مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۴۶-۳۵

طراحی و مقایسه تجربی الگوریتم جدید تخمین تراز برای بدنه شتاب‌دار

محمدتقی ثابت[۱]، حمیدرضا محمدی دانیالی[۲]، علیرضا فتحی[۳]، ابراهیم علیزاده[۴]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، mohammadtaghi.sabet@gmail.com

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل ، mohammadi@nit.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل ، fathi@nit.ac.ir

[۴] دانشیار، پژوهشکده مالک اشتر شمال، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ealizadeh@mut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۱/۸ ویرایش اول: ۱۳۹۶/۴/۱۵ ویرایش دوم:۱۳۹۷/۸/۱۵ ویرایش سوم:۱۳۹۶/۱۰/۱۷ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۲۳

چکیده: در این مقاله با استفاده از یک مدل‌سازی جدید، الگوریتم کالمن توسعه‌یافته‌ای برای تخمین تراز (زاویه غلت و فراز) و بایاس حسگرهای ژیروسکوپ به کمک حسگرهای اینرسی شامل یک شتاب‌سنج سه محوره و یک ژیروسکوپ سه محوره ارائه شده است. این الگوریتم برای تخمین دقیق تراز در شرایط دینامیکی و حضور اغتشاشات خارجی توسعه داده شده است. با توجه به این که مساله تخمین شتاب بدنی خارجی به عنوان اصلی‌ترین منبع خطای تخمین تراز در شرایط دینامیکی اهمیت زیادی در دقت تخمین تراز دارد، اما در مراجع موجود میزان خطای ناشی از آن بر روی تخمین تراز در شرایط دینامیکی مختلف بررسی نشده است. این مقاله به مساله تخمین بایاس حسگرهای ژیروسکوپ در دو راستای چرخش غلت و فراز، تخمین تراز دقیق در شرایط دینامیکی مختلف و تخمین شتاب بدنی خارجی می‌پردازد. عملکرد الگوریتم پیشنهادی برای تخمین تراز، شتاب بدنی خارجی و بایاس حسگرهای ژیروسکوپ با استفاده از آزمون تجربی شبه-استاتیکی و دینامیکی در محدود شتاب مختلف ارزیابی می‌شود.

کلمات کلیدی: فیلتر کالمن توسعه‌یافته، تخمین تراز، تخمین بایاس ژیروسکوپ، تخمین شتاب بدنی خارجی، حسگر اینرسی.

Design and experimental comparison of a new attitude estimation algorithm for accelerated rigid body

Mohammad Taghi Sabet, Hamidreza Mohammadi Daniali, Alireza Fathi, Ebrahim Alizadeh

Abstract: In this paper, using a new modeling, an Extended Kalman Filter (EKF) is presented for estimation of attitude (i.e. roll and pitch angles) and gyroscope sensor bias using a tri-axes acceleration and a tri-axes gyroscope. The algorithm is developed for accurate estimation of attitude in dynamic conditions and existence of external body acceleration. The external body acceleration estimation as the main source of attitude estimation error in dynamic conditions is very important in attitude estimation accuracy, but in the literatures, the error of the external body acceleration on attitude estimation has not been studied in different dynamic conditions. The paper deals to estimation of the gyroscope sensor bias in two rotational axes (roll and pitch), accurate attitude estimation in different dynamic conditions and estimation of external body acceleration. The proposed algorithm application for attitude, external body acceleration and gyroscope sensor bias is evaluated by quasi-static and dynamic experimental tests in high acceleration bound.

Keywords: Extended Kalman Filter, Attitude estimation, Gyroscope sensor bias estimation, External body acceleration estimation, Inertial sensor.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

۱- مقدمه

تخمین زوایای چرخش یکی از پارامترهای مهم در بسیاری از سیستم‌های خودگردان است [۱-۵]. امروزه به علت پیشرفت در سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی، بخصوص سیستم‌های میکروالکترومکانیکی[۱]، فن‌آوری ساخت حسگرهای اینرسی ارزان قیمت با سایز کوچک توسعه یافته است [۶]. تمرکز بیشتر کارهای قبلی بر روی تخمین زوایای چرخش سه بعدی با استفاده از ترکیب حسگرهای اینرسی و مغناطیس بوده است [۷-۹]. به این ترکیب حسگرها در اصطلاح سیستم مرجع تعیین تراز و سمت[۲] گفته می‌شود. در این سیستم، شتاب‌سنج با اندازه‌گیری میدان جاذبه گرانشی زمین تراز را تولید می‌کند و چون شتاب‌سنج قادر به آشکارسازی چرخش حول محور عمودی نیست نیاز به استفاده از مغناطیس‌سنج برای اندازه‌گیری سمت است. هر چند سیستم مرجع تعیین تراز و سمت در کاربری‌های مختلف شامل: تعیین زوایای چرخش بدن انسان [۱۰-۱۲]، زوایای چرخش خودرو [۱۳] و زوایای چرخش رونده هوایی بدون سرنشین [۲، ۱۴] استفاده شده، اما تاثیر شتاب بدنی خارجی به عنوان اصلی‌ترین منبع خطای تخمین تراز در این کارها بررسی نشده است. معمولا داده شتاب‌سنج شامل ترکیبی از شتاب جاذبی و شتاب بدنی خارجی است. در واقع شتاب بدنی خارجی، مقدار شتاب جسم صلبی است که حسگر شتاب‌سنج روی آن نصب شده است. با وجود شتاب بدنی خارجی، معمولا با تلفیق داده‌های شتاب‌سنج و ژیروسکوپ با استفاده از یک فیلتر تخمین‌زن اثر اغتشاشات خارجی کاهش می‌یابد.

در مراجع موجود، روش‌های کاهش اثر شتاب بدنی خارجی و تخمین دقیق‌تر تراز به دو روش عمده تقسیم می‌شوند:

روش اول، روش سوئیچینگ مبتنی بر آستانه حد[۳] بوده که در این روش با استفاده از یک معیار حدی برای شتاب و سوئیچ اندازه ماتریس کوواریانس مدل اندازه‌گیری و مدل دینامیکی، خطای ناشی از شتاب بدنی خارجی کاهش می‌یابد. در مواقع تشخیص شتاب بدنی خارجی با استفاده از معیار حدی شتاب و کاهش وزن تخمین تراز از طریق شتاب‌سنج و افزایش وزن تخمین توسط ژیروسکوپ (به اصطلاح تطبیقی[۴] کردن الگوریتم تخمین تراز) خطای تخمین تراز کاهش می‌یابد. سو و همکارانش [۱۵]، یک سیستم تخمین تراز تطبیقی برای جبران خطای ناشی از شتاب بدنی خارجی طراحی کردند. آنها با استفاده از یک فیلتر کالمن توسعه‌یافته تطبیقی دو مرحله‌ای تراز را در شرایط حضور شتاب غیرجاذبی (شتاب بدنی خارجی) تخمین زدند. این روش با استفاده از داده‌های تجربی و در حضور شتاب بدنی خارجی ارزیابی شده است.

در این مقاله به دلیل استفاده از مدل اندازه‌گیری غیرخطی که در مشاهده‌پذیری فیلتر موثر بوده، دقت تخمین زوایا کاهش خواهد یافت. لی و پارک [۱۶]، یک روش فیلتر کالمن مبتنی بر مختصه‌های کواترنیون برای تخمین زوایای چرخش بدن ارائه کردند. آنها برای تخمین زوایای اویلر، حسگرهای اینرسی و مغناطیس را به کار گرفتند. همچنین، از یک روش تطبیقی برای کاهش اثر اغتشاشات خارجی شامل شتاب بدنی خارجی و اغتشاشات مغناطیسی برای تخمین پایدار و دقیقتر تراز و سمت بهره بردند. ساباتینی نیز [۱۷] از یک روش مشابه این، برای تخمین زوایای تراز و سمت استفاده کرده است. رهبیندر و هو [۱۸]، مساله تخمین تراز برای یک بدنه صلب شتاب‌دار را با استفاده از شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌ها بررسی کردند. آنها یک الگوریتم برای تلفیق داده حسگرهای شتاب‌سنج و ژیروسکوپ برای تخمین بدون دریفت تراز ارائه نمودند. این الگوریتم با استفاده از دو مد اندازه‌گیری تراز، شامل مد شتاب بالا و شتاب پایین، تراز را با دقت تخمین می‌زند. مزیت اصلی این روش مدل خطی اندازه‌گیر است، اما چنانچه این الگوریتم در مدت زمان زیادی به مد شتاب بالا سوئیچ کند، خطای تخمین تراز زیاد می‌شود. چو و همکارانش [۱۹]، یک روش جدید با دو الگوریتم تلفیقی مبتنی بر شرط بهینه برای تخمین زوایای چرخش با استفاده از حسگرهای ارزان قیمت مغناطیس‌سنج، شتاب‌سنج و ژیروسکوپ‌های میکرومکانیکی ارائه کردند. این روش که با نام فیلتر بهینه دو مرحله‌ای نام‌گذاری شده از یک فیلتر بهینه و یک الگوریتم اندازه‌گیری سریع تشکیل شده است. این فیلتر بهینه با استفاده از یک قانون فازی برای تنظیم ماتریس کوواریانس اندازه‌گیری حسگر شتاب‌سنج و مغناطیس‌سنج طراحی شده است. سپس، با استفاده از الگوریتم کواترنیون بهینه و یک تخمین‌زن سریع زوایای چرخش تخمین زده می‌شوند. تخمین زوایا با استفاده از این الگوریتم تطبیقی بهینه در حضور اغتشاشات مغناطیسی و شتاب‌های خارجی نیز با دقت قابل قبول صورت می‌گیرد. عملکرد این الگوریتم در حضور آزمون‌های تجربی با یک رونده زیرسطحی ارزیابی شده است.

