مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۱، بهار ۱۳۹۸، صفحه ۳۳-۲۱

پایدارسازی محلی برای کلاسی از سیستم های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی با نایقینی‌های صفر نشونده تحت ورودی کنترل با نُرم محدود

محسن قلعه نوئی [۱و۲]، محمدرضا اکبرزاده توتونچی [۳]، ناصر پریز [۴]

[۱] استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ghalehnoie@shahroodut.ac.ir

[۲] فارغ التحصیل دکتری تخصصی مهندسی برق، گرایش کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

[۳] استاد گروه مهندسی برق گرایش کنترل، قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، akbazar@um.ac.ir

[۴] استاد گروه مهندسی برق گرایش کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۱/۱۶ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۱۶ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۱

چکیده: اگرچه پایداری و پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای در سالیان اخیر مورد توجه قرار گرفته است ولی همچنان مسائلی مانند اشباع محرک‌ها بطور کامل بررسی نشده است. این مقاله، پایدارسازی نمایی کلاسی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی را بررسی می‌کند که منابع مختلفی از نایقینی‌های صفرنشونده را در بردارد و در آن سیگنال کنترل دارای نُرم محدود است. به دلیل محدود بودن سیگنال کنترل، پایداری محلی مورد توجه این مقاله می‌باشد. به منظور استخراج شرایط پایداری محلی، در ابتدا برای یک مدل جامع‌تر از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، بر اساس تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه و حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی، شرایط کافی تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه ارائه می‌گردد. شرایط بیان شده خود نیز به صورت محلی بوده که نسبت به تکنیک‌های سراسری موجود، شانس دستیابی به هدف را بیشتر می‌نماید. همچنین برخلاف تکنیک‌های رایج در توابع لیاپانوف چندگانه، این مقاله همگرایی به یک کران غایی به اندازه کافی کوچک را در نظر دارد چرا که نایقینی‌های مورد نظر صفرنشونده می‌باشند. در ادامه، نتایج حاصل از مدل جامع به سیستم مورد نظر اعمال شده و شرایط کافی پایداری به شکل نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بیان می‌گردد. پس از این، به منظور رسیدن به پارامترهای سیگنال کنترل پایدارکننده به همراه بزرگترین ناحیه همگرایی و کوچکترین کران غایی، یک مسأله بهینه‌سازی معرفی شده است. در نهایت، با بیان چند مثال، کارایی روش ارائه شده نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: پایداری نمایی، سیستم سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی، فیدبک حالت، نایقینی صفرنشونده، ورودی با نُرم محدود.

Local stabilization for a class of nonlinear impulsive switched system with non-vanishing uncertainties under a norm-bounded control input

Ghalehnoie M., Akbarzadeh-T. M.R., Pariz N.

Abstract: Stability and stabilization of impulsive switched system have been considered in recent decades, but there are some issues that are not yet fully addressed such as actuator saturation. This paper deals with expo-nential stabilization for a class of nonlinear impulsive switched systems with different types of non-vanishing uncertainties under the norm-bounded control input. Due to the constrained control signal, the local stabilization is here considered. To establish local stabilization criteria, at first, based on multiple Lyapunov functions technique and minimum dwell-time approach, sufficient conditions for a more gen-eral model of impulsive switched systems are proposed. These conditions are also local which increases the chances of achieving the goals compared to existing

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

global techniques. Also, unlike conventional mul-tiple Lyapunov function techniques, this paper considers converging to a sufficient small ultimate bound because of non-vanishing property of the uncertainties. Secondly, the proposed conditions for the general model are applied to the given system and the sufficient stability conditions are formed into linear and bi-linear matrix inequalities. After these, to achieve the parameters of stabilizing control signal along with the largest convergence area and smallest ultimate bound, an optimization problem is proposed. Finally, some illustrative numerical examples are presented to demonstrate the proposed approach.

Keywords: Exponential stability, Nonlinear impulsive switched systems, Non-vanishing uncertainty, Norm-bounded input, State feedback.

۱- مقدمه

امروزه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای[۱] کاربردهای فراوانی در مدلسازی و شبیه‌سازی فرآیندهای مدرن دارند که از آن جمله می توان به تزریق و پخش دارو در بدن [۱، ۲]، بوم‌شناسی جمعیت [۳، ۴]، رباتیک و سیستم‌های مکانیکی [۵، ۶]، سیستم‌های آشوب [۹-۷] و پایدارسازی مبدل‌های باک [۱۰] اشاره نمود. رفتار چنین سیستم‌هایی، به دلیل در هم تنیدگی دینامیک-های پیوسته زمان و گسسته زمان، نسبت به سیستم‌های سنتی پیچیده‌تر می-باشد [۱۱، ۱۲].

در دهه اخیر، محققان به مسائل بنیادین علم کنترل در سیستم‌های سوئیچ و/یا سیستم‌های ضربه‌ای توجه بخصوصی داشته‌اند. در اغلب این مطالعات، روش لیاپانوف به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت تحلیل پایداری استفاده شده است که به دو گروه اصلی قابل طبقه‌بندی است: (الف) تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه، (ب) تحت سیگنال‌های سوئیچ محدود شده و مقید. واضح است که پایداری تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه تنها زمانی ممکن است که همه زیرسیستم‌ها پایدار بوده و بتوان یک تابع کاندیدای لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌ها یافت بگونه‌ای که حتی با وجود ضربه در متغیرهای حالت، این کاندیدای لیاپانوف روند کاهشی را نشان دهد. با این اوصاف، پایداری و پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای تحت هر سیگنال سوئیچ دلخواه همواره ممکن نخواهد بود [۱۳].

در گروه دوم که غالباً سیگنال‌های سوئیچ وابسته به زمان را مطالعه می‌کنند، محدودیت‌های مختلفی مورد توجه قرار گرفته است. بطور مثال در مطالعاتی همانند [۱۷-۱۴] زمان مابین دو سوئیچ متوالی[۲] (DT) برای بیان شرایط پایداری مطالعه می‌شود. همچنین در مواردی مانند [۲۳-۱۸] نیز متوسط زمان مابین دو سوئیچ متوالی[۳] (ADT) استفاده شده است. در تکنیک پیشرفته‌تر متوسط زمان سوئیچ وابسته به مُد کاری[۴] (MDADT)، از متوسط زمان فعال بودن هر زیرسیستم برای بیان شرایط پایداری بهره گرفته می‌شود [۲۶-۲۴]. لازم به ذکر است که در روش‌های مبتنی بر حداقل زمان توقف (به عبارت دیگر حداقل زمان بین دو سوئیچ متوالی) معمولاً شرایط بگونه‌ای بیان می‌شوند که برای هر یک از رویدادهای سوئیچ، روند کاهش تابع کاندیدای لیاپانوف در طول مدت فعال بودن زیرسیستم، نسبت به افزایش آن در زمان جهش بیشتر باشد. این در حالی است که برای روش‌های مبتنی بر میانگین زمان توقف، ممکن است در یک سوئیچ، میزان توقف بر روی زیرسیستمِ فعال، کوتاه باشد و در طول این مدت، میزان کاهش در تابع لیاپانوف از میزان افزایش آن در لحظه سوئیچ بعدی کمتر گردد و در نتیجه شاهد افزایش در مقدار تابع لیاپانوف باشیم. البته در کل دوره عملکرد سیستم، با توجه به میانگین زمان توقف، روند کلی در تغییرات تابع لیاپانوف کاهشی خواهد بود. بدین ترتیب، روش‌های مبتنی بر میانگین زمان توقف، دارای محافظه کاری کمتری نسبت به روش-های مبتنی بر حداقل زمان توقف هستند ولی باید توجه داشت که در این روش‌ها ممکن است برای لحظاتی به دلیل افزایش در مقدار تابع کاندیدای لیاپانوف، مسیر حالت از مبدأ دور گردد. این حالت هنگامی که ناحیه اعتبار[۵] برای متغیرهای حالت (ناشی از فیزیک مسأله) محدود می‌باشد، مطلوب نبوده و کاربرد روش‌های مبتنی بر حداقل زمان توقف در این موارد معقولانه‌تر است.

از طرف دیگر، در مورد سیگنال‌های سوئیچ محدود شده، پیدا کردن یک تابع لیاپانوف مشترک سبب اعمال محافظه‌کاری شدیدی بر روی زمان سوئیچ‌ها خواهد شد. در این موارد، تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه[۶] (MLF) نتایج بهتری را در پی دارد. ایده اصلی در تکنیک MLF بر این حقیقت استوار است که لزوماً نباید کاندیدای لیاپانوف مربوط به هر زیرسیستم همواره دارای مشتق زمانی غیرمثبت باشد [۲۴، ۲۹-۲۷]. در نوع خاصی از روش‌های MLF توابع لیاپانوف سنتی به کمک سیگنال سوئیچ با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا یک تابع لیاپانوف جدید تولید گردد [۱۹، ۲۱،

[۱] Impulsive switched systems
[۲] Dwell-time
[۳] Average dwell-time
[۴] Mode-dependent average dwell-time
[۵] Region of validity
[۶] Multiple Lyapunov Functions

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

۲۲، ۲۵، ۳۰-۳۲]. ما این تابع لیاپانوف جدید را تابع لیاپانوف سوئیچ‌شونده[۱] (SLF) می‌نامیم. در روش‌های مبتنی بر SLF، هنگام فعال بودن یک زیرسیستم، تابع لیاپانوف متناظر از سمت بالا محدود می‌شود و در زمان سوئیچ نیز ارتباط تابع لیاپانوف جاری و تابع لیاپانوف آتی بیان می‌گردد.

از دیدگاه عملی، بویژه زمانی که قاعده سوئیچ غیر قابل دستکاری است، طراحی یک سیگنال کنترل پایدارکننده بسیار حائز اهمیت است. در این حیطه، مطالعات فوق‌الذکر دارای دو محدودیت عمده می‌باشند. اولاً، غالب این مطالعات اشباع محرک‌ها را در نظر ندارند. ثانیاً شرایط پایداری استخراج شده بصورت سراسری بیان شده‌اند که همانگونه که در پاراگراف بعد بیان می‌گردد این عمل محافظه‌کارانه خواهد بود.

