

# کنترل فازی تطبیقی آونگ معکوس دوگانه با استفاده از رویکر فازی تطبیقی

احسان سرابادانی تفرشی<sup>۱</sup>، ابولفتح نیک رنجبر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

<sup>۲</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، a.nikranjbar@kiau.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۳/۲۱)

**چکیده:** در این مقاله پایدارسازی و کنترل ردیاب آونگ معکوس دوگانه با دینامیک نامعلوم به عنوان فرآیند غیرخطی ناقص عملگر با پیچیدگی‌های کنترلی خاص، با استفاده از کنترل کننده ترکیبی فازی تطبیقی غیرمستقیم و رویکر فازی تطبیقی با فرض عدم دسترسی به بخشی از متغیرهای حالت سیستم، مورد مطالعه قرار گرفته است. طبیعت ذاتی دینامیک سیستم تحت کنترل به علت در اختیار نبودن تعداد دسترسی‌های کنترلی برابر با درجات آزادی سیستم، مشکلات جدی در برپایی کنترل مؤثر فرآیند دارد. فرض عدم دسترسی به متغیرهای حالت به عنوان مهم‌ترین پارامترها در طراحی کنترل کننده برای فرآیند مذکور نیز برای نخستین بار با روش ترکیبی بیان شده، مورد مطالعه قرار گرفته است. حاصل شبیه‌سازی‌ها و مطالعات مقایسه‌ای با سایر منابع منتشرشده، نشان‌دهنده توانمندی و برتری رویکرد ترکیبی کنترل کننده و رویکر فازی تطبیقی پیشنهادی در حذف اثر اختلالات خارجی و تغییر پارامترها و دستیابی به هر دو هدف پایدارسازی و ردیابی مؤثر و مقاوم فرآیند دارد.

**کلمات کلیدی:** رویکر فازی تطبیقی، کنترل فازی غیرمستقیم، آونگ معکوس دوگانه.

## Fuzzy Adaptive Observer Based Control of Double Inverted Pendulum

Ehsan Sarabadani Tafreshi, Abolfath Nikranjbar

**Abstract:** In this paper, stabilization and trajectory tracking control of the double inverted pendulum (DIP) as a benchmark under actuated highly nonlinear dynamical system, attributed with specific control complexities using hybrid observer based indirect fuzzy adaptive control is investigated. Due to inherent nature of the process that the equal number of control inputs as the degrees of freedom of the plant are not available, therefore, setting up the control action faces with serious challenges. Meanwhile, inaccessibility assumption to some state parameters as the most important factor in designing the controller by means of the proposed control method is for the first time addressed stabilizing the specified plant in this research. In order to illustrate the performance of the proposed approach, specific simulation software is developed in Matlab/Simulink platform. Set of conducted simulation results and comparative studies with the published papers addressing the same aim, showing the capability and excellence of the proposed hybrid fuzzy adaptive observer control approach achieving the targets in terms of establishing stabilization, trajectory tracking and robustifying the under controlled plant.

**Keywords:** Fuzzy Adaptive Observer, Indirect Fuzzy Control, Double Inverted Pendulum (DIP)

## ۱- مقدمه

آونگ معکوس مسئله‌ی نمونه‌ی کنترلی در بررسی عملکرد سیستم‌های کنترل با اهداف پایدارسازی است. کنترل آونگ معکوس دوگانه<sup>۱</sup> به‌عنوان سیستم دینامیکی ناقص عملگر<sup>۲</sup> با ویژگی تعداد عملگرهای کمتر از تعداد درجات آزادی آن، به‌مراتب چالش برانگیزتر از آونگ معکوس است به‌طوری که با افزایش تعداد رابط‌های آن، پیچیدگی‌ها و نامعینی‌های سیستم افزایش می‌یابد [۱].

به‌طور طبیعی سیستم‌های ناقص عملگر مراتب بالایی از ناپایداری دارند که معیار مناسبی از نقاط ضعف و قوت سیستم کنترلی است [۲، ۳]. آونگ معکوس دوگانه نیز مسئله مناسبی برای بررسی و شناخت انواع روش‌های کنترلی بر روی دینامیک سیستم‌های با مراتب بالای غیرخطی در نظر گرفته می‌شود [۴]. در اغلب مقالات روش‌های کنترلی مطرح‌شده برای آونگ معکوس دوگانه، بر مبنای استفاده از روش‌های خطی سازی است [۵]. لازم به ذکر است که برای سیستم‌های ناقص عملگر با مرتبه بالای غیرخطی، بدست آوردن نتایج مطلوب با به‌کارگیری مدل خطی سیستم، بسیار دشوار است [۶].

قابلیت‌های متنوع سیستم‌های فازی از جمله روش‌های محاسباتی نه‌چندان پیچیده همراه با مطابقت مناسب با روش‌های تطبیقی در تخمین دینامیک پیچیده و ناشناخته سیستم‌ها، برخی از مزایای این روش‌ها در مقایسه سایر روش‌ها در توسعه روزافزون آن‌ها در کاربردهای کنترلی است [۷]. با عنایت به قابلیت‌های محرز سیستم‌های فازی در اهداف کنترلی سیستم‌های دینامیکی، در این پژوهش هدف معرفی و استفاده از رویکر فازی تطبیقی به‌منظور تخمین بخشی از متغیرهای حالت سیستم با فرض عدم دسترسی به اندازه‌گیری متغیرهای حالت سیستم آونگ معکوس دوگانه که به‌طور معمول در ساختار کنترل‌کننده مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند، است. با توجه به امکان به‌کارگیری سیستم‌های فازی در بخش‌های متنوع در رویکردهای کنترلی، کنترل‌کننده اصلی سیستم نیز بر مبنای روش کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم طراحی و در محیط نرم‌افزار متلب/سیمولینک شبیه‌سازی‌های لازم و مقایسه نتایج به‌منظور صحت سنجی روش با نتایج مرجع دیگری صورت گرفته است.

## ۲- سیستم‌های مکانیکی ناقص عملگر

برای سیستم‌های مکانیکی کامل عملگر<sup>۳</sup> در دهه گذشته گستره‌ای از روش‌های کنترل مؤثر اعم از بهینه، مقاوم و تطبیقی ارائه شده‌اند [۸]. این روش‌ها برای سیستم‌های کامل عملگر به علت بهره‌مندی از ویژگی‌های خاص که طراحی کنترل‌کننده را تسهیل می‌کنند، با دشواری زیادی همراه نیست. درحالی که برای سیستم‌های ناقص عملگر اغلب تعدادی از شرایط ساختاری تسهیل‌کننده طراحی کنترل‌کننده در دسترس نیست.

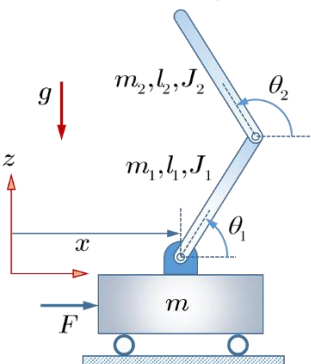
بعلاوه خواص نامطلوب دیگر مانند درجات آزادی بالاتر و رفتار غیر مینیم فاز در این سیستم‌ها مشاهده می‌شود که موجب دشوارتر شدن طراحی کنترل‌کننده و عدم کسب نتایج مطلوب‌تر به نسبت سیستم‌های کامل عملگر می‌گردد. برخی از تعاریف لازم در توصیف سیستم‌های مکانیکی ناقص عملگر در ادامه ارائه می‌شوند.

## ۱-۲- مدل مکانیکی سیستم آونگ معکوس دوگانه

سیستم آونگ معکوس دوگانه، یکی از نمونه‌های رایج سیستم‌های دینامیکی است که همچنان در حوزه کنترل غیرخطی، توجهات زیادی را به خود معطوف کرده است. مطابق شکل ۱، این سیستم شامل یک ریل مستقیم خطی، یک پایه قابل حرکت بر روی این ریل و دو آونگ است. آونگ زیرین از یک انتها به مرکز پایه متحرک و در انتهای دیگر به آونگ بالایی لولا شده و هر دو آونگ آزادانه می‌توانند حول محور عمود بر صفحه ریل دوران کنند. هر دو آونگ در اهداف کنترلی لازم است که در شرایط ناپایدار و به‌صورت قائم قرار گیرند که بدون وجود تلاش کنترلی مؤثر، خواهند افتاد. فرض می‌شود که پایه متحرک بر روی پایه افقی بدون اصطکاک می‌تواند آزادانه به سمت چپ و راست حرکت کند و نیروی  $F$ ، تنها نیروی کنترلی مؤثر وارد بر سیستم است. جرم پایه متحرک  $m$  و جرم آونگ‌ها به ترتیب برابر  $m_1, m_2$  با طول‌های  $L_1, L_2$  و ممان‌های اینرسی  $J_1, J_2$  می‌باشند. برای زوایای آونگ‌ها نیز از نمادهای  $\theta_1, \theta_2$  استفاده شده است. مدل دینامیکی آونگ معکوس دوگانه را می‌توان با استفاده از تئوری پایه دینامیک تحلیلی، استخراج نمود. در این روش بر اساس معادله لاگرانژ مطابق رابطه (۱) برای استخراج مدل دینامیکی سیستم استوار است [۹]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

که در آن  $L (= T - V)$  لاگرانژین،  $T$  انرژی جنبشی کل و  $V$  انرژی پتانسیل کل سیستم است.  $q_i$  ها متغیرهای تعمیم یافته برای معرفی کلیه حرکت‌های مستقل سیستم هستند. همچنین  $Q_i$  نیروهای خارجی تعمیم‌یافته در راستای  $q_i$  است.