روش دوم، روش مبتنی بر مدل‌سازی شتاب بدنی خارجی است. در این روش با توجه به شناخت شرایط حرکتی سیستمی که شتاب‌سنج بر آن نصب می‌شود و در نظر گرفتن مدلی برای شتاب بدنی خارجی می‌توان دو نوع شتاب جاذبه و شتاب بدنی خارجی را از هم تفکیک نمود و شتاب بدنی خارجی را تخمین زد. مراجع موجود شتاب بدنی خارجی را به عنوان بایاسی برای شتاب‌سنج مدل نموده و تخمین زدند. روتنبرگ و همکارانش [۷]، با تلفیق داده حسگرهای ژیروسکوپ، شتاب‌سنج و مغناطیس‌سنج یک فیلتر کالمن مقاوم و تطبیقی برای تخمین زوایای چرخش بدن انسان طراحی کردند. در این فیلتر، خطای بایاس ژیروسکوپ، خطای زوایای چرخش و خطای اغتشاشات مغناطیسی تخمین زده شدند. برای تخمین این خطاها از یک مدل دینامیکی خطا استفاده شده است. در این مدل خطا، برای مدل‌سازی دریفت ژیروسکوپ یک مدل مارکوف مرتبه اول و برای مدل اغتشاشات

[۱] Micro Electro Mechanical System (MEMS)
[۲] Attitude and Heading Reference System (AHRS)
[۳] Threshold-Based
[۴] Adaptive

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

مغناطیسی یک فیلتر مرتبه اول پایین‌گذر استفاده شده است. عملکرد این فیلتر تحت آزمون‌های تجربی شبه استاتیک و آزمون‌های دینامیکی و در نزدیکی مواد فرومغناطیسی آزمون شده است. یان و همکارانش [۲۰]، یک الگوریتم ساده مبتنی بر کواترنیون برای تخمین زوایای چرخش از روی میدان شتاب جاذبه و مغناطیس زمین ارائه کردند. این الگوریتم قادر به اندازه‌گیری زوایای چرخش در شرایط استاتیکی و یا حرکت آهسته یک جسم صلب است. دقت و عملکرد این الگوریتم با استفاده از آزمون تجربی ارزیابی شده است. همچنین، روشی برای ممانعت از ایجاد تکینی در تخمین زوایا معرفی شده که به الگوریتم اجازه می‌دهد تا تمامی زوایای چرخش را اندازه بگیرد. برای جدا کردن اثر شتاب بدنی خارجی از شتاب جاذبه از یک فیلتر پایین‌گذر بر روی داده‌های شتاب‌سنج استفاده شده است. لوئینگ و ولتینک [۲۱]، یک الگوریتم تخمین زوایای چرخش، برای محاسبه زاویه چرخش بدن طراحی کردند. در این الگوریتم، مقدار دریفت ژیروسکوپ‌ها، خطای شتاب‌سنج‌ها و بایاس حسگر مغناطیس تخمین زده شده است.

با توجه به اینکه مساله تخمین شتاب بدنی خارجی اهمیت زیادی در دقت تخمین تراز دارد، اما در مراجع مختلف میزان خطای ناشی از آن بر روی تخمین تراز در شرایط دینامیکی مختلف بررسی نشده است. در این مقاله با استفاده از یک مدلسازی جدید برای مدل دینامیکی و مدل اندازه‌گیر، فیلتر کالمن توسعه‌یافته‌ای برای تخمین تراز و بایاس حسگرهای ژیروسکوپ ارائه شده است. همچنین، با توجه به در نظر گرفتن یک مدل مرتبه اول برای شتاب بدنی خارجی و تنظیم پارامترهای آن برای شرایط دینامیکی، شتاب بدنی خارجی تخمین زده شده است. دقت الگوریتم پیشنهادی با استفاده از آزمون‌های تجربی نه تنها برای تخمین تراز بلکه برای تخمین شتاب بدنی خارجی در شرایط دینامیکی با محدوده شتاب بدنی خارجی زیاد ارزیابی شده است.

در ادامه، در بخش دوم روش حل و فرموله کردن مساله تخمین تراز و همچنین الگوریتم تخمین تراز پیشنهادی به طور مفصل توصیف می‌شود. در بخش سوم نتایج تجربی و همچنین نحوه ارزیابی و صحت‌سنجی الگوریتم پیشنهادی ارائه می‌شود. سپس در بخش چهارم نتیجه‌گیری نهایی از مقاله حاضر بیان می‌شود.

۲- روش حل و فرموله کردن مساله

در طراحی الگوریتم تعیین زوایای چرخش یک جسم صلب از سه روش عمده شامل زوایای اویلر، ماتریس کوسینوس هادی[۱] (ماتریس دوران) و کواترنیون[۲] به عنوان مدل دینامیکی در فیلتر تخمین‌زن استفاده می‌شود. در این مقاله از روش ماتریس کسینوس هادی به علت فرمولاسیون و حل خطی، به عنوان مدل دینامیکی در فیلتر تخمین‌زن استفاده شده است. همچنین، یک شتاب‌سنج به عنوان حسگر تعیین تراز به کار گرفته می‌شود. مشکل اساسی زمانی اتفاق می‌افتد که بدنه جسم صلب شتاب‌دار شود. در این زمان حسگر تعیین تراز اندازه نادرستی ارائه کرده که در این مقاله با استفاده از تخمین شتاب بدنی خارجی روشی برای بهبود تخمین تراز معرفی می‌شود.

۲-۱- تعریف مساله

ماتریس دوران $\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})$ $\left(\boldsymbol{\Theta}=[\phi,\theta,\psi]^T\right)$ توسط سه چرخش حول محورهای z، y و x تعریف می‌شود. که ϕ، θ و ψ به ترتیب زاویای چرخش غلت، فراز و سمت هستند. با استفاده از این ماتریس دوران هر بردار تعریف شده در دستگاه بدنی قابل انتقال به دستگاه لخت (معمولا دستگاه شمال-شرق-پایین[۳]) می‌باشد. بنابراین، بردار ۳×۱ اختیاری $\mathbf{v}_{b/n}^b$ در دستگاه بدنی نسبت به دستگاه NED به صورت رابطه (۱) به بردار $\mathbf{v}_{b/n}^b$ در دستگاه NED قابل انتقال است [۲۲].

$$\mathbf{v}_{b/n}^n = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{v}_{b/n}^b \qquad (۱)$$

که بالانویس‌های n و b به ترتیب معرف دستگاه NED و بدنی و زیرنویس b/n معرف بردار تعریف شده از جسم صلب نسبت به دستگاه NED هستند. ماتریس دوران $\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})$ از سه بردار یکه ستونی به صورت رابطه (۲) برای تبدیل از دستگاه مختصات بدنی به NED تشکیل شده است.

$$\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix}\mathbf{X}^b & \mathbf{Y}^b & \mathbf{Z}^b\end{bmatrix}^T \qquad (۲)$$

این ماتریس دوران با بیان مرسوم زوایای اویلر و چرخش به ترتیب حول محورهای z، y و x به صورت رابطه (۳) قابل بیان است.

$$\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} C\theta C\psi & -S\psi C\phi + C\psi S\theta S\phi & S\psi S\phi + C\psi S\theta C\phi \\ C\theta S\psi & C\psi C\phi + S\psi S\theta S\phi & -C\psi S\phi + S\psi S\theta C\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که $S=\sin(\cdot), C=\cos(\cdot)$. سمت (ψ)، فراز (θ) و غلت (ϕ) به ترتیب چرخش حول محورهای z، y و x هستند. با توجه به رابطه (۳)، در سطر آخر ماتریس دوران $\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})$ (یعنی بردار $\mathbf{Z}^b$) تنها زوایای چرخش فراز (θ) و غلت (ϕ) وجود دارند. بنابراین، این زوایا به صورت رابطه (۴) قابل محاسبه هستند [۲۳].

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(Z_2^b / Z_3^b\right)\\ \theta &= \sin^{-1}\left(-Z_1^b\right)\end{aligned} \qquad (۴)$$

که $Z_1^b = -\sin\theta$، $Z_2^b = \cos\theta\sin\phi$ و $Z_3^b = \cos\theta\cos\phi$. بردار $\mathbf{g}^n$ را به عنوان بردار شتاب جاذبه در دستگاه NED تعریف خواهیم کرد، این بردار ۳×۱ به صورت $\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix}0 & 0 & g\end{bmatrix}^T$ قابل بیان است ($g=9.81$ شتاب جاذبه). با

[۱] Direction Cosine Matrix
[۲] Quaternion
[۳] North-East-Down (NED)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

انتقال این بردار از دستگاه مختصات NED به دستگاه مختصات بدنی به صورت $\mathbf{g}^b = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})^T \mathbf{g}^n$ شتاب جاذبه در دستگاه بدنی قابل محاسبه است. $\mathbf{g}^b$ در واقع بخشی از شتابی بوده که حسگر شتاب‌سنج اندازه‌گیری می‌کند. با ساده سازی عبارت $\mathbf{g}^b = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta})^T \mathbf{g}^n$ رابطه (۵) به صورت زیر قابل بیان است [۲۳].

$$\mathbf{g}^b = g \times \mathbf{Z}^b \qquad (۵)$$

از آنجایی که بردار $\mathbf{Z}^b$ برای محاسبه زوایای تراز کافی است، رابطه (۵) نشان می‌دهد که بردار یکه شتاب جاذبه در دستگاه بدنی برای اندازه‌گیری تراز مناسب است. از این رو از بردار شتاب جاذبه به عنوان اندازه‌گیر در فیلتر تخمین‌زن می‌توان استفاده نمود. در این مقاله با در نظر گرفتن سه مولفه بردار $\mathbf{Z}^b$ به عنوان متغیر حالت و تخمین آنها زوایای غلت و فراز تخمین زده می‌شوند.

