|_2^\alpha+D_5\|\tilde{e}\|_2^\alpha\Big)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\end{aligned} \quad (۵۵)$$

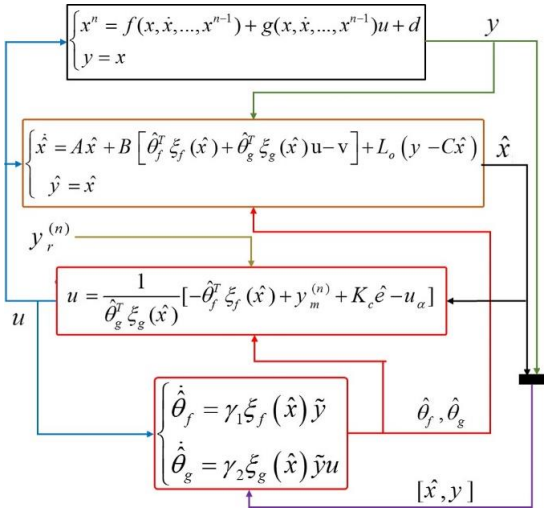
که در آن D_1 عبارتی نمایی است که تحت هر شرط اولیه‌ای به صفر میل می‌کند. همچنین D_2، D_3، D_4 و D_5 مقادیر ثابت مثبت و قابل محاسبه می‌باشند.

از (۵۲) و (۵۳) با شرط محدود بودن پارامترهای خطای تقریب $\|\tilde{\theta}_f\|$، $\|\tilde{\theta}_g\|$ و $\|\tilde{e}\|$، خط مسیر $\|e(t)\|$ به‌صورت یکنواخت و دائم، محدودشده و شرط همگرایی حاصل خواهد شد.

۶- شبیه‌سازی

تصویر مفهومی از چرخه محاسباتی الگوریتم کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم به همراه رویتگر فازی تطبیقی سیستم آونگ معکوس دوگانه در شکل ۲ ارائه‌شده است. مطابق شکل دینامیک فرآیند، ورودی کنترلی u را که در بلوک کنترل‌کننده با استفاده از قاعده کنترلی فازی تطبیقی معکوس محاسبه می‌شود، دریافت می‌نماید. خروجی سیستم مداربسته، y همراه با متغیرهای حالت تخمین زده شده، $\hat{x}$ از بلوک دینامیک رویتگر فازی متعاقباً در بلوک تطبیق پارامترهای سیستم‌های فازی تقریب‌گر دینامیک ناشناخته سیستم یعنی $\hat{\theta}_f$,$\hat{\theta}_g$ مورد استفاده قرار می‌گیرند. مقادیر به‌روزرسانی شده متغیرهای مذکور در هر لحظه زمانی مطابق شکل در بلوک‌های دینامیک رویتگر و کنترل‌کننده برای محاسبه سیگنال‌های مورد نظر، مورداستفاده قرار می‌گیرند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]



شکل ۲: تصویر مفهومی سیستم کنترل غیرخطی فازی تطبیقی غیرمستقیم همراه با رویتگر فازی تطبیقی

۱-۶- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش نتایج شبیه‌سازی رویکرد کنترلی پیشنهادشده برای پایدارسازی و کنترل ردیاب سیستم آونگ معکوس دوگانه ارائه شده است. با توجه به دینامیک سیستم، مقادیر نامی پارامترهای سیستم در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر اولیه و اندازه نامی اجزاء شبیه‌سازی

اجزا	پایه متحرک	آونگ ۱ (پایینی)	آونگ ۲ (بالایی)
جرم (Kg)	$m = 0.9$	$m_1 = 0.3$	$m_2 = 0.25$
طول (m)	-	$L_1 = 0.5$	$L_2 = 0.5$
مرکز جرم (m)	-	$l_1 = 0.25$	$l_2 = 0.25$
اینرسی $(Kg.m^2)$	-	$J_1 = 6.2\times10^{-3}$	$J_2 = 5.2\times10^{-3}$
موقعیت اولیه	$x_0 = 0$	$\theta_1^0 = 5^\circ$	$\theta_2^0 = -10^\circ$

