مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۱، بهار ۱۳۹۸، صفحه ۷-۱

کنترل زمان محدود حرکت گروهی عامل‌های جمعی با وجود عنصر غیرخطی اشباع

سید اسماعیل میرعبداللهی شمس[۱] و محمد حائری[۲]

[۱] گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

[۲] آزمایشگاه سیستم‌های کنترل‌پیشرفته، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

نویسنده عهده دارمکاتبات: محمد حائری، haeri@sharif.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۲۱ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۲۳ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۳۱

چکیده: در این مقاله حرکت گروهی زمان محدود سیستم‌های چندعاملی در حضور عنصر غیرخطی اشباع مورد بررسی قرار می‌گیرد. با ارائه یک پروتکل کنترل جدید نشان داده می‌شود که سرعت و موقعیت عامل‌ها با دینامیک انتگرال‌گیر دوگانه در زمان محدود به یکدیگر و به سرعت و موقعیت رهبر همگرا می‌شوند. فرض شده است که گراف ارتباط بین عامل‌ها متصل است و حداقل یک عامل از موقعیت و سرعت رهبر مطلع است. ثابت می‌شود عامل‌ها تحت این پروتکل کنترلی به یکدیگر برخورد نمی‌کنند و نیز گراف ارتباط متصل باقی خواهد ماند. ضمناً شرایطی ارائه می‌گردد که سطح سیگنال کنترل از دامنه محدودکننده اشباع کمتر باشد.

کلمات کلیدی: حرکت گروهی، عامل‌های جمعی، کنترل زمان محدود، عنصر غیرخطی‌ساز اشباع

Finite-time Flocking of Multi-agent System with Input Saturation

Seyyed Esmaeil Mirabdollahi Shams and Mohammad Haeri

Abstract: In this paper a finite-time flocking of multi-agent system with input saturation is investigated. By introducing a new control protocol, it is show that speed and position of agents with double-integrator dynamics converge to the speed and position of leader in finite time. It is assumed that the graph between the agents is connected and that at least one agent is informed of the leader speed and position. It is shown that the agents do not collide under this control protocol and the graph remains connected. Further, conditions are provided by which the control signal level remains less than the limiting saturation range.

Keywords: Multi agent system, Flocking, finite time control, input saturation

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

۱- مقدمه

با شروع قرن ۲۱ توجه ویژه‌ای به سیستم‌های چندعاملی (multi-agent systems) شد [۱]. سیستم چندعاملی به سیستمی گفته می‌شود که از چند زیرسیستم یکسان یا غیریکسان که آن را عامل (agent) نامند تشکیل شده است. در این نوع سیستم‌ها هر عامل بخشی از اطلاعات مورد نیاز جهت ساخت سیگنال کنترل را از عامل‌های مجاور می‌گیرد. در این نوع سیستم‌ها به‌دلیل زیاد بودن عامل‌ها و پیچیدگی و حجم بالای محاسبات امکان کنترل مستقل هر عامل وجود ندارد لذا هر عامل با دریافت اطلاعات از عامل‌های مجاور خود سیگنال کنترل خود را می‌سازد. هواپیماهای بدون سرنشین [۲]، وسائل نقلیه خودکار [۳]، روبات‌های امدادگر و مین‌یاب [۴]، و نوسانگرهای تزویج شده [۵] از جمله سیستم‌های چندعاملی است که می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. با توجه به نوع گرایش محققان به سیستم‌های چندعاملی اهداف متفاوتی همچون اجماع (consensus) [۵]، شکل‌پذیری (formation) [۴]، حرکت گروهی (flocking) [۶] و غیره تعریف شده است. ایده‌ی اولیه سیستم‌های چندعاملی از حرکت گروهی پرندگان، زنبورهای عسل، مورچه‌ها، ماهی‌ها و غیره گرفته شده است [۷]. سیستم چندعاملی ای که در آن عامل‌ها با رعایت سه شرط زیر در کنار یکدیگر حرکت کنند را حرکت گروهی گویند [۸]:

الف) حرکت نزدیک به هم
ب) سرعت یکسان
ج) عدم برخورد با یکدیگر

Olfati در [۸] و Su و همکارانش در [۹] با ارائه الگوریتم‌هایی این سه خاصیت را برآورده کرده‌اند. در تمامی روش‌های ارائه شده در مقالات مختلف حرکت گروهی، همگرایی مجانبی به اثبات رسیده است. با توجه به مزایای روش‌های کنترل زمان محدود (finite-time control) مانند پاسخ گذرای سریع‌تر، دقت بالاتر، همگرایی سریع‌تر و حذف اغتشاش بهتر [۱۲،۱۰]، اخیراً محققان به کنترل زمان محدود گرایش بیشتری پیدا کرده‌اند. این گرایش در سیستم‌های چندعاملی هم وجود داشته به طوریکه Guan و همکارانش در [۱۳] اجماع زمان محدود سیستم‌های مرتبه ۲ را ارایه داده‌اند. در [۱۴] اجماع زمان محدود سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیرخطی بررسی شده است همینطور الگوریتمی برای اجماع زمان محدود وسایط نقلیه بدون سرنشین (AUV) و حرکت بدون برخورد آنها در [۱۵] ارائه شده است.