۲-۲- الگوریتم پیشنهادی

برای طراحی فیلتر تخمین‌زن نیاز به استفاده از دو مدل‌سازی شامل مدل‌سازی دینامیکی[۱] و مدل‌سازی اندازه‌گیری[۲] بوده که به صورت رابطه (۶) قابل ارائه هستند [۲۴].

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \qquad (۶\text{الف})$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k \qquad (۶\text{ب})$$

که $\mathbf{x}_k$ بردار متغیرهای حالت در گام زمانی k، $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}$ ماتریس گذر حالت، $\mathbf{z}_k$ بردار اندازه‌گیری، $\mathbf{H}$ ماتریس خروجی (اندازه‌گیری) و $\mathbf{W}_{k-1}$ و $\mathbf{V}_k$ به ترتیب نویز سفید گوسی مدل دینامیکی و اندازه‌گیر می‌باشند. در این مقاله متغیرهای حالت شامل بردار $\mathbf{Z}^b$ و بایاس حسگر ژیروسکوپ هستند.

در این مقاله برای مدل‌سازی دینامیکی از روش ماتریس کسینوس هادی و انتگرال‌گیری تقریب مرتبه اول از حسگر ژیروسکوپ استفاده شده است [۲۳, ۲۵].

$$\mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta}_k) = \mathbf{C}_b^n(\boldsymbol{\Theta}_{k-1})\left(\mathbf{I}_3 + \Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]\right) \qquad (۷)$$

که Δt گام زمانی و $\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]$ ماتریس پاد متقارن[۳] از مولفه‌های $\left(\boldsymbol{\omega}_{k-1} = \left[\boldsymbol{\omega}_{x,k-1}, \boldsymbol{\omega}_{y,k-1}, \boldsymbol{\omega}_{z,k-1}\right]^T\right)$ بردار سرعت‌های زاویه‌ای هستند. همان‌طور که بیان شد برای تخمین زوایای تراز تنها سه مولفه بردار $\mathbf{Z}^b$ کافی است. بنابراین فرم خاصی از رابطه (۷) به صورت رابطه (۸) قابل استخراج است.

$$\mathbf{Z}_k^b = \left(\mathbf{I}_3 + \Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]\right)^T \mathbf{Z}_{k-1}^b \qquad (۸)$$

همان‌طور که بیان شد، $\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]$ ماتریس پادمتقارن بردار سرعت زاویه‌ای است. داده اندازه‌گیری شده توسط ژیروسکوپ علاوه بر نرخ سرعت زاویه‌ای شامل نویز و خطای بایاس نیز است. بنابراین مدل‌سازی این حسگر به صورت رابطه (۹) انجام می‌گیرد.

$$\mathbf{y}_{G,k} = \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k} + \mathbf{n}_{G,k} \qquad (۹)$$

که $\mathbf{y}_{G,k}$ بردار خروجی حسگر ژیروسکوپ، $\boldsymbol{\omega}_k$ سرعت زاویه‌ای، $\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k}$ بردار بایاس حسگر ژیروسکوپ و $\mathbf{n}_{G,k}$ نویز اندازه‌گیری بوده که غیر وابسته[۴] و سفید گوسی[۵] فرض می‌شود. چون در واقع سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}_k$ در دسترس نیست، در رابطه (۸) از خروجی ژیروسکوپ $\mathbf{y}_{G,k}$ استفاده خواهیم کرد. بنابراین، رابطه (۸) به صورت رابطه (۱۰) قابل استخراج است.

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_k^b &= \left(\mathbf{I} - \Delta t\left[\mathbf{y}_{G,k-1}\times\right]\right)\mathbf{Z}_{k-1}^b + \\ &+\Delta t\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right]\mathbf{Z}_{k-1}^b + \Delta t\left[-\mathbf{Z}_{k-1}^b\times\right]\mathbf{n}_{G,k-1}\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

چگونگی استخراج رابطه (۱۰) از (۸) در پیوست ارائه شده است. در این مقاله علاوه بر بردار $\mathbf{Z}^b$ برای تخمین تراز، بایاس ژیروسکوپ نیز تخمین زده می‌شود. بنابراین بردار متغیرهای حالت به صورت $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_k^b & \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k}\end{bmatrix}^T$ تعریف می‌شود. به علت دینامیک تغییرات اندک، بایاس حسگر ژیروسکوپ به صورت رابطه (۱۱) یک فرایند مارکوف مرتبه اول[۶] در نظر گرفته می‌شود [۷].

$$\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k} = \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1} + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1} \qquad (۱۱)$$

که در این رابطه $\mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1}$ نویز سفید گوسی غیر وابسته است. با ترکیب رابطه (۱۰) و (۱۱) مدل دینامیکی به صورت رابطه (۱۲) قابل استخراج است.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_k^b \\ \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k}\end{bmatrix} = \\ &\begin{Bmatrix}\left(\mathbf{I} - \Delta t\left[\mathbf{y}_{G,k-1}\times\right]\right)\mathbf{Z}_{k-1}^b + \\ +\Delta t\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right]\mathbf{Z}_{k-1}^b + \Delta t\left[-\mathbf{Z}_{k-1}^b\times\right]\mathbf{n}_{G,k-1} \\ \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1} + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1}\end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{f}\left(\mathbf{Z}_{k-1}^b, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}, \mathbf{y}_{G,k-1}, \mathbf{n}_{G,k-1}, \mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1}\right)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

چون بایاس غلت و فراز تخمین زده می‌شوند، رابطه (۱۲) به علت وجود جمله $\Delta t\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right]\mathbf{Z}_{k-1}^b$ غیرخطی است. بنابراین، فیلتر تخمین‌زن مورد استفاده باید یک فیلتر غیرخطی باشد. در این مقاله با استفاده از یک تقریب تیلور مرتبه اول مدل دینامیکی غیرخطی رابطه (۱۲) به صورت رابطه خطی (۶ الف) تقریب زده می‌شود. ماتریس گذر

[۱] Process Model
[۲] Measurement Model
[۳] Skew-Symmetric Matrix
[۴] Uncorrelated
[۵] Zero-Mean White Gaussian
[۶] First Order Markov Process

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

حالت $\mathbf{\Phi}_{k-1}$ با استفاده از ژاکوبین‌گیری از رابطه (۱۲) و نویز مدل دینامیکی $\mathbf{W}_{k-1}$ به صورت زیر قابل استخراج است.

$$\mathbf{\Phi}_{k-1}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{I}_3-\Delta t\left[\mathbf{y}_{G,k-1}\times\right]\right)+ & \Delta t\left[-\mathbf{Z}^b_{k-1}\times\right] \\ +\Delta t\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right] & \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

$$\mathbf{W}_{k-1}=\begin{bmatrix} \Delta t\left[-\mathbf{Z}^b_{k-1}\times\right]\mathbf{n}_{G,k-1} \\ \mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1} \end{bmatrix}$$

با تقریب مرتبه اول، مدل دینامیکی غیرخطی به یک مدل خطی تقریب زده خواهد شد. با این تقریب می‌توان از فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای تخمین متغیرهای حالت استفاده نمود. ماتریس کوواریانس مدل دینامیکی به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{Q}_{k-1}=\mathbf{E}\left[\mathbf{W}_{k-1}\mathbf{W}^T_{k-1}\right] \qquad (۱۴)$$

که $\mathbf{E}$ عملگر امید ریاضی[۱] است. با استفاده از رابطه (۱۳) $\mathbf{Q}_{k-1}$ به صورت رابطه (۱۵) قابل استخراج است.

$$\mathbf{Q}_{k-1}=\begin{bmatrix} -\Delta t^2\left[\mathbf{Z}^b_{k-1}\times\right]\mathbf{\Sigma}_G\left[\mathbf{Z}^b_{k-1}\times\right] & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}} \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

σ_G و $\sigma_{b_{\boldsymbol{\omega}}}$ به ترتیب واریانس نویز ژیروسکوپ و بایاس ژیروسکوپ هستند که در این مقاله فرض شده در هر سه محور برابرند. $\mathbf{\Sigma}_G$ و $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}}}$ ماتریس کوواریانس نویز ژیروسکوپ و بایاس ژیروسکوپ بوده که به ترتیب با $\sigma^2_G\mathbf{I}_3$ و $\sigma^2_{b_{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{I}_3$ برابر هستند.

