مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۱، صفحه ۳۵-۲۷

روش طراحی کنترلگر PI برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت به کمک تجزیه مجموع مربعات

حسن ذاکری [۱]، سجاد ازگلی [۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، hasan.zakeri@ieee.org

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، ozgoli@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۵/۱۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۸/۱۴)

چکیده: در این مقاله به ارائه یک روش الگوریتمی برای طراحی رگولاتور تناسبی-انتگرالی برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی که نمایش فضای حالت آن‌ها در قالب توابع چندجمله‌ای می‌باشند، می‌پردازیم. طراحی بر اساس مدل غیرخطی از سیستم، معین و یا نامعین، و به کمک بهینه‌سازی مجموع مربعات انجام می‌گیرد. روش طراحی برمبنای تابعی به نام تابع چگالی تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی محدب و به فرم برنامه‌ریزی مجموع مربعات ارائه شده و مقاومت طراحی با در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامتری در سیستم به روشی مشابه S-Procedure تعمیم یافته، تضمین گردیده است. سپس کارایی روش ذکر شده به کمک شبیه‌سازی بررسی می‌شود. در این مقاله، علاوه بر ارائه روش جدیدی در طراحی کنترل‌گر تناسبی-انتگرالی که مبتنی بر روش‌های خطی‌سازی محلی نبوده و به طور فراگیر عمل می‌کند، فرمول‌بندی جدیدی نیز برای بیان عدم قطعیت پارامتری در سیستم‌های غیر خطی ارائه گردیده است. شرایط پایداری به دست آمده، هیچکدام از محدودیت‌های روش‌های قبلی از جمله نیاز به خطی‌سازی تقریبی و یا سیستم پایدار را نداشته و بر اغلب دشواری‌های طراحی کنترل غلبه می‌کند. همچنین استفاده از روش تجزیه مجموع مربعات، باعث حذف محافظه کاری در به دست آوردن شرایط پایداری شده و به طور مستقیم پایداری سیستم غیرخطی را نتیجه می‌دهد.

کلمات کلیدی: کنترلگر PI مقاوم، تجزیه مجموع مربعات، تابع چگالی، طراحی کنترل غیر خطی، عدم قطعیت پارامتری.

A Robust PI Control Design for a Class of Nonlinear Systems with Uncertainty Using Sum of Squares Decomposition

Hasan Zakeri, Sadjaad Ozgoli

Abstract: This paper presents a new algorithmic method to design PI controller for a class of nonlinear systems whose state space description is in the form of polynomial functions. Design procedure is taken place based on certain or uncertain nonlinear model of system and sum of squares optimization. A so called density function is employed to formulate the design problem into a convex optimization program of sum of squares optimization form. Robustness of the design is guaranteed by taking parametric uncertainty into account with an approach similar to that of generalized S-Procedure. Validity and applicability of the proposed method is certified with numerical simulation. This paper, besides presenting an innovated PI control design which is not based on local linearization and works globally, announces a new approach in formulating parametric uncertainty in nonlinear systems. Derived stability conditions do not suffer from any drawbacks seen in previous results, such as depending on a linearized model or a stable model and it can overcome most control difficulties. Furthermore, employing sum of squares techniques makes it possible to drive stability conditions with least conservatism and directly derive stability of nonlinear system.

Keywords: Robust PI Control, Sum of Squares Decomposition, Density Function, Nonlinear Control Synthesis, Parametric Uncertainty.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

۱- مقدمه

کنترلگرهای PI و PID معمول‌ترین نوع کنترلگر در کنترل سیستم‌ها هستند. بیش از ۹۰٪ حلقه‌های کنترل صنعتی را کنترل‌کننده‌های PI و PID تشکیل می‌دهند. این نوع کنترل‌کننده‌ها، با وجود قیمت پایین، علاوه بر سادگی طراحی و نگهداری، از مقاومت و کارایی خوبی نیز برخوردار هستند.

کاربردهای کنترل PID و PI شامل فرایندهای صنعتی، کنترل موتور، حافظه‌های مغناطیسی و نوری، خودرو، کنترل پرواز، ابزار دقیق و غیره می‌شود. تاریخچه PID به سال ۱۸۹۰ و ناوبری خودکار کشتی‌ها برمی‌گردد [۱]. با این همه اولین بررسی نظری کنترل‌کننده‌های PID در سال ۱۹۲۲ توسط مهندس روسی-امریکایی، نیکولاس مینورسکی چاپ شد [۲]. در حال حاضر، با گذشت چندین دهه، هنوز کنترل‌گرهای PI و PID حرف اول را در کاربردهای صنعتی و نظامی می‌زنند [۳, ۴].