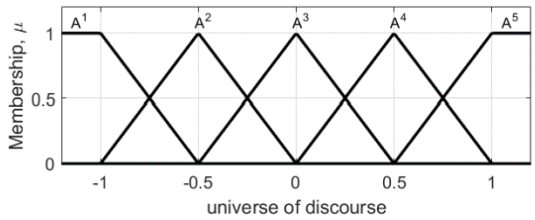
مقادیر بهره کنترل‌کننده (K_c) و رویتگر (L_o) مطابق زیر محاسبه و مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

بردار بهره کنترل کننده (K_c) طبق فرمول اکرمن[۱] برای دستیابی به قطب های پایدار حلقه بسته طوری طراحی می‌شود که چند جمله‌ای معادله مشخصه $A - BK_c$ اکیداً هورویتز گردد [۱۱].

$$K_C = \begin{bmatrix} 649.58 & -223.21 & 2078.9 & 474.19 & 248.76 & 333.04 \end{bmatrix}$$

$$L_o = \begin{bmatrix} 79.981 & 0 & 1.491 & 0 & -0.0008 & 0 \\ 1499.531 & 0 & 40.978 & 0 & -0.037 & 0 \\ -0.635 & 0 & 70.018 & 0 & -2.325e\text{-}05 & 0 \\ -13.911 & 0 & 1000.332 & 0 & -0.0002 & 0 \\ -0.0001 & 0 & -6.006e\text{-}07 & 0 & 139.999 & 0 \\ -0.012 & 0 & -2.571e\text{-}05 & 0 & 4874.999 & 0 \end{bmatrix}$$

در سیستم های فازی مورد استفاده جهت تقریب توابع مدل دینامیکی طراحی رویتگر (۲۶) و کنترل کننده (۵۱) از مجموعه توابع عضویت با ۳ مجموعه مثلثی و ۲ تابع عضویت " شبه ذوزنقه ای"[۲] چپ و راست کامل با توزیع متقارن حول صفر مطابق شکل ۳ استفاده شده است:



شکل ۳ : توابع عضویت پایه متقارن مثلثی برای متغیر نمونه

لازم به ذکر است که متغیرهای فضای گفتگو شامل زوایای رابط-های آونگ θ_1, θ_2 و نرخ تغییرات زاویه ای آنها $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ همراه با موقعیت مکانی و نرخ موقعیت مکانی پایه $x, \dot{x}$ می باشند. همچنین به منظور تنظیم سازگاری توابع عضویت با فیزیک تغییرات هر یک از متغیرها در فضای گفتگو، بردار مراکز توابع عضویت در ضریب مناسبی ضرب شده اند. توابع فازی پایه $\zeta^i(\cdot)$ متناظر با iامین قاعده فازی طبق رابطه (۱۲) برای تقریب توابع f و g با استفاده از جدول پایه فازی محاسبه می شوند. پایگاه قواعد فازی پایه برای هر متغیر فضای گفتگو شامل $5^2 = 25$ قاعده است که برای متغیر نمونه θ در جدول ۲ فهرست شده است:

جدول ۲: قواعد فازی سیستم فازی برای متغیر نمونه در فضای گفتگو

θ		$\dot{\theta}$				
		$A_{\dot{\theta}}^1$	$A_{\dot{\theta}}^2$	$A_{\dot{\theta}}^3$	$A_{\dot{\theta}}^4$	$A_{\dot{\theta}}^5$
θ	A_θ^1	θ^1	θ^2	θ^3	θ^4	θ^5
	A_θ^2	θ^6	θ^7	θ^8	θ^9	θ^{10}
	A_θ^3	θ^{11}	θ^{12}	θ^{13}	θ^{14}	θ^{15}
	A_θ^4	θ^{16}	θ^{17}	θ^{18}	θ^{19}	θ^{20}
	A_θ^5	θ^{21}	θ^{22}	θ^{23}	θ^{24}	θ^{25}