بر اساس مطالعات ما، فعالیت‌های کمی در زمینه سیستم‌های سوئیچ و سیستم‌های ضربه‌ای انجام شده است که موضوع اشباع محرک‌ها را در نظر گرفته‌اند [۱۶، ۲۰، ۳۵-۳۳]. به هر حال، چندین جنبه مهم از سیستم‌های سوئیچ که در عمل بطور همزمان دیده می‌شوند، در این فعالیت‌ها نیز لحاظ نشده است. این مسائل عبارتند از جهش در لحظات سوئیچ، غیرخطی بودن مدل زیرسیستم‌ها، نایقینی‌های خطی و غیرخطی، صفرنشونده بودن نایقینی‌ها، و محدود بودن نُرم سیگنال کنترل. همانگونه که در [۱۶] و [۳۶] گزارش شده است، باید توجه داشت که دستیابی به سیگنال پایدارساز سراسری با نُرم محدود برای سیستم‌های عملی مشکل است. علاوه بر این، در بسیاری از کاربردهای عملی، به دلایل فیزیکی و عملیاتی، ناحیه اعتبار برای متغیرهای حالت محدود بوده و تعیین شرایط پایداری به صورت سراسری به معنی افزایش محافظه‌کاری است، چرا که ممکن است یک تابع کاندیدای لیاپانوف در یک ناحیه محدود شرایط لازم را برای اثبات پایداری برآورده نموده، درحالی که بر روی کل فضا این شرایط برای آن تابع لیاپانوف صادق نباشد. لذا، کافیست که شرایط پایداری/پایدارسازی استخراج شده تنها بر روی یک زیرفضای شامل نقطه تعادل برقرار باشند. در این مقاله نیز، بجای پایدارسازی سراسری، بر روی پایدارسازی محلی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای تمرکز شده است که از جمله مهمترین وجه تمایز این مقاله با سایر فعالیت‌ها می‌باشد.

در این مقاله، سیگنال کنترلی با نُرم محدود برای کلاس خاصی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی تحت هر سیگنال سوئیچ محدود شده دلخواه ارائه شده است. جنبه‌های مختلف این روش را می‌توان در چند بخش خلاصه نمود. (الف) مدل درنظر گرفته شده انواع مختلفی از نایقینی‌ها و اغتشاشات پارامتری و غیرپارامتری را پوشش می‌دهد. از آنجا که فرض شده است که این نایقینی‌ها صفرشونده نیستند، بجای همگرایی به نقطه تعادل، همگرایی به یک کران غایی[۲] به اندازه کافی کوچک که شامل نقطه تعادل است، مد نظر می‌باشد. این در حالی است که در اغلب فعالیت‌های مشابه، همگرایی به مبدأ مورد توجه قرار گرفته و شرایط پایداری استخراج شده است که در کاربردهای عملی محافظه‌کارانه است (به عنوان نمونه به [**۲۴، ۳۶، ۳۷**] رجوع شود). (ب) همانطور که بیان شد، به دلیل محدود بودن نُرم سیگنال کنترل و محدودیت‌های ناشی از مسائل فیزیکی و عملیاتی، پایدارسازی محلی مورد توجه قرار دارد. بنابراین در ابتدا برای یک مدل جامع‌تر شرایط کافی پایداری بگونه‌ای بیان شده‌اند که تنها باید در یک زیرفضا شامل مبدأ برقرار باشند. این دیدگاه محلی شانس بیشتری را برای رسیدن به سیگنال کنترل مناسب نسبت به دیدگاه‌های سراسری خواهد داشت. سپس، برای سیستم سوئیچ ضربه‌ای مورد نظر تحت یک سیگنال فیدبک حالت سوئیچ شونده، شرایط محلی فوق به کمک لم-اِس[۳] و لم مکمل شور[۴] به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی می‌شوند. اگرچه این مقاله به دلیل ارائه شرایط به صورت محلی دارای محافظه‌کاری کمتری نسبت به کارهای پیشین است ولی بایستی اذعان نمود که بیان شرایط پایداری سراسری به صورت نامساوی‌های ماتریسی، با متغیرهای تصمیم کمتری همراه خواهد بود که حل عددی آنها را راحت‌تر می‌نماید (به عنوان نمونه شرایط پایداری بیان شده در [۱۰، ۱۸، ۲۳] را با این مقاله مقایسه نمایید). (ج) از آنجا که این شرایط در یک زیرفضای محلی دارای اعتبار هستند، به منظور تضمین نتایج استخراج شده، مسیر حالت بایستی همواره درون این زیر فضا باقی بماند. لذا، در اینجا تکنیک ADT قابل اعمال نبوده و از تکنیک DT بهره گرفته می‌شود. (د) سیگنال کنترل طراحی شده مجموعه‌ای از فیدبک‌های حالت بوده که توسط قاعده سوئیچ با یکدیگر ترکیب شده‌اند. به منظور تضمین محدود بودن نُرم سیگنال کنترل، هر یک از این فیدبک‌های حالت با نُرم محدود طراحی می‌شوند. (ه) به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی، یک مسأله بهینه سازی ارائه شده است که توسط روش‌های لاگرانژین افزوده[۵] قابل حل است. جعبه‌ابزارهای مختلفی بر اساس این روش‌ها توسعه داده شده است که در این مقاله از جعبه ابزار PENBMI استفاده می‌گردد [۳۸].

ادامه این مقاله به این صورت سازماندهی می‌شود. در بخش ۲، بیان مسأله مورد نظر به همراه چندین تعریف و لم مفید می‌آید. در بخش ۳، در ابتدا شرایط کافی پایداری بر حسب مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف برای یک مدل جامع‌تر نسبت به سیستم مورد نظر تبیین می‌گردد. در نهایت این شرایط برای سیستم هدف به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی می‌شوند. همچنین یک مسأله بهینه‌سازی برای رسیدن به پارامترهای کنترلی که حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی را به دنبال دارد، در این بخش ارائه می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی برای چند مثال

[۱] Switched Lyapunov Function
[۲] Ultimate bound
[۳] S-Lemma
[۴] Schur Complement
[۵] Augmented Lagrangian methods

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

عددی و کاربردی در بخش ۴ آمده و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ صورت می‌گیرد.

نمادها: نمادهای استفاده شده در سرتاسر این مقاله استاندارد می‌باشند. ماتریس معین (و یا نیمه) معین مثبت A با نماد $A > 0$ (و یا $A \geq 0$) مشخص می‌گردد. ماتریس صفر و ماتریس یکه واحد به ترتیب با 0 و I نشان داده می‌شود. همچنین بیضی‌گون $\mathcal{E}(P,r)$ که در ارتباط با ماتریس $P > 0$ و اسکالر $r > 0$ می‌باشد به صورت $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq r\}$ تعریف می‌گردد. افزون بر این موارد، علامت "*" در نامساوی‌های ماتریسی بیانگر بخش‌های متقارن در ماتریس می‌باشد. در نهایت باید تأکید نمود که اگر ابعاد بعضی از ماتریس‌ها به صراحت بیان نشده است، فرض بر این می‌باشد که ابعاد مناسبی برای اَعمال جبری دارند.

۲- بیان مسأله

در این مقاله پایدارسازی سیستم سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی زیر مطالعه می‌شود. در این سیستم نایقینی‌های خطی و غیرخطی بوده و ورودی کنترل $u(t) \in \mathbb{R}^m$ دارای نُرم محدود است. این مدل را می‌توان به صورت زیر بیان نمود،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(t,x,u) + \phi_i(t), \ t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = C_i x(t), \ t = t_k, k \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن،

$$f_i(t,x,u) = (A_i + \Delta A_i)x + f_{ci}(x) + (B_i + \Delta B_i)u(t),$$

و $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} := \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ مجموعه‌ای اکیداً افزایشی از لحظات سوئیچ (ضربه) است که توسط سیگنال سوئیچ

$$\sigma(t): \mathbb{R}^+ \to \{1,2,\dots,m\},$$

شکل داده می‌شود. همچنین m تعداد زیرسیستم‌ها را نشان می‌دهد. در زمان‌های ضربه، هنگامی که زیرسیستم جاری به یک زیرسیستم دیگر سوئیچ می‌نماید، بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بطور ناگهانی دچار جهش می‌گردد. این جهش مطابق با ماتریس ثابت و معلوم $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ صورت می‌گیرد. فرض بر این است که بردار حالت $x(t)$ در لحظه ضربه از سمت چپ پیوسته است بگونه‌ای که،

$$x(t_k) = x(t_k^-) = lim_{\zeta \to 0^+} x(t_k - \zeta).$$

در سیستم (۱)، ماتریس‌های $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ نیز معلوم و ثابت فرض می‌شوند. همچنین تابع برداری $f_{ci}(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ بیانگر دینامیک‌های معلوم و غیرخطی زیرسیستم i می‌باشد. در اینجا فرض بر این است که $f_{ci}(0) = 0$ باشد. علاوه بر این موارد، ΔA_i، ΔB_i و $\phi_i(t)$ معرفی‌کننده انواع مختلفی از نایقینی‌ها و اغتشاشات ناشناخته برای زیرسیستم i هستند. در این مقاله همچنین فرض می‌کنیم که حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی τ_{min} شناخته شده است. این زمان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tau_{min} := \inf_{k \in \mathbb{N}^+} (t_k - t_{k-1}), \quad (۲)$$

علاوه بر این، فرضیات اساسی زیر نیز در این مقاله مفروض می‌باشند.

فرض ۱: جملات نایقینی در سیستم (۱) شکل زیر را برآورده نمایند،

$$[A_i(t) \quad B_i(t) \quad \phi_i(t)] = D_i F_i(t) [E_{ai} \quad E_{bi} \quad E_{\phi i}],$$

که در آن D_i، E_{ai}، E_{bi} و $E_{\phi i}$ ماتریس‌های ثابت معلوم بوده و $F_i(t)$ یک ماتریس نامعلوم متغیر با زمان است. المان‌های این ماتریس متغیر با زمان، اندازه‌پذیر لبگ[۱] بوده بطوری که برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ شرط $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$ برقرار است.