برای اندازه‌گیری تراز تنها اندازه‌گیر مورد نیاز شتاب‌سنج است. خروجی شتاب‌سنج ترکیبی از شتاب جاذبی، شتاب بدنی خارجی (غیر جاذبی) و مجموعه خطاها شامل نویز و بایاس است. بنابراین خروجی شتاب‌سنج به صورت رابطه (۱۶) قابل مدل‌سازی است.

$$\mathbf{y}_{A,k}=\mathbf{g}^b_k+\mathbf{a}^b_k+\mathbf{n}_{A,k} \qquad (۱۶)$$

که $\mathbf{g}^b_k$ بردار شتاب جاذبه در دستگاه بدنی، $\mathbf{y}_{A,k}$ خروجی شتاب‌سنج، $\mathbf{a}^b_k$ شتاب بدنی خارجی و $\mathbf{n}_{A,k}$ نویز سفید گوسی برای شتاب‌سنج هستند. حسگر شتاب‌سنج به دلیل شرایط محیطی مخصوصا تغییرات دمایی دچار خطای بایاس می‌شود. خطای بایاس شتاب‌سنج با گذشت زمان و گرم شدن[۲] حسگر پایدار شده و مقدار آن در مقابل جمله‌های شتاب جاذبه و شتاب بدنی خارجی مقدار ناچیزی است. بنابراین در الگوریتم پیشنهادی تخمین بایاس شتاب‌سنج بررسی نمی‌شود. شتاب بدنی خارجی $\mathbf{a}^b_k$ موجود در رابطه (۱۶)، به صورت یک فرایند نویز سفید فیلتر پایین گذر مرتبه اول مدل می‌شود [۷].

$$\mathbf{a}^b_k=\kappa_a\mathbf{a}^b_{k-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_k \qquad (۱۷)$$

که $0\le\kappa_a<1$ یک عدد ثابت بدون بعد بوده که بیانگر فرکانس قطع[۳] است. $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ خطای متغیر با زمان مدل شتاب بدنی خارجی می‌باشد. حال برای ایجاد مدل اندازه‌گیر، مدل شتاب بدنی خارجی رابطه (۱۷) را در رابطه (۱۶) قرار می‌دهیم. برای این کار نیاز به تعریف خطای شتاب پیشبین به صورت رابطه (۱۸) است.

$$\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}=\bar{\mathbf{a}}^b_k-\mathbf{a}^b_k \qquad (۱۸)$$

که علامت منفی بیانگر تخمین پیشبینی شده[۴] و $\bar{\mathbf{a}}^b_k$ شتاب پیشبینی بوده که با $\kappa_a\,{}^+\mathbf{a}^b_{k-1}$ برابر است. علامت مثبت بیانگر تخمین بروزرسانی شده[۵] می‌باشد. بنابراین با قرار دادن رابطه (۵)، (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۶) مدل اندازه‌گیری به صورت رابطه (۱۹) ارائه می‌شود.

$$\mathbf{y}_{A,k}-\kappa_a\,{}^+\mathbf{a}^b_{k-1}=g\mathbf{Z}^b_k-\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}+\mathbf{n}_{A,k} \qquad (۱۹)$$

سمت چپ رابطه (۱۹) در واقع تفاضل شتاب بدنی خارجی و شتاب اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج است. از رابطه (۱۹) بردار اندازه‌گیری $\mathbf{z}_k$ ، ماتریس خروجی $\mathbf{H}$ و نویز اندازه‌گیری $\mathbf{V}_k$ به صورت روابط زیر قابل استخراج هستند.

$$\mathbf{z}_k=\mathbf{y}_{A,k}-\kappa_a\,{}^+\mathbf{a}^b_{k-1} \qquad (۲۰)$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} g\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

$$\mathbf{V}_k=-\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}+\mathbf{n}_{A,k} \qquad (۲۲)$$

ماتریس کوواریانس نویز اندازه‌گیری $\mathbf{R}_k$ به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\mathbf{R}_k=\mathbf{E}\left[\mathbf{V}_k\mathbf{V}^T_k\right] \qquad (۲۳)$$

فرض می‌کنیم $\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}$ نسبت به $\mathbf{n}_{A,k}$ غیر وابسته باشد، بنابراین ماتریس کوواریانس $\mathbf{R}_k$ به صورت رابطه (۲۴) قابل استخراج است.

$$\mathbf{R}_k=\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon},accel}+\mathbf{\Sigma}_A \qquad (۲۴)$$

$\mathbf{\Sigma}_A$ و $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon},accel}$ به ترتیب ماتریس کوواریانس نویز اندازه‌گیری شتاب‌سنج و ماتریس کوواریانس خطای مدل شتاب بدنی خارجی هستند. که $\mathbf{\Sigma}_A$ به صورت $\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{n}_{A,k}\right)\left(\mathbf{n}_{A,k}\right)^T\right]$ و $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon},accel}$ به صورت $\mathbf{E}\left[\left(\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}\right)\left(\bar{\mathbf{a}}^b_{\boldsymbol{\varepsilon},k}\right)^T\right]$ قابل بیان است. حال با استفاده از رابطه (۱۸) و فرض عدم همبستگی[۶] $\bar{\mathbf{a}}^b_k$ و $\mathbf{a}^b_k$ داریم

[۱] Expectation Operator
[۲] Warm-up Time
[۳] Cutoff Frequency
[۴] Predicted Estimation
[۵] Updated Estimation
[۶] Uncorrelated

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

$\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{a}_k^b\right)\left(^{-}\mathbf{a}_k^b\right)^T\right]=0$. همچنین با در نظر گرفتن $\mathbf{a}_k^b=\kappa_a\mathbf{a}_{k-1}^b+\boldsymbol{\varepsilon}_k$ و اینکه یک فرایند نویز سفید به صورت ترتیبی ناهمبسته بوده، امید ریاضی شتاب بدنی خارجی صفر می‌شود $\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{a}_k^b\right)\left(\mathbf{a}_k^b\right)^T\right]=\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{a}_k^b\right)\left(\kappa_a\mathbf{a}_{k-1}^b\right)^T\right]+\mathbf{E}\left[\left(\mathbf{a}_k^b\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}_k\right)^T\right]=0$. بنابراین طبق رابطه (۲۵) $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon,accel}$ ساده‌سازی می‌شود.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon,accel}&=\mathbf{E}\left[\left(^{-}\mathbf{a}_{\varepsilon,k}^b\right)\left(^{-}\mathbf{a}_{\varepsilon,k}^b\right)^T\right]=\\&=\mathbf{E}\left[\left(^{-}\mathbf{a}_k^b-\mathbf{a}_k^b\right)\left(^{-}\mathbf{a}_k^b-\mathbf{a}_k^b\right)^T\right]=\\&=\mathbf{E}\left[\left(^{-}\mathbf{a}_k^b\right)\left(^{-}\mathbf{a}_k^b\right)^T\right]=\\&=\mathbf{E}\left[\left(\kappa_a\,{}^{+}\mathbf{a}_{k-1}^b\right)\left(\kappa_a\,{}^{+}\mathbf{a}_{k-1}^b\right)^T\right]\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

چون ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon,accel}$ متغیر با زمان بوده و به صورت تحلیلی قابل حل نیست، فرض می‌شود این ماتریس تنها جمله‌های قطری داشته و مربع نرم بردار شتاب بدنی خارجی بر روی قطر اصلی این ماتریس توزیع می‌شود $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon,accel}=\left(\kappa_a^2\left\|{}^{+}a_{k-1}^b\right\|^2\mathbf{I}_3\right)/3$. در مقایسه با حالت استاتیکی که مقدار شتاب بدنی خارجی برابر صفر است، یعنی $\mathbf{y}_{A,k}=g\mathbf{Z}_k^b+\mathbf{n}_{A,k}$، ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon,accel}$ با افزایش ماتریس کوواریانس اندازه‌گیری $\mathbf{R}_k$ در جبران اثر شتاب بدنی خارجی $\kappa_a\,{}^{+}\mathbf{a}_{k-1}^b$ نقش مهمی ایفا می‌کند. همچنین $\boldsymbol{\Sigma}_A$ با $\sigma_A^2\mathbf{I}_3$ برابر است که σ_A^2 واریانس نویز شتاب‌سنج است.

با توجه به مدل دینامیکی و اندازه‌گیری ارائه شده در روابط (۱۲) و (۱۹) فیلتر تخمین‌زن پیشنهادی که فیلتر کالمن توسعه‌یافته بوده در دو گام پیش‌بینی[۱] و به‌روزرسانی[۲] ارائه می‌شود [۲۴, ۲۶-۲۸]. در این مقاله به علت غیرخطی بودن مدل دینامیکی (یعنی رابطه (۱۲))، از فیلتر کالمن توسعه یافته استفاده می‌شود.

گام پیش‌بینی که شامل دو مرحله است، به صورت روابط (۲۶) و (۲۷) ارائه می‌شود.

۱) پیش‌بینی متغیر حالت

$$\mathbf{x}_k^-=\mathbf{x}_{k-1}^+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{f}\left(\begin{matrix}\mathbf{Z}_{k-1}^b,\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1},\mathbf{y}_{G,k-1},\\,\mathbf{n}_{G,k-1},\mathbf{n}_{\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}},k-1}\end{matrix}\right)dt\qquad(۲۶)$$

۲) پیش‌بینی ماتریس کوواریانس خطا

$$\mathbf{P}_k^-\approx\boldsymbol{\Phi}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^T+\mathbf{Q}_{k-1}\qquad(۲۷)$$

گام به‌روزرسانی که شامل سه مرحله است، در روابط (۲۸) تا (۳۰) ارائه می‌شود.