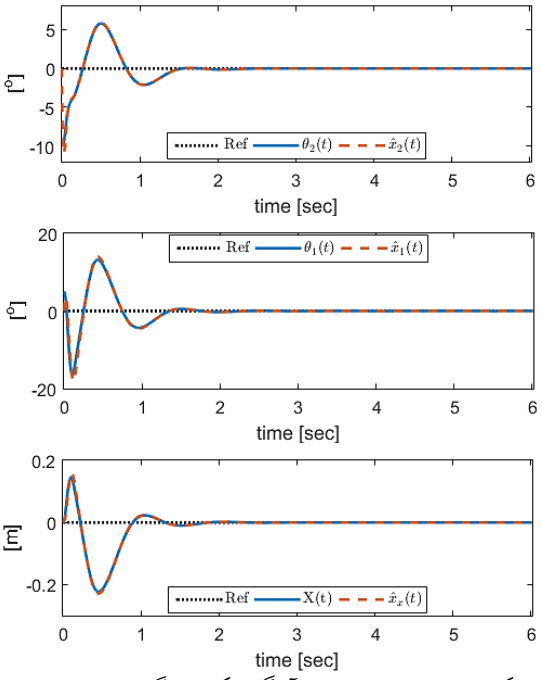
نتایج شبیه‌سازی در شرایط بدون اعمال محدودیت در ورودی و در غیاب نوسانات خارجی در شکل‌های ۴ و ۵ ارائه شده‌اند. موقعیت مکانی پایه متحرک و آونگ‌ها در شکل ۴ ترسیم شده‌اند. در شکل منحنی با رنگ قرمز مقادیر اندازه‌گیری شده توسط حسگرها و خطوط خط‌چین آبی‌رنگ مقادیر تخمین زده شده توسط رویتگر فازی تطبیقی را نشان می‌دهند. تأکید می‌شود که مقادیر تخمینی موقعیت مکانی در طراحی کنترل‌کننده مورداستفاده قرار نگرفته و صرفاً جهت نمایش توانمندی رویتگر ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در کمتر از ۲ ثانیه پایداری مطلوب سیستم حاصل می‌شود.

[۱] Ackerman

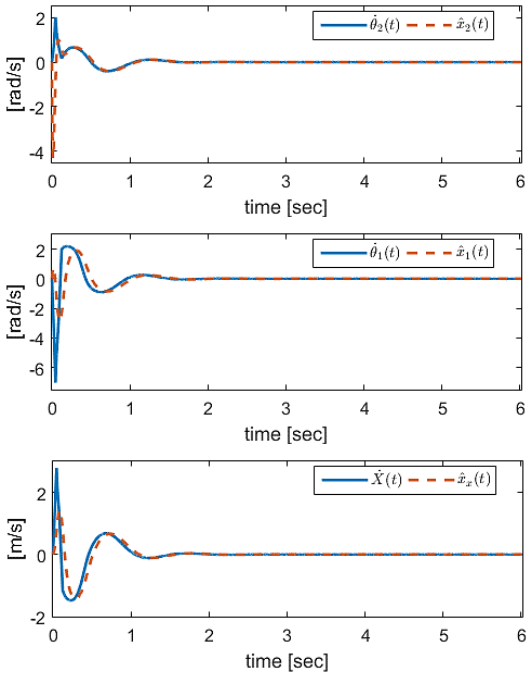
[۲] Quasi Trapezoidal

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

شکل ۵ نشان دهنده سرعت آونگ‌ها و پایه نسبت به زمان را نشان می‌دهد. در شکل منحنی‌های به رنگ قرمز خط‌چین مقادیر حسگرها در مقایسه با مقادیر تخمینی توسط رویتگر می‌باشند. منحنی‌های آبی رنگ مقادیر تخمین زده شده سه متغیر حالت سرعت‌ها است. کیفیت تقریب متغیرهای حالت موردنظر توسط رویتگر مطابق نتایج ترسیم شده در شکل نشان از قابلیت روش در ردیابی متغیرهای حالت نامعلوم در کسری از ثانیه و پایدارسازی فرآیند تحت کنترل را دارد.