حرکت گروهی عامل‌ها در دو حالت بدون رهبر و با رهبر بررسی می‌شود. در حالت با رهبر الگوریتم ارائه شده بایستی به گونه‌ای باشد که موقعیت و سرعت عامل‌ها به موقعیت و سرعت رهبر همگرا شوند. در این مقاله حرکت گروهی زمان محدود عامل‌ها با دینامیک انتگرال‌گیر دوگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد که در حد بررسی‌های نویسندگان مقاله تاکنون به آن پرداخته نشده است. در این مقاله فرض شده است که شبکه ارتباطی بین عامل‌ها متصل (connected) بوده و حداقل یکی از عامل‌ها از موقعیت و سرعت رهبر مطلع است. الگوریتم ارائه شده در این مقاله تضمین می‌کند که سرعت عامل‌ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می‌شود و نشان داده می‌شود در حین حرکت در عین اینکه اتصال شبکه ارتباطی پابرجا باقی می‌ماند (connectivity preserving)، عامل‌ها به یکدیگر برخورد نمی‌کنند.

تفاوت و نوآوری این مقاله نسبت به مقالات مشابه دو چیز است یکی حرکت گروهی زمان محدود در مقابل حرکت گروهی مجانبی و دومی در نظر گرفتن عنصر غیرخطی اشباع در ورودی که به نظر می‌رسد به این مسئله هم در موضوع حرکت گروهی عامل‌ها کمتر پرداخته شده است.

در ادامه در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز در تبیین مسئله تعریف شده بیان می‌شود. در بخش ۳ حرکت گروهی زمان محدود عامل‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در بخش ۴ با ارائه شبیه‌سازی صحت عملکرد الگوریتم ارائه شده نشان داده می‌شود.

۲- تعریف‌ها و مبانی ریاضی

N عامل با دینامیک زیر که در فضای اقلیدسی n بعدی حرکت می‌کنند را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}\dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i\end{cases}, i = 1,\cdots,N, \qquad (۱)$$

که در آن $x_i, v_i \in R^n$ موقعیت و سرعت عامل‌ها و $u_i \in R^n$ شتاب حرکت و به عبارت دیگر قانون کنترلی می‌باشد. در شکل برداری، موقعیت، سرعت و شتاب عامل‌ها به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned} x &= [x_1^T \ x_2^T \ \cdots \ x_N^T]^T \\ v &= [v_1^T \ v_2^T \ \cdots \ v_N^T]^T \\ u &= [u_1^T \ u_2^T \ \cdots \ u_N^T]^T \end{aligned} \qquad (۲)$$

قدرت انتقال اطلاعات بین عامل‌ها بستگی به فاصله عامل‌ها دارد. به حداکثر فاصله بین عامل‌ها که می‌توانند با یکدیگر تبادل داده کنند شعاع همسایگی گویند و عامل‌های همسایه عامل i ام به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_i(t) = \{j: \|x_i - x_j\| < r, j = 1,2,\cdots,N, j \neq i\}, \qquad (۳)$$

که در آن $\|.\|$ نرم اقلیدسی مرتبه ۲ است.

شبکه $G = (V, E, A)$ از مجموعه گره $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ و مجموعه لبه $E \subseteq V \times V$ و ماتریس همسایگی A تشکیل شده است. هر لبه e_k با یک زوج گره (v_i, v_j) تعریف می‌شود. ماتریس $A = [a_{ij}] \in R^{N\times N}$ قدرت انتقال اطلاعات بین عامل‌ها را نشان می‌دهد به طوریکه اگر $(v_j, v_i) \in E$ باشد $a_{ij} \neq 0$ خواهد بود. اگر شبکه بدون جهت باشد ماتریس A متقارن خواهد بود. ضمناً $a_{ii} = 0$ است. با توجه به اینکه همسایگی را فقط بر اساس فاصله بین عامل‌ها تعریف کرده‌ایم در این مقاله ماتریس A متقارن و شبکه بدون جهت است. به دنباله‌ای از لبه‌ها از گره i تا گره j مسیر گفته می‌شود. اگر بین هر دو گره دلخواه از شبکه حداقل یک مسیر وجود داشته باشد به آن متصل گویند (connected). $L = \Delta A - A$ را ماتریس لاپلاسین می‌گویند که در آن ΔA ماتریسی قطری است و i امین المان قطری آن برابر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

است با $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ اگر مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین را با λ_1 تا λ_n به ترتیب غیر نزولی نشان دهیم $\lambda_1 = 0$ و بردار ویژه متناظر با آن $(1,1,\cdots,1)$ خواهد بود. ضمناً شرط لازم و کافی برای متصل بودن شبکه آن است که $\lambda_2 > 0$ باشد [۸].

با توجه به اینکه هدف ارائه الگوریتمی جهت حرکت گروهی زمان محدود است قبل از ورود به بحث اصلی دو تعریف و یک لم در مورد کنترل زمان محدود ارائه می‌شود.

تعریف ۱ [۱۰]. سیستم مرتبه n زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \quad (۴)$$

که در آن $f: U_0 \to R^n$ تابعی برداری پیوسته می‌باشد و U_0 یک همسایگی باز در اطراف $x = 0$ است. نقطه تعادل $x = 0$ از سیستم (۴) پایدار محلی زمان محدود خوانده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد.