۳) محاسبه بهره فیلتر کالمن

$$\mathbf{K}_k=\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T+\mathbf{R}_k\right)^{-1}\qquad(۲۸)$$

۴) به‌روزرسانی متغیر حالت

$$\mathbf{x}_k^+=\mathbf{x}_k^-+\mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k-\mathbf{H}\mathbf{x}_k^-\right)\qquad(۲۹)$$

۵) به‌روزرسانی ماتریس کوواریانس خطا

$$\mathbf{P}_k^+=\left(\mathbf{I}_6-\mathbf{K}_k\mathbf{H}\right)\mathbf{P}_k^-\qquad(۳۰)$$

چون گام (۴) شرط بردار واحد بودن $^{+}\mathbf{Z}_k^b$ را ارضاء نمی‌کند، بنابراین نیاز است که این بردار نرمالیزه شود، یعنی $^{+}\mathbf{Z}_k^b\Big/\left\|{}^{+}\mathbf{Z}_k^b\right\|$. با تخمین $^{+}\mathbf{Z}_k^b$ شتاب بدنی خارجی به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود.

$${}^{+}\mathbf{a}_k^b=\mathbf{y}_{A,k}-g\,{}^{+}\mathbf{Z}_k^b\qquad(۳۱)$$

۳- نتایج تجربی

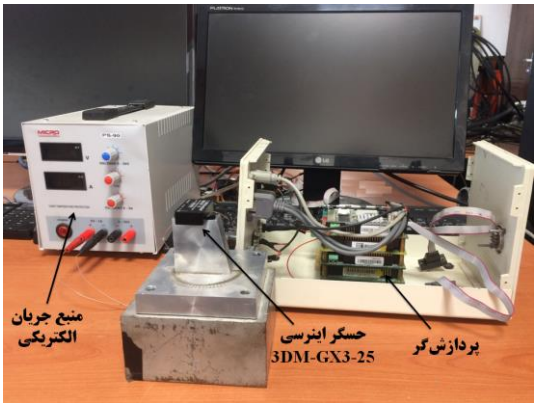
۳-۱- تجهیزات آزمون و روش ارزیابی الگوریتم

برای ارزیابی الگوریتم پیشنهادی، از یک حسگر اینرسی/مغناطیسی مدل 3DM-GX3-25 که شامل یک شتاب‌سنج سه محوره و یک ژیروسکوپ سه محوره بوده، استفاده می‌شود. این حسگر که خود به عنوان یک سیستم مرجع تعیین تراز و سمت شناخته می‌شود، با استفاده از حسگر اینرسی میکروالکترومکانیکی و حسگر مغناطیسی سه محوره علاوه بر خروجی حسگرهای بیان شده، با توجه به الگوریتم تعیین تراز و سمت تعبیه شده در آن زوایای اویلر را نیز در شرایط دینامیکی و استاتیکی ارائه می‌کند. نرخ داده‌برداری این حسگر از ۱ تا ۱۰۰۰ هرتز قابل تنظیم است. ورودی‌های اندازه‌گیری برای الگوریتم پیشنهادی نرخ داده ۱۰۰ هرتز را تأمین می‌کنند. برای ارزیابی الگوریتم پیشنهادی، چون در شرایط استاتیکی و شبه استاتیکی خروجی اندازه‌گیری شده توسط حسگر 3DM-GX3-25 در مد اندازه‌گیری 0XC8 (مد اندازه‌گیری شتاب، نرخ زاویه‌ای و ماتریس دوران) دقت قابل قبولی داشته و زوایای (غلت و فراز) اندازه‌گیری شده توسط حسگر با دقت ۰/۵± درجه قابل ارائه است، می‌توان در این شرایط خروجی حسگر 3DM-GX3-25 را به عنوان مرجع در نظر گرفت. اما در شرایط دینامیکی با شتاب زیاد این حسگر در تخمین تراز دقت قابل قبولی ندارد. در این مقاله با استفاده از حرکت‌های دینامیکی با شتاب زیاد بر روی یک میز با زاویه غلت و فراز ثابت و مرجع قرار دادن این زوایای ثابت، الگوریتم پیشنهادی ارزیابی می‌شود. همچنین، دقت تخمین تراز توسط این روش در مقایسه با خروجی حسگر 3DM-GX3-25 در شرایط دینامیکی مختلف بررسی می‌شود. با استفاده از مراجع تراز بیان شده بردار تراز مرجع به صورت $\mathbf{Z}_{ref,k}^b$ بدست می‌آید. سپس با استفاده از این بردار مرجع تراز، شتاب بدنی خارجی مرجع $\mathbf{a}_{ref}^b$ به صورت $\mathbf{y}_{A,k}-g\mathbf{Z}_{ref,k}^b$ محاسبه

[۱] Time Update
[۲] Measurement Update

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

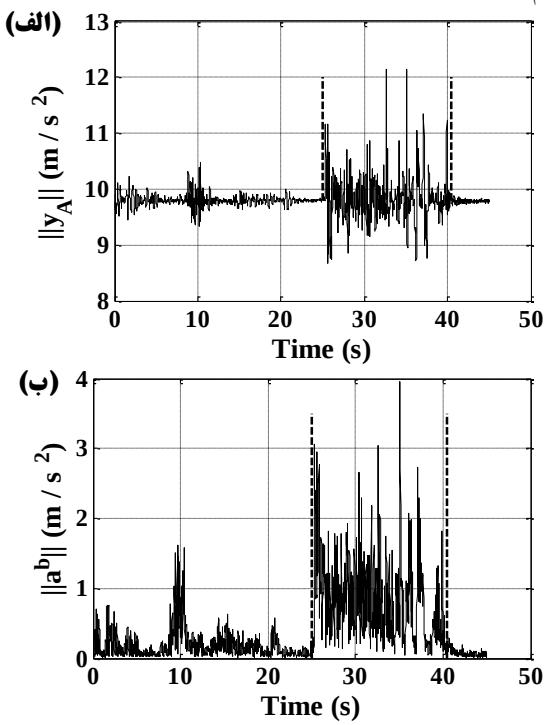
می‌شود. در شکل (۱) مجموعه‌ای که آزمون تجربی روی آن انجام شده نشان داده شده است.



شکل (۱) مجموعه آزمون تجربی.

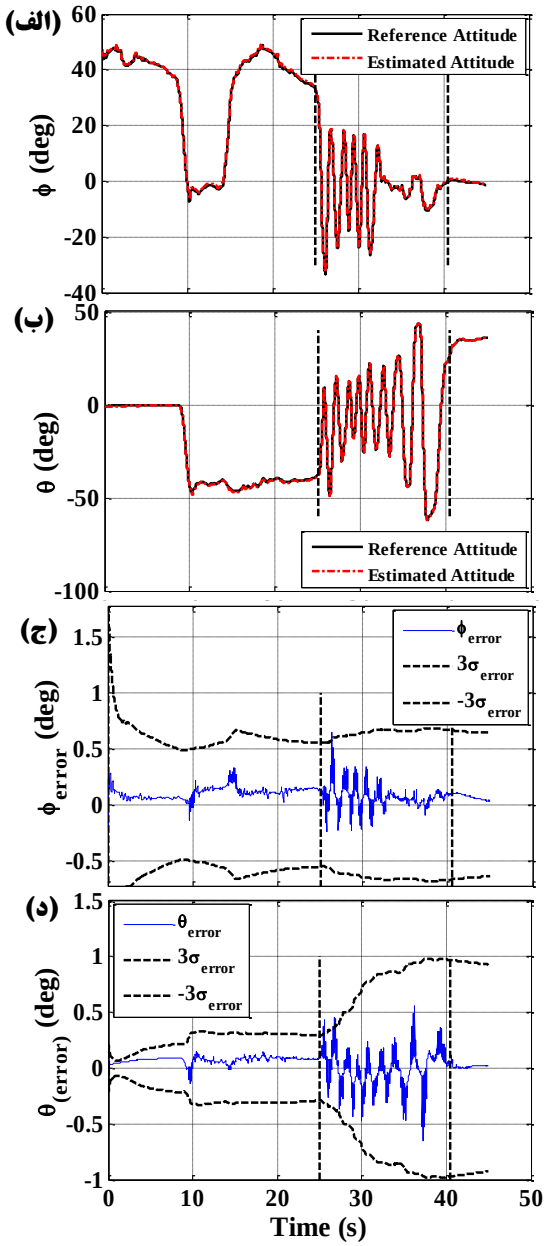
۲-۳- شرایط آزمون و بررسی عملکرد الگوریتم

برای ارزیابی الگوریتم پیشنهادی از دو مجموعه آزمون تجربی که یکی برای شرایط شبه استاتیکی و دیگری برای شرایط دینامیکی با شتاب‌های بدنی خارجی مختلف تعریف شده، استفاده شده است. هر دو آزمون تجربی با استفاده از چرخش حسگر با حرکت‌های تصادفی دست انجام شده‌اند.



شکل (۲): نتایج آزمون الف، (الف) نرم شتاب اندازه‌گیری شده توسط حسگر شتاب‌سنج، (ب) نرم شتاب بدنی خارجی، فاصله زمانی بین دو خط چین در هر دو شکل محدوده زمانی نوسان شدید تراز است.