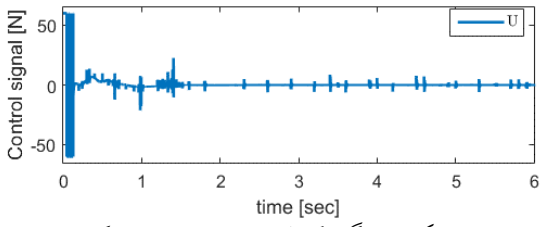


شکل ۴ : تغییرات موقعیت اجزاء آونگ معکوس دوگانه پس از رها شدن از شرایط اولیه



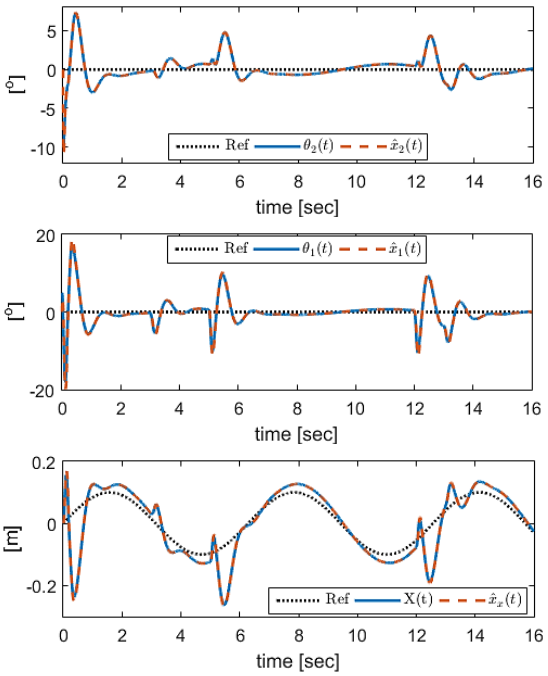
شکل ۵ : تغییرات سرعت اجزاء آونگ معکوس دوگانه پس از رهاسازی از شرایط اولیه

شکل ۶ سیگنال کنترلی ایجاد شده توسط کنترل کننده را نشان میدهد که برحسب نیوتن محاسبه شده و به عملگرهای روی پایه متحرک اعمال میشوند تا مطابق شکل ۴ آونگ ها به حالت عمودی خود برسند. در ضمن سیگنال کنترل محدود به بازه [۶۰،۶۰-] نیوتن گردیده است.



شکل ۶ : سیگنال کنترلی اعمال شده به پایه متحرک

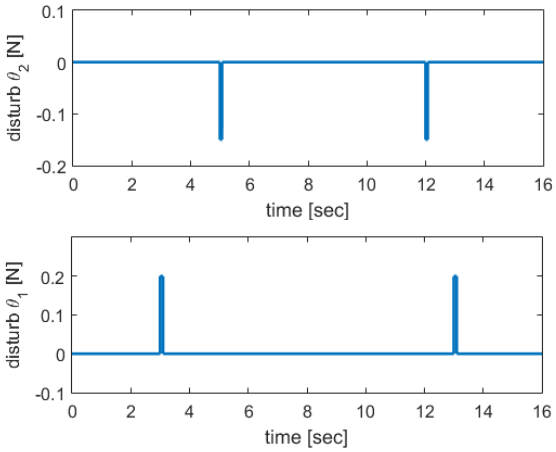
کیفیت عملکرد روش کنترلی پیشنهادی در مقاوم‌سازی فرآیند با حذف موفقیت‌آمیز ورودی‌های ناخواسته خارجی در شرایط ردیابی ورودی مرجع سینوسی در شکل ۷ ترسیم شده‌اند که در آنها خطوط خط‌چین مشکی نشان‌دهنده مسیر مطلوب است که برای پایه متحرک به‌صورت سینوسی است.