شکل ۱: شماتیک از نحوه قرارگیری اجزای آونگ معکوس دوگانه

<sup>1</sup> Double-Inverted Pendulum (DIP)

<sup>2</sup> Under-actuated

<sup>3</sup> Full-actuated

در ضرایب فوق  $l_1, l_2$  فاصله مرکز جرم میله‌های پایینی و بالایی از مرکز دوران،  $J_1, J_2$  لختی هر یک از میله‌ها حول مرکز جرم و  $g$  شتاب گرانش زمین است. مطابق روابط (۲) الی (۶)، دینامیک آونگ معکوس دوگانه فرآیند سه درجه آزادی با یک ورودی است که به لحاظ تقسیم‌بندی در گروه سیستم‌های ناقص عملگر قرار گرفته و ذاتاً از نظر کنترلی مشکل‌تر است. برای توصیف مدل فضای حالت مینیمال آن به شش متغیر حالت نیاز است که به‌طور متداول این متغیرها شامل متغیرهای توصیف موقعیت و سرعت حرکت افقی پایه متحرک و موقعیت و سرعت‌های زاویه‌ای آونگ‌ها در نظر گرفته می‌شوند [۲].

### ۳- طراحی رویکر بر پایه کنترل کننده فازی

#### تطبیقی

توصیف مدل دینامیکی غیرخطی ناشناخته مرتبه  $n$  کامل عملگر مطابق رابطه (۷) است:

$$\begin{cases} \dot{x}^n = f(x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{n-1})u + d \\ y = x \end{cases} \quad (7)$$

در رابطه فوق  $x \in R$  بردار حالت،  $u \in R$  سیگنال کنترلی ورودی به سیستم،  $y \in R$  خروجی سیستم،  $d$  اغتشاشات محدود خارجی و  $f$  و  $g$  توابع نامشخص ولی محدود و پیوسته هستند. بازنویسی معادله (۷) در فضای حالت به‌منظور اجرای اهداف کنترلی ضروری است که با انتخاب متغیرهای حالت، به‌صورت رابطه مناسب زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[f(x) + g(x)u + d] \\ y = Cx \end{cases} \quad (8)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}]^T \in R^n$  بردار حالت و  $y$  خروجی سیستم است. فرض می‌شود کلیه  $x_i$ ‌ها به علت دشواری یا عدم دسترسی و یا پرهزینه بودن اندازه‌گیری، در دسترس نیستند. همچنین فرض کنترلی‌پذیری (۸)، ضرورت محدود شدن  $g(x)$  به‌صورت  $0 < g(x) \leq g_H$ ، با شرط  $g(x) \neq 0$  برای کلیه  $x$ ‌ها در محدوده مشخص  $U_c \subset R^n$  را به همراه دارد. همچنین فرض شده که  $d$  اغتشاش خارجی محدود است.

تعریف ارائه‌شده در رابطه (۸) برای سیستم‌های دینامیکی ناقص عملگر با توجه به عدم وجود ورودی کنترلی، به‌صورت زیر تغییر می‌کند.

در این پژوهش مدل دینامیکی حاکم بر آونگ دوگانه معکوس با فرض عدم اعمال نیروی خارجی در لولاها، با استفاده از روش لاگرانژ به‌صورت عمومی رابطه (۲) استخراج می‌شود [۵].

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q_i \quad (2)$$

که در آن ماتریس‌های جرم  $M$ ، نیروی جانب مرکز  $C$  و بردار نیروهای گرانشی  $G$  مطابق روابط (۳) تا (۶) هستند.

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= m + m_1 + m_2 \\ M_{12} &= (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos(q_2) \\ M_{13} &= (m_2 l_2) \cos(q_3) \\ M_{21} &= (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos(q_2) \\ M_{22} &= m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1 \\ M_{23} &= (m_2 l_2 L_1) \cos(q_2 - q_3) \\ M_{31} &= (m_2 l_2) \cos(q_3) \\ M_{32} &= (m_2 l_2 L_1) \cos(q_2 - q_3) \\ M_{33} &= m_2 l_2^2 + J_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 l_1 g + m_2 L_1 g) \sin(q_2) \\ -(m_2 l_2 g) \sin(q_3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0 \\ C_{12} &= -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin(q_2) \\ C_{13} &= -(m_2 l_2) \dot{q}_3 \sin(q_3) \\ C_{21} &= 0 \\ C_{22} &= 0 \\ C_{23} &= (m_2 l_2 L_1) \dot{\theta}_2 \sin(q_2 - q_3) \\ C_{31} &= 0 \\ C_{32} &= -(m_2 l_2 L_1) \dot{q}_2 \sin(q_2 - q_3) \\ C_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$Q_i = [F \quad 0 \quad 0]^T \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[f(x) + d] \\ y = Cx \end{cases} \quad (9)$$

۳-۱- تخمین زنده فازی

در این مقاله از تقریب زنده فازی در تقریب دینامیک ناشناخته فرضی سیستم تحت کنترل استفاده می‌شود. سیستم فازی مورد استفاده از نوع ممدانی با توابع عضویت مقدم مثلثی و تالی منفرد با استنتاج ممدانی ضرب و غیر فازی سازی میانگین مراکز استفاده شده است. پیش از تشریح روش طراحی رویکر فازی تطبیقی در بردار حالت فرآیند، بررسی بخشی از ویژگی خاص سیستم‌های تخمین زنده فازی لازم است [۹، ۱۰].

**تکته ۱:** تابع  $y(x)$  نامعلوم فرض می‌شود که طبق قوانین تخمین فازی، مطابق قواعد ذیل به صورت  $\hat{y}(x)$  تخمین زده می‌شود:

$$\text{and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } Y_{x_n}^m, \text{ If } x_1 \text{ is } Y_{x_1}^m R_{\hat{y}}^{(m)} : \quad (12)$$

$$\text{THEN } \hat{y}(x) \text{ is } Y_{\hat{y}}^m.$$

که در آن  $m = 1, \dots, Q$  و  $Q$  مجموع تعداد قوانین فازی برای هر مدل فازی است.  $Y_{x_i}^m (i = 1, \dots, n)$  مجموعه فازی مرتبط با  $x_i (i = 1, \dots, n)$  هستند و  $Y_{\hat{y}}^m$  تالی منفرد فازی مربوط به  $\hat{y}(x)$  هستند. با استفاده از فازی سازی ضرب و غیر فازی سازی میانگین مراکز، خروجی مدل فازی  $\hat{y}(x)$  به شکل زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$\hat{y}(x) = \theta^T \xi(x) \quad (13)$$

که در آن  $\theta = [Y_{\hat{y}}^1, Y_{\hat{y}}^2, \dots, Y_{\hat{y}}^Q]^T$  بردار قابل تنظیم پارامترهای تالی منفرد سیستم فازی است که مطابق قواعد تطبیق که از تحلیل پایداری سیستم حاصل می‌شوند، تنظیم می‌گردد.

بردار رگرسور<sup>۱</sup> فازی  $\xi(x) = [\xi^1(x), \dots, \xi^M(x)]^T$  مندرج در رابطه (۱۳) نیز به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\xi^j(x) = \frac{\prod_{i=1}^n Y_{x_i}^j(x_i)}{\sum_{j=1}^Q \left[ \prod_{i=1}^n Y_{x_i}^j(x_i) \right]}, j = 1, \dots, Q \quad (14)$$

۳-۲- طراحی رویکر فازی تطبیقی

عدم دسترسی به متغیرهای حالت به دلایل مختلف، موجب بروز مشکلات جدی در طراحی سیستم‌های کنترلی هستند. طراحی رویکر فازی تطبیقی بر مبنای ایده تخمین قابل اتکا متغیرهای حالت با استفاده از اطلاعات ورودی و خروجی همراه با ورودی مرجع استوار است. دینامیک رویکر فازی جهت تخمین بردار حالت مطابق رابطه (۱۵) تعریف می‌شود [۹، ۱۱]:

که در آن به صورت مشابه، خواص ماتریس‌های  $B, A$  و اغتشاشات ورودی  $d$  حفظ شده است.

با توجه به تعریف رابطه ۸ برای سیستم‌هایی که کلیه متغیرهای حالت، غیر قابل دسترس هستند و رابطه ۹ که سیستم‌های دینامیکی ناقص عملگر بدون ورودی کنترلی را توضیح می‌دهد، با توجه به سیستم آونگ معکوس دوگانه در رابطه (۲)، معادله حالت سیستم با استفاده از تعریف دینامیک سیستم‌های کامل عملگر و ناقص عملگر، به صورت یکپارچه (۱۰) تعریف می‌شود. که در آن ماتریس  $A$  به گونه ای انتخاب شده که متغیرهای حالت غیر قابل دسترس در معادله حاضر شوند و همچنین به علت تک ورودی بودن سیستم تنها یک درایه از ماتریس  $g$  وجود دارد. در رابطه زیر  $u = f$  نیروی وارد به پایه است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{g(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \\ 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}}_d + u \quad (10)$$

در این پژوهش بدون کاستن از کلیت روش ارائه شده، به منظور کاهش حجم محاسبات، فرض بر در دسترس و قابل اندازه گیری بودن متغیرهای حالت موقعیت‌های پایه و آونگ‌ها یعنی  $(x_1, x_3, x_5)$  بوده و لذا برای تخمین سه متغیر حالت دیگر شامل سرعت‌های پایه و آونگ‌ها یعنی  $(x_2, x_4, x_6)$  طراحی رویکر مناسب ضرورت دارد مطابق فرض فوق ماتریس  $C$  به صورت (۱۱) تعریف می‌شود.