الف) سیستم در همسایگی $\widetilde{U}_0$ پایدار مجانبی باشد که $\widetilde{U}_0 \subseteq U_0$.

ب) زمان محدود $T(x_0)$ وجود داشته باشد طوری که $\lim_{t \to T(x_0)} x(t, x_0) \to$ و $x(t, x_0) = 0$ برای هر $t \geq T(x_0)$.

تعریف ۲ [۱۳]. تابع برداری پیوسته $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$ را هموژن از مرتبه $k \in R$ با تاخیر $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ گویند اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $f_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), i = 1,2,\cdots,n$ و سیستم (۴) را هموژن گویند اگر $f(x)$ هموژن باشد. علاوه بر آن سیستم

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{f}(x), \tilde{f}(0) = 0, x \in R^n \quad (۵)$$

هموژن محلی از مرتبه $k \in R$ با تاخیر $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ گویند اگر $f(x)$ هموژن از مرتبه $k \in R$ با تاخیر $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ باشد و بردار پیوسته $\tilde{f}(x)$ در رابطه زیر صدق کند.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \forall x \neq 0\ i = 1,2,\cdots,n}} \frac{\tilde{f}_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0 \quad (۶)$$

لم ۱ [۱۳]. فرض کنید سیستم (۴) هموژن از مرتبه $k \in R$ با تاخیر $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$، تابع $f(x)$ پیوسته و در $x = 0$ پایدار مجانبی است. اگر مرتبه هموژنیتی $k < 0$ باشد نقطه تعادل سیستم (۴) پایدار زمان محدود است و اگر رابطه (۶) برقرار باشد سیستم (۵) پایدار محلی زمان محدود خواهد بود.

سیگنال کنترل ارائه شده در این مقاله از ۵ بخش تشکیل شده است.

$$u_i = K(f_i^a + f_i^b + f_i^c + f_i^d + f_i^e) \quad (۷)$$

وظیفه بخش، f_i^a، جلوگیری از برخورد عامل‌ها و همچنین مقاومت در مقابل از دست رفتن اتصال شبکه است. این کار توسط گرادیان دو تابع پتانسیل که از مراجع [۹،۱۶] گرفته شده و به شکل (۸) تعریف می‌شود انجام می‌گیرد.

$$\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) = \psi_1(\|x_{ij}\|_\sigma) + \psi_2(\|x_{ij}\|_\sigma) \quad (۸)$$

در این رابطه $x_{ij} = x_i - x_j$ است. همچنین نرم σ با پارامتر ε به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\|z\|_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{1 + \varepsilon\|z\|^2} - 1\right) \quad (۹)$$

با این مزیت نسبت به نرم اقلیدسی که در صفر دارای مشتق است [۹]. $\psi_1(z)$ وظیفه مقاومت در مقابل از دست رفتن اتصال را برعهده دارد.

$$\psi_1(z) = a_{ij} \frac{z^2}{r_\alpha - z + r_\alpha Q^{-1}} \quad (۱۰)$$

که در آن $Q > V_{\max}$ است و $V_{\max}$ بیشترین مقدار تابع انرژی V است که بعداً تعریف می‌شود. ضمناً $r_\alpha = \|r\|_\sigma$. همچنین $\psi_2(z)$ از برخورد عامل‌ها جلوگیری می‌کند.

$$\psi_2(z) = \int_{d_\alpha}^{z} \phi_\alpha(s) ds \quad (۱۱)$$

$$\phi_\alpha(s) = a\rho_h\left(\frac{z}{r_\alpha}\right)\phi(z - d_\alpha) \quad (۱۲)$$

$$\phi(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad (۱۳)$$

$$\rho_h(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in [0, h] \\ 0.5\left(1 + \cos\left(\pi \frac{z-h}{1-h}\right)\right) & \text{if } z \in [h, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۱۴)$$

در این روابط $a > 0$، $d_\alpha = \|d\|_\sigma$، $0 < d < r$ و $h \in (0,1)$ پارامترهای قابل تنظیم می‌باشند. بدین ترتیب

$$f_i^a = -\sum_{j \in N_i} \nabla_{x_j} \psi(\|x_{ij}\|_\sigma). \quad (۱۵)$$

با استفاده از روش‌های عددی می‌توان نشان داد که $|f_i^a|$ دارای یک مقدار بیشینه است که از آن می توان برای محدود کردن سطح سیگنال کنترل استفاده کرد. این مقدار بیشینه به پارامترهای $|f_i^a|$ بستگی دارد و ارتباطی با شرایط اولیه موقعیت و سرعت عامل‌ها ندارد. این مقدار بیشینه را با $\max|f_i^a|$ نشان می‌دهیم.

بخش دوم و سوم از (۷) f_i^b و f_i^c، با روابط (۱۶) و (۱۷) تعریف می‌شوند و به ترتیب وظیفه نزدیک کردن موقعیت و سرعت عامل‌ها به یکدیگر را برعهده دارند.

$$f_i^b = -\sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_j)) \quad (۱۶)$$

$$f_i^c = -\sum_{j \in N_i} a_{ij} \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j)) \quad (۱۷)$$

تابع sig به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{sig}^\alpha(x) = \text{sign}(x)|x|^\alpha \quad (۱۸)$$

ضمناً $0 < \alpha_1 < 1$ قابل تنظیم و $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}$ است.