فرض ۲: تابع برداری $f_{ci}(x)$ برای هر بردار دلخواه x و y در فضای همگرایی، شرط لیپ شیتز زیر را برآورده نماید،

$$\|f_{ci}(x) - f_{ci}(y)\| \leq \|M_i(x-y)\|,$$

که در آن M_i یک ماتریس ثابت با ابعاد مناسب می‌باشد. با استفاده از شرط فوق داریم،

$$f_{ci}(x)^T f_{ci}(x) = \|f_{ci}(x)\| \leq \|M_i x\| = x^T M_i^T M_i x.$$

پیش از توسعه نتایج اصلی، در این قسمت چندین لم و تعریف بنیادین ارائه می‌شود. در ادامه از این لم‌ها و تعاریف برای بیان نتایج اصلی و اثبات قضایا استفاده می‌گردد.

لم ۱ [۳۹]: ماتریس‌های حقیقی S_1، S_2 و S_3 را درنظر بگیرید. فرض کنید که ابعاد این ماتریس‌ها مناسب باشند. اگر S_3 یک ماتریس معین مثبت حقیقی متقارن باشد، آنگاه به ازای هر اسکالر حقیقی $\zeta > 0$، نامساوی زیر برقرار است،

$$S_1^T S_2 + S_2^T S_1 \leq \zeta S_1^T S_3 S_1 + \zeta^{-1} S_2^T S_3^{-1} S_2.$$

لم ۲ [۴۰]: ماتریس‌های D، E و F را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید. اگر $F^T F \leq I$ باشد آنگاه برای هر اسکالر $\gamma > 0$ نامساوی زیر برقرار است،

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \gamma D D^T + \gamma^{-1} E^T E.$$

لم ۳ (لم مکمل شور در [۴۱]): فرض کنید که ماتریس‌های A، B، C و D به ترتیب دارای ابعاد $n \times n$، $n \times p$، $p \times n$ و $p \times p$ باشند. همچنین فرض کنید که ماتریس D معکوس‌پذیر باشد. ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

مکمل شور متناسب با بلوک D از ماتریس M، ماتریس $A - BD^{-1}C$ است که دارای ابعاد $n \times n$ می‌باشد. فرض کنید که ماتریس D معین مثبت باشد. آنگاه ماتریس M معین مثبت است اگر و تنها اگر مکمل شور بلوک D در ماتریس M، معین مثبت باشد.

[۱] Lebesgue measureable

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

لم ٤ (لم-اِس در [۳۶]): ماتریس‌های حقیقی A_i با ابعاد $n \times n$ را در نظر بگیرید که در آن $i \in \{0, \dots, m\}$ است. تابع $f_i(x) = x^T A_i x$ را تعریف کنید که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد. همچنین فرض کنید که اسکالرهای حقیقی α_i، بردار حقیقی $\mu \in \mathbb{R}^m$ و بردار $x^0 \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند بگونه‌ای که $\sum_{i=1}^m \mu_i A_i > 0$ و $f_i(x^0) < \alpha_i$ برقرار باشند. آنگاه برای هر $x \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \le \alpha_1, \dots, f_m(x) < \alpha_m\}$، گزاره $f_0(x) \le \alpha_0$ برقرار است اگر و تنها اگر اسکالرهای حقیقی $\tau_1 \ge 0$، $\tau_2 \ge 0$، ... و $\tau_m \ge 0$ وجود داشته باشد بطوری که،

$$\alpha_0 - \tau_1\alpha_1 - \tau_2\alpha_2 - \cdots - \tau_m\alpha_m \ge 0,$$
$$\tau_1 A_1 + \tau_2 A_2 + \cdots + \tau_m A_m - A_0 \ge 0.$$

تعریف: کاندیدای تابع لیاپانوف $V(x(t)): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{>0}$ را تابع لیاپانوف بسته می‌نامیم اگر به ازای هر اسکالر حقیقی مثبت $r > 0$، مجموعه تعریف شده زیر بسته باشد،

$$\upsilon(V, r) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \le r\}.$$

بسته بودن تابع لیاپانوف V را با نماد $V \in \upsilon_c$ نمایش می‌دهیم که در آن υ_c مجموعه همه توابع لیاپانوف بسته می‌باشد.

۳- نتایج اصلی

در این بخش، در ابتدا شرایط کافی پایداری نمایی غایی برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر نسبت به سیستم (۱) ارائه می‌شود. مدل این سیستم به صورت زیر است،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t)), & t \ne t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = g_i(x(t)), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^{+'} \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن توابع f_i و g_i به ترتیب بیانگر دینامیک‌های پیوسته زمان و گسسته زمان در زیرسیستم فعال می‌باشد. در اینجا نیز فرض بر این است که سیگنال سوئیچ $\sigma(t)$ با حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی τ_{min} بر این سیستم حاکم می‌باشد. پس از بیان شرایط کافی پایداری برای سیستم (۳) و اثبات آن، این شرایط به سیستم مورد نظر (۱) که در آن سیگنال کنترل یک فیدبک حالت با نُرم محدود می‌باشد، اعمال می‌گردد. در نهایت، به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه پایداری و کمترین کران غایی تحت چنین سیگنال کنترلی، یک مسأله بهینه‌سازی تعریف می‌گردد. با حل این مسأله بهینه‌سازی علاوه بر رسیدن به اهداف مذکور، پارامترهای کنترل‌کننده نیز تعیین می‌شود.

قضیه ۱: اسکالرهای حقیقی $0 < \delta < r$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف بسته $V_i \in \upsilon_c$ به همراه اسکالرهای حقیقی مثبت ρ، $\mu \ge 1$ و $\delta' > \delta$ وجود داشته باشد بگونه‌ای که نامساوی‌های زیر به ازای هر $i \ne j \in \{1,2, \dots, m\}$ برقرار باشند،

$$\dot{V}_i \le -\rho V_i, \forall x \in \upsilon(V_i, r) \backslash \upsilon(V_i, \delta), \quad (۴)$$

$$V_j(t_k^+) \le \mu V_i(t_k), \forall x \in \upsilon(V_i, r) \backslash \upsilon(V_i, \delta), \quad (۵)$$

$$V_j(t_k^+) \le \delta', \forall x \in \upsilon(V_i, \delta), \quad (۶)$$

$$\rho - \ln \mu / \tau_{min} > 0, \quad (۷)$$

که τ_{min} در (۲) تعریف شده است. بدین ترتیب، به ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \Omega_c := \bigcap_{i=1}^m \upsilon(V_i, r)$ ، مسیر حالت در سیستم (۳) به کران غایی $\Omega_f := \bigcup_{i=1}^m \upsilon(V_i, \delta')$ همگرا خواهد شد.

برهان: در ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $x_0 \in \Omega_c$، مسیر حالت درون فضای Ω_c باقی خواهد ماند. برای این منظور فرض کنید که در بازه زمانی $[t_0, t_1]$، زیر سیستم i فعال باشد. با توجه به شرط (۴) خواهیم داشت،

$$V_i(t) \le V_i(t_0) \exp\big(-\rho(t - t_0)\big), \forall t \in [t_0, t_1].$$

بنابراین در لحظه t_1 داریم،

$$V_i(t_1) \le V_i(t_0) \exp\big(-\rho(t_1 - t_0)\big) \le r \exp(-\rho\tau_{min}),$$

که یقیناً مقداری کوچک‌تر از r خواهد بود. همچنین فرض کنید که در لحظه t_1، زیرسیستم i به زیرسیستم j سوئیچ کند. مطابق (۵) داریم،

$$V_j(t_1^+) \le \mu V_i(t_1) \le \mu r \exp(-\rho\tau_{min}).$$

از آنجایی که بر اساس (۷) مقدار $\mu \exp(-\rho\tau_{min})$ کمتر از یک می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که،

$$V_j(t_1^+) \le r.$$

با ادامه این روند برای سایر بازه‌های زمانی $[t_k, t_{k+1}]$ می‌توان بیان نمود که مسیر حالت درون Ω_c باقی خواهد ماند.

حال نشان می‌دهیم که اگر در زمان فعال بودن زیرسیستم i، مسیر حالت به $\upsilon(V_i, \delta)$ همگرا شود، پس از آن هرگز از Ω_f خارج نخواهد شد. برای این منظور فرض کنید که این رویداد در بازه زمانی $[t_k, t_{k+1}]$ رخ دهد. با توجه به بسته بودن تابع لیاپانوف V_i و شرط (۴)، مسیر حالت تا پایان زمان فعال بودن این زیرسیستم، درون $\upsilon(V_i, \delta)$ باقی خواهد ماند. شرط (۵) الزام می‌کند که مسیر حالت پس از جهش درون زیرفضای $\upsilon(V_j, \delta')$ قرار بگیرد. به دلیل شرط (۴)، مقدار تابع لیاپانوف در طول بازه فعال بودن زیرسیستم j کاهش خواهد یافت. حال اگر در این مدت مسیر حالت به بازه $\upsilon(V_j, \delta)$ همگرا شود درون آن باقی خواهد ماند تا زمانی که زیر سیستم بعدی فعال شود که همین روال را به دنبال خواهد داشت. ولی اگر مسیر حالت در طول فعال بودن زیرسیستم j (یعنی در طول بازه زمانی $(t_{k+1}, t_{k+2}]$) به زیرفضای $\upsilon(V_j, \delta)$ همگرا نگردد، مطابق شرط (۴) به ازای هر $t \in (t_{k+1}, t_{k+2}]$ خواهیم داشت،

$$V_j(t) \le V_j(t_{k+1}^+) \exp\big(-\rho(t - t_{k+1})\big) \le \delta' \exp\big(-\rho(t - t_{k+1})\big).$$

بنابراین در لحظه t_{k+2} داریم،

$$V_j(t_{k+2}) \le \delta' \exp\big(-\rho(t_{k+2} - t_{k+1})\big) \le \delta' \exp(-\rho\tau_{min}).$$

شرط (۶) و (۷) تضمین می‌کند که مقدار تابع لیاپانوف برای زیرسیستم بعدی در لحظه t_{k+2}^+ کمتر از δ' باشد. لذا در کل می‌توان نتیجه گرفت که اگر در طول فعال بودن زیرسیستم i، مسیر حالت به $\upsilon(V_i, \delta)$ همگرا شود، مسیر حالت برای زمان‌های آتی درون Ω_f باقی می‌ماند.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