شکل ۷ : تغییرات موقعیت پایه حول مسیر سینوسی و اندازه زاویه آونگ‌ها در برابر نوسانات خارجی

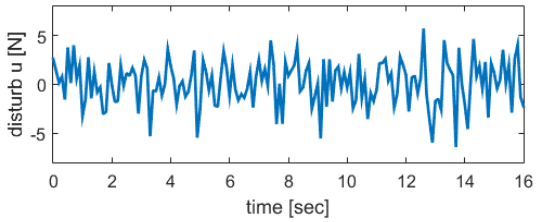
شبیه‌سازی فوق در شرایط اعمال ورودی ضربه خارجی به آونگ‌ها مطابق شکل ۸ صورت گرفته است که این مقادیر به ترتیب به آونگ بالایی در ثانیه‌های ۵ و ۱۲ به‌اندازه ۰/۱۵ نیوتن و به آونگ پایینی در ثانیه‌های ۳ و ۱۳ به‌اندازه ۰/۲ نیوتن است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

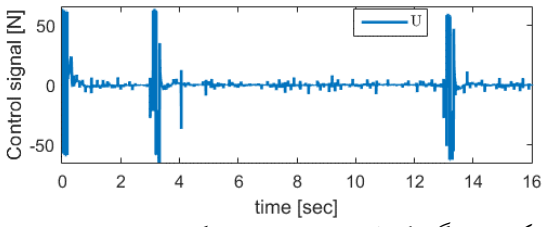


شکل ۸: ضربه‌های خارجی به آونگ بالایی و پایینی

همچنین در این آزمون برای نمایش عملکرد اثربخشی سیستم کنترل ترکیبی بر پایه رویتگر فازی تطبیقی در حذف نویز عملگر و نیز قابلیت روش در تأمین اهداف کنترلی موردنظر، سیگنال کنترل محدود به بازه [۶۰،۶۰-] نیوتن گردیده و همزمان در معرض ورودی نویز سفید با دامنه حداکثر ۱۰ نیوتن مطابق شکل ۹، فرض شده است. شکل ۱۰ نیز سیگنال کنترلی اعمال شده توسط کنترل کننده را برای شرایط توصیف شده نشان میدهد.



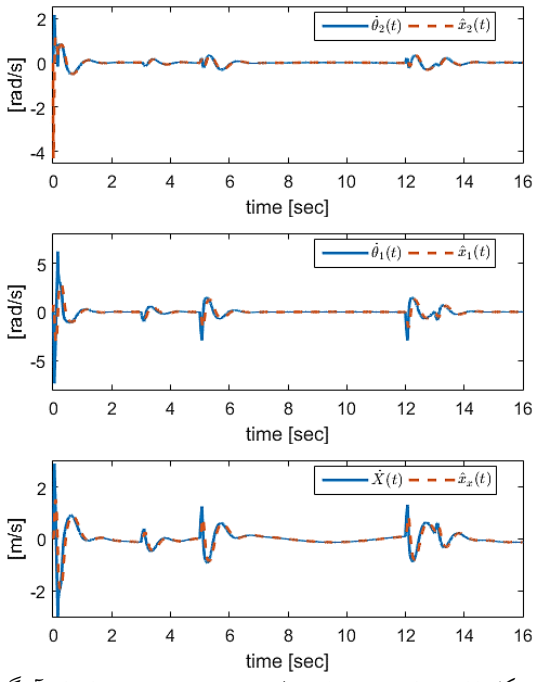
شکل ۹ : نویز سفید اعمال شده به سیگنال عملگر



شکل ۱۰ : سیگنال کنترلی وارد شده به پایه متحرک در حضور نوسانات خارجی و رهگیری مسیر سینوسی

با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که جزء در زمان‌های اعمال ورودی‌های ناخواسته خارجی، ردیابی ورودی با دقت قابل قبول دنبال می‌شود که با عنایت به محدودیت‌های بیان‌شده در آزمون، نتایج بیانگر قابلیت چشمگیر روش در حفظ پایداری کلی سیستم در شرایط دشوار فرضی است. اگرچه حفظ آونگ‌ها در وضعیت کاملاً قائم مقدور نبوده و جابجایی‌های زاویه‌ای در مقیاس حداکثر ۱۰ درجه برای آونگ بالایی و حدود ۲۰ درجه برای آونگ پایینی مشاهده می‌شوند.