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

<sup>1</sup> Fuzzy regressor

جهت برپایی تخمین فازی تطبیقی مطابق رابطه (۱۸)، تابع تخمین  $f(x)$  و  $g(x)$  نیز مشابه رابطه (۱۸) و مطابق زیر معرفی می شوند:

$$\begin{cases} \hat{f}(\hat{x} | \hat{\theta}_f) = \hat{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) = \xi_f^T(\hat{x}) \hat{\theta}_f \\ \hat{g}(\hat{x} | \hat{\theta}_g) = \hat{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x}) = \xi_g^T(\hat{x}) \hat{\theta}_g \end{cases} \quad (19)$$

که در آن  $\hat{\theta}_f$  و  $\hat{\theta}_g$  بردارهای پارامتر تالی قواعد فازی و  $\xi_f$  و  $\xi_g$  بردار توابع پایه فازی هستند.

با این توصیف، تقریب تابع  $\tilde{f}(x, \hat{x})$  از رابطه (۱۷) بصورت (۲۰) تعریف می شود:

$$\tilde{f}(x, \hat{x}) = \theta_f^{*T} \xi_f(x) + \varepsilon_f - \hat{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) \quad (20)$$

با اضافه و کم کردن عبارت  $\theta_f^{*T} \xi_f(x)$  در رابطه (۲۰) و مرتب نمودن رابطه، تابع خطای تقریب به صورت زیر می شود:

$$\tilde{f}(x, \hat{x}) = \tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \varepsilon_f + w_f \quad (21)$$

که در رابطه فوق  $\tilde{\theta}_f = \theta_f^* - \hat{\theta}_f$  پارامتر تطبیقی خطای تخمین است و عبارت اغتشاش  $w_f$  به صورت زیر داده می شود:

$$w_f(t) = \theta_f^{*T} \tilde{\xi}_f(x, \hat{x}) \quad (22)$$

که  $\tilde{\xi}_f(x, \hat{x}) = \xi_f(x) - \xi_f(\hat{x})$  خطای توابع پایه فازی است.

موارد مطرح شده برای  $\tilde{g}(x, \hat{x})$  نیز مطابق روش بیان شده برای  $\tilde{f}(x, \hat{x})$  صادق بوده و در نهایت رابطه (۲۳) حاصل می شود:

$$\tilde{g}(x, \hat{x}) = \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x}) + \varepsilon_g + w_g \quad (23)$$

که در آن عبارت  $w_g$  به صورت رابطه (۲۴) بیان می شود:

$$w_g(t) = \theta_g^{*T} \tilde{\xi}_g(x, \hat{x}) \quad (24)$$

با تعریف خطای رویکر  $w_o$  و خطای تخمین  $\varepsilon_a$  بصورت زیر:

$$\begin{cases} w_o = w_f(t) + w_g(t)u = \theta_f^{*T} \tilde{\xi}_f(x, \hat{x}) + \theta_g^{*T} \tilde{\xi}_g(x, \hat{x})u \\ \varepsilon_a = \varepsilon_f + \varepsilon_g u \end{cases} \quad (25)$$

سیستم رویکر پیشنهادی در رابطه (۱۵) و دینامیک خطای رویکر در رابطه (۱۶) به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[\hat{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \hat{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x})u - v] + L_o(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} = C\hat{x} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - v] + L_o(y - C\hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} = \hat{x} \end{cases} \quad (15)$$

که در آن  $L_o = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T$  بردار بهره رویکر است. بردار بهره رویکر طوری طراحی می شود که چند جمله ای معادله مشخصه  $A - LC$  اکیداً هورویتر<sup>۱</sup> گردد.  $f(\hat{x})$  و  $g(\hat{x})$  به ترتیب تقریب توابع نامعلوم  $f(x)$  و  $g(x)$  بر حسب بردار حالت تخمینی  $\hat{x}$  هستند. عبارت کنترل مقاوم  $v$  نیز برای جبران سازی خطای تقریب و تخمین تعریف شده است.

بدیهی است متغیر حالت تخمین زده شده در رابطه (۱۵) با توجه به دینامیک ناشناخته فرآیند که در قالب توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  توصیف می شود، قابل تحقق نیست. بنابراین تخمین متغیر حالت که از ویژگی های تخمین سیستم های فازی مندرج در رابطه (۱۳) بهره می برد، مطابق بحث بعد، برپا می شود.

با تعریف خطای تقریب حالت  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  و خروجی  $\tilde{y} = y - \hat{y}$ ، دینامیک خطای رویکر فازی حاصل از اختلاف (۱۵) با رویکر فازی بر مبنای تقریب توابع  $\hat{f}(\hat{x})$  و  $\hat{g}(\hat{x})$  مطابق رابطه (۱۶)، تعریف می شود:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A - L_o C)\tilde{x} + B[\tilde{f}(x, \hat{x}) + \tilde{g}(x, \hat{x})u + v + d] \\ \dot{\tilde{y}} = C\tilde{x} \end{cases} \quad (16)$$

که در آن عبارات  $\tilde{f}(x, \hat{x})$  و  $\tilde{g}(x, \hat{x})$  به ترتیب خطای تخمین توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  هستند که مطابق رابطه (۱۷) تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x, \hat{x}) = f(x) - \hat{f}(\hat{x}) \\ \tilde{g}(x, \hat{x}) = g(x) - \hat{g}(\hat{x}) \end{cases} \quad (17)$$

$\hat{f}(\hat{x})$  و  $\hat{g}(\hat{x})$  نیز به ترتیب تخمینی از  $f(x)$  و  $g(x)$  بر اساس بردار حالت تخمینی  $\hat{x}$  هستند.

با توجه به خواص تقریب توابع سیستم های فازی تطبیقی مطابق نکته ۱، سیستم با تابع پیوسته غیر خطی (۸) را می توان با سیستم فازی تطبیقی به همراه پارامتر بهینه  $\theta^*$  و تعداد کافی از توابع پایه  $\xi_f(x)$  مطابق رابطه (۱۸) تخمین زد:

$$\begin{cases} f(x) = \theta_f^{*T} \xi_f(x) + \varepsilon_f \\ g(x) = \theta_g^{*T} \xi_g(x) + \varepsilon_g \end{cases} \quad (18)$$

که در آن  $\varepsilon_f$  و  $\varepsilon_g$  خطای کران دار تخمین بهینه هستند.

<sup>۱</sup> Hurwitz

$$\|\tilde{\theta}_f\| \leq 2M_f, \|\delta\| \leq \beta_1 \|\tilde{\theta}_f\| + \beta_2 \|\tilde{\theta}_g\|$$

و  $\|\tilde{\theta}_g\| \leq 2M_g$  مورد پذیرش است.

**قضیه ۱:** با توجه به سیستم (۹)، که نکته های ۱ و ۲ را تأکید می کند،  $\hat{\theta}_f$  و  $\hat{\theta}_g$  توسط قوانین به روزرسانی (۳۲) و (۳۳) تنظیم می-شوند:

$$\dot{\hat{\theta}}_f = \begin{cases} \gamma_1 \xi_f^l(\hat{x}) \tilde{y}, & \text{if } (\|\hat{\theta}_f\| < M_f) \\ \text{or } (\|\hat{\theta}_f\| = M_f \text{ and } (\xi_f^l(\hat{x}) \tilde{y})^T \hat{\theta}_f \leq 0) \\ P_f[\cdot], & \text{if } (\|\hat{\theta}_f\| = M_f \text{ and } (\xi_f^l(\hat{x}) \tilde{y})^T \hat{\theta}_f > 0) \end{cases} \quad (32)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_g = \begin{cases} \gamma_2 \xi_g^l(\hat{x}) \tilde{y} u, & \text{if } (\|\hat{\theta}_g\| < M_g) \\ \text{or } (\|\hat{\theta}_g\| = M_g \text{ and } (\xi_g^l(\hat{x}) \tilde{y} u)^T \hat{\theta}_g \leq 0) \\ P_g[\cdot], & \text{if } (\|\hat{\theta}_g\| = M_g \text{ and } (\xi_g^l(\hat{x}) \tilde{y} u)^T \hat{\theta}_g > 0) \end{cases} \quad (33)$$