المان‌های ماتریس همسایگی $A = [a_{ij}]$ به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \rho_h\left(\frac{\|x_{ij}\|_\sigma}{r_\alpha}\right) & i \neq j \end{cases} \quad (۱۹)$$

در آخر، بخش چهارم و پنجم معادله (۷) وظیفه نزدیک کردن موقعیت و سرعت عامل‌ها به موقعیت و سرعت رهبر را دارا می‌باشند. به طوریکه عامل‌ها بتوانند موقعیت و سرعت رهبر را ردیابی (track) کنند.

$$f_i^d = -c_1 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_0)) \quad (۲۰)$$

$$f_i^e = -c_2 h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_0)) \quad (۲۱)$$

در روابط (۲۰) و (۲۱) $h_i = 1$ است اگر عامل iام مستقیماً به موقعیت و

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

سرعت رهبر دسترسی داشته باشد که اصطلاحاً به آن عامل آگاه گویند (informed agent) و برای بقیه عامل‌ها این مقدار صفر است. همچنین $c_1 > 0$ و $c_2 > 0$ پارامترهای کنترلی جهت وزن دادن به ردیابی است.

پارامتر K جهت تنظیم سطح بیشینه سیگنال کنترل تعریف شده تا بتوان این سطح را کمتر از حد اشباع l_{sat} قرار داد. با توجه به مطالب گفته شده اگر مقدار K از رابطه زیر محاسبه شود سطح سیگنال کنترل هیچگاه به حد اشباع نخواهد رسید.

$$K \le \frac{l_{\text{sat}}}{(\max|f_i^a|+2n+c_1+c_2)} \quad (۲۲)$$

دینامیک حرکتی رهبر به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases}\dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{v}_0 = 0\end{cases} \quad (۲۳)$$

فرض ۱. با توجه به شرط متصل بودن عامل‌ها و اینکه حداقل یک عامل مستقیماً از موقعیت و سرعت رهبر اطلاع دارد، کلیه عامل‌ها مستقیم یا غیرمستقیم نسبت به رهبر مطلع هستند.

۳- حرکت گروهی زمان محدود عامل‌های جمعی

در این بخش نشان خواهیم داد موقعیت و سرعت عامل‌ها با دینامیک سیستم (۱) تحت سیگنال کنترل (۷) به موقعیت و سرعت یکدیگر و موقعیت و سرعت رهبر با دینامیک (۲۳) همگرا می‌شوند و در این حرکت علاوه بر اینکه اتصال شبکه را حفظ می‌کنند با یکدیگر برخورد نمی‌کنند.

قبل از بیان قضیه و اثبات آن یک تابع انرژی به شکل زیر معرفی می‌کنیم.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (۲۴)$$

و با در نظر گرفتن $\tilde{x}_i = x_i - x_0$ و $\tilde{v}_i = v_i - v_0$ اجزاء تابع انرژی اینگونه تعریف می‌شوند.

$$V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2 \quad (۲۵)$$

$$V_2 = \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tilde{x}_i-\tilde{x}_j} a_{ij}\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(s))ds \quad (۲۶)$$

$$V_3 = c_1 K \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tilde{x}_i} h_i \tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(s))ds \quad (۲۷)$$

$$V_4 = \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in N_i}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) \quad (۲۸)$$

همچنین سیستم (۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = u_i\end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,N \quad (۲۹)$$

قضیه ۱. N عامل با دینامیک (۱) تحت سیگنال کنترل (۷) و دینامیک رهبر (۲۳) و با انرژی اولیه $V_0 = V(x(0), v(0))$ در زمان محدود حرکت گروهی خواهند داشت. یعنی

الف) سرعت عامل‌ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می‌شود.

$$\lim_{t\to T_0}(v_i - v_0) \to 0, v_i - v_0 = 0, \forall t \ge T_0 \quad (۳۰)$$

ب) حداکثر فاصله عامل‌های آگاه با رهبر از مقدار $\sqrt[(\alpha_1+1)]{V_0(\alpha_1+1)c_1^{-1}}$ کمتر خواهد بود

ج) اتصال شبکه در حین حرکت برقرار می‌ماند.

د) در صورتی که $V_0 < \psi_2(0)$ باشد عامل‌ها با یکدیگر برخورد نخواهند کرد.

اثبات. الف) تابع انرژی V را به عنوان تابع لیاپانوف کاندیدا می‌کنیم. مشتق اجزاء این تابع در مسیر سیستم (۲۹) اینگونه است.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i\dot{\tilde{v}}_i = \sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i u_i = \\ &-\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i K\Big(\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)\right) \\ &+\sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)\right) + c_1h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) + \\ &c_2h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i))\Big) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)), \quad (۳۲)$$

$$\dot{V}_3 = K\sum_{i=1}^{n}c_1h_i\tilde{v}_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)), \quad (۳۳)$$

$$\dot{V}_4 = K\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_i\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma), \quad (۳۴)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_1+\dot{V}_2+\dot{V}_3+\dot{V}_4 = -\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_iK\Big(\sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)\right)+ \\ &\qquad c_2h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i))\Big) \\ &= \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)\right) \\ &\quad -K\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_ic_2h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)) \\ &\le \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)\right)\le 0. \end{aligned} \quad (۳۵)$$