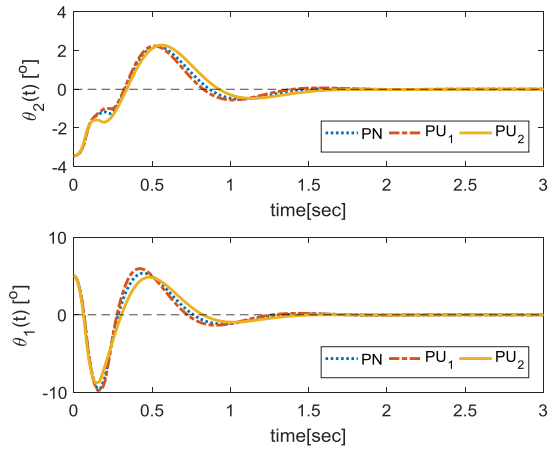
روند سرعت آونگ‌ها و پایه در طی آزمون شکل ۷، مطابق نتایج شکل ۱۱ می‌باشند.



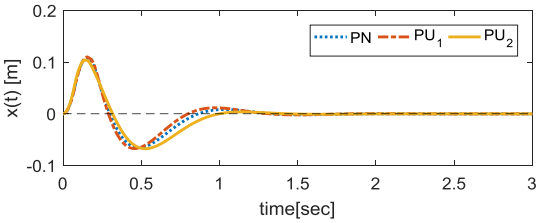
شکل ۱۱ : تغییرات سرعت پایه حول مسیر سینوسی و سرعت زاویه‌ای آونگ‌ها در برابر نوسانات خارجی

ملاحظه می‌شود که به جزء زمان شروع فرآیند و زمان‌های اعمال اغتشاش خارجی به آونگ‌ها، تخمین دقیق حالت‌های سیستم شامل سرعت‌های آونگ‌ها و پایه توسط رویکرد کنترلی موردنظر تأمین شده است که مجدداً تأکیدی بر قابلیت روش در دست‌یابی به اهداف کنترلی در شرایط دشوار همراه با محدودیت‌های اعمال‌شده را نشان می‌دهد.

عملکرد سیستم کنترلی پیشنهادی در مواجهه با عدم قطعیت متغیرهای فرآیند شامل تغییرات نمونه جرم پایه و آونگ‌ها بدون حضور ورودی مزاحم خارجی در شکل ۱۲ ارائه شده است. در شکل نماد (PN) بیانگر متغیرهای نامی، (PU_1) بیانگر شرایط ۱۰٪+ تغییر در جرم هر دو آونگ و (PU_2) بیانگر شرایط ۱۰٪- تغییر در جرم پایه و آونگ شماره دو است. مطابق شکل قابلیت روش پیشنهاد شده در مقابله با تغییرات روشن است.



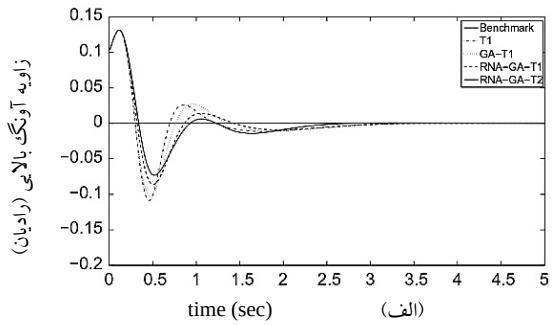
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

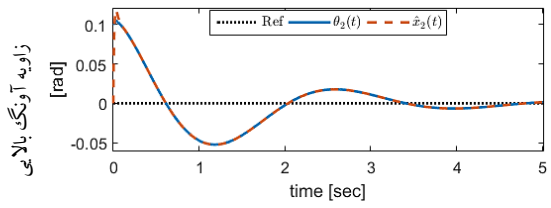


شکل ۱۲ : عملکرد سیستم کنترل در برابر عدم قطعیت پارامتری

۲-۶- صحت سنجی

در این بخش مطالعه مقایسه‌ای به‌منظور صحت سنجی نتایج با مرجع [۱۲] ارائه شده است. در مرجع مذکور از روش بهینه‌سازی در تنظیم ضرایب بهره فازی استفاده‌شده است. شبیه‌سازی مطابق شرایط اولیه و مدل هندسی یکسان با مقاله فوق صورت گرفته است. در شکل ۱۳ تصویر مقایسه‌ی بین زاویه آونگ بالایی مرجع ذکرشده (شکل ۱۳ – الف) با نتایج پژوهش حاضر (شکل ۱۳– ب) با شروع از شرایط اولیه و بدون حضور اختلال خارجی ارائه‌شده است. فراجهش‌های کوچک‌تر و زمان نشست بزرگ‌تر نتایج حاصل از پژوهش حاضر در مقایسه با نتایج مرجع مذکور است که در ادامه قابل مشاهده است.