که در آن عبارت های  $P_f[\cdot]$  و  $P_g[\cdot]$  مطابق رابطه (۳۴) تعریف می شوند:

$$P_f[\cdot] = \gamma_1 \xi_f^l(\hat{x}) \tilde{y} - \gamma_1 \frac{(\xi_f^l(\hat{x}) \tilde{y})^T \hat{\theta}_f}{\|\hat{\theta}_f\|^2} \hat{\theta}_f$$

$$P_g[\cdot] = \gamma_2 \xi_g^l(\hat{x}) \tilde{y} u - \gamma_2 \frac{(\xi_g^l(\hat{x}) \tilde{y} u)^T \hat{\theta}_g}{\|\hat{\theta}_g\|^2} \hat{\theta}_g$$

(۳۴)

همچنین عبارت های مقاوم ساز کنترل کننده  $v$  نیز طبق رابطه (۳۵) محاسبه می شود:

$$v = -\rho \text{sign}(\tilde{y}), \quad \rho \geq w_H + \delta_H,$$

$$\text{sign}(\tilde{y}) = \begin{cases} 1, & \tilde{y} \geq 0 \\ -1, & \tilde{y} < 0 \end{cases} \quad (35)$$

و  $\gamma_1, \gamma_2$  ثابت های مثبت انتخابی حائز اهمیت در نرخ همگرایی روش هستند. با این توصیف بردار خطای رویگر  $\tilde{x}(t)$  به صورت یکنواخت و دائم، محدود خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A - L_o C) \tilde{x} + B[\tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x}) u + v + w] \\ \tilde{y} = C \tilde{x} \end{cases} \quad (27)$$

که در آن  $w = w_0 + \varepsilon_a + d$  عبارت اغتشاش کلی است. خطای تقریب خروجی  $\tilde{y}$  نیز به شکل زیر نوشته می شود:

$$\tilde{y} = H(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x}) u + v + w] \quad (28)$$

که در رابطه فوق،  $H(s)$  تابع تبدیل مناسب معلوم با قطب های پایدار بر اساس تحقق  $(A - L_o C, B, C)$  است.

#### ۴- تحلیل پایداری

خطای تقریب در رابطه (۲۸)، قابل بازنویسی به صورت زیر نیز است [۱۱].

$$\tilde{y} = H(s)L(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x}) u + v^l + w^l] \quad (29)$$

که در رابطه فوق

$$\xi_f^l(\hat{x}) = L^{-1}(s) \xi_f(\hat{x}), \quad \xi_g^l(\hat{x}) = L^{-1}(s) \xi_g(\hat{x})$$

$$v^l = L^{-1}(s)v, \quad w^l = L^{-1}(s)(w + \delta)$$

$\delta = \tilde{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x}) u - L(s)[\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x}) u]$  و  $L(s)$  تابع تبدیل دلخواهی است که  $L^{-1}(s)$  تابع تبدیل پایداری بوده  $H(s)L(s)$  تابع تبدیل اکیداً حقیقی<sup>۱</sup> است. بر اساس تعریف کالمن برای تابع تبدیل اکیداً حقیقی  $H(s)L(s)$ ، ماتریس مثبت معین متقارن  $P$  می توان یافت که

$$\begin{cases} A_C^T P + P A_C = -Q \\ P B_C = C_C^T \end{cases} \quad (30)$$

$Q$  ماتریس مثبت معین متقارن،  $A_C = A - L_o C$ ،  $B_C = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  و  $C_C = C$  است. با این توصیف مدل تحقق فضای حالت رابطه (۲۹) به شکل زیر است.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = A_c \tilde{z} + B_c [\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l(\hat{x}) + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l(\hat{x}) u + v^l + w^l] \\ \tilde{y} = C_c \tilde{z} \end{cases} \quad (31)$$

**نکته ۲:** مقادیر  $w$  و  $\delta$  بصورت  $\|w\| \leq w_H$  و  $\|\delta\| \leq \delta_H$  فرض می شوند که در آن ها  $w_H$  و  $\delta_H$  مقادیر کران بالای ثابت مثبتی هستند. فرض  $\|w\| \leq w_H$  به دلیل قضیه تقریب و اختلال خارجی محدود معقول است و همچنین فرض  $\|\delta\| \leq \delta_H$  نیز به دلیل

<sup>1</sup> Strictly Proper Rational

**نکته ۲:** برای سیستم نامتغیر با زمان توصیف شده در قالب فضای

حالت (۴۲)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (42)$$

که در آن  $x(t) \in R^n$  و  $u(t) \in R^m$ ، ماتریس پایدار و  $B \in R^{n \times m}$  است، نامعادله ذیل برای کلیه پاسخ-های (۴۳) برقرار است.

$$\|x(t)\| \leq k_1 + k_2 \|u(t)\|_2^\alpha \quad (43)$$

که  $k_1$  پارامتر نمایی میرای با زمان از شرط اولیه  $x_0$  و  $k_2$  ضریب مثبت تابع مقادیر ویژه ماتریس  $A$  است. بر اساس نکته ۲ با توجه به نمایش فضای حالت خطای تخمین بردار حالت  $\tilde{x}(t)$  مطابق رابطه (۲۷)، پاسخ دستگاه فوق مطابق (۴۴) می‌باشد.

$$\tilde{x}(t) = \phi(t, 0)\tilde{x}(0) + \int_0^t \phi(t, \tau)BU_1(\tau)d\tau \quad (44)$$

که در آن  $U_1 = \tilde{\theta}_f^T \xi_f + \tilde{\theta}_g^T \xi_g u + v + w$  است. با استفاده از قاعده نابرابری نکته ۲، نتیجه (۴۵) حاصل خواهد شد.

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq C_1 + \left( C_2 + C_3 \|\tilde{\theta}_f\|_2^\epsilon + C_4 \|\tilde{\theta}_g\|_2^\epsilon \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (45)$$

که در آن  $C_1$  عبارت نمایی نزولی به صفر با شرایط اولیه  $x_0$  و  $C_2, C_3, C_4$  مقادیر مثبت قابل محاسبه‌اند. مطابق روابط (۴۳) و (۴۵)،  $\|\tilde{x}(t)\|$  به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود است اگر پارامترهای خطای تخمین تطبیقی  $\|\tilde{\theta}_f\|$  و  $\|\tilde{\theta}_g\|$  محدود باشند.

### ۵- طراحی کنترل کننده فازی غیرمستقیم

با فرض در دسترس بودن متغیرهای حالت برای اندازه‌گیری و در غیاب اختلالات خارجی با توابع معلوم  $f(x)$  و  $g(x)$  در رابطه (۹)، قاعده کنترلی مدل معکوس با هدف خطی سازی دینامیک سیستم مداربسته مطابق رابطه (۴۶) تعریف می‌شود [۹-۱۱].

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[ -f(x) + y_m^{(n)} + K_c e \right] \quad (46)$$

با اعمال کنترل کننده مذکور به سیستم غیرخطی (۹)، دینامیک خطای سیستم مداربسته مطابق رابطه (۴۷) به‌صورت مجانبی همگرا خواهد شد.

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (47)$$

**اثبات:** با انتخاب تابع لیاپانوف<sup>۱</sup> به‌صورت

$$V = \frac{1}{2} \tilde{z}^T P \tilde{z} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g \quad (36)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{z}}^T P \tilde{z} + \frac{1}{2} \tilde{z}^T P \dot{\tilde{z}} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \quad (37)$$

با جایگذاری از روابط (۳۲) تا (۳۵) در رابطه (۳۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \dot{\tilde{z}}^T (A_c^T P + P A_c) \tilde{z} + \tilde{z}^T P B_c \tilde{\theta}_f^T \xi_f^l \\ & + \tilde{z}^T P B_c \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l u + \tilde{z}^T P B_c w^l \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \end{aligned} \quad (38)$$

همچنین با جایگذاری از روابط  $PB_c \tilde{z} = C\tilde{z} = \tilde{y}$  و  $\dot{\tilde{\theta}}_g = -\dot{\tilde{\theta}}_g$  و  $\dot{\tilde{\theta}}_f = -\dot{\tilde{\theta}}_f$  در (۳۷) و مرتب نمودن (۳۸)، رابطه فوق به‌صورت (۳۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \dot{\tilde{z}}^T Q \tilde{z} + \tilde{y} (\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l u + v^l + w^l) \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \end{aligned} \quad (39)$$

تا زمانی که  $\tilde{y} (v^l + w^l) \leq 0$  باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{z}\|^2 + \tilde{y} (\tilde{\theta}_f^T \xi_f^l + \tilde{\theta}_g^T \xi_g^l u) \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g \end{aligned} \quad (40)$$

با انتخاب قوانین به‌روزرسانی (۳۲) و (۳۳)، رابطه (۴۰) به‌صورت (۴۱) ساده می‌شود.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{z}\|^2 \quad (41)$$

با توجه به ثنوری پایداری لیاپانوف،  $\tilde{z}(t)$ ،  $\tilde{\theta}_f$  و  $\tilde{\theta}_g$  به‌صورت یکنواخت و دائم، محدود می‌شوند.

محدود بودن خطای تخمین بردار حالت مطابق شرط کران‌دار بودن حل سیستم نامتغیر با زمان در قالب نمایش فضای حالت مطابق نکته ۲ بیان می‌شود، است.