در نهایت قصد داریم نشان دهیم که مسیر حالت به ازای هر مقدار اولیه $x_0 \in \Omega_c$ به صورت نمایی کاهش خواهد داشت. برای این منظور تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید،

$$V(t) = V_{\sigma(t)}(t).$$

بر اساس (۴)، به ازای $t \in [t_0, t_1]$ داریم،

$$V(t) \le V(t_0)\exp\big(-\rho(t-t_0)\big).$$

لذا برای $t = t_1$ خواهیم داشت،

$$V(t_1) \le V(t_0)\exp\big(-\rho(t_1-t_0)\big),$$

و بر اساس (۵) می‌توان نتیجه گرفت که،

$$V(t_1^+) \le \mu V(t_1) \le \mu V(t_0)\, exp\big(-\rho(t_1-t_0)\big). \qquad (۸)$$

برای بازه زمانی $(t_1, t_2]$ مطابق با (۴) داریم،

$$V(t) \le V(t_1^+)\exp\big(-\rho(t-t_1)\big).$$

با جایگذاری (۸) در نامساوی فوق خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} V(t) &\le \mu V(t_0)\exp\big(-\rho(t_1-t_0)\big)\exp\big(-\rho(t-t_1)\big) \\ &= \mu V(t_0)\exp\big(-\rho(t-t_0)\big), \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم،

$$V(t_2) \le \mu V(t_0)\exp\big(-\rho(t_2-t_0)\big).$$

عبارت فوق و شرط (۵) ما را به نامساوی زیر می‌رساند،

$$V(t_2^+) \le \mu V(t_2) \le \mu^2 V(t_0)\exp\big(-\rho(t_2-t_0)\big).$$

با ادامه این روند برای سایر بازه‌های زمانی می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر $t \in (t_k, t_{k+1}]$ داریم،

$$\begin{aligned} V(t) &\le \mu^k V(t_0)\exp\big(-\rho(t-t_0)\big) \\ &= V(t_0)\exp\left(-\left(\rho - \frac{k}{t-t_0}\ln\mu\right)(t-t_0)\right) \\ &\le V(t_0)\exp\left(-\left(\rho - \frac{k}{t_k-t_0}\ln\mu\right)(t-t_0)\right). \end{aligned}$$

از طرف دیگر مطابق تعریف (۲) می‌توان بیان کرد که،

$$\frac{t_k - t_0}{k} \ge \tau_{min}.$$

در نتیجه می‌توان گفت که،

$$V(t) \le V(t_0)\, exp\left(-\left(\rho - \tfrac{\ln\mu}{\tau_{min}}\right)(t-t_0)\right). \qquad (۹)$$

با توجه به شرط (۷) می‌توان نتیجه گرفت که تابع لیاپانوف به صورت نمایی و با نرخ $\rho - \ln\mu/\tau_{min}$ کاهش خواهد داشت. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

□

توضیح ۱: در منابع مختلفی اثبات‌هایی مشابه وجود دارد (برای نمونه به [۲۴، ۳۶] رجوع شود). البته این اثبات‌ها تفاوت‌های فاحشی نیز با مورد بیان شده در قضیه ۱ دارند که عبارتند از: (الف) در اثبات‌های مشابه، پایداری به مبدأ مد نظر می‌باشد، لذا شرطی همانند شرط (۶) در آنها دیده نمی‌شود. در حقیقت شرط (۶) در قضیه ۱ برای همگرایی غایی منظور شده است چرا که در سیستم (۳) نایقینی‌های صفرنشونده درنظر گرفته شده است. (ب) شرایط بیان شده در منابع موجود غالباً سراسری بوده ولی در اینجا ما شرایطی را بیان نموده‌ایم که تنها کافی است به صورت محلی برقرار باشند. لذا در ابتدای اثبات قضیه نشان می‌دهیم که مسیر حالت هیچگاه از این زیرفضای محلی خارج نخواهد شد.

توضیح ۲: به منظور اینکه اطمینان حاصل کنیم که هیچ‌گاه مسیر حالت از زیرفضاهای تعریف شده خارج نمی‌شوند، از حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی بهره گرفته شده است و روش‌های مبتنی بر ADT و MDADT قابل استفاده نمی‌باشند.

در ادامه، شرایط بیان شده در قضیه ۱ برای سیستم (۱) (که همان سیستم مورد نظر این مقاله است) بازنویسی می‌شود. برای این منظور، سیگنال کنترل زیر را درنظر بگیرید،

$$u(t) = u_{\sigma(t)}, \qquad (۱۰)$$

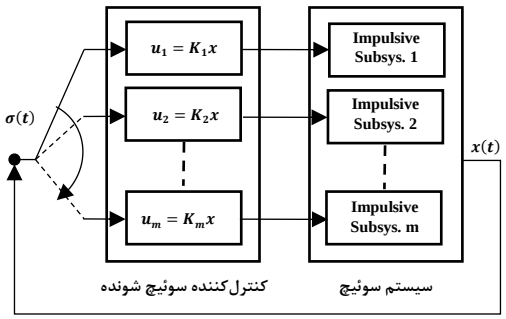
که در آن $u_i = -K_i x$ سیگنال‌های کنترل فیدبک حالت مناسبی است که در زمان فعال بودن زیرسیستم i عمل می‌نماید. به عبارت دیگر، بر اساس سیگنال سوئیچ $\sigma(t)$، سیگنال کنترل u_i زمانی فعال است که زیرسیستم i فعال باشد (شکل ۱ را ببینید). علاوه بر این، تابع لیاپانوف مربعی $V_i = x^T P_i x$ را درنظر بگیرید که در آن $P_i > 0$ یک ماتریس معین مثبت مناسب می‌باشد. مشتق زمانی این تابع لیاپانوف هنگامی که زیرسیستم i فعال است (یعنی زمانی که $\sigma(t) = i$ خواهد بود) عبارت است از،

$$\begin{aligned} \dot V_i &= \dot x^T P_i x + x^T P_i \dot x \\ &= \big((A_i + \Delta A_i)x + f_{ci} + (B_i + \Delta B_i)u_i + \phi_i\big)^T P_i x \\ &\quad + x^T P_i\big((A_i + \Delta A_i)x + f_{ci} + (B_i + \Delta B_i)u_i + \phi_i\big), \end{aligned}$$

که در آن ΔA_i، ΔB_i و ϕ_i نایقینی‌های مربوط به زیرسیستم i است. ساختار این نایقینی‌ها در فرض ۱ تعریف شده است. بایستی یادآور شد که در این مدت، سیگنال کنترل $u_i = -K_i x$ عمل می‌نماید. بدین ترتیب داریم،

$$\dot V_i = x^T(A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i)x + \Upsilon_i, \qquad (۱۱)$$

که در آن،



شکل ۱: طرح کنترلی پیشنهادی برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

$$\begin{aligned}\Upsilon_i = {} & f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} + x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{ai} x \\ & + (-x)^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{bi} K_i (-x) \\ & + E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{\phi i}.\end{aligned}$$

با استفاده از لم‌های بیان شده در بخش ۲ می‌توان عبارت فوق را به فرم مربعی بازنویسی نمود. بدین ترتیب می‌توان شرط (۴) را به صورت پاره‌ای از نامساوی‌های ماتریسی دوخطی بازنویسی کرد. به عنوان مثال، با استفاده از لم ۱،

$$f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} \le \zeta_i x^T P_i P_i x + \zeta_i^{-1} f_{ci}^T f_{ci},$$

و سپس فرض ۲ داریم،

$$f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} \le x^T (\zeta_i P_i P_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i) x, \qquad (۱۲)$$

که در آن ζ_i یک اسکالر حقیقی مثبت بوده و M_i ماتریس ثوابت لیپ‌شیتز مربوط به تابع برداری f_{ci} می‌باشد. بعلاوه، با استفاده از لم ۲، می‌توانیم نامساوی‌های زیر را بدست آوریم،

$$E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{\phi i} \le \gamma_{\phi i} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}, \qquad (۱۳)$$

$$x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{ai} x \le \gamma_{ai} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{ai}^{-1} x^T E_{ai}^T E_{ai} x, \qquad (۱۴)$$

$$(-x)^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{bi} K_i (-x) \le \gamma_{bi} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{bi}^{-1} x^T K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i x, \qquad (۱۵)$$

که در آن γ_{ai}، γ_{bi} و $\gamma_{\phi i}$ اسکالرهای حقیقی مثبت می‌باشند. با جایگذاری (۱۲) الی (۱۵) در (۱۱) داریم،

$$\begin{aligned}\dot{V}_i \le x^T \big(& A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i + \zeta_i P P + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i \\ & + \gamma_{\phi i} P D_i D_i^T P + \gamma_{ai} P D_i D_i^T P + \gamma_{bi} P D_i D_i^T P + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} \\ & + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i \big) x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}.\end{aligned}$$

مطابق (۴)، باید به ازای هر $x \in \Omega_i := \mathcal{E}(P_i, r) \backslash \mathcal{E}(P_i, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P_i x \le r, x^T P_i x \ge \delta\}$ شرط زیر برقرار باشد،

$$\dot{V}_i \le -\rho V_i = -\rho x^T P_i x.$$

اگر به ازای هر $x \in \Omega_i$ شرط زیر برقرار باشد، یقیناً نامساوی فوق نیز معتبر خواهد بود،

$$\begin{aligned}x^T \big(& A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i + \zeta_i P_i P_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i \\ & + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} \\ & + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P_i \big) x \le -\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}.\end{aligned}$$

بر اساس لم-اِس، شرط فوق برقرار است اگر اسکالرهای حقیقی مثبت τ_i^1 و τ_i^2 وجود داشته باشند بگونه‌ای که،

$$-\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} - \tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta \ge 0, \qquad (۱۶)$$

$$\begin{aligned}\tau_i^1 P_i - \tau_i^2 P_i - \big(& A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i + \zeta_i P_i P_i + \\ & \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \\ & \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P_i \big) \ge 0.\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

بر اساس مکمل شور، رابطه (۱۶) معادل نامساوی ماتریسی زیر می‌باشد،

$$\begin{bmatrix} -\tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \ge 0, \qquad (۱۸)$$