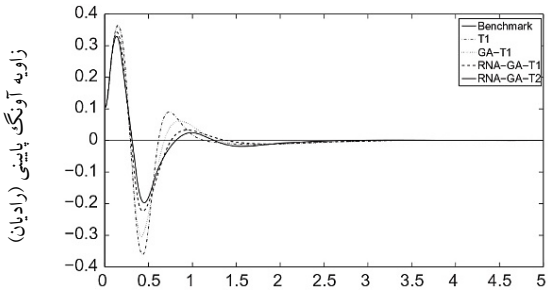




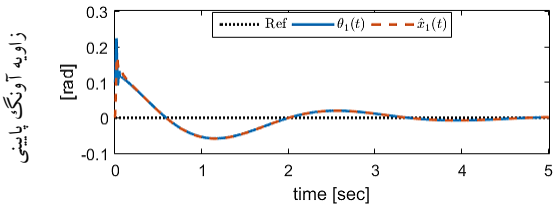
(ب)

شکل ۱۳ : مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای زاویه آونگ بالایی. الف) نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکرشده در متن مقاله ب) نتایج این پژوهش

در شکل ۱۴ مقایسه‌ی بین زاویه آونگ پایینی در هر دو حالت مدل این پژوهش و مرجع اشاره‌شده، ارائه شده است. تفاوت محرز عملکرد دو رویکرد در شروع فرآیند روشن است.



time (sec) (الف)

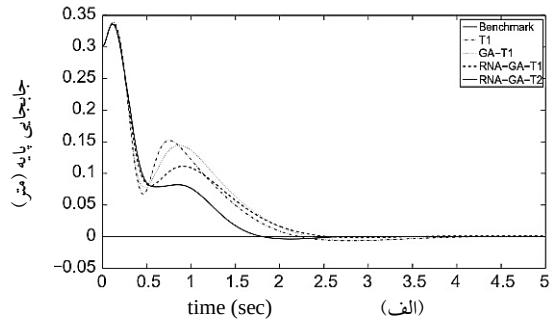


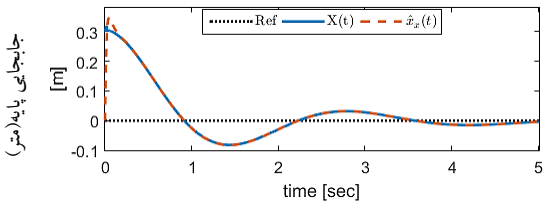
(ب)

شکل ۱۴ : مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای زاویه آونگ پایینی. الف)نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکرشده در متن مقاله ب) نتایج این پژوهش

نتایج حاصل از پژوهش در مقایسه با مقاله مذکور، نشان‌دهنده حرکت هموار با فراجهش‌های کوچک‌تر و البته با زمان نشست طولانی-تر است.

در شکل ۱۵ مقایسه بین جابجایی پایه متحرک نتایج پژوهش حاضر با مرجع موردنظر ترسیم شده است. مجدداً تفاوت در فراجهش اولیه و زمان نشست طولانی‌تر در نتایج پژوهش با نتایج مرجع مذکور مشاهده می‌شود.