<sup>1</sup> Lyapunov

**اثبات:** با استفاده از تعریف

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= e - \hat{e} \\ &= (y_m - x) - (y_m - \hat{x}) \quad (52) \\ &= -x + \hat{x} = -\tilde{x} \end{aligned}$$

و اعمال آن در (۵۰)، به رابطه خطای زیر خواهیم رسید.

$$\dot{\tilde{e}} = (A - BK_c)e - B[\xi_f^T(\hat{x})\tilde{\theta}_f + \xi_g^T(\hat{x})\tilde{\theta}_g u - K_c \tilde{e}] + B(u_\alpha - w) \quad (53)$$

با توجه به دینامیک خطای ردیابی (۵۳)، پاسخ دستگاه معادله دیفرانسیل خطی فوق به صورت (۵۴) خواهد بود.

$$e(t) = \phi(t, 0)e(0) + \int_0^t \phi(t, \tau)BU_2(\tau)d\tau \quad (54)$$

که در آن  $U_2$  به صورت زیر است:

$$U_2 = \tilde{\theta}_f^T \xi_f + \tilde{\theta}_g^T \xi_g u - K_c \tilde{e} - u_\alpha + w$$

با استفاده از قاعده نابرابری نکته ۲، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq D_1 + \left( D_2 + D_3 \|\tilde{\theta}_f\|_2^\alpha + \right. \\ &\quad \left. D_4 \|\tilde{\theta}_g\|_2^\alpha + D_5 \|\tilde{e}\|_2^\alpha \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (55) \end{aligned}$$

که در آن  $D_1$  عبارتی نمایی است که تحت هر شرط اولیه ای به صفر میل می کند. همچنین  $D_2, D_3, D_4, D_5$  مقادیر ثابت مثبت و قابل محاسبه می باشند.

از (۵۲) و (۵۳) با شرط محدود بودن پارامترهای خطای تقریب  $\|\tilde{\theta}_f\|, \|\tilde{\theta}_g\|$  و  $\|\tilde{e}\|$ ، خط مسیر  $\|e(t)\|$  به صورت یکنواخت و دائم، محدود شده و شرط همگرایی حاصل خواهد شد.

### ۶- شبیه سازی

تصویر مفهومی از چرخه محاسباتی الگوریتم کنترل فازی تطبیقی غیرمستقیم به همراه رویکر فازی تطبیقی سیستم معکوس دو گانه در شکل ۲ ارائه شده است. مطابق شکل دینامیک فرآیند، ورودی کنترلی  $u$  را که در بلوک کنترل کننده با استفاده از قاعده کنترلی فازی تطبیقی معکوس محاسبه می شود، دریافت می نماید. خروجی سیستم مدار بسته،  $y$  همراه با متغیرهای حالت تخمین زده شده،  $\hat{x}$  از بلوک دینامیک رویکر فازی متعاقباً در بلوک تطبیق پارامترهای سیستم های فازی تقریب گر دینامیک ناشناخته سیستم یعنی  $\hat{\theta}_f, \hat{\theta}_g$  مورد استفاده قرار می گیرند. مقادیر به روزرسانی شده متغیرهای مذکور در هر لحظه زمانی مطابق شکل در بلوک های دینامیک رویکر و کنترل کننده برای محاسبه سیگنال های مورد نظر، مورد استفاده قرار می گیرند.

که در آن  $K_c = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  ضریب بهره کنترل و بردار ثابت معلوم با ضرایب دلخواه برای دستیابی به عملکرد گذرای مطلوب سیستم مدار بسته است. بیان فوق به عبارتی بدین معنی است که با شروع از شرایط اولیه دلخواه، خطای ماندگار برابر صفر شده  $(\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0)$  و ردیابی ورودی مرجع به صورت گذرای مناسبی توسط سیستم ردیابی می شود. اگرچه ردیابی مطلوب ورودی در شرایطی که دینامیک سیستم بیان شده در قالب توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  نامعلوم بوده و متغیرهای حالت غیر قابل دسترسی و فرآیند در معرض اغتشاشات خارجی است، غیرممکن خواهد شد. در چنین شرایطی، راه حل پیشنهادی با اساس سیستم های کنترل فازی تطبیقی، استفاده از دو تخمین گر فازی جهت تقریب مناسب و مقاوم حالت ها جهت محاسبه قابل اتکا دینامیک نامعلوم فرآیند جهت استفاده در طراحی کنترل کننده است. در این رویکرد به طور مشخص، توابع نامعلوم با مقادیر تخمینی  $\hat{f}(x)$  و  $\hat{g}(x)$  جایگزین شده و با افزودن بخش کنترل مقاوم  $u_\alpha$ ، کنترل کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم مطابق رابطه (۴۸) حاصل می شود.

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\hat{x}|\hat{\theta}_g)} [-\hat{f}(\hat{x}|\hat{\theta}_f) + y_m^{(n)} + K_c \hat{e} - u_\alpha] \quad (48)$$

با اعمال (۴۸) در (۹) و پس از مرتب سازی رابطه و بازنویسی دینامیک خطای سیستم مدار بسته، رابطه (۴۹) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= Ae + B\{[\hat{f}(\hat{x}|\hat{\theta}_f) - f(x)] \\ &\quad + [\hat{g}(\hat{x}|\hat{\theta}_g) - g(x)]u\} \\ &\quad + Bu_\alpha - Bd - BK_c \hat{e} \quad (49) \end{aligned}$$

با جایگذاری از (۲۱)، (۲۳) و (۲۵) در معادله فوق، نتیجه به رابطه (۵۰) ختم می شود.

$$\dot{\tilde{e}} = Ae - BK_c \hat{e} - B[\xi_f^T(\hat{x})\tilde{\theta}_f + \xi_g^T(\hat{x})\tilde{\theta}_g u] + Bu_\alpha - Bw \quad (50)$$

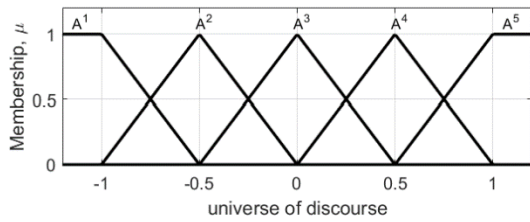
**قضیه ۲:** در صورت انتخاب کنترل کننده فازی تطبیقی زیر برای سیستم غیرخطی (۹)

$$u = \frac{1}{\hat{\theta}_g^T \xi_g(\hat{x})} [-\hat{\theta}_f^T \xi_f(\hat{x}) + y_m^{(n)} + K_c \hat{e} - u_\alpha] \quad (51)$$

$$u_\alpha = -v$$

که در آن  $\hat{\theta}_f$  و  $\hat{\theta}_g$  طبق قوانین (۳۲) و (۳۳) تنظیم می شوند، خطای ردیابی  $\tilde{e}$  به صورت یکنواخت و دائم، محدود خواهد بود.

در سیستم های فازی مورد استفاده جهت تقریب توابع مدل دینامیکی طراحی رویکر (۲۶) و کنترل کننده (۵۱) از مجموعه توابع عضویت با ۳ مجموعه مثلثی و ۲ تابع عضویت " شبه ذوزنقه ای " چپ و راست کامل با توزیع متقارن حول صفر مطابق شکل ۳ استفاده شده است:



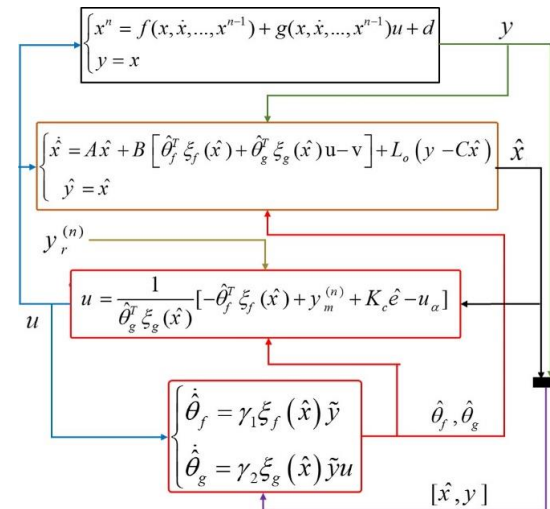
شکل ۳: توابع عضویت پایه متقارن مثلثی برای متغیر نمونه

لازم به ذکر است که متغیرهای فضای گفتگو شامل زوایای رابط- های آونگ  $\theta_1, \theta_2$  و نرخ تغییرات زاویه ای آنها  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  همراه با موقعیت مکانی و نرخ موقعیت مکانی پایه  $x, \dot{x}$  می باشند. همچنین به منظور تنظیم سازگاری توابع عضویت با فیزیک تغییرات هر یک از متغیرها در فضای گفتگو، بردار مراکز توابع عضویت در ضرب مناسبی ضرب شده اند. توابع فازی پایه  $(\cdot) \xi^i$  متناظر با  $i$  امین قاعده فازی طبق رابطه (۱۲) برای تقریب توابع  $f$  و  $g$  با استفاده از جدول پایه فازی محاسبه می شوند. پایگاه قواعد فازی پایه برای هر متغیر فضای گفتگو شامل  $5^2 = 25$  قاعده است که برای متغیر نمونه  $\theta$  در جدول ۲ فهرست شده است:

جدول ۲: قواعد فازی سیستم فازی برای متغیر نمونه در فضای گفتگو

$\theta$	$\dot{\theta}$					
	$A_{\dot{\theta}}^1$	$A_{\dot{\theta}}^2$	$A_{\dot{\theta}}^3$	$A_{\dot{\theta}}^4$	$A_{\dot{\theta}}^5$	
$\theta$	$A_{\theta}^1$	$\theta^1$	$\theta^2$	$\theta^3$	$\theta^4$	$\theta^5$
	$A_{\theta}^2$	$\theta^6$	$\theta^7$	$\theta^8$	$\theta^9$	$\theta^{10}$
	$A_{\theta}^3$	$\theta^{11}$	$\theta^{12}$	$\theta^{13}$	$\theta^{14}$	$\theta^{15}$
	$A_{\theta}^4$	$\theta^{16}$	$\theta^{17}$	$\theta^{18}$	$\theta^{19}$	$\theta^{20}$
	$A_{\theta}^5$	$\theta^{21}$	$\theta^{22}$	$\theta^{23}$	$\theta^{24}$	$\theta^{25}$

نتایج شبیه سازی در شرایط بدون اعمال محدودیت در ورودی و در غیاب نوسانات خارجی در شکل های ۴ و ۵ ارائه شده اند. موقعیت مکانی پایه متحرک و آونگ ها در شکل ۴ ترسیم شده اند. در شکل منحنی با رنگ قرمز مقادیر اندازه گیری شده توسط حسگرها و خطوط خط چین آبی رنگ مقادیر تخمین زده شده توسط رویکر فازی تطبیقی را نشان می دهند. تأکید می شود که مقادیر تخمینی موقعیت مکانی در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار نگرفته و صرفاً جهت نمایش توانمندی رویکر ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود در کمتر از ۲ ثانیه پایداری مطلوب سیستم حاصل می شود.



شکل ۲: تصویر مفهومی سیستم کنترل غیرخطی فازی تطبیقی غیرمستقیم همراه با رویکر فازی تطبیقی

### ۱-۶- شبیه سازی و نتایج

در این بخش نتایج شبیه سازی رویکرد کنترلی پیشنهاد شده برای پایدارسازی و کنترل ردیاب سیستم آونگ معکوس دوگانه ارائه شده است. با توجه به دینامیک سیستم، مقادیر نامی پارامترهای سیستم در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقادیر اولیه و اندازه نامی اجزاء شبیه سازی

اجزا	پایه متحرک	آونگ ۱ (پایینی)	آونگ ۲ (بالایی)
جرم (kg)	$m = 0.9$	$m_1 = 0.3$	$m_2 = 0.25$
طول (m)	-	$L_1 = 0.5$	$L_2 = 0.5$
مرکز جرم (m)	-	$l_1 = 0.25$	$l_2 = 0.25$
اینرسی (kg.m <sup>2</sup> )	-	$J_1 = 6.2 \times 10^{-3}$	$J_2 = 5.2 \times 10^{-3}$
موقعیت اولیه	$x_0 = 0$	$\theta_1^0 = 5^\circ$	$\theta_2^0 = -10^\circ$

مقادیر بهره کنترل کننده ( $K_c$ ) و رویکر ( $L_o$ ) مطابق زیر محاسبه و مورد استفاده قرار گرفته اند.

بردار بهره کنترل کننده ( $K_c$ ) طبق فرمول اکرم<sup>۱</sup> برای دستیابی به قطب های پایدار حلقه بسته طوری طراحی می شود که چند جمله ای معادله مشخصه  $A - BK_c$  اکیداً هورویتر گردد [۱۱].

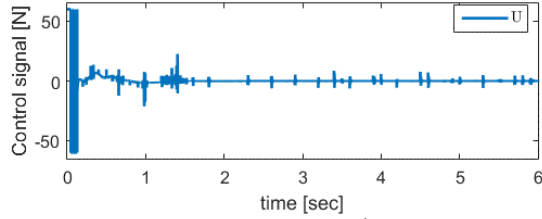
$$K_c = [649.58 \quad -223.21 \quad 2078.9 \quad 474.19 \quad 248.76 \quad 333.04]$$

$$L_o = \begin{bmatrix} 79.981 & 0 & 1.491 & 0 & -0.0008 & 0 \\ 1499.531 & 0 & 40.978 & 0 & -0.037 & 0 \\ -0.635 & 0 & 70.018 & 0 & -2.325e-05 & 0 \\ -13.911 & 0 & 1000.332 & 0 & -0.0002 & 0 \\ -0.0001 & 0 & -6.006e-07 & 0 & 139.999 & 0 \\ -0.012 & 0 & -2.571e-05 & 0 & 4874.999 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>۲</sup> Quasi Trapezoidal

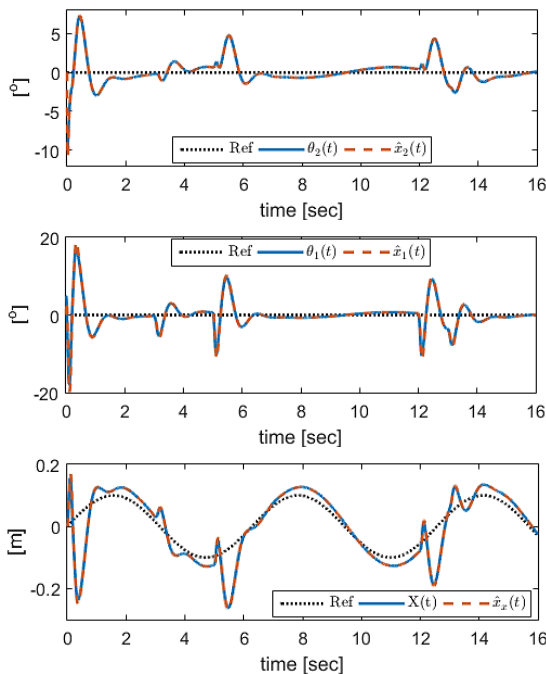
<sup>۱</sup> Ackerman

شکل ۶ سیگنال کنترلی ایجاد شده توسط کنترل کننده را نشان می‌دهد که برحسب نیوتن محاسبه شده و به عملگرهای روی پایه متحرک اعمال میشوند تا مطابق شکل ۴ آونگ ها به حالت عمودی خود برسند. در ضمن سیگنال کنترل محدود به بازه  $[-60, 60]$  نیوتن گردیده است.



شکل ۶: سیگنال کنترلی اعمال شده به پایه متحرک

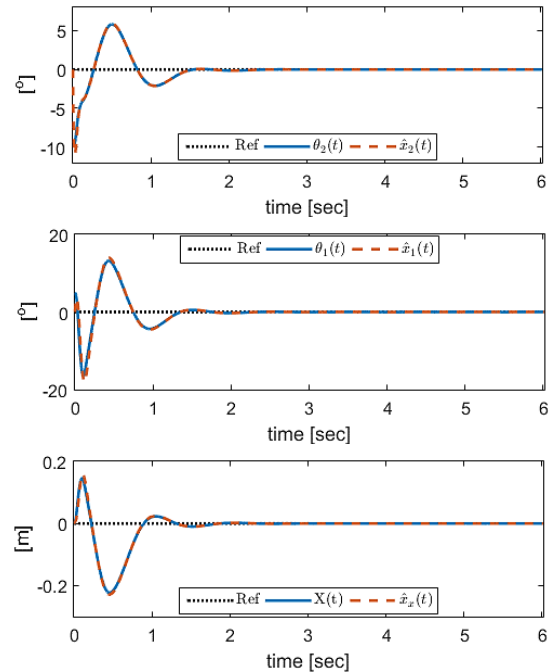
کیفیت عملکرد روش کنترلی پیشنهادی در مقاوم سازی فرآیند با حذف موفقیت آمیز ورودی‌های ناخواسته خارجی در شرایط ردیابی ورودی مرجع سینوسی در شکل ۷ ترسیم شده‌اند که در آنها خطوط خط چین مشکی نشان‌دهنده مسیر مطلوب است که برای پایه متحرک به صورت سینوسی است.



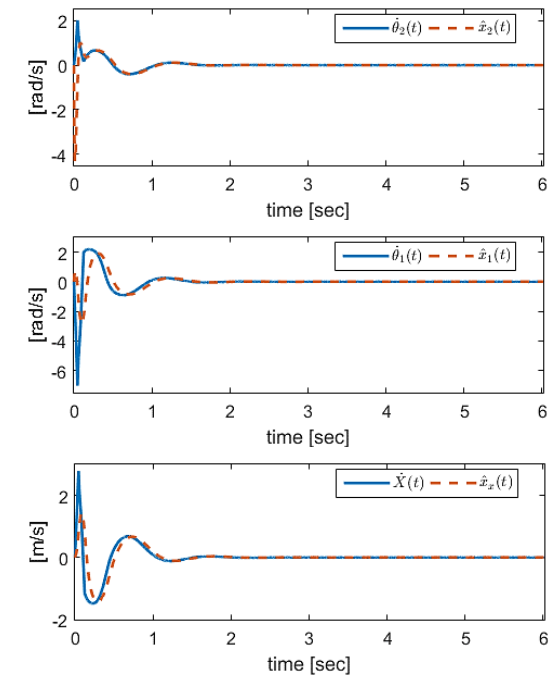
شکل ۷: تغییرات موقعیت پایه حول مسیر سینوسی و اندازه زاویه آونگ‌ها در برابر نوسانات خارجی

شبیه‌سازی فوق در شرایط اعمال ورودی ضربه خارجی به آونگ‌ها مطابق شکل ۸ صورت گرفته است که این مقادیر به ترتیب به آونگ بالایی در ثانیه‌های ۵ و ۱۲ به اندازه  $0/15$  نیوتن و به آونگ پایینی در ثانیه‌های ۳ و ۱۳ به اندازه  $0/2$  نیوتن است.