اما با این‌که کنترل PID همیشه کاربرد فراوانی داشته است، هنوز نکات مهمی در زمینه عدم قطعیت و تضمین پایداری با وجود عدم قطعیت در کنترلگرهای PID ناگفته مانده است. عدم‌قطعیت‌های مدل به طور صریح در روش‌هایی همچون QFT و H_∞ وارد می‌شوند که پاره‌ای از تأثیرات آن بر کنترل PID در [۵-۷] آمده است. یکی از روش‌های غنی برخورد با عدم قطعیت در سیستم‌ها، عدم قطعیت پارامتری است. این نوع مدل‌سازی، اطلاعات ما از ساختار دینامیک سیستم را بدون نیاز به دانستن مقدار دقیق پارامترها، در مدل لحاظ می‌کند. در خصوص پایداری و کنترل سیستم‌های خطی با عدم قطعیت پارامتری تحقیقات وسیعی انجام شده است [۸-۱۰]، اما عدم قطعیت پارامتری در سیستم‌های غیرخطی، به علت پیچیدگی طراحی و محاسباتی، کمتر مورد استقبال محققان قرار گرفته و هنوز از زمینه‌های مطالعاتی باز محسوب می‌شود.

در این مقاله، با استفاده از تجزیه مجموع مربعات و S-Procedure تعمیم یافته روشی برای مواجهه با عدم قطعیت پارامتری در سیستم‌های غیرخطی و در نهایت طراحی کنترل کننده PI ارائه شده‌است. وجود تجزیه مجموع مربعات، در ابتدا در سال ۱۹۰۰ توسط هیلبرت مطرح شد، اما در سال ۲۰۰۰ به عنوان تعمیمی از روش شناخته شده ناتساوی‌های ماتریسی خطی معرفی شد [۱۱] و تاکنون کاربردهای فراوانی در تحلیل و طراحی سیستم‌ها داشته است [۱۲-۱۴]. الگوریتم مجموع مربعات از روشی مشابه ناتساوی‌های ماتریسی خطی استفاده می‌کند، با این تفاوت که کلیه فرمول‌بندی‌های مسائل در سطح چندجمله‌ای انجام می‌شوند. الگوریتم مجموع مربعات به بسیاری از مسائل دشوار در کنترل غیر خطی پاسخ گفته است. به طور نمونه، مسئله بررسی پایداری نقطه تعادل یک سیستم غیر خطی به کمک جستجو برای تابع لیاپانوف را در نظر بگیرید. ساخت تابع لیاپانوف به روش دستی بسیار سخت و کاملاً وابسته به مهارت‌های تحلیلی طراحی پژوهشگر است؛ اما با استفاده از روش مجموع مربعات، روش‌های الگوریتمی برای ساخت تابع لیاپانوف ارائه شده است [۱۵]. پژوهشگران زیادی از تجزیه مجموع مربعات در طراحی کنترلگر برای سیستم‌های غیرخطی استفاده کرده‌اند؛ به طور مثال، در [۱۶] از تجزیه مجموع مربعات به طراحی کنترلگر غیرخطی استاتیک به روش لیاپانوف استفاده شده است. قانون کنترل به دست آمده به صورت یک چندجمله‌ای از حالات سیستم می‌باشد. از جمله معایب طراحی ذکر شده، وابستگی قانون کنترل به حالت سیستم (که ممکن است در دسترس نباشد) و استاتیک بودن آن است. روش ارائه شده در [۱۷] طراحی کنترلگر غیرخطی استاتیک فیدبک خروجی است، با این حال درجه بالای تابع چندجمله‌ای به دست آمده برای قانون کنترل، پیاده سازی و اجرای آن در کاربردهای عملی را مشکل، و حتی در بعضی موارد غیرممکن می‌کند. این مشکل در [۱۸] حل شده است، که یک قانون فیدبک حالت خطی برای سیستم‌های غیر خطی ارائه داده است، اما همچنان ضعف‌هایی همچون در نظر نگرفتن معیارهای کارایی را دارد. همچنین در [۱۹] روشی برای طراحی کنترلگر فیدبک خروجی با معیار H_∞ ارائه شده است. کنترلگر ارائه شده قابلیت ضمانت بهره L_2 خروجی به ورودی نویز در یک حد از قبل تعیین شده را دارد. با این حال، انتخاب یک حد بالا برای بهره تضعیف نویز از معایب طراحی این مقاله می‌باشد. همچنین روش ارائه شده برای حل مسئله برنامه ریزی مجموع مربعات، به روش تکراری[1] است که وابستگی کامل به نقطه شروع دارد.