همچنین می‌توان رابطه (۱۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & M_i^T & E_{ai}^T & K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \ge 0,$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\Psi_i = {} & \tau_i^1 P_i - \tau_i^2 P_i - A_i^T P_i - P_i A_i - \rho P_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i \\ & - \zeta_i P_i P_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i.\end{aligned}$$

با ضرب ماتریس $diag(P_i^{-1}, I, I, I)$ از سمت چپ و راست در نامساوی ماتریسی فوق، خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \psi_i & P_i^{-1} M_i^T & P_i^{-1} E_{ai}^T & P_i^{-1} K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \ge 0, \qquad (۱۹)$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\psi_i = {} & \tau_i^1 P_i^{-1} - \tau_i^2 P_i^{-1} - P_i^{-1} A_i^T - A_i P_i^{-1} - \rho P_i^{-1} + P_i^{-1} K_i^T B_i^T \\ & + B_i K_i P_i^{-1} - \zeta_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) D_i^T D_i.\end{aligned}$$

بطور خلاصه، اگر نامساوی‌های (۱۸) و (۱۹) برقرار باشند، شرط (۴) برقرارخواهد بود. در کنار این موارد، بگونه‌ای مشابه، شرط (۵) را نیز می‌توان به صورت نامساوی‌های ماتریسی بیان نمود. برای این منظور، از تابع لیاپانوف $V_i = x^T P_i x$ و شرط (۵) داریم،

$$x^T(t_k^+) P_j x(t_k^+) \le \mu x^T(t_k) P_i x(t_k), \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r) \backslash \mathcal{E}(P_i, \delta).$$

به کمک تابع جهش مربوط به زیرسیستم i، رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$x^T(t_k) \big(C_i^T P_j C_i - \mu P_i \big) x(t_k) \le 0, \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r) \backslash \mathcal{E}(P_i, \delta).$$

مجدداً بر اساس لم-اِس، رابطه فوق برقرار است اگر اسکالرهای حقیقی مثبت τ_{ij}^3 و τ_{ij}^4 وجود داشته باشند بگونه‌ای که،

$$-\tau_{ij}^3 r + \tau_{ij}^4 \delta \ge 0, \qquad (۲۰)$$

$$\tau_{ij}^3 P_i - \tau_{ij}^4 P_i - \big(C_i^T P_j C_i - \mu P_i \big) \ge 0. \qquad (۲۱)$$

با استفاده از مکمل شور برای رابطه (۲۱) و سپس ضرب کردن ماتریس $diag(P_i^{-1}, I)$ از سمت چپ و راست در ماتریس حاصل از مکمل شور، خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^3 P_i^{-1} - \tau_{ij}^4 P_i^{-1} + \mu P_i^{-1} & P_i^{-1} C_i^T \\ * & P_j^{-1} \end{bmatrix} \ge 0. \qquad (۲۲)$$

بطور مشابه، با استفاده از لم-اِس می‌توان استدلال کرد که شرط (۶) نیز برقرار است اگر اسکالر حقیقی مثبت τ_{ij}^5 وجود داشته باشد بگونه‌ای که،

$$\delta' - \tau_{ij}^5 \delta \ge 0, \qquad (۲۳)$$

$$\tau_{ij}^5 P_i - C_i^T P_j C_i \ge 0. \qquad (۲۴)$$

مجدداً با اعمال مکمل شور و ضرب کردن حاصل در ماتریس $diag(P_i^{-1}, I)$، رابطه (۲۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد،

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^5 P_i^{-1} & P_i^{-1} C_i^T \\ * & P_j^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (۲۵)$$

بدین ترتیب برای سیستم (۱)، همه شرایط قضیه ۱ را می‌توان به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازگو کرد. همانطور که در بحث فوق دیده شد، برای این منظور سیگنال کنترل (۱۰) مورد توجه قرار گرفت. بهرحال باید توجه داشت که هدف اصلی این مقاله طراحی کنترل کننده با نُرم محدود می‌باشد. لذا، در انتها شرایطی را بنیان خواهیم گذاشت که محدود بودن نُرم سیگنال کنترل تحت آن شرایط تضمین شود. به عبارت دیگر تحت این شرایط خواهیم داشت،

$$\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2,$$

که در آن u_{max} یک اسکالر حقیقی مثبت می‌باشد. مجدداً یادآوری می‌شود که مطابق برهان قضیه ۱، در زمان فعال بودن هر یک از زیرسیستم‌ها، مسیر حالت درون بیضی‌گون مربوطه باقی خواهد ماند. بطور مثال اگر زیرسیستم i فعال باشد، مسیر حالت درون $\mathcal{E}(P_i, r)$ باقی خواهد ماند. از آنجایی که در طول این مدت داریم $u = u_i = -K_i x$، لذا بایستی عبارت زیر برای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$ برقرار باشد،

$$\|u_i\|^2 = u_i^T u_i = x^T K_i^T K_i x \leq u_{max}^2, \qquad \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r).$$

با اعمال لم-اِس به نامساوی فوق خواهیم داشت،

$$u_{max}^2 - \tau_i^6 r \geq 0, \quad (۲۶)$$

$$\tau_i^6 P_i - K_i^T K_i \geq 0. \quad (۲۷)$$

که در آن τ_i^6 اسکالر حقیقی مثبت می‌باشد. مجدداً، بر اساس مکمل شور، رابطه (۲۷) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود،

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 P_i & K_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (۲۸)$$

حال با ضرب کردن $diag(P_i^{-1}, I)$ از سمت چپ و راست در ماتریس رابطه (۲۸) خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 P_i^{-1} & P_i^{-1} K_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (۲۹)$$

بنابراین، محدود بودن نرم ورودی کنترل (۱۰) تضمین شده است اگر روابط (۲۶) و (۲۹) برقرار باشند. بحث فوق در نتیجه ۱ به صورت خلاصه و یکپارچه بیان شده است.

نتیجه ۱: اسکالرهای حقیقی مثبت $0 < \delta < r$ و u_{max} را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس‌های حقیقی معین مثبت متقارن $L_i > 0$، ماتریس‌های حقیقی W_i با ابعاد مناسب، اسکالرهای حقیقی مثبت ρ، $\mu \geq 1$، $\delta' > \delta$، ζ_i، γ_{ai}، γ_{bi}، $\gamma_{\phi i}$، τ_i^1، τ_i^2، τ_{ij}^3، τ_{ij}^4، τ_{ij}^5، τ_i^6 که در آن $i \neq j \in \{1,2,\dots,m\}$ است، وجود داشته باشند بگونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشد،

$$\rho - ln\,\mu/\tau_{min} > 0, \quad (۳۰)$$

$$\begin{bmatrix} -\tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (۳۱)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_i & L_i M_i^T & L_i E_{ai}^T & W_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (۳۲)$$

$$-\tau_{ij}^3 r + \tau_{ij}^4 \delta \geq 0, \quad (۳۳)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^3 L_i - \tau_{ij}^4 L_i + \mu L_i & L_i C_i^T \\ * & L_j \end{bmatrix} \geq 0. \quad (۳۴)$$

$$\delta' - \tau_{ij}^5 \delta \geq 0, \quad (۳۵)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^5 L_i & L_i C_i^T \\ * & L_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad (۳۶)$$

$$u_{max}^2 - \tau_i^6 r \geq 0, \quad (۳۷)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 L_i & W_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (۳۸)$$

که در آن τ_{min} در (۲) تعریف شده است. همچنین،

$$\psi_i = \tau_i^1 L_i - \tau_i^2 L_i - L_i A_i^T - A_i L_i - \rho L_i + W_i^T B_i^T + B_i W_i - \zeta_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) D_i^T D_i,$$

می‌باشد. آنگاه، سیستم سوئیچ ضربه‌ای (۱) تحت سیگنال سوئیچ شونده کنترل فیدبک (۱۰) با $u_i = -K_i x = -W_i L_i^{-1} x$ به ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \Omega_c := \cap_{i=1}^m \mathcal{E}(L_i^{-1}, r)$، به صورت نمایی به زیرفضای $\Omega_f := \cup_{i=1}^m \mathcal{E}(L_i^{-1}, \delta')$ همگرا می‌شود. همچنین نُرم سیگنال کنترل محدود خواهد بود بگونه ای که $\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2$ است.

برهان: همانطور که پیش از بیان این نتیجه بحث شد، این نتیجه مستقیماً از قضیه ۱ استخراج می‌شود. برای این منظور کافی است $L_i = P_i^{-1}$ و $W_i = K_i P_i^{-1}$ را در نظر بگیرید و سپس آنها را در روابط (۱۹)، (۲۲)، (۲۵) و (۲۹) قرار دهید. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

□

توضیح ۳: پاره‌ای از شرایط در نتیجه ۱ به صورت دوخطی می‌باشند. این اتفاق به دلیل استفاده از لم-اِس می‌باشد که ناشی از محلی در نظر گرفتن شرایط بوده است. اگر چه حل مسائل بهینه‌سازی با محدودیت‌های دوخطی نسبت به محدودیت‌های خطی پیچیده‌تر می‌باشد ولی باید توجه کرد که شانس یافتن توابع لیاپانوف در حالتی که شرایط محلی هستند به مراتب بیشتر از حالتی است که شرایط باید به صورت سراسری برقرار باشند.

توضیح ٤: اغلب شرایط در نتیجه ۱، خطی یا دوخطی می‌باشند که انگیزه استفاده از جعبه ابزار PENBMI برای دستیابی به پارامترهای کنترل‌کننده می‌باشد. جعبه ابزار PENBMI یک برنامه کامپیوتری است که برای حل مسائل بهینه‌سازی با تابع هدف مربعی و محدودیت‌هایی به صورت نامساوی‌های ماتریسی دوخطی (BMI) کاربرد دارد. بهرحال، شرط (۳۰) غیرخطی می‌باشد که بایستی به فرم خطی، دوخطی و یا چند جمله‌ای بازگو شود. از آنجا که $\mu \geq 1$ می‌باشد، رابطه $\ln(\mu) \leq \mu - 1$ برقرار خواهد بود. بنابراین، رابطه (۳۰) را می‌توان با شرط زیر جایگزین نمود،

$$\rho - (\mu - 1)/\tau_{min} > 0, \quad (۳۹)$$

البته شرط (۳۹) تا حدودی نسبت به شرط (۳۰) محافظه‌کارانه‌تر می‌باشد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

توضیح ۵: به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه همگرایی و کوچک‌ترین کران غایی، پارامترهای δ و r نیز به عنوان متغیرهای مسأله در نظر گرفته شده و مسأله بهینه‌سازی زیر معرفی می‌شود،

$$\begin{aligned} &min\ \delta' - \omega r \\ &s.t.\ \ (30)-(39), 0<\delta\le r, 1\le\mu \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

که در آن $\omega > 0$ یک اسکالر حقیقی مثبت است و به عنوان ضریب مصالحه بین حداقل کردن δ' و حداکثر کردن r استفاده می‌شود.