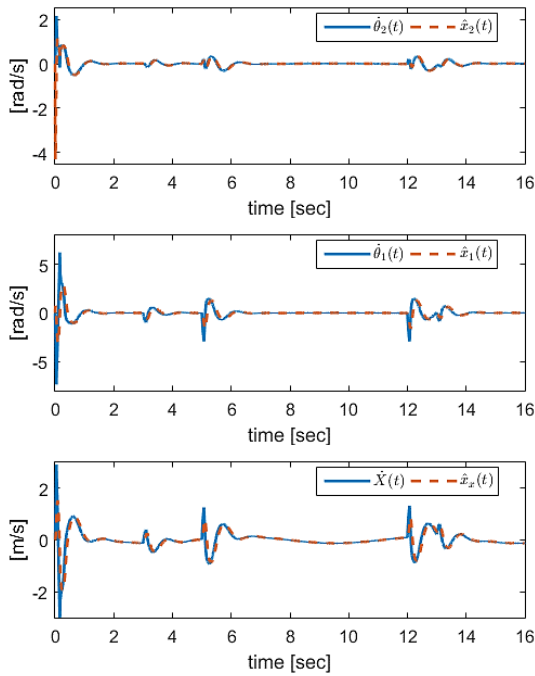
شکل ۵ نشان دهنده سرعت آونگ‌ها و پایه نسبت به زمان را نشان می‌دهد. در شکل منحنی‌های به رنگ قرمز خط چین مقادیر حسگرها در مقایسه با مقادیر تخمینی توسط رویکر می‌باشند. منحنی‌های آبی رنگ مقادیر تخمین زده شده سه متغیر حالت سرعت‌ها است. کیفیت تقریب متغیرهای حالت موردنظر توسط رویکر مطابق نتایج ترسیم شده در شکل نشان از قابلیت روش در ردیابی متغیرهای حالت نامعلوم در کسری از ثانیه و پایداری فرآیند تحت کنترل را دارد.



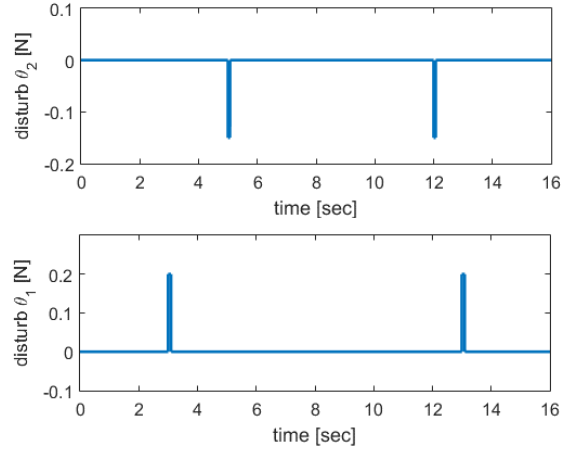
شکل ۸: تغییرات موقعیت اجزاء آونگ معکوس دوگانه پس از رها شدن از شرایط اولیه



شکل ۹: تغییرات سرعت اجزاء آونگ معکوس دوگانه پس از رها سازی از شرایط اولیه

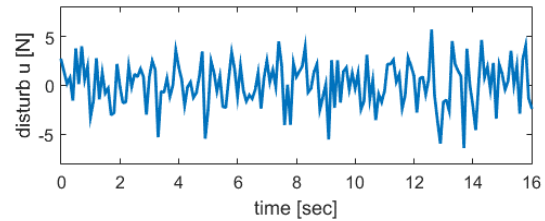


شکل ۱۱: تغییرات سرعت پایه حول مسیر سینوسی و سرعت زاویه‌ای آونگ‌ها در برابر نوسانات خارجی

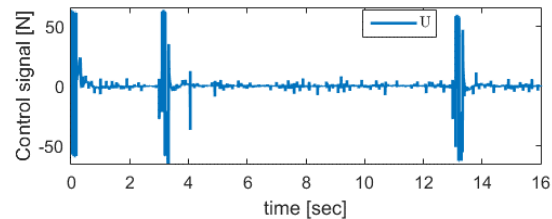


شکل ۸: ضربه‌های خارجی به آونگ بالایی و پایینی

همچنین در این آزمون برای نمایش عملکرد اثربخشی سیستم کنترل ترکیبی بر پایه رویکر فازی تطبیقی در حذف نویز عملگر و نیز قابلیت روش در تأمین اهداف کنترلی موردنظر، سیگنال کنترل محدود به بازه  $[-60, 60]$  نیوتن گردیده و همزمان در معرض ورودی نویز سفید با دامنه حداکثر ۱۰ نیوتن مطابق شکل ۹، فرض شده است. شکل ۱۰ نیز سیگنال کنترلی اعمال شده توسط کنترل کننده را برای شرایط توصیف شده نشان می‌دهد.

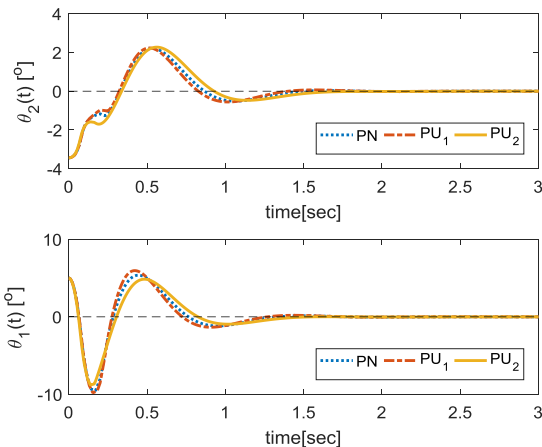


شکل ۹: نویز سفید اعمال شده به سیگنال عملگر



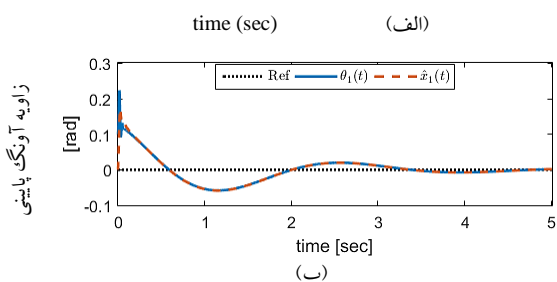
شکل ۱۰: سیگنال کنترلی وارد شده به پایه متحرک در حضور نوسانات خارجی و رهگیری مسیر سینوسی

ملاحظه می‌شود که به جزء زمان شروع فرآیند و زمان‌های اعمال اغتشاش خارجی به آونگ‌ها، تخمین دقیق حالت‌های سیستم شامل سرعت‌های آونگ‌ها و پایه توسط رویکرد کنترلی موردنظر تأمین شده است که مجدداً تأکیدی بر قابلیت روش در دست‌یابی به اهداف کنترلی در شرایط دشوار همراه با محدودیت‌های اعمال‌شده را نشان می‌دهد. عملکرد سیستم کنترلی پیشنهادی در مواجهه با عدم قطعیت متغیرهای فرآیند شامل تغییرات نمونه جرم پایه و آونگ‌ها بدون حضور ورودی مزاحم خارجی در شکل ۱۲ ارائه شده است. در شکل نماد (PN) بیانگر متغیرهای نامی، (PU<sub>1</sub>) بیانگر شرایط  $\pm 10\%$  تغییر در جرم هر دو آونگ و (PU<sub>2</sub>) بیانگر شرایط  $\pm 10\%$  تغییر در جرم پایه و آونگ شماره دو است. مطابق شکل قابلیت روش پیشنهاد شده در مقابله با تغییرات روشن است.



با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که جزء در زمان‌های اعمال ورودی‌های ناخواسته خارجی، ردیابی ورودی با دقت قابل قبول دنبال می‌شود که با عنایت به محدودیت‌های بیان‌شده در آزمون، نتایج بیانگر قابلیت چشمگیر روش در حفظ پایداری کلی سیستم در شرایط دشوار فرضی است. اگرچه حفظ آونگ‌ها در وضعیت کاملاً قائم مقدور نبوده و جابجایی‌های زاویه‌ای در مقیاس حداکثر ۱۰ درجه برای آونگ بالایی و حدود ۲۰ درجه برای آونگ پایینی مشاهده می‌شوند.