هم‌چنین پس از ارائه یک دوگان برای قضیه لیاپانوف بر مبنای تابع چگالی در سال ۲۰۰۱ [۲۰]، روش‌های طراحی برمبنای بهینه‌سازی محدب که از روش مجموع مربعات استفاده می‌کردند، ارائه شد [۲۱]. ویژگی اصلی این روش، تحدب ذاتی مجموعه جواب مسئله است که باعث استقبال از این روش در طراحی و تحلیل سیستم‌های غیرخطی شده است. این نکته در ادامه مقاله به تفصیل شرح داده خواهد شد.

در مقاله حاضر با استفاده از قضیه دوگان لیاپانوف یک مسئله مجموع مربعات ارائه شده است که اگر جواب داشته باشد می‌توان از روی جواب آن بهره‌های یک کنترلگر PI را برای تضمین پایداری مقاوم به دست آورد. این نتیجه در قالب قضیه ۱ در قسمت ۳ برای سیستم نامی ارائه شده است. تعمیمی از قضیه ۱ به سیستم‌های دارای عدم قطعیت با عنوان قضیه ۲ در قسمت ۴ ارائه شده است.

در ادامه این نوشتار، ابتدا در قسمت ۲، به ارائه مبانی ریاضی مورد استفاده می‌پردازیم. مختصری از روش مجموع مربعات در این قسمت بحث خواهد شد. قسمت ۳ به طراحی کنترل کننده برای سیستم نامی و بدون در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌ها می‌پردازد. قسمت ۴ به روش مدل‌سازی و فرمول‌بندی عدم قطعیت پارامتری و سپس طراحی کنترل

[1] Iterative

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

مقاوم می‌پردازد. ارائه مثال‌های عددی و نتایج شبیه‌سازی در قسمت ۵ آورده شده است و نتیجه‌گیری، قسمت نهایی مقاله را تشکیل می‌دهد.

۲- مبانی ریاضی

این بخش به ارائه تعاریف مورد استفاده در این مقاله و سپس چند لم می‌پردازد. در اولین گام، *تک‌جمله‌ای*[1] و *چندجمله‌ای*[2] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۱- *تک‌جمله‌ای* m_α از متغیر $\boldsymbol{x}$ تابعی است از n متغیر $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ که به صورت

$$m_\alpha(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\alpha \triangleq x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. درجهٔ این تک‌جمله‌ای به صورت $\deg m_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ تعریف می‌شود [۲۲].

تعریف ۲- *چندجمله‌ای* p از n متغیر، ترکیب خطی تعداد متناهی از تک‌جمله‌ای‌ها است:

$$p \triangleq \sum_\alpha c_\alpha m_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha \qquad (۲)$$

درجهٔ چندجمله‌ای p برابر $\deg p=\max_{\alpha}\deg m_\alpha$ تعریف می‌شود. همچنین $\mathcal{R}_n$ به عنوان مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های از n متغیر تعریف می‌شود [۲۲].

در بسیاری از مسائل نظریه سیستم‌ها و کنترل به چندجمله‌ای‌ها برخورد می‌کنیم. با وجود خواص جالب توابع چندجمله‌ای که منجر به کاربردهای فراوانی در زمینه نظریه کنترل شده است، تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها در حالت کلی کار مشکلی است. از طرف دیگر خیلی از خواص کنترلی با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها گره خورده است. یکی از راه‌هایی که برای غلبه بر این مشکل ارائه شده است، مفهوم مجموع *مربعات*[3] می‌باشد.

تعریف ۳ [۱۱]- چندجمله‌ای $p(\boldsymbol{x})$ مجموع مربعات (SOS) نامیده می‌شود، اگر بتوان آن را به صورت زیر نمایش داد

$$p(\boldsymbol{x})=\sum_i p_i^2(\boldsymbol{x}) \qquad (۳)$$

بدیهی است اگر چندجمله‌ای $p(\boldsymbol{x})$ مجموع مربعات باشد، آنگاه $p(\boldsymbol{x})\geq 0$ است (هرچند خلاف آن صادق نیست). مجموعهٔ کلیهٔ چندجمله‌ای‌های از n متغیر و به شکل مجموع مربعات را Σ_n نام می‌گذاریم. واضح است که $\Sigma_n \subset \mathcal{R}_n$. لم زیر شرط لازم و کافی برای وجود یک نمایش (تجزیه) به صورت مجموع مربعات برای یک چندجمله‌ای را بیان می‌کند.