توضیح ٦: بر اساس نامساوی رایلی و برای یک تابع کاندیدای لیاپانوف مربعی $V_i = x^T P_i x$ داریم،

$$\lambda_{min}(P_i)\|x(t)\|^2 \le x^T P_i x \le \lambda_{max}(P_i)\|x(t)\|^2.$$

از طرف دیگر برای تابع کاندیدای لیاپانوف تعریف شده در این مقاله (یعنی $V(t) = V_{\sigma(t)}(t) = x^T P_{\sigma(t)} x$) واضح است که،

$$\begin{aligned} V(t) &\le \left\{\max_{i\in\{1,2,\dots,m\}} x^T P_i x\right\} \le \left\{\max_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{max}(P_i)\|x(t)\|^2\right\} \\ &= \left\{\max_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{max}(P_i)\right\}\|x(t)\|^2, \\ V(t) &\ge \left\{\min_{i\in\{1,2,\dots,m\}} x^T P_i x\right\} \ge \left\{\min_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{min}(P_i)\|x(t)\|^2\right\} \\ &= \left\{\min_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{min}(P_i)\right\}\|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

لذا از رابطه (۹) می‌توان نتیجه گرفت،

$$\begin{aligned} &\left\{\min_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{min}(P_i)\right\}\|x(t)\|^2 \\ &\le \left\{\max_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{max}(P_i)\right\}\|x_0\|^2 \exp\left(-\left(\rho - \frac{\ln\mu}{\tau_{min}}\right)(t-t_0)\right). \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} &\|x(t)\| \\ &\le \sqrt{\frac{\max_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{max}(P_i)}{\min_{i\in\{1,2,\dots,m\}} \lambda_{min}(P_i)}}\|x_0\| \exp\left(-\left(\rho - \frac{\ln\mu}{\tau_{min}}\right)\frac{(t-t_0)}{2}\right). \end{aligned}$$

بدین ترتیب می‌توان گفت که مسیر حالت با نرخ $0.5(\rho - \ln\mu/\tau_{min})$ به سمت Ω_f همگرا خواهد شد. لذا به منظور رسیدن به یک نرخ همگرایی مطلوب، می‌توان شرط (۳۹) در مسأله بهینه‌سازی (۴۰) را با شرط زیر جایگزین نمود،

$$\rho - (\mu - 1)/\tau_{min} > 2\rho_{desired}.$$

٤- شبیه‌سازی عددی

به منظور نشان دادن کارایی کنترل معرفی شده، در اینجا چند مثال ارائه می‌شود. در گام اول یک مثال عددی بیان شده و کارایی روش پیشنهادی در آن ارزیابی می‌گردد. در گام دوم، دینامیک یک موتور DC با تحریک مستقل و اینرسی سوئیچ‌شونده مورد بررسی قرار می‌گیرد. البته از آنجا که هدف مقایسه کارایی روش ارائه شده با روش‌های مشابه در مراجع دیگر است و با توجه به اینکه نزدیک‌ترین فعالیت انجام شده با روش پیشنهادی از نظر ساختار و دینامیک مورد بررسی، برای سیستم‌های غیرخطی سوئیچ فاقد ضربه می‌باشد (ارائه شده در [۳۶])، لذا در این مثال ابتدا سیستم موتور بدون ضربه فرض شده و پس از قیاس روش پیشنهادی با روش ارائه شده در [۳۶]، دینامیک ضربه نیز در این مثال لحاظ شده و عملکرد مناسب روش پیشنهادی در حضور ضربه نیز بررسی می‌گردد.

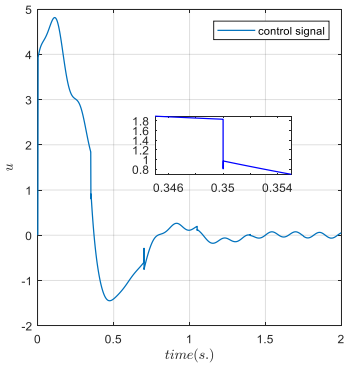
مثال ۱: برای این منظور سیستم (۱) با دو زیرسیستم را درنظر بگیرید که پارامترهای آن به صورت ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix}0.5 & 5\\ 1.7 & 0.5\end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \\ f_{c1}(x) &= 0.5\begin{bmatrix}\tanh x_1\\ \tanh x_2\end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix}1.2 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix}1 & 2.2\\ 5 & 0.5\end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \\ f_{c2}(x) &= 0.5\begin{bmatrix}|x_1|\\ |x_2|\end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

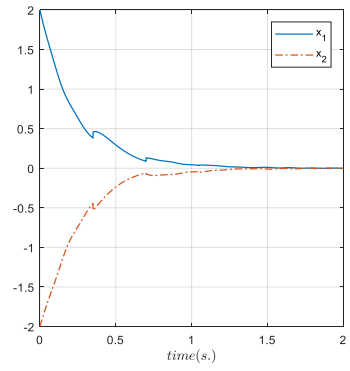
همچنین نایقینی‌های این دو زیرسیستم به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند،

$$\begin{aligned} &D_1 = D_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, F_1(t) = F_2(t) = \begin{bmatrix}sin(t) & 0\\ 0 & cos(t)\end{bmatrix}, \\ &E_{\phi 1} = E_{\phi 2} = E_{b1} = E_{b2} = \begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix}, E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

واضح است که توابع برداری $f_{ci}(x)$، شرط لیپ‌شیتز معرفی شده در فرض ۲ را با $M_i = 0.5 \times I_{2\times 2}$ برآورده می‌سازند. برای شبیه‌سازی عددی در حوزه زمان، سیستم داده شده بر روی بازه زمانی $[0, 2]$ تحت سیگنال سوئیچ $\sigma(t)$ با دنباله زمانی $\{1.75\ 1.40\ 1.05\ 0.70\ 0.35\}$ و $\sigma(0) = 1$ شبیه‌سازی می‌شود. فرض بر این است که در هر زمان سوئیچ، یک زیرسیستم به زیرسیستم دیگر سوئیچ می‌نماید. چنین سیگنال سوئیچی



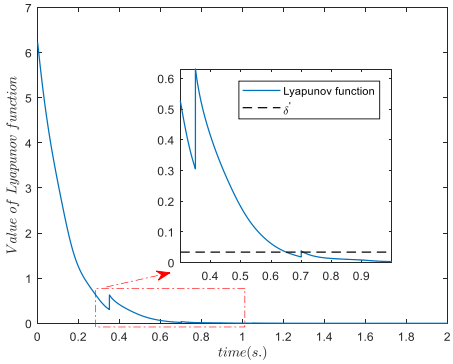
(الف)



(ب)

شکل ۲: (الف) تلاش کنترلی پایدارساز که دارای محدودیت در مقدار نُرم می‌باشد و (ب) همگرایی متغیرهای حالت به سوی کران غایی به ازای شرایط اولیه $x(0) = [+5\quad -5]$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]



شکل ۳: مقدار تابع لیاپانوف مربوط به مثال عددی. در زمان‌های ضربه مقدار تابع لیاپانوف افزایش می‌یابد ولی این افزایش در طول زمان بگونه‌ای کاهش می‌یابد که در کل روند نزولی را نشان می‌دهد. این امر تا رسیدن به کران غایی ادامه خواهد داشت.

حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی $\tau_{min} = 0.35\ sec$ را برآورده می کند. همچنین در اینجا، مقادیر $u_{max} = 10$ و $r = 10$ فرض می‌شود. به منظور دستیابی به پارامترهای کنترل‌کننده معرفی شده در (۱۰)، مسأله بهینه‌سازی (۴۰) حل می گردد. نتایج حاصل به قرار زیر است،

$$W_1 = [0.2475 \quad 2.0679], \qquad W_2 = [1.7402 \quad 0.2430],$$
$$\delta = 0.0164, \qquad \delta' = 0.0339,$$
$$L_1 = \begin{bmatrix} +0.7022 & -0.6100 \\ -0.6100 & +0.6605 \end{bmatrix}, \qquad L_2 = \begin{bmatrix} +0.4897 & -0.4254 \\ -0.4254 & +0.4606 \end{bmatrix}.$$

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود در زمان سوئیچ مقدار تابع لیاپانوف ممکن است افزایش داشته باشد ولی این افزایش در طول دوره زمانی تا لحظه سوئیچ بعدی بگونه‌ای جبران می‌شود که در مجموع مقدار تابع لیاپانوف به صورت نمایی کاهش خواهد داشت.