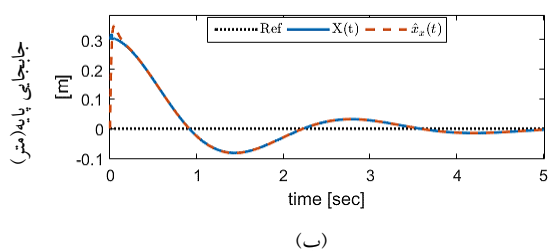
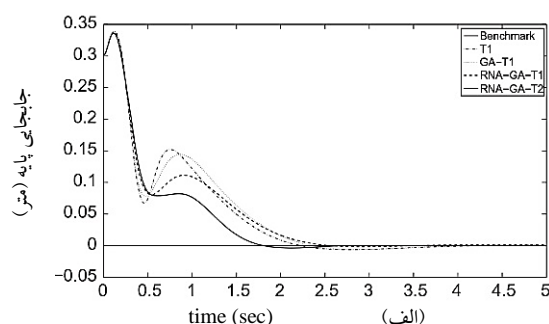
روند سرعت آونگ‌ها و پایه در طی آزمون شکل ۷، مطابق نتایج شکل ۱۱ می‌باشند.



شکل ۱۴: مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای زاویه آونگ پایینی. الف) نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکر شده در متن مقاله ب) نتایج این پژوهش

نتایج حاصل از پژوهش در مقایسه با مقاله مذکور، نشان‌دهنده حرکت هموار با فراجش‌های کوچک‌تر و البته با زمان نشست طولانی‌تر است.

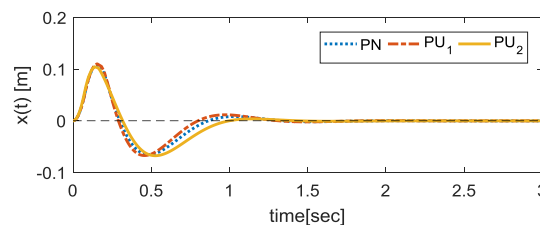
در شکل ۱۵ مقایسه بین جابجایی پایه متحرک نتایج پژوهش حاضر با مرجع موردنظر ترسیم شده است. مجدداً تفاوت در فراجش اولیه و زمان نشست طولانی‌تر در نتایج پژوهش با نتایج مرجع مذکور مشاهده می‌شود.



شکل ۱۵: مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای جابجایی پایه متحرک. الف) نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکر شده در متن مقاله ب) نتایج این پژوهش

## ۴- نتیجه‌گیری

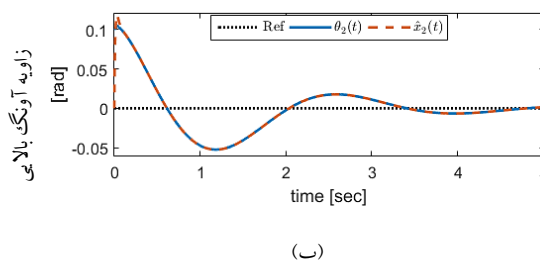
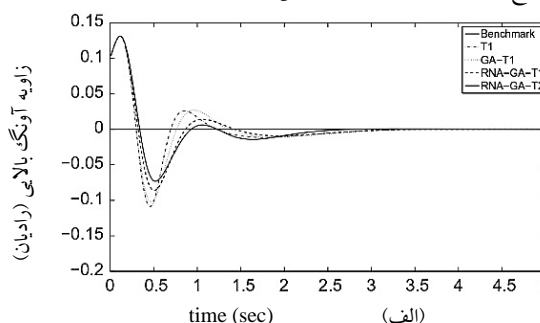
در این پژوهش، رویکرد کنترل فازی تطبیقی در پایداری و کنترل ردیاب آونگ معکوس دوگانه به‌عنوان سیستم دینامیکی نمونه ناقص عملگر با چالش ویژه کنترلی با استفاده از رویکر فازی تطبیقی با فرض عدم دسترسی به بخشی از متغیرهای حالت، به‌صورت روشمند موردبخت و بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها به‌وضوح نشان‌دهنده توانمندی و قابلیت ویژه رویکرد هوشمند کنترلی مورد استفاده در پایش دقیق حالت سیستم، مطابقت با تغییرات پارامترهای فرآیند، محاسبه و تأمین سریع ورودی کنترلی مناسب و مورد نیاز در



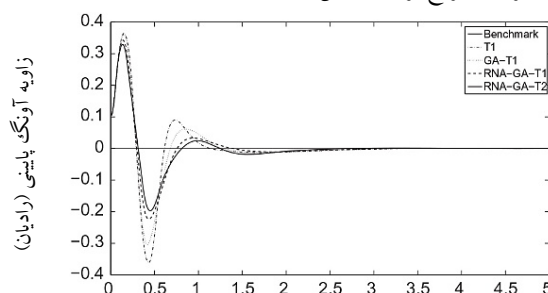
شکل ۱۲: عملکرد سیستم کنترل در برابر عدم قطعیت پارامتری

## ۶-۲- صحت سنجی

در این بخش مطالعه مقایسه‌ای به‌منظور صحت سنجی نتایج با مرجع [۱۲] ارائه شده است. در مرجع مذکور از روش بهینه‌سازی در تنظیم ضرایب بهره فازی استفاده شده است. شبیه‌سازی مطابق شرایط اولیه و مدل هندسی یکسان با مقاله فوق صورت گرفته است. در شکل ۱۳ تصویر مقایسه‌ی بین زاویه آونگ بالایی مرجع ذکر شده (شکل ۱۳ - الف) با نتایج پژوهش حاضر (شکل ۱۳- ب) با شروع از شرایط اولیه و بدون حضور اختلال خارجی ارائه شده است. فراجش‌های کوچک‌تر و زمان نشست بزرگ‌تر نتایج حاصل از پژوهش حاضر در مقایسه با نتایج مرجع مذکور است که در ادامه قابل مشاهده است.



شکل ۱۳: مقایسه نتایج شبیه‌سازی برای زاویه آونگ بالایی. الف) نتایج مقاله با مقایسه روش‌های مختلف ذکر شده در متن مقاله ب) نتایج این پژوهش  
در شکل ۱۴ مقایسه‌ی بین زاویه آونگ پایینی در هر دو حالت مدل این پژوهش و مرجع اشاره شده، ارائه شده است. تفاوت محرز عملکرد دو رویکرد در شروع فرآیند روشن است.



- [5] Li, A.L., Qi, H.Y., and Liang, L., 2014. "Based on TS Fuzzy Classification of the Double Inverted Pendulum Multi Mode Adaptive Control". *Advanced Materials Research*, Vol 902, pp. 300-305.
- [6] Wu, B., Liu, C., Song, X., and Wang, X., 2015. "Design and implementation of the inverted pendulum optimal controller based on hybrid genetic algorithm". 2015 International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering. Atlantis Press. pp. 623-629.
- [7] Gao, S., Ning, B., and Dong, H., 2016. "Fuzzy dynamic surface control for uncertain nonlinear systems under input saturation via truncated adaptation approach". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 290, May, pp. 100-177.
- [8] Spong, M.W., B. Siciliano and K.P. Valavanis, 1998. *Underactuated mechanical systems*, in *Control Problems in Robotics and Automation*, Vol 230 of series *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 135-150.
- [9] Wang, Y., Chai, T., and Zhang, Y., 2010. "State observer-based adaptive fuzzy output-feedback control for a class of uncertain nonlinear systems". *Information Sciences*, Vol 180(24), Dec, pp. 5029-5040.
- [10] Wang, L.X., 1997. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall PTR.
- [11] Liu, Y.-J., Tong, S.-C., and Li, T.-S., 2011. "Observer-based adaptive fuzzy tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 164(1), Jan, pp. 25-44.
- [12] Sun, Z., Wang, N., and Bi, Y., 2015. "Type-1/type-2 fuzzy logic systems optimization with RNA genetic algorithm for double inverted pendulum". *Applied Mathematical Modelling*, Vol 39(1), Jan, pp. 70-85
- برقراری و حفظ اهداف پایداری و یا کنترل ردیاب فرآیند است. سیستم کنترل پیشنهادی همچنین عملکرد بسیار مطلوبی در برابر اختلالات خارجی و مقاوم سازی سیستم تحت کنترل در دست یابی به هر دو هدف پایداری و ردیابی ورودی نشان می دهد. مقایسه نتایج پژوهش با مقالات منتشر شده، با تأکید بر اینکه مطالعات منتشر شده همگی بدون استفاده از رویکر و با بهره گیری از متغیرهای قطعی حالت فرآیند بوده، دلالت بر دست یابی به اهداف مورد نظر پژوهش دارند. پویانمایی مقایسه ای شبیه سازی رویکرد مورد اشاره با نمونه کنترلی با روش بازخورد کامل حالت به عنوان شبیه سازی نمونه نرم افزار متلب نیز تأکید مضاعفی بر این موضوع می باشد.

## مراجع

- [1] Lashin, M., Ramadan, A., Abbass, H.S., and Abo-Ismael, A., 2014. "Design of an optimized sliding mode control for loaded double inverted pendulum with mismatched uncertainties". *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 19th International Conference On, pp. 270-275.
- [2] Xiaoli, H., Keming, X., and Xinying, X., 2007. "Fuzzy Hierarchy Control Strategy of the Double Inverted Pendulum Based on Granular Computing". *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Fourth International Conference on. Vol 2. pp. 570-574.
- [3] Fuyan, C., Guomin, Z., Youshan, L., and Zhengming, X., 1996. "Fuzzy control of a double-inverted pendulum". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 79(3), May, pp. 315-321.
- [4] Wei, Z. and Rock, H., 2001. "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart". *Control Applications*, 2001 (CCA '01) IEEE International Conference on. pp. 896-901.