با توجه به داشتن مساوی صفر در رابطه (۳۵) از قضیه لاسال[1] استفاده می‌کنیم. در نظر بگیرید $\dot{V} = 0$ که نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j\right)\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)) - \\ &\qquad K\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_ic_2h_i\tanh\left(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i)\right) = 0 \end{aligned} \quad (۳۶)$$

با توجه به (۳۶) و فرض ۱ نتیجه می‌شود $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0\ i,j = 1,2,\cdots,n$. ضمناً اگر $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$ واضح است که نتیجه می‌شود $\dot{V} = 0$ لذا شرط لازم و کافی برای $\dot{V} = 0$ آن است که $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$ باشد که نتیجه می‌دهد $\dot{\tilde{v}}_i = 0$ پس

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{v}}_i &= -K\Big(\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)) \\ &\quad +\sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i-\tilde{v}_j)) + c_1h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)) + \\ &\quad c_2h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_2}(\tilde{v}_i))\Big) = 0. \end{aligned} \quad (۳۷)$$

باتوجه به $\tilde{v}_i = \tilde{v}_j = 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&-K\Big(\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) + \sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)) + \\ &\qquad c_1h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i))\Big) = 0. \end{aligned} \quad (۳۸)$$

در ادامه با ضرب $\tilde{x}_i$ و گرفتن جمع از رابطه بالا می‌توان گفت

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\Big(-K\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) - K\sum_{j\in N_i}a_{ij}\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i - \\ &\tilde{x}_j)) - Kc_1h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i))\Big) = - \\ &K\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\sum_{j\in N_i}\nabla_{x_j}\psi(\|x_{ij}\|_\sigma) - \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\tilde{x}_j - \\ &\tilde{x}_i)\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_j-\tilde{x}_i)) - K\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_ic_1h_i\tanh(\text{sig}^{\alpha_1}(\tilde{x}_i)). \end{aligned} \quad (۳۹)$$

[1] LaSalle

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

که نتیجه می‌دهد $\tilde{x}_i = \tilde{x}_j = 0$ پس با توجه به قضیه لاسال سیستم پایدار مجانبی است.

سیستم (۲۹) با متغیرهای $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_n)$ هموژن از درجه $k = \alpha_1 - 1 < 0$ با تاخیر $(2,2,\cdots,2,1+\alpha_1, 1+\alpha_1, \cdots, 1+$ $\alpha_1)$ است.

با توجه به مباحث بالا سیستم (۲۹) پایدار مجانبی سراسری و هموژن با درجه $k < 0$ می‌باشد. با استفاده از لم ۱ نتیجه می گیریم سیستم (۲۹) پایدار زمان محدود سراسری می‌باشد. لذا سرعت عامل‌ها در زمان محدود به سرعت رهبر همگرا می‌شود و اثبات قسمت الف تکمیل می‌شود.

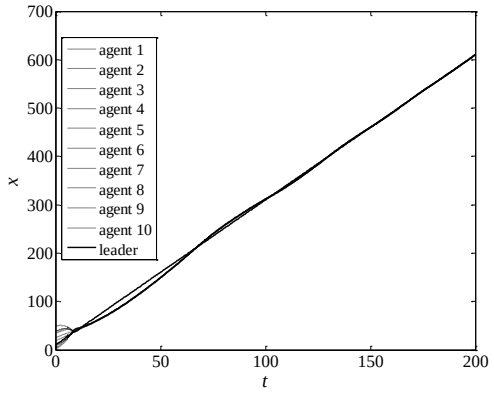
ب) با توجه به نزولی بودن V برای تمام زمان‌ها می‌توان نتیجه گرفت $V(t) < V_0$ است در نتیجه $V_3 = c_1 K \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\tilde{x}_i} h_i \tanh\left(\text{sig}^{\alpha_1}(s)\right) ds <$ V_0 خواهد بود که نتیجه می‌شود $c_1 K \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{|\tilde{x}_i|^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} < V_0$. لذا می‌توان گفت $|\tilde{x}_i| < \sqrt[(\alpha_1+1)]{V_0(\alpha_1+1)(Kc_1)^{-1}}$ یعنی فاصله بین رهبر و عامل‌های آگاه همواره از این مقدار کمتر خواهد بود.

ج) فرض کنید $G(t)$ در فاصله زمانی $(k = 1,2, \ldots)$ t_k تغییر کند. با توجه به نزولی بودن V برای تمام زمان‌ها $V(t) < V_0 < V_{\max}$ صادق است از تعریف $\psi_1(\|x_{ij}\|_\sigma)$ نتیجه می گیریم $\psi_1(r_\alpha) = Q > V_{\max} > V_0$. بنابراین فاصله بین هیچ دو عاملی به r_α نمی‌رسد یعنی هیچ ارتباطی قطع نمی گردد. با توجه به اینکه شبکه در ابتدا متصل بوده است پس متصل هم باقی خواهد ماند.