لم ۱ [۱۱]- چندجمله‌ای $p(\boldsymbol{x})$ مجموع مربعات است، اگر و فقط اگر ماتریس $Q\geq 0$ و برداری از تک‌جمله‌ای‌های $Z(\boldsymbol{x})$ یافت شوند که

$$p(\boldsymbol{x})=Z^T(\boldsymbol{x})QZ(\boldsymbol{x}) \qquad (۴)$$

تعریف ۴ [۱۴]- به مسئله بهینه سازی محدب به شرح زیر یک *مسئلهٔ برنامه‌ریزی مجموع مربعات*[4] گفته می‌شود:

چندجمله‌ای‌های $\{a_{i,j}(\boldsymbol{x})\}\in\mathcal{R}_n$ *داده شده‌اند. چندجمله‌ای‌های* $\{p_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^{\hat{N}}\in\mathcal{R}_n$ *و* $\{p_i(\boldsymbol{x})\}_{i=\hat{N}+1}^{N}\in\Sigma_n$ *را چنان بیابید که* w^Tc *کمینه شود، طوری که*

$$a_{0,j}+\sum_{i=1}^{N}p_i(\boldsymbol{x})a_{i,j}(\boldsymbol{x})=0,\quad j=1,2,\ldots,\hat{J} \qquad (۵)$$

و

$$a_{0,j}+\sum_{i=1}^{N}p_i(\boldsymbol{x})a_{i,j}(\boldsymbol{x})\in\Sigma_n \qquad (۶)$$

برای $j=(\hat{J}+1),\ldots,J$ ؛ که در آن c بردار متشکل از ضرایب چندجمله‌ای‌های نامعلوم $p(\boldsymbol{x})$ و w بردار وزن‌دهی است.

یک چنین مسئله برنامه‌ریزی، به راحتی قابل حل توسط نرم‌افزارهایی همچون SOSTOOLS [۲۳] و YALMIP می‌باشد [۲۴, ۲۵].

لم ۲ (S-Procedure تعمیم یافته) [۲۲]- فرض کنید $\{p_i\}_{i=0}^{m}\in\mathcal{R}_n$. در صورتی که $\{s_k\}_{i=1}^{m}\in\Sigma_n$ یافت شود به طوری که $p_0-\sum_{i=0}^{m}s_i\,p_i\in\Sigma_n$، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=1}^{m}\{x\in\mathbb{R}^n \mid p_i(x)\geq 0\} \subseteq \{x\in\mathbb{R}^n \mid p_0(x)\geq 0\} \qquad (۷)$$

لم ذکر شده، تعمیمی از قضیه شناخته شده S-Procedure است که در بخش طراحی مقاوم از آن استفاده خواهدشد.

در پایان این بخش به بیان قضیهٔ پایداری زیر موسوم به دوگان قضیه لیاپانوف می‌پردازیم.

لم ۳- سیستمی با معادله حالت به شکل زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(x(t)) \qquad (۸)$$

که در آن $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ و $f(0)=0$ است و $C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ معرف مجموعه تمام توابع پیوسته و یک‌بار مشتق‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ است. حال اگر تابع غیرمنفی

[1] Monomial
[2] Polynomial
[3] Sum of squares
[4] Sum of Squares program

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

$\rho \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^n - \{0\}, \mathbb{R}\right)$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{\rho(x) f(x)}{|x|}$ برروی $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$ انتگرال‌پذیر باشد و برای تقریباً هر x، $\left[\nabla \cdot (\rho f)\right](x) > 0$ باشد، آنگاه برای هر حالت اولیه $x(0)$، مسیر حالت $x(t)$ برای $t \in [0, \infty)$ موجود بوده و با فرض $t \to \infty$ به سمت صفر میل می‌کند [۲۰].

این قضیه برای اولین بار در سال ۲۰۰۰ مطرح شد. به تابع ρ در این قضیه تابع چگالی گفته می‌شود. این تابع تفسیری مشابه چگالی ماده‌ای که در تمام فضای حالت تولید می‌شود و از طریق مسیرهای حالت به نقطه تعادل سیستم می‌ریزد دارد و به علت خواص تحدب منحصر به فردی که از خود نشان می‌دهد، کاربردهای جالبی در طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیرخطی دارد. این قضیه به نوعی دوگان تابع لیاپانوف است، به این معنی که به جای یافت تابع لیاپانوف، از تابع چگالی برای بررسی پایداری استفاده می‌شود. یکی از مشکلات پیش رو در روش‌های طراحی مبتنی بر لیاپانوف، غیرمحدب بودن مجموعه جواب در جستجوی توأم قانون کنترل و تابع لیاپانوف است؛ اما با به کارگیری تابع چگالی و استفاده از این قضیه، به یک مسأله محدب در طراحی کنترل کننده خواهیم رسید. در بخش بعد، با استفاده از قضیهٔ ذکر شده و مفاهیم ارائه شده در این بخش، به ارائه روش طراحی کنترلگر PI خواهیم پرداخت.

۳- روش طراحی کنترل - حالت نامی

نوآوری اصلی این مقاله را می‌توان قضیه ۱ در این بخش و قضیه ۲ که در بخش بعدی ارائه خواهد شد، دانست. قضیه ۱ مربوط به حالت نامی (بدون حضور عدم قطعیت) و قضیه ۲ تعمیم همین قضیه به سیستم‌های دارای عدم قطعیت است.