مثال ۲: در اینجا به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی بر روی یک سیستم واقعی و مقایسه آن با سایر روش‌های موجود در مراجع، دینامیک یک موتور DC تحریک مستقل در نظر گرفته می‌شود. مدل زیر دینامیک یک موتور با اینرسی سوئیچ‌شونده را توصیف می کند [۳۶]:

$$J_{\sigma(t)}\frac{d\omega(t)}{dt} = c_m\phi_s(t)i_r(t) - B_m\omega(t) - \eta_1(t),$$
$$L_r\frac{di_r(t)}{dt} = U_r(t) - R_r i_r(t) - c_m\phi_s(t)\omega(t) + \eta_2(t),$$
$$\frac{d\phi_s(t)}{dt} = U_s(t) - R_s\phi_s(t) + \eta_3(t),$$

که در آن $\omega(t)$ سرعت زاویه‌ای شفت موتور، $i_r(t)$ جریان آرمیچر، R_r و R_s به ترتیب مقاومت‌های اهمی مدار آرمیچر و مدار تحریک، L_r اندوکتانس مدار آرمیچر، $\phi_s(t)$ شار تحریک، $J_{\sigma(t)} \in \{J_1, J_2\}$ و B_m به ترتیب ممان اینرسی روتور و ضریب اصطکاک چسبندگی، η_1، η_2 و η_3 نایقینی‌های مدل نشده و اغتشاشات، c_m پارامتر ثابت و $U_r(t)$ و $U_s(t)$ ولتاژ تغذیه روتور و استاتور می‌باشد. با انتخاب متغیرهای کمکی به صورت زیر:

$$x_1 = \omega - \omega_{ref}, \qquad x_2 = i_a - I_{ref}, \qquad x_3 = \phi - \phi_{ref},$$
$$u_r = U_r - U_{r,ref}, \qquad u_s = U_s - U_{s,ref},$$

جدول ۱: مقادیر پارامترها در مثال ۲.

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
c_m	$0.03\ Wb/rad$	L_s	50 mH
J_1	$0.001\ Kg.m^2$	B_m	$0.009\ N.m.s$
J_2	$0.004\ Kg.m^2$	ω_{ref}	$120\ rad/s$
R_r	$0.5\ \Omega$	I_{ref}	$0.1\ A$
R_s	$85\ \Omega$	ϕ_{ref}	$15\ Wb$
L_r	$8.9\ mH$		

که در آن اندیس ref نشان‌دهنده نقطه مرجع می‌باشد، سیستم معادل به صورت (۱) بدست می‌آید. در این سیستم معادل پارامترهای شناخته شده به صورت زیر است:

$$A_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{J_{\sigma(t)}} & -\frac{c_m}{J_{\sigma(t)}}\phi_{ref} & \frac{c_m}{J_{\sigma(t)}}I_{ref} \\ -\frac{c_m}{L_r}\phi_{ref} & -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{c_m}{L_r}\omega_{ref} \\ 0 & 0 & -R_s \end{bmatrix},$$
$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad f_{\sigma(t)} = c_m x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{\sigma(t)}}x_2 \\ \frac{1}{L_r}x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این سیستم معادل، دینامیک‌های غیرخطی بر روی کل فضا شرط لیپ‌شیتز را برآورده نمی کنند، چرا که:

$$f_{\sigma(t)}^T f_{\sigma(t)} = c_m x_3^2\left(\frac{x_1}{L_r}\right)^2 + c_m x_3^2\left(\frac{x_2}{J_{\sigma(t)}}\right)^2.$$

کران بالای نُرم تابع برداری $f_{\sigma(t)}$ بر روی فضایی که $|x_3| \le \phi_{ref}$ باشد، عبارت است از:

$$f_{\sigma(t)}^T f_{\sigma(t)} \le c_m^2\phi_{ref}^2 (x_1\ x_2\ x_3)diag\left(\left(\frac{1}{L_r}\right)^2, \left(\frac{1}{J_{\sigma(t)}}\right)^2, 0\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

بنابراین داریم:

$$M_{\sigma(t)} = M_{\sigma(t)}^T = c_m\phi_{ref}diag\left(\frac{1}{L_r}, \frac{1}{J_{\sigma(t)}}, 0\right).$$

پارامترهای این سیستم در جدول ۱ آورده شده است. با انتخاب $u_{max} = 1000$، $\tau_{min} = 0.12\ s$ و نایقینی‌ها به صورت زیر،

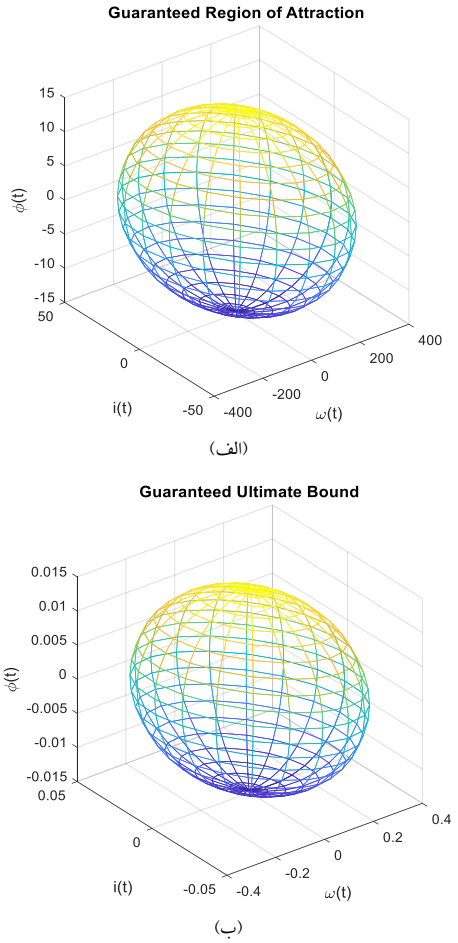
$$D_1 = D_2 = 0.1 \times I, \qquad E_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$E_\phi = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \qquad E_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و اعمال روش پیشنهادی در بخش ۳ خواهیم داشت،

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} +0.0959 & -0.0046 & -0.0003 \\ -0.0046 & +0.0023 & -0.0000 \\ -0.0003 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$
$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0000 & +0.0001 & -0.0026 \\ +0.0004 & -0.0044 & +0.0067 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0006 & +0.0004 & -0.0035 \\ +0.0273 & -0.0230 & +0.0526 \end{bmatrix}.$$

با مقایسه بهره کنترل‌کننده‌های ارائه شده در این مقاله و مقادیر بیان شده در [۳۶] کاملاً مشهود است که بهره بدست آمده در این مقاله بسیار

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]



شکل ۴: (الف) ناحیه جذب تضمین شده و (ب) کران غایی تضمین شده برای حالتی که هیچ یک از متغیرهای حالت دچار جهش نشوند.

کوچک‌تر است که به معنای این است که فضای جذب که درون آن سیگنال کنترل دارای نُرم محدود تعیین شده است به مراتب از فضای جذب در وسیع‌تر خواهد بود. فضای همگرایی و کران غایی بدست آمده در این مقاله در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین همگرایی مسیر حالت به کران غایی به ازای شرط اولیه $x(0) = (-120 \quad -0.1 \quad -15)^T$ در شکل ۵ دیده می‌شود. باید توجه داشت که مسیر حالت به سوی کران غایی همگرا شده و درون آن برای سایر زمان‌های آتی باقی می‌ماند.

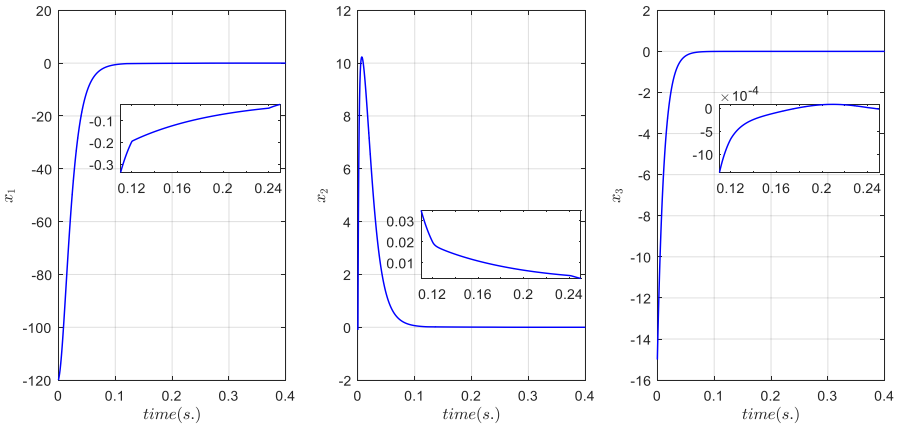
حال برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در مورد سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، به مثال مربوط به موتور DC تحریک مستقل، پارامتر ضربه به صورت $C_1 = C_2 = diag(-1, 1, 1)$ را نیز اضافه نموده و اقدام به حل مسأله بهینه‌سازی می‌شود. پارامترهای کنترل‌کننده‌های طراحی شده عبارتند از،

$$L_1 = \begin{bmatrix} +0.0274 & +0.0004 & +0.0001 \\ +0.0004 & +0.0025 & -0.0000 \\ +0.0001 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$
$$L_2 = \begin{bmatrix} +0.0274 & -0.0004 & -0.0001 \\ -0.0004 & +0.0025 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$
$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0002 & -0.0032 \\ +0.0596 & -0.0077 & -0.0302 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.0013 & +0.0003 & -0.0031 \\ +0.0593 & -0.0151 & +0.0391 \end{bmatrix}.$$

شبیه‌سازی‌ها مجدداً همگرایی به کران غایی را با وجود ضربه در متغیرهای حالت را نشان می‌دهد. همگرایی به کران غایی به ازای یک شرط اولیه و همچنین ناحیه جذب تضمین شده در شکل ۶ آورده شده است.

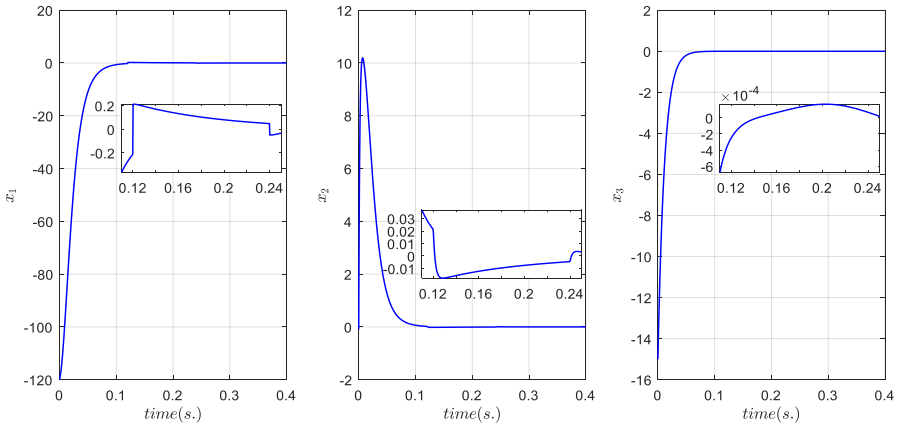
۵- نتیجه‌گیری

جلوگیری از اشباع محرک‌ها و به تبع آن محدود بودن نُرم سیگنال کنترل یک از مسائلی است که به خوبی در حیطه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای بررسی نشده است. بایستی دقت داشت که دستیابی به یک سیگنال کنترل فیدبک حالت که به صورت سراسری دارای نُرم محدود باشد تقریباً غیرممکن می‌باشد. بنابراین این مقاله، پایدارسازی محلی کلاسی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی را مورد بررسی قرار می‌دهد که نه تنها نُرم ورودی کنترل در آن محدود می‌باشد بلکه هر زیرسیستم با منابع مختلفی از نایقینی‌های صفرنشونده روبرو می‌باشد. برای این منظور، در ابتدا پاره ای از شرایط محلی را بر حسب مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف بسته ارائه می‌دهیم که تحت این شرایط پایداری یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر را تضمین می‌کند. سپس، این شرایط به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی برای سیستم هدف بیان می‌گردد.