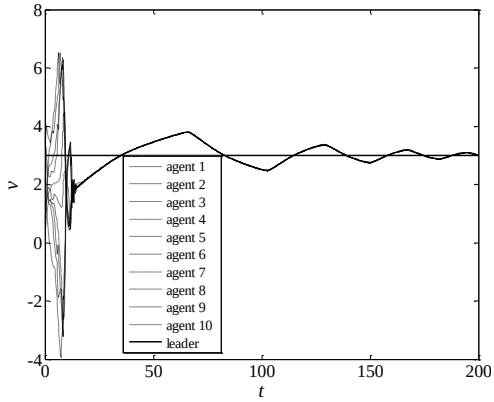
د) برای اثبات این بند شبیه بند iii قضیه (۱) از مقاله [۹] از برهان خلف استفاده می کنیم. اگر در زمان $t^* > 0$ برخوردی بین دو عامل اتفاق بیافتد مقدار تابع پتانسیل حداقل مقدار $\psi_2(0)$ را پیدا می کند پس $V_0 \geq V(t^*) \geq$ $\psi_2(0)$ که این خلاف فرض $V_0 < \psi_2(0)$ می‌باشد. پس برخوردی بین دو عامل نخواهیم داشت.

٤- شبیه سازی

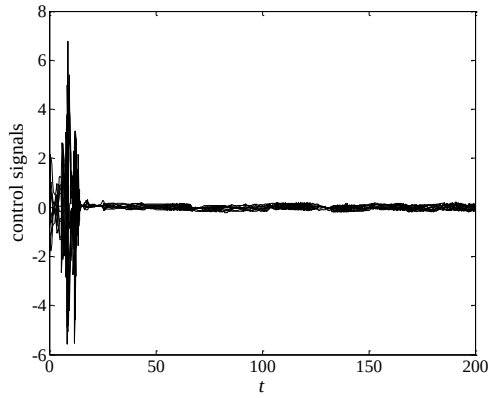
در این بخش با شبیه‌سازی عددی صحت ادعاهای عنوان شده در بخش قبل را نشان می‌دهیم. تعداد ۱۰ عامل که در فضای ۲ بعدی حرکت می کنند را در نظر می گیریم. موقعیت و سرعت اولیه این عامل‌ها را به شکل تصادفی در محدوده به ترتیب $[0,70] \times [0,70]$ و $[0,4] \times [0,4]$ به گونه‌ای انتخاب می کنیم که گراف اولیه متصل باشد. موقعیت و سرعت اولیه رهبر هم به ترتیب $x_0 = [10,10]^T$ و $v_0 = [3,3]^T$ در نظر می گیریم. همچنین $r = 35$، $d = 1$، $h = 0.9$، $\varepsilon = 0.1$، $a = 240$ و $Q = 0.002 r_\alpha^2$، فرض می‌شود. ضمناً $\alpha_1 = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود که در نتیجه $\alpha_2 = 1/3$ خواهد شد. فقط عامل اول را آگاه در نظر می‌گیریم یعنی $h_i =$ $[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$. با توجه به رابطه (۲۲) مقدار K برابر $10/150$ می‌شود تا سطح سیگنال کنترل کمتر از ۱۰ شود. همانطور که در شکل ۱ مشخص است موقعیت عامل‌ها پس از زمان محدودی به یکدیگر همگرا می‌شوند.



شکل ۱. همگرایی موقعیت عامل‌ها به موقعیت یکدیگر و موقعیت رهبر.



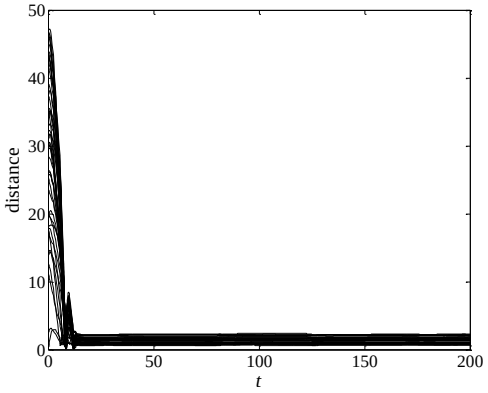
شکل ۲. همگرایی سرعت عامل‌ها به سرعت یکدیگر و سرعت رهبر.



شکل ۳. سیگنال کنترل.

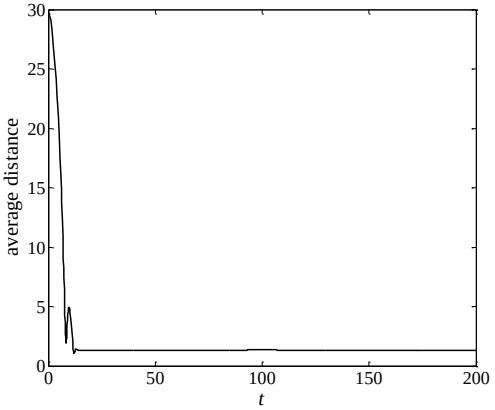
شکل ۲ همگرا شدن سرعت عامل‌ها را به سرعت یکدیگر و سرعت رهبر در زمان محدود نشان می‌دهد. در شکل ۳ سیگنال کنترل دیده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رفت سطح این سیگنال کوچکتر از ۱۰ شده است. شکل ۴ فاصله بین هر دو عامل را نشان می‌دهد همانطور که ملاحظه می‌شود در عین اینکه در هیچ زمانی فاصله بین هیچ دو عاملی صفر نمی‌شود فاصله بین آنها از مقدار مشخصی بیشتر نمی‌شود. در شکل ۵ متوسط این فاصله‌ها ارائه شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