سیستم غیر خطی را به شکل زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u \in \mathbb{R}$ بردار ورودی کنترلی و y خروجی سیستم هستند. توابع $f(x) \in \mathcal{R}_n^n$، $g(x) \in \mathcal{R}_n^n$ و $h(x) \in \mathcal{R}_n$ توابعی چندجمله‌ای از x هستند. چنانچه ذکر شد، به دنبال یافتن قانون کنترلی پایدارساز PI با بازخور خروجی به شکل زیر هستیم

$$u(t) = k_p y(t) + k_i \int_0^t y(s)\,ds \tag{۱۰}$$

قضیهٔ زیر به بیان روش عددی برای به دست آوردن قانون کنترلی مدنظر می‌پردازد.

قضیه ۱- سیستم داده شده با معادلات (۹) با اعمال کنترل کننده (۱۰)، پایدار خواهد شد، به شرطی که مسئله برنامه‌ریزی مجموع مربعات زیر جواب داشته و ضرایب k_p و k_i به صورت زیر از انتخاب شوند:

$$k_p = \frac{c_1}{a}, \quad k_i = \frac{c_2}{a} \tag{۱۱}$$

که در آن a، c_1 و c_2 پاسخ‌های به دست آمده از برنامه مجموع مربعات زیر هستند

اسکالرهای $a > 0$، c_1 و c_2 را چنان بیابید که چندجمله‌ای

$$\begin{aligned} & b(\hat{x}) \nabla \cdot \left(\hat{f}(\hat{x}) a + \hat{g}(\hat{x}) c \right) \\ & - \alpha \nabla b(\hat{x}) \cdot \left(\hat{f}(\hat{x}) a + \hat{g}(\hat{x}) c \right) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

مجموع مربعات گردد؛ که در آن

$$\begin{aligned} & c = c_1 \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + c_2 h(x), \\ & \hat{f}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)u \\ 0 \end{bmatrix}, \\ & \hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \ \hat{g}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

و $b(\hat{x})$ یک چندجمله‌ای مثبت دلخواه است.

برهان. با تعریف ورودی جدیدی به نام v به صورت زیر

$$v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{۱۴}$$

سیستم افزوده به فرم زیر را خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I \end{bmatrix} v \tag{۱۵}$$

با مشتق گیری از uداریم

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= k_p \dot{y}(t) + k_i y(t) \\ &= k_p \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} f(x) + k_i h(x) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

با علم بر این‌که $\dot{u} = v$، با استفاده از لم ۳ و برقراری شرایط پایداری برای سیستم افزوده، قرار می‌دهیم

$$\rho(\hat{x}) = \frac{a}{b(\hat{x})^\alpha}, \quad u(x)\rho(\hat{x}) = \frac{c(x)}{b(\hat{x})^\alpha} \tag{۱۷}$$

که در آن $b(\hat{x})$ یک چندجمله‌ای از پیش تعیین شده مثبت بوده و

$$c(x) = c_1 \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + c_2 h(x) \tag{۱۸}$$

همچنین، ثابت α برای اطمینان از برقرار بودن شرط انتگرال‌پذیری مورد استفاده قرار گرفته و به دلخواه بزرگ در نظر گرفته می‌شود [۲۱]. بنابراین، طبق لم ۳، با توجه به اینکه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

$$b(\hat{x})\nabla\cdot\left(\hat{f}(\hat{x})a+\hat{g}(\hat{x})c\right) -\alpha\nabla b(\hat{x})\cdot\left(\hat{f}(\hat{x})a+\hat{g}(\hat{x})c\right)>0 \quad (۱۹)$$

است، آنگاه سیستم افزوده پایدار خواهد بود. ■

با استفاده از قضیه فوق با حل یک مسئله مجموع مربعات می‌توان کنترلگر PI پایدارساز را برای یک سیستم غیرخطی پیدا کرد. در بخش بعد به تکمیل قضیه فوق برای رسیدن به پایداری مقاوم پرداخته شده است.

۴- روش طراحی کنترل – حالت مقاوم

اکنون به طراحی کنترل کننده تناسبی-انتگرالی برای سیستم غیر خطی همراه با عدم قطعیت پارامتری می‌پردازیم. ابتدا، لازم است چگونگی مدل‌سازی عدم قطعیت را برای روش خود ارائه دهیم. بخش پیرو به این بحث می‌پردازد.