شکل ۵: همگرایی متغیرهای حالت به کران غایی به ازای یک شرط اولیه برای موتور DC تحریک مستقل بدون وجود ضربه.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]



شکل ۶: همگرایی مسیرهای حالت به سوی کران غایی با وجود ضربه در متغیر حالت x_1

جنبه‌های مختلف روش بیان شده در این مقاله به قرار زیر است. (الف) شرایط بیان شده کافی است به صورت محلی برقرار باشند که نسبت به قضایایی که شرایط را سراسری در نظر می‌گیرند، شانس یافتن توابع لیاپانوف مناسب و در نتیجه سیگنال کنترل پایدارساز را افزایش می‌دهد. (ب) انواع مختلفی از نایقینی‌های خطی و غیرخطی صفر نشونده در این روش درنظر گرفته شده است. (ج) روش ارائه شده از تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه بهره می‌گیرد که مراتب نسبت به تکنیک تابع لیاپانوف مشترک کارایی بالاتری دارد. (د) برخلاف تکنیک‌های رایج توابع لیاپانوف چندگانه، در روش ارائه شده همگرایی به یک کران غایی منظور شده است. (ه) به منظور دستیابی به پارامترهای سیگنال کنترل، یک مسأله بهینه‌سازی معرفی می‌شود که در آن محدودیت‌های مسأله به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی می‌باشند. با حل این مسأله، ضمن تضمین محدود بودن نُرم سیگنال کنترل می‌توان به حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی دست یافت.

به عنوان گام بعدی در این پژوهش، امید است که بتوان مسأله بهینه-سازی را برای رسیدن به سیگنال پایدارساز برای سایر انواع دینامیک‌های غیرخطی، نایقینی‌ها و توابع جهش بازنویسی نمود. علاوه بر این، امیدواریم که بتوانیم از روش‌های رایانش نرم برای تعیین پارامترهای بهینه مسأله معرفی شده بهره بگیریم.

مراجع

[1] R. Shi, X. Jiang, L. Chen, The effect of impulsive vaccination on an SIR epidemic model, Appl. Math. Comput. 212 (2009) 305–311.
[2] X.-M. Sun, W. Wang, Integral input-to-state stability for hybrid delayed systems with unstable continuous dynamics, Automatica. 48 (2012) 2359–2364.
[3] G. Pang, Z. Liang, W. Xu, L. Li, G. Fu, A Pest Management Model with Stage Structure and Impulsive State Feedback Control, Discret. Dyn. Nat. Soc. 2015 (2015) 1–12.
[4] J. Jiao, S. Cai, L. Chen, Dynamics of a plankton-nutrient chemostat model with hibernation and it described by impulsive switched systems, J. Appl. Math. Comput. 53 (2017) 583–598.
[5] A.D. Ames, K. Galloway, K. Sreenath, J.W. Grizzle, Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Functions and Hybrid Zero Dynamics, IEEE Trans. Automat. Contr. 59 (2014) 876–891.
[6] M. Posa, M. Tobenkin, R. Tedrake, Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction, IEEE Trans. Automat. Contr. (2015) 1423–1437.
[7] Z.-G. Wu, P. Shi, H. Su, J. Chu, Sampled-Data Fuzzy Control of Chaotic Systems Based on a T-S Fuzzy Model, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 22 (2014) 153–163.
[8] X. Wan, J. Sun, Adaptive–impulsive synchronization of chaotic systems, Math. Comput. Simul. 81 (2011) 1609–1617.
[9] T. Fang, J. Sun, Stability of complex-valued impulsive and switching system and application to the Lü system, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 14 (2014) 38–46.
[۱۰] ملا احمدیان کاسب حامد، کریم پور علی، پریز ناصر، سیستم های تکه ای خطی تبار مستقیم: کلاس جدیدی از سیستم های هایبرید با دینامیک‌های خطی تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم. مجله کنترل. ۱۳۹۱؛ ۶ (۱): ۲۹-۲۱.
[11] Zhi-Hong Guan, D.J. Hill, Xuemin Shen, On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control, IEEE Trans. Automat. Contr. 50 (2005) 1058–1062.
[12] W.M. Haddad, V. Chellaboina, S.G. Nersesov, Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control, Princeton University Press, 2006.
[13] H. Lin, P.J. Antsaklis, Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results, IEEE Trans. Automat. Contr. 54 (2009) 308–322.
[14] F. Xu, L. Dong, D. Wang, X. Li, R. Rakkiyappan, Globally exponential stability of nonlinear impulsive switched systems, Math. Notes. 97 (2015) 803–810.
[15] H. Xu, K.L. Teo, Exponential Stability With L_{2}-Gain Condition of Nonlinear Impulsive Switched Systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 55 (2010) 2429–2433.
[16] Y. Chen, S. Fei, K. Zhang, Stabilization of impulsive switched linear systems with saturated control input, Nonlinear Dyn. 69 (2012) 793–804.
[۱۷] اقرزاده کوهبنانی محمد علی، قیصری جعفر، عسکری جواد، مجیری محسن. پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر و سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت مشخص. مجله کنترل. ۱۳۹۳؛ ۸ (۴): ۵۵-۶۴.
[18] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun, H. Gao, Finite-time stability for impulsive switched delay systems with nonlinear disturbances, J. Franklin Inst. 353 (2016) 3578–3594.
[19] S. Li, Z. Xiang, Stability and L1-gain control for positive impulsive switched systems with mixed time-varying delays, IMA J. Math. Control Inf. (2016) dnw030.
[20] Y. Yang, G. Chen, Finite-time stability of fractional order impulsive switched systems, Int. J. Robust Nonlinear Control. 25 (2014) 2207–2222.
[21] G. Zong, Q. Wang, Robust resilient control for impulsive switched systems under asynchronous switching, Int. J. Comput. Math. 92 (2015) 1143–1159.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]

[22] G. Feng, J. Cao, Stability analysis of impulsive switched singular systems, IET Control Theory Appl. 9 (2015) 863–870.

[۲۳] اعظم بالغی نصراله، شفیعی محمد حسین. تحلیل پایداری سیستم‌های سوئیچ‌شوندهٔ خطی گسسته‌زمان با در نظر گرفتن تاخیر زمانی و عدم قطعیت پارامتری. مجله کنترل. ۱۳۹۴; ۹ (۴) :۷۷-۸۵.

[24] X. Zhao, P. Shi, Y. Yin, S.K. Nguang, New Results on Stability of Slowly Switched Systems: A Multiple Discontinuous Lyapunov Function Approach, IEEE Trans. Automat. Contr. 62 (2017) 3502–3509.

[25] B. Wang, H. Zhang, G. Wang, C. Dang, S. Zhong, Asynchronous control of discrete-time impulsive switched systems with mode-dependent average dwell time, ISA Trans. 53 (2014) 367–372.

[26] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, M. Liu, Stability and Stabilization of Switched Linear Systems With Mode-Dependent Average Dwell Time, IEEE Trans. Automat. Contr. 57 (2012) 1809–1815.

[27] M.S. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 43 (1998) 475–482.

[28] Hui Ye, A.N. Michel, Ling Hou, Stability theory for hybrid dynamical systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 43 (1998) 461–474.

[29] W. Xiang, J. Xiao, Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching, Automatica. 50 (2014) 940–945.

[30] X. Xie, H. Xu, R. Zhang, Exponential Stabilization of Impulsive Switched Systems with Time Delays Using Guaranteed Cost Control, Abstr. Appl. Anal. 2014 (2014) 1–8.

[31] L. Gao, D. Wang, Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 20 (2016) 55–71.

[32] P. Li, J. Lam, K.C. Cheung, Stability, stabilization and L2-gain analysis of periodic piecewise linear systems, Automatica. 61 (2015) 218–226.

[33] L. Lu, Z. Lin, Design of Switched Linear Systems in the Presence of Actuator Saturation, IEEE Trans. Automat. Contr. 53 (2008) 1536–1542.

[34] A. Benzaouia, O. Akhrif, L. Saydy, Stabilisation and control synthesis of switching systems subject to actuator saturation, Int. J. Syst. Sci. 41 (2010) 397–409.

[35] W. Ni, D. Cheng, Control of switched linear systems with input saturation, Int. J. Syst. Sci. 41 (2010) 1057–1065.

[36] A. Poznyak, A. Polyakov, V. Azhmyakov, Attractive Ellipsoids in Robust Control, Springer International Publishing, Cham, 2014.

[37] H. Yang, B. Jiang, J. Zhao, On Finite-Time Stability of Cyclic Switched Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 60 (2015) 2201–2206.

[38] M. Kocvara, M. Stingl, PENNON: Software for Linear and Nonlinear Matrix Inequalities, in: M.F. Anjos, J.B. Lasserre (Eds.), Handb. Semidefinite, Conic Polynomial Optim., Springer US, 2012: pp. 755–791.

[39] X. Liao, G. Chen, E.N. Sanchez, Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach, Neural Networks. 15 (2002) 855–866.

[40] L. V. Hien, V.N. Phat, Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009) 259–265.

[41] K. Derinkuyu, M.Ç. Pınar, On the S-procedure and Some Variants, Math. Methods Oper. Res. 64 (2006) 55–77.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.1.2]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.21]