آزمون الف (متناسب با شکل (۲)) که برای شرایط شبه استاتیکی تعریف شده، شامل حرکت‌های چرخشی بدون هیچ حرکت انتقالی و برای وضعیت تغییرات زوایای غلت و فراز به صورت آرام (ثانیه صفر تا ۲۵) و نوسانی سریع (ثانیه ۲۵ تا ۴۰/۵) صورت پذیرفته است. این آزمون دارای میانگین شتاب بدنی خارجی مرجع $\left\|\mathbf{a}_{ref}^{b}\right\|$ کم حدود ۰/۴ متر بر مجذور ثانیه برای تغییرات آرام زوایا و حداکثر شتاب خارجی حدود ۳ متر بر مجذور ثانیه برای شرایط نوسانات شدید زوایا است.



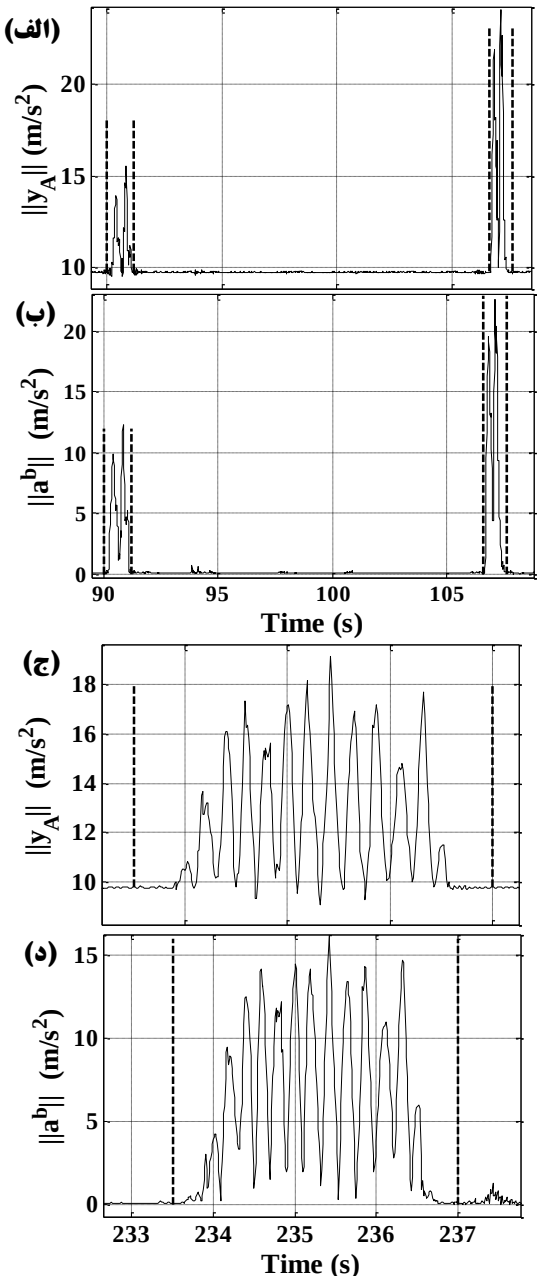
شکل (۳) نتایج آزمون الف، (الف) تخمین زاویه غلت (ب) تخمین زاویه فراز (ج) خطای تخمین غلت (د) خطای تخمین فراز، فاصله زمانی بین دو خط چین در هر دو شکل محدوده زمانی نوسان شدید تراز است.

در شکل (۳) زوایا و خطای زوایای تراز تخمین زده شده در آزمون شبه-استاتیک نشان داده شده است. همان‌طور که بیان شد، در این آزمون خروجی زوایای غلت و فراز تخمین زده شده با خروجی سیگنال زوایای تراز اندازه‌گیری شده توسط حسگر 3DM-GX3-25 (به عنوان مرجع تراز در آزمون شبه-استاتیک) مقایسه شده است.

آزمون ب (متناسب با شکل (۴)) که برای شرایط دینامیکی تعریف شده، شامل حرکت‌های شتابدار خطی با محدوده شتاب بدنی خارجی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

مرجع $\left\| \mathbf{a}_{ref}^{b} \right\|$ بالا حدود ۱۲ تا ۲۳ متر بر مجذور ثانیه و همچنین حرکت زیگزاگی شتابدار با محدوده شتاب بدنی خارجی مرجع $\left\| \mathbf{a}_{ref}^{b} \right\|$ ۲ تا ۱۶ متر بر مجذور ثانیه است. در شکل (۴) یک نمونه از شتاب ناشی از حرکت خطی و زیگزاگی ارائه شده است.



شکل (۴) نتایج آزمون ب، (الف) نرم شتاب اندازه‌گیری شده توسط حسگر شتاب‌سنج در حرکت خطی، (ب) نرم شتاب بدنی خارجی در حرکت خطی، (ج) نرم شتاب اندازه‌گیری شده توسط حسگر شتاب‌سنج در حرکت زیگزاگی، (د) نرم شتاب بدنی خارجی در حرکت زیگزاگی.

در هر یک از دو آزمون برای تخمین تراز با استفاده از الگوریتم پیشنهادی (استخراج شده در بخش ۲) نیاز به تنظیم چهار پارامتر است. این چهار پارامتر شامل: واریانس نویز ژیروسکوپ σ_G^2، واریانس نویز شتاب‌سنج σ_A^2، واریانس بایاس ژیروسکوپ $\sigma_{b_\omega}^2$ و ضریب ثابت موجود در مدل شتاب بدنی خارجی κ_a می‌باشند. برای σ_G^2، σ_A^2 و $\sigma_{b_\omega}^2$ به ترتیب مقادیر 10^{-6}، 10^{-4} و 10^{-8} در نظر گرفته شده که این مقادیر با استفاده از آزمون‌های استاتیکی از حسگر بدست آمده‌اند. همچنین، برای κ_a مقدار ۰/۱ در نظر گرفته شده که این مقدار با استفاده از نتایج آزمون‌های تجربی و سعی و خطای محدوده‌ای از مقادیر κ_a بدست آمده است. نتایج سعی و خطای مقادیر κ_a برای آزمون‌های الف و ب در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول (۱) میانگین کمینه مربعات خطای تخمین تراز (درجه) و شتاب بدنی خارجی (متر بر مجذور ثانیه) برای مقادیر مختلف κ_a.

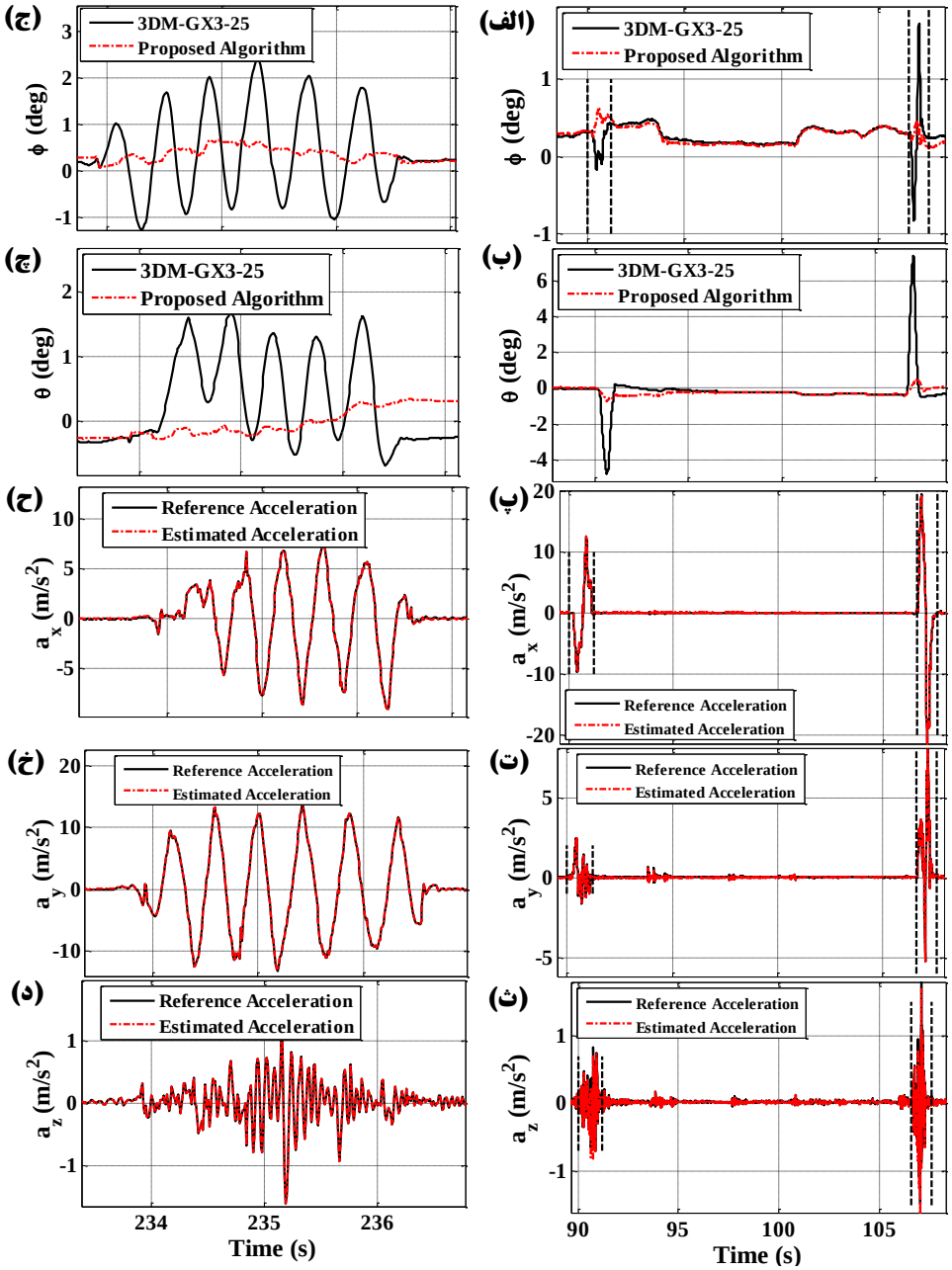
κ_a	آزمون **الف**			آزمون **ب**		
	فراز	غلت	شتاب خارجی	فراز	غلت	شتاب خارجی
۱/۰	۶/۶۵	۳/۴۳	۰/۹۳	۹/۵	۸/۴	۱/۲
۰/۵	۴/۶۴	۲/۳۷	۰/۶۳	۳/۹	۴/۵	۰/۷۲
۰/۳	۲/۶۸	۱/۲۶	۰/۳۴	۲/۱	۲/۳	۰/۵۸
۰/۱	**۰/٤۱**	**۰/٤۳**	**۰/۰٦۳**	**۱/۳**	**۱/۷۲**	**۰/٤۲**
۰/۰۱	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۰۶۱	۲/۳	۲/۷	۰/۵۳
۰/۰۰۱	۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۰۷۱	۳/۱	۴/۵۳	۰/۶۱

همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، در آزمون الف با کاهش مقدار κ_a میزان خطای تخمین تراز و شتاب خارجی کاهش می‌یابد. زیرا در این آزمون که برای شرایط شبه استاتیکی بوده هر چه میزان κ_a کوچکتر شده و به سمت صفر میل کند، مقدار $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon,accel}$ کوچکتر شده، بنابراین $\mathbf{R}_k$ طبق رابطه (۲۴) با $\mathbf{\Sigma}_A$ برابر می‌شود. همچنین $\mathbf{z}_k$ طبق رابطه (۲۰) با $\mathbf{y}_{A,k}$ برابر خواهد شد. بنابراین چنانچه در الگوریتم پیشنهادی به جای $\mathbf{z}_k$ و $\mathbf{R}_k$ به ترتیب $\mathbf{y}_{A,k}$ و $\mathbf{\Sigma}_A$ قرار دهیم، در واقع شتاب خارجی را صفر در نظر گرفته و الگوریتم تخمین برای حالت استاتیکی مناسب‌تر خواهد بود. اما همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، در آزمون الف دقت تخمین برای حالتی که κ_a برابر با ۰/۰۱ است از حالت ۰/۰۰۱ مناسب‌تر است. این اتفاق به خاطر اندک شتاب خارجی موجود در آزمون الف در لحظه تغییرات شدید تراز (مطابق شکل (۳)) بوده، که اگر مقدار κ_a از یک حدی کمتر شود دقت تخمین اندک شتاب خارجی کم شده و دقت تخمین تراز کاهش می‌یابد. در آزمون ب به دلیل میزان شتاب خارجی زیاد دقت تخمین تراز و شتاب خارجی با کاهش κ_a تا مقدار ۰/۱ افزایش می‌یابد، اما با کاهش بیشتر آن دقت تخمین کاهش یافته زیرا با کاهش بیشتر این پارامتر شتاب خارجی به دقت تخمین زده نخواهد شد و تحت تاثیر آن تخمین تراز نیز دچار خطای بیشتر می‌شود. بنابراین با توجه به نتایج دو آزمون مقدار بهینه برای κ_a حدود ۰/۱ خواهد بود. با توجه به مقادیر واریانس‌ها و مقدار κ_a بهینه اختیار شده برای الگوریتم پیشنهادی، تخمین تراز و شتاب بدنی خارجی در سه راستای x، y و z در آزمون ب برای دو بازه زمانی که

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

بیشترین شتاب خارجی در حرکت خطی و زیگزاگی را داریم، به صورت شکل (۵) ارائه می‌شود.

در شکل (۵) علاوه بر نتایج تخمین تراز برای حرکت شتابدار خطی در (الف) و (ب) و حرکت شتابدار زیگزاگ در (ج) و (چ) خروجی تراز اندازه‌گیری شده توسط حسگر 3DM-GX3-25 نیز ارائه شده است. همانطور که بیان شد، آزمون بر روی یک میز با سطح صاف و بدون تغییرات زاویه غلت و فراز انجام شده است. اما با اعمال حرکت شتابدار خطی و زیگزاکی خروجی حسگر 3DM-GX3-25 دچار خطا می‌شود و میزان این خطا بسته به میزان شتاب بدنی خارجی متفاوت است. میزان خطای تخمین تراز در الگوریتم پیشنهاد شده در این مقاله (متناسب با جدول (۲)) در مقایسه با تراز اندازه‌گیری شده توسط حسگر 3DM-GX3-25 بسیار اندک است. مطابق رابطه (۴) میزان خطای تخمین زاویه فراز به خطای Z_1^b یا در واقع طبق رابطه (۵) به شتاب بدنی خارجی در راستای محور x وابسته است. همچنین، میزان خطای تخمین زاویه غلت به خطای Z_2^b و Z_3^b یا در واقع به شتاب بدنی خارجی در راستای محور z و y وابسته است. اما چون آزمون بر روی یک سطح مسطح انجام شده و تغییرات شتاب در راستای محور z اندک بوده خطای زاویه غلت در جدول (۲) متناسب با تغییرات شتاب در راستای محور y ارائه شده است.



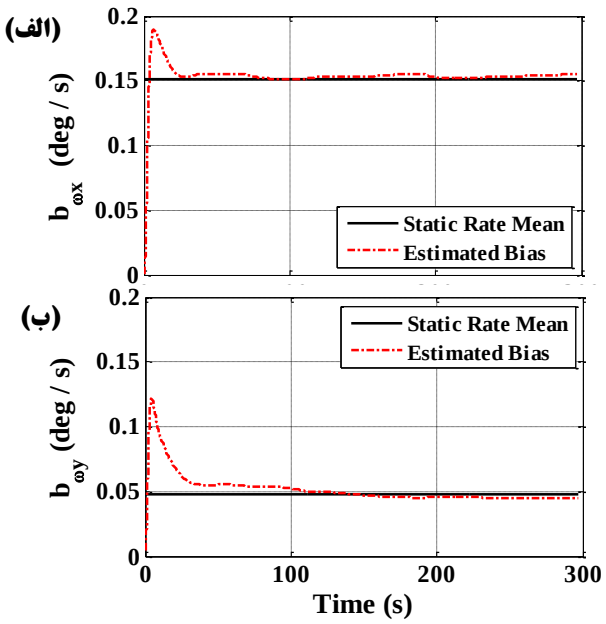
شکل (۵) نتایج آزمون ب، (الف) تا (ث) تخمین تراز و شتاب بدنی خارجی در سه راستای x، y و z در حرکت شتابدار خطی، (ج) تا (د) تخمین تراز و شتاب بدنی خارجی در سه راستای x، y و z در حرکت شتابدار زیگزاگ.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

در این مقاله علاوه بر تخمین تراز و تخمین شتاب بدنی خارجی، بایاس حسگرهای ژیروسکوپ نیز تخمین زده خواهند شد. با توجه به اینکه تنها اندازه‌گیر مورد استفاده در الگوریتم پیشنهادی شتاب‌سنج بوده و همان‌طور که بیان شد، شتاب‌سنج چرخش حول محور عمودی را حس نکرده و برای تخمین سمت نیاز به یک اندازه‌گیر مجزا است. بنابراین، برای تخمین بایاس ژیروسکوپ حول محور عمودی نیاز به یک اندازه‌گیر مجزا بوده و تخمین ارائه شده در این الگوریتم برای بایاس ژیروسکوپ حول محور z درست نیست. اما بایاس ژیروسکوپ حول محورهای x و y به درستی تخمین زده می‌شود. میزان بایاس تخمین زده شده با میانگین نرخ سرعت زاویه‌ای در حالت سکون (میانگین نرخ سرعت زاویه‌ای حسگر ژیروسکوپ در حالت سکون بیانگر بایاس حسگر ژیروسکوپ است.) مقایسه شده و دقت آن ارزیابی می‌شود (متناسب با شکل (۶)).

جدول (۲) نتایج آزمون ب، قدر مطلق خطای تخمین تراز (درجه) در مقادیر مختلف شتاب بدنی خارجی برای الگوریتم پیشنهادی و حسگر 3DM-GX3-25.

شتاب خارجی محور x	فراز		شتاب خارجی محور y	غلت	
	الگوریتم پیشنهادی	حسگر 3DM-GX3-25		الگوریتم پیشنهادی	حسگر 3DM-GX3-25
۱۱/۱۲	۰/۳۴	۴/۹۲	۳/۲۱	۰/۱۵	۰/۸
۱۲/۵۰	۰/۳۷	۵/۱۱	۵/۱۳	۰/۲۲	۱/۷
۱۵/۲۴	۰/۵۳	۵/۵۱	۶/۴	۰/۲۴	۱/۹۳
۱۶/۲۸	۰/۶۱	۶/۱۲	۷/۲۳	۰/۲۷	۲/۱۱
۱۸/۳۳	۰/۶۴	۶/۴۸	۸/۵	۰/۳۱	۲/۶۵
۲۲/۳۹	۰/۶۹	۷/۸	۱۲/۵	۰/۴۵	۴/۱۳



شکل (۶) نتایج آزمون ب، (الف) تخمین بایاس ژیروسکوپ حول محور x، (ب) تخمین بایاس ژیروسکوپ حول محور y.