۴-۱ مدل‌سازی عدم قطعیت

سیستمی با معادلات حالت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})+g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})u\\ y &= h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})\end{aligned} \quad (۲۰)$$

که در آن $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم و $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^l$ بردار پارامترهای نامعلوم سیستم است. توابع $f(\cdot):\mathbb{R}^{n+l}\to\mathbb{R}^n$ و $g(\cdot):\mathbb{R}^{n+l}\to\mathbb{R}^{n\times m}$ چندجمله‌ای‌هایی از $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{q}$ می‌باشد. سیستم بالا را سیستم *نامعین*[1] می‌نامیم. فرض می‌کنیم بردار پارامتر نامعلوم $\boldsymbol{q}$ محدود به یک *مجموعه محدوده نامعینی*[2] به نام Q باشد که یک گوی متناظر با نرم $\|\cdot\|_{p,W}$ و شعاع ۱ و مرکز $\boldsymbol{q}^*$ (که $\boldsymbol{q}^*$ یک بردار ثابت و معلوم است) در نظر گرفته می‌شود:

$$Q=\left\{\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^l \mid \|W\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^*)\|_p<1\right\} \quad (۲۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned}W &= \mathrm{diag}(w_1,w_2,\ldots,w_l),\\ w_1,w_2,\ldots,w_l &\in \mathbb{R}^{>0}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

ماتریس وزن‌دهی است. به سادگی می‌توان دید که برای $p\in\mathbb{N}$

$$Q=\left\{\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^l \mid p_i(\boldsymbol{q})<0, i=1,\ldots,I\right\} \quad (۲۳)$$

که p_i ها چندجمله‌ای‌هایی از $\boldsymbol{q}$ می‌باشند. با این فرضیات، در قضیه زیر به بیان روش طراحی کنترل مقاوم برای سیستم نامعین غیرخطی می‌پردازیم.

قضیه ۲. سیستم نامعین (۲۰) با بردار عدم قطعیت $\boldsymbol{q}$ که در مجموعه (۲۳) قرار دارد، با قانون کنترل (۱۰) پایدار است، در صورتی که برنامه مجموع مربعات زیر جواب داشته باشد و ضرایب قانون کنترل از روابط (۱۱) به دست می‌آیند

اسکالرهای $a>0$، c_1 و c_2 و چندجمله‌ای‌های مجموع مربعات $\{s_k\}_{i=1}^{l}$ را چنان بیابید که چندجمله‌ای

$$\begin{aligned}&b(\hat{x})\nabla_x\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}c\right)\\ &-\alpha\nabla b(\hat{x})\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}(\hat{x})c\right)\\ &+\sum_{i=1}^{I}s_i p_i\end{aligned} \quad (۲۴)$$

مجموع مربعات گردد؛ که در آن

$$\begin{aligned}c &= c_1\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})+c_2 h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}),\\ \hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})+g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})u\\ 0\end{bmatrix},\\ \hat{x} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ u\end{bmatrix},\ g(\hat{x})=\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (۲۵)$$

برهان. قرار دهید

$$\begin{aligned}p_0 &= b(\hat{x})\nabla_x\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}c\right)\\ &-\alpha\nabla b(\hat{x})\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}(\hat{x})c\right)\end{aligned} \quad (۲۶)$$

از آن‌جا که $p_0+\sum_{i=1}^{I}s_i p_i\geq 0$ ، آنگاه $p_0\geq-\sum_{i=1}^{I}s_i p_i$ برای هر $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{q}$. بنابراین برای هر $\boldsymbol{q}$ به شرطی که در رابطه زیر صدق کند

$$\bar{\boldsymbol{q}}\in\bigcap_{i=1}^{I}\left\{\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^l \mid p_i(\boldsymbol{q})<0\right\} \quad (۲۷)$$

داریم $\sum_{i=1}^{I}s_i p_i\geq 0$ ، بنابراین $p_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q})>0$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&b(\hat{x})\nabla_x\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}c\right)\\ &-\alpha\nabla b(\hat{x})\cdot\left(\hat{f}(\hat{x},\boldsymbol{q})a+\hat{g}(\hat{x})c\right)>0\end{aligned} \quad (۲۸)$$

برای هر $\boldsymbol{q}\in Q$. ■

[1] Uncertain system
[2] Uncertainty bounding set

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

۵- مثال‌ها

در این قسمت به ارائه مثال‌هایی از مدل‌سازی عدم قطعیت در قالب چندجمله‌ای و طراحی کنترلگر PI از روش ارائه شده می‌پردازیم. به طور خاص، مثال ۱ به نحوه بیان عدم قطعیت جعبه‌ای[1] یا مجموعه محدوده نامعینی تعریف شده به کمک نرم ∞ می‌پردازد. مثال ۲ به مدل‌سازی عدم قطعیت بیضوی[2] پرداخته، مثال ۳ کاربرد روش طراحی را در یک سیستم نامی نشان داده است. مثال ۴، کاربرد روش طراحی مقاوم ارائه شده را در اعمال به یک سیستم واقعی، یعنی *سیستم لورنز نامعین*[3]، نشان می‌دهد.