(ب)

شکل ۱۵ : مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای جابجایی پایه متحرک. الف) نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکرشده در متن مقاله ب)نتایج این پژوهش

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رویکرد کنترل فازی تطبیقی در پایدارسازی و کنترل ردیاب آونگ معکوس دوگانه به‌عنوان سیستم دینامیکی نمونه ناقص عملگر با چالش ویژه کنترلی با استفاده از رویتگر فازی تطبیقی با فرض عدم دسترسی به بخشی از متغیرهای حالت، به‌صورت روشمند موردبحث و بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها به‌وضوح نشان دهنده توانمندی و قابلیت ویژه رویکرد هوشمند کنترلی مورداستفاده در پایش دقیق حالت سیستم، مطابقت با تغییرات پارامترهای فرآیند، محاسبه و تأمین سریع ورودی کنترلی مناسب و مورد نیاز در

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]

برقراری و حفظ اهداف پایداری و یا کنترل ردیاب فرآیند است. سیستم کنترل پیشنهادی همچنین عملکرد بسیار مطلوبی در برابر اختلالات خارجی و مقاوم‌سازی سیستم تحت کنترل در دست‌یابی به هر دو هدف پایدارسازی و ردیابی ورودی نشان می‌دهد. مقایسه نتایج پژوهش با مقالات منتشرشده، با تأکید بر اینکه مطالعات منتشرشده همگی بدون استفاده از رویتگر و با بهره‌گیری از متغیرهای قطعی حالت فرآیند بوده، دلالت بر دست‌یابی به اهداف موردنظر پژوهش دارند. پویانمایی مقایسه-ای شبیه‌سازی رویکرد مورداشاره با نمونه کنترلی با روش بازخورد کامل حالت به‌عنوان شبیه‌سازی نمونه نرم‌افزار متلب نیز تأکید مضاعفی بر این موضوع می‌باشد.

مراجع

[1] Lashin, M., Ramadan, A., Abbass, H.S., and Abo-Ismail, A., 2014. "Design of an optimized sliding mode control for loaded double inverted pendulum with mismatched uncertainties". Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 19th International Conference On, pp. 270-275.

[2] Xiaoli, H., Keming, X., and Xinying, X., 2007. "Fuzzy Hierarchy Control Strategy of the Double Inverted Pendulum Based on Granular Computing". Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Fourth International Conference on. Vol 2. pp. 570-574.

[3] Fuyan, C., Guomin, Z., Youshan, L., and Zhengming, X., 1996."Fuzzy control of a double-inverted pendulum". Fuzzy Sets and Systems, Vol 79(3), May, pp. 315-321.

[4] Wei, Z. and Rock, H., 2001. "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart". Control Applications, 2001 (CCA '01) IEEE International Conference on. pp. 896-901.

[5] Li, A.L., Qi, H.Y., and Liang, L., 2014."Based on TS Fuzzy Classification of the Double Inverted Pendulum Multi Mode Adaptive Control". Advanced Materials Research, Vol 902, pp. 300-305.

[6] Wu, B., Liu, C., Song, X., and Wang, X., 2015. "Design and implementation of the inverted pendulum optimal controller based on hybrid genetic algorithm". 2015 International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering. Atlantis Press. pp. 623-629.

[7] Gao, S., Ning, B., and Dong, H., 2016."Fuzzy dynamic surface control for uncertain nonlinear systems under input saturation via truncated adaptation approach". Fuzzy Sets and Systems, Vol 290, May, pp. 100-177.

[8] Spong, M.W., B. Siciliano and K.P. Valavanis, 1998. Underactuated mechanical systems, in Control Problems in Robotics and Automation, Vol 230 of series Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 135-150.

[9] Wang, Y., Chai, T., and Zhang, Y., 2010."State observer-based adaptive fuzzy output-feedback control for a class of uncertain nonlinear systems". Information Sciences, Vol 180(24), Dec, pp. 5029-5040.

[10] Wang, L.X., 1997. A Course in Fuzzy Systems and Control. Prentice Hall PTR.

[11] Liu, Y.-J., Tong, S.-C., and Li, T.-S., 2011."Observer-based adaptive fuzzy tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems". Fuzzy Sets and Systems, Vol 164(1), Jan, pp. 25-44.

[12] Sun, Z., Wang, N., and Bi, Y., 2015."Type-1/type-2 fuzzy logic systems optimization with RNA genetic algorithm for double inverted pendulum". Applied Mathematical Modelling, Vol 39(1),Jan, pp. 70-85

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-31]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.3.6.7]