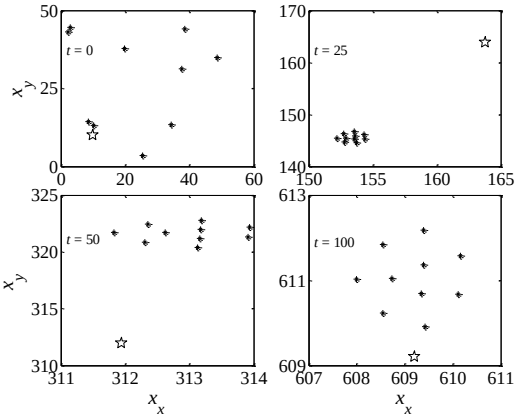


شکل ۴. فاصله بین عامل‌ها.

شکل ۶ نحوه استقرار عامل‌ها در کنار یکدیگر را نشان می‌دهد به طوریکه عامل‌ها با حفظ حداقل فاصله در کنار یکدیگر و در کنار رهبر حرکت می‌کنند.



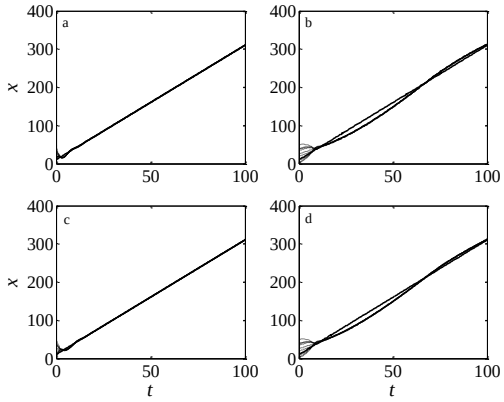
شکل ۵. متوسط فاصله بین عامل‌ها.



شکل ۶. قرار گرفتن عامل‌ها در ۴ زمان ۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰.

در پایان نتایج شبیه‌سازی ۴ وضعیت ۱) حرکت گروهی مجانبی بدون در نظر گرفتن اشباع در ورودی، ۲) حرکت گروهی مجانبی با در نظر گرفتن اشباع در ورودی، ۳) حرکت گروهی زمان محدود بدون در نظر گرفتن اشباع در ورودی و ۴) حرکت گروهی زمان محدود با در نظر گرفتن اشباع در ورودی ارائه می‌شود.

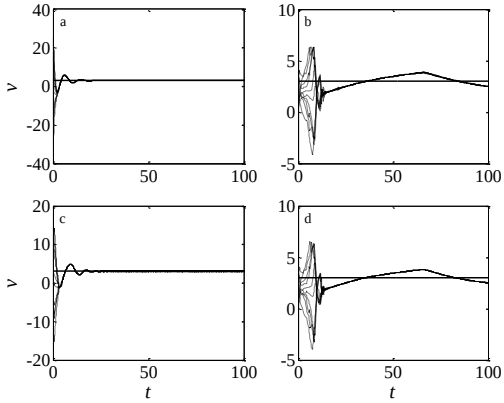
برای حالت اول سرعت و موقعیت عامل‌ها به سرعت و موقعیت یکدیگر و رهبر به صورت مجانبی همگرا می‌شوند. در این حالت محدودیتی در سیگنال کنترل در نظر گرفته نمی‌شود. شکل‌های ۷-a، ۸-a و ۹-a به ترتیب موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل را نشان می‌دهد.



شکل ۷. موقعیت عامل‌ها در ۴ حالت a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل d) همگرایی زمان محدود با محدودین سیگنال کنترل

در حالت دوم همگرایی سرعت و موقعیت مانند حالت قبل به شکل مجانبی خواهد بود اما سیگنال کنترل به شکلی طراحی شده است که دامنه سیگنال کنترل از مقدار حد اشباع که ± 10 است بیشتر نشود. شکل‌های ۷-b، ۸-b و ۹-b به ترتیب موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل در این حالت را نشان می‌دهد.

در حالت سوم سیگنال کنترل به گونه‌ای طراحی شده که همگرایی به شکل زمان محدود اتفاق بیافتد اما محدودیتی برای دامنه وجود ندارد. موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل به ترتیب در شکل‌های ۷-c، ۸-c و ۹-c نشان داده شده است.

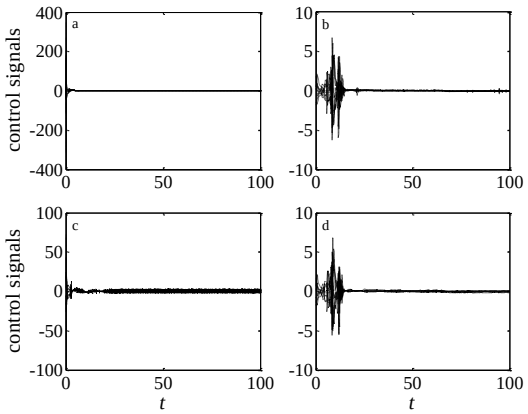


شکل ۸ سرعت عامل‌ها در ۴ حالت a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل d) همگرایی زمان محدود با محدودین سیگنال کنترل

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]

حالت آخر وضعیتی است که در این مقاله به آن پرداخته شده به شکلی که هم همگرایی به شکل زمان محدود است و هم دامنه سیگنال کنترل به حد اشباع محدود شده است. موقعیت عامل‌ها، سرعت عامل‌ها و سیگنال کنترل به ترتیب در شکل‌های d–۷، d–۸ و d–۹ ارائه شده است.