۵-۱ مثال ۱ (عدم قطعیت جعبه‌ای).

یکی از شکل‌های مجموعه محدوده نامعینی که در انواع عدم قطعیت‌های پارامتری در سیستم‌های کنترل دیده می‌شود، موسوم به عدم قطعیت جعبه‌ای بوده و بیان شده به صورت نرم ∞ می‌باشد [۸]:

$$\begin{aligned} &Q=\left\{\boldsymbol{q}W\cdot\left(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^*\right)_\infty\le 1\right\},\\ &\boldsymbol{q}^*=\left(q_1^*,\ldots,q_k^*\right),\\ &W=\operatorname{diag}\left(w_1,\ldots,w_k\right)\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در این مثال می‌خواهیم نشان دهیم اگر سیستم مورد نظر دارای عدم قطعیت جعبه‌ای باشد، برای استفاده از روش ارائه شده در این مقاله چگونه می‌توان آن را تغییر داد.

مجموعه ذکر شده به صورت زیر به قالب چندجمله‌ای تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}&\max\left|w_i\left(q_i-q_i^*\right)\right|\le 1\\ &\Rightarrow -1\le w_i\left(q_i-q_i^*\right)\le 1\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

بنابراین

$$q_i-q_i^*-1/w_i\le 0,\quad q_i-q_i^*+1/w_i\ge 0 \qquad (۳۱)$$

پس مدل چندجمله‌ای مجموعه محدوده نامعینی به صورت زیر می‌شود

$$Q=\left\{\boldsymbol{q}\left(q_i-q_i^*\right)^2-\frac{1}{w_i^2}\le 0,\ i=1,\ldots,k\right\} \qquad (۳۲)$$

۵-۲ مثال ۲ (عدم قطعیت بیضوی).

به دلیل وجود نویزهای اندازه گیری، روش‌های متداول شناسایی سیستم (شناسایی بر پایه پیش‌بینی خطا) یک مدل نامی از سیستم به همراه یک مجموعه نامعینی پارامتری بیضوی شکل را نتیجه می‌دهند. در این مثال می‌خواهیم نشان دهیم که عدم قطعیت بیضوی ناشی از شناسایی یک سیستم واقعی خود به خود به شکل چندجمله‌ای بیان شده است و لذا روش ارائه شده در این مقاله برای آن قابل استفاده است.

کنترل و مدل‌سازی دو مخزن آب متوالی با یک مسیر بازیافت در [۲۶] ارائه شده است. بردار پارامتر نامی نتیجه شده از شناسایی برابر است با

$$\boldsymbol{q}^*=\begin{bmatrix}0.0038 & 0.0028 & 0.2087 & -1.1871\end{bmatrix}^T \qquad (۳۳)$$

مجموعه محدوده نامعینی بیضوی به طور مستقیم از روش شناسایی کوچکترین مربعات[4] به دست می‌آید [۲۷]. بنابراین، با توجه به (۲۱)، مجموعه Q با ضرب مستقیم، معادل زیر می‌باشد

$$\begin{aligned}Q=\{\boldsymbol{q}\mid\ & 241790q_1^2+11360q_1q_2+1380q_1q_3\\ &-2157.4q_1+241210q_2^2+900q_2q_3\\ &+1240q_2q_4 09.77q_2+150q_3^2+280q_3q_4\\ &+262.0140q_3+150q_4^2+294.2220q_4\\ &+151.5471-1\le 0\}\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که در قالب چندجمله‌ای مطلوب ما می‌باشد.

۵-۳ مثال ۳ (طراحی نامی).

سیستم داده شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-x+3yz\\ y^3-z-x^2\\ -3z^2y-y-z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ h&=z\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

ماتریس ژاکوبی سیستم حلقه باز و مقادیر ویژه آن چنین است:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

$$\operatorname{eig}(A)=\begin{cases}-1.6180\\ -1\\ +0.6180\end{cases} \qquad (۳۷)$$

بنابراین سیستم حلقه باز ناپایدار است و امکان استفاده از بسیاری از روش‌های طراحی کلاسیک مانند زیگلر-نیکولز ممکن نیست.

استفاده از روش طراحی نامی گفته شده و حل مسئله مجموع مربعات طبق قضیه ۱ در قسمت ۰ و به کمک جعبه ابزار SOSTOOLS [۲۳]، نتیجه زیر را می‌دهد

$$k_p=-30.9242,\quad k_i=-29.9239 \qquad (۳۸)$$

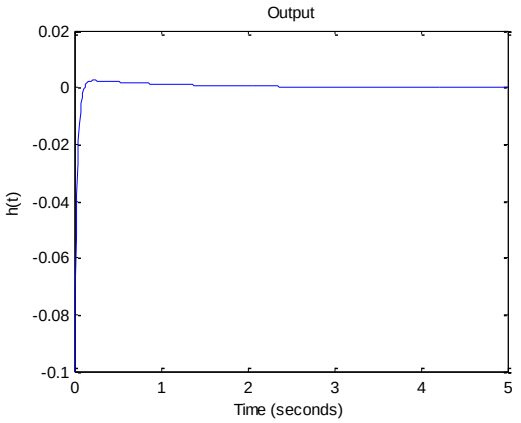
نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۱ الی ۳ آمده است.

شکل ۱، پاسخ حلقه بسته سیستم با شرایط اولیه $\begin{bmatrix}-0.1, 0.1\end{bmatrix}^T$ و اغتشاش وارد شده در لحظه بین 2π و 3π را نشان می‌دهد. جزئیات اثر

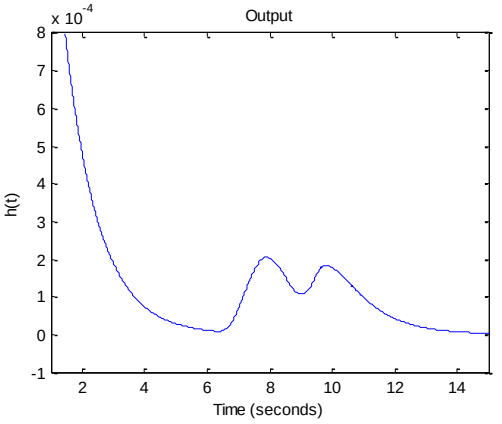
[1] Box
[2] Ellipsoidal
[3] Uncertain Lorenz system
[4] Least squares identification

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

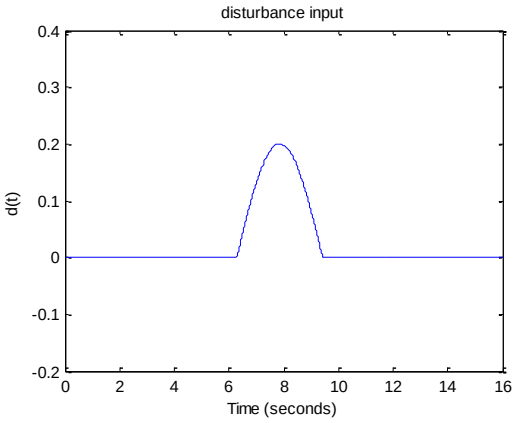
اغتشاش در شکل ۲ وارد شده است. شکل ۳، سیگنال ورودی اغتشاش را نشان می‌دهد که یک سیگنال سینوسی با دامنه 0.2 و فرکانس 1 واحد می‌باشد که از لحظه 2π تا 3π اعمال شده است. همانطور که از شکل‌ها مشخص است، سیستم در رد اغتشاش و همچنین پاسخ گذرا عملکرد بسیار مطلوبی از خود نشان داده است؛ به طوری که اغتشاش با بهره 10^{-3} ضعیف شده است.



شکل ۱: پاسخ سیستم حلقه بسته



شکل ۲ بزرگ‌نمایی اثر اغتشاش



شکل ۳: سیگنال اغتشاش

۴-۵ مثال ۴ (طراحی مقاوم برای سیستم واقعی).

در این مثال به طراحی کنترل کننده تناسبی-انتگرالی برای سیستم لورنز نامعین با هدف رد اغتشاش می‌پردازیم. معادلات سیستم به شرح زیر است

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma(y-x)\\ x(\rho-z)-y\\ xy-\beta z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad (۳۹)$$
$$h=x(t)$$

که در آن σ ، ρ ، و β پارامترهای نامعلوم و محدود به یک بازه شناخته شده هستند. فرض می‌شود که سیستم در حال سکون و در موقعیت نقطه تعادل ناپایدار مبدأ قرار داشته باشد. هدف، پایدار نگاه داشتن سیستم با وجود اعمال اغتشاش است.

شبیه‌سازی با در نظر گرفتن پارامترها در محدوده های زیر انجام می‌شود

$$\begin{aligned}&9<\sigma<11\\ &2.5<\beta<3\\ &25<\rho<31\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در این محدوده سیستم هم رفتار آشوب‌گونه و هم نوسانات تناوبی از خود نشان می‌دهد. نتیجه طراحی از قضیه ۳، مقادیر زیر را به عنوان پارامترهای کنترل‌کننده و به کمک جعبه ابزار SOSTOOLS [۲۳] ارائه می‌دهد

$$k_p=-1.5054\ ,\ k_i=-49.6842 \qquad (۴۱)$$