با توجه به نتایج تخمین بایاس در آزمون ب (شکل (۶)) مشاهده می‌شود که تخمین بایاس به مقدار درست خود همگرا شده و این بیانگر عملکرد درست تخمین بایاس در الگوریتم تخمین پیشنهادی است.

باید توجه داشت که چون در الگوریتم پیشنهادی، تنها اندازه‌گیر مورد استفاده برای تعیین زوایای تراز و بایاس ژیروسکوپ حسگرهای شتاب‌سنج بوده و هر چه میزان شتاب خارجی کمتر باشد دقت محاسبه زوایای تراز توسط شتاب‌سنج‌ها بهتر است، بنابراین برای تخمین بایاس ژیروسکوپ‌ها هر چه میزان شتاب وسیله کمتر باشد، بایاس ژیروسکوپ با دقت بهتری تخمین زده می‌شود.

٤- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تخمین تراز با مدل‌سازی جدید و استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته مطرح شده است. این الگوریتم پیشنهادی با استفاده از دو مجموعه آزمون تجربی هم در شرایط شبه استاتیکی و هم در شرایط دینامیکی با شتاب مختلف برای تخمین تراز، شتاب بدنی خارجی و بایاس حسگر ژیروسکوپ ارزیابی شده است. به علت تخمین برخط بردار شتاب بدنی خارجی این الگوریتم دقت مناسبی در تخمین تراز در شرایط حرکت شتابدار دارد. دقت الگوریتم پیشنهادی در تخمین تراز در مقایسه با تراز اندازه‌گیری شده توسط حسگر 3DM-GX3-25 در حرکت شتابدار توانایی تخمین دقیق این الگوریتم را نشان می‌دهد. دقت تخمین زاویه غلت در الگوریتم پیشنهادی با شتاب خارجی حدود ۱/۳ برابر شتاب گرانش در محور y، حدود ۰/۵ درجه بوده که در مقایسه با دقت ۴ درجه حسگر 3DM-GX3-25 بسیار بهتر است. دقت تخمین زاویه فراز در الگوریتم پیشنهادی برای شتاب خارجی حدود ۲/۳ برابر شتاب گرانش در محور x، کمتر از ۰/۷ درجه است که در مقایسه با دقت ۷ درجه حسگر 3DM-GX3-25 عملکرد مناسب الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد. همچنین، به علت سادگی تنظیم پارامترها، حجم محاسبات پایین و توانایی تخمین پیوسته تراز، شتاب بدنی خارجی و بایاس حسگر ژیروسکوپ (در دو راستای محور x و y) الگوریتم پیشنهادی از لحاظ پایداری، عملی بودن و پیاده‌سازی مناسب است.

٥- پیوست

با استفاده از $\left(\mathbf{I}_3+\Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]\right)^T=\left(\mathbf{I}_3+\Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]^T\right)$ و $\Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]^T=-\Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]$ رابطه (۸) به صورت رابطه (۳۲) قابل بازنویسی است.

$$\mathbf{Z}_k^b=\left(\mathbf{I}_3-\Delta t\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]\right)\mathbf{Z}_{k-1}^b \qquad (۳۲)$$

بر طبق رابطه (۹)، اگر به جای $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ عبارت $\mathbf{y}_{G,k-1}-\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}-\mathbf{n}_{G,k-1}$ جایگذاری شود و با استفاده از $\left[\boldsymbol{\omega}_{k-1}\times\right]=\left[\mathbf{y}_{G,k-1}\times\right]-\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right]-\left[\mathbf{n}_{G,k-1}\times\right]$ رابطه (۳۲) به صورت رابطه (۳۳) قابل بیان است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

$$\mathbf{Z}_k^b = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 - \Delta t\left[\mathbf{y}_{G,k-1}\times\right] + \Delta t\left[\mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega},k-1}\times\right] \\ + \Delta t\left[\mathbf{n}_{G,k-1}\times\right] \end{pmatrix} \mathbf{Z}_{k-1}^b \qquad (۳۳)$$

با بسط سمت راست رابطه (۳۳) و استفاده از $\Delta t\left[\mathbf{n}_{G,k-1}\times\right]\mathbf{Z}_{k-1}^b = \Delta t\left[-\mathbf{Z}_{k-1}^b\times\right]\mathbf{n}_{G,k-1}$ رابطه (۳۳) با رابطه (۱۰) برابر می‌شود.

مراجع

[1] K. Li, L. Chang, and B. Hu, "Unscented Attitude Estimator Based on Dual Attitude Representations," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 64, pp. 3564-3576, 2015.

[2] H. G. d. Marina, F. J. Pereda, J. M. Giron-Sierra, and F. Espinosa, "UAV Attitude Estimation Using Unscented Kalman Filter and TRIAD," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, pp. 4465-4474, 2012.

[3] L. Paull, S. Saeedi, M. Seto, and H. Li, "AUV navigation and localization: A review," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 39, pp. 131-149, 2014.

[4] G. To and M. R. Mahfouz, "Quaternionic Attitude Estimation for Robotic and Human Motion Tracking Using Sequential Monte Carlo Methods With von Mises-Fisher and Nonuniform Densities Simulations," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 60, pp. 3046-3059, 2013.

[5] J. Vaganay, M. J. Aldon, and A. Fournier, "Mobile robot attitude estimation by fusion of inertial data," in *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, 1993, pp. 277-282 vol.1.

[6] N. Barbour and G. Schmidt, "Inertial sensor technology trends," *IEEE Sensors Journal*, vol. 1, pp. 332-339, 2001.

[7] D. Roetenberg, H. J. Luinge, C. T. M. Baten, and P. H. Veltink, "Compensation of magnetic disturbances improves inertial and magnetic sensing of human body segment orientation," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, vol. 13, pp. 395-405, 2005.

[8] Y. S. Suh, "Orientation Estimation Using a Quaternion-Based Indirect Kalman Filter With Adaptive Estimation of External Acceleration," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, pp. 3296-3305, 2010.

[9] T. Harada, H. Uchino, T. Mori, and T. Sato, "Portable absolute orientation estimation device with wireless network under accelerated situation," in *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, 2004, pp. 1412-1417 Vol.2.

[10] X. Yun and E. R. Bachmann, "Design, Implementation, and Experimental Results of a Quaternion-Based Kalman Filter for Human Body Motion Tracking," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, pp. 1216-1227, 2006.

[11] G. S. Faber, C.-C. Chang, P. Rizun, and J. T. Dennerlein, "A novel method for assessing the 3-D orientation accuracy of inertial/magnetic sensors," *Journal of biomechanics*, vol. 46, pp. 2745-2751, 2013.

[12] D. Jurman, M. Jankovec, R. Kamnik, and M. Topič, "Calibration and data fusion solution for the miniature attitude and heading reference system," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 138, pp. 411-420, 8/26/ 2007.

[13] P. Doostdar and J. Keighobadi, "Design and implementation of SMO for a nonlinear MIMO AHRS," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 32, pp. 94-115, 10// 2012.

[14] H. Sheng and T. Zhang, "MEMS-based low-cost strap-down AHRS research," *Measurement*, vol. 59, pp. 63-72, 1// 2015.

[15] Y.-S. Suh, S.-K. Park, H.-J. Kang, and Y.-S. Ro, "Attitude Estimation Adaptively Compensating External Acceleration," *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, vol. 49, pp. 172-179, 2006.

[16] J. K. Lee and E. J. Park, "Minimum-Order Kalman Filter With Vector Selector for Accurate Estimation of Human Body Orientation," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, pp. 1196-1201, 2009.

[17] A .M. Sabatini, "Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 53, pp. 1346-1356, 2006.

[18] H. Rehbinder and X. Hu, "Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies," *Automatica*, vol. 40, pp. 653-659, 4// 2004.

[19] W. Chou, B. Fang, L. Ding, X. Ma, and X. Guo, "Two-step optimal filter design for the low-cost attitude and heading reference systems," *IET Science, Measurement & Technology* ,vol. 7, pp. 240-248, 2013.

[20] X. Yun, E. R. Bachmann, and R. B. McGhee, "A Simplified Quaternion-Based Algorithm for Orientation Estimation From Earth Gravity and Magnetic Field Measurements," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 5 ,۷pp. 638-650, 2008.

[21] H. J. Luinge and P. H. Veltink, "Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers," *Medical and Biological Engineering and Computing*, vol. 43, pp. 273-282, 2005.

[22] T. I. Fossen, *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*: John Wiley & Sons, 2011.

[23] D. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown inertial navigation technology* vol. 17: IET, 2004.

[24] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*: John Wiley & Sons, 2006.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]

[25] O. S. Salychev, *Applied inertial navigation : problems and solutions*. Moscow, Russia: BMSTU Press, 2004.
[26] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of basic Engineering*, vol. 82, pp. 35-45, 1960.
[27] R. Bucy, "Nonlinear filtering theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 10, pp. 198-198, 1965.
[28] M. T. Sabet, A. R. Fathi, and H. R. Mohammadi Daniali, "Optimal design of the Own Ship maneuver in the bearing-only target motion analysis problem using a heuristically supervised Extended Kalman Filter," *Ocean Engineering*, vol. 123, pp. 146-153, 9/1/ 2016.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.3.3]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.35]