همانطور که در شکل‌ها دیده می‌شود بهترین پاسخ از نظر همگرایی و دامنه سیگنال کنترل مربوط به حالت آخر است.



شکل ۹. سیگنال کنترل در ۴ حالت a) همگرایی مجانبی بدون محدودیت سیگنال کنترل b) همگرایی مجانبی با محدودیت سیگنال کنترل c) همگرایی زمان محدود بدون محدودیت سیگنال کنترل d) همگرایی زمان محدود با محدودیت سیگنال کنترل

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله حرکت گروهی عامل‌ها در زمان محدود مورد بررسی قرار گرفت. سیگنال کنترل ارائه شده در این مقاله به گونه‌ای است که هر عامل تحت تاثیر این سیگنال در حرکت خود در عین اینکه موقعیت و سرعت خود را به عامل‌های مجاور و رهبر نزدیک می‌کند برخوردی با هیچ عاملی ندارد. ضمناً تحت تاثیر این قانون کنترلی اتصال شبکه حفظ می‌شود و در هیچ زمانی اتصال شبکه از بین نمی‌رود. سیگنال کنترل به گونه‌ای تعریف شده است که با تنظیم پارامترهای مورد نظر می‌توان سطح آن را محدود به حد اشباع ورودی کرد تا عنصر اشباع نتواند روی عملکرد سیستم تاثیر بگذارد.

با توجه به اینکه برای اثبات همگرایی زمان محدود از روش هموژنیتی استفاده کرده‌ایم امکان ارائه زمانی مشخص برای زمان همگرایی وجود ندارد پیشنهاد می‌شود روشی ارائه شود تا بتواند زمان محدود همگرایی را مشخص کند.

مراجع

[1] Vicsek, T., Czirok, A., Ben-Jacob, E., Cohen, I., Shochet, O., 1995 “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,” Physical Review Letters, 25(6), pp. 1226-1229.
[2] Esmailifar, S.M., Saghafi, F., 2017, “Cooperative localization of marine targets by UAVs” Mechanical Systems and Signal Processing, 87, pp.23-42.
[3] J.R.T. Lawton, R.W. Beard, and B.J. Young, “A decentralized approach to formation maneuvers,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, 19(6), pp. 933-941.
[4] Yamchi, M.H., Esfanjani, R.M., 2017, “Distributed Predictive Formation Control of Networked Mobile Robots Subject to Communication Delay” Robotics and Autonomous Systems, 91, pp.194-207.
[5] Jiang, H., Bi, Q., Zheng, S., 2012, “Impulsive consensus in directed networks of identical nonlinear oscillators with switching topologies” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(1), pp. 378-387.
[6] Wellman, B.J., Hoagg, J.B., 2017, “A flocking algorithm with individual agent destinations and without a centralized leader” Systems & Control Letters, 102, pp. 57-67.
[7] Toner, J., 1998, “Flocks, herds, and schools : a quantitative theory of flocking” Physical Review E, 58(4), pp. 4828-4858.
[8] Olfati-saber, R., 2006, “Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory” IEEE Transactions on Automatic Control, 51(3), pp. 401-420.
[9] Su, H., Wang, X., Lin, Z., 2009, “Flocking of multi-agents with a virtual leader” IEEE Transactions on Automatic Control, 54(2), pp. 293-307.
[10] Bhat, S.P., Bernstein, D.S., 2000, “Finite-time stability of continuous autonomous systems” SIAM Journal on Control and Optimization, 38(3), pp. 751-766.
[11] Bhat, S.P. Bernstein, D.S., 1998, “Continuous finite-Time stabilization of the translational and rotational double integrators” IEEE Transactions on Automatic Control on Automatic Control, 43(5), pp. 678-682.
[12] Hong, Y., Huang, J., Xu, Y., 2001, “On an output feedback finite-time stabilization problem” IEEE Transactions on Automatic Control, 46(2), pp. 305-309.
[13] Guan, Z., Sun, F., Wang, Y., Li, T., 2012 “Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks,” IEEE Transactions on Circuits and Systems, 59(11), pp. 2646-2654.
[14] Meng, D., Jia, Y., Du, J., 2015, “Nonlinear finite-time bipartite consensus protocol for multi-agent systems associated with signed graphs” International Journal of Control, 88(10), pp. 2074-2085.
[15] Li, S., Wang, X., 2013, “Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs,” *Automatica*, 49(11), pp. 3359-3367.
[16] Su, H., Wang, X., Chen, G., 2010, “Rendezvous of multiple mobile agents with preserved network connectivity,” Systems & Control Letters, 59(5), pp. 313-322.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.1.3.4]
[DOI: 10.29252/joc.13.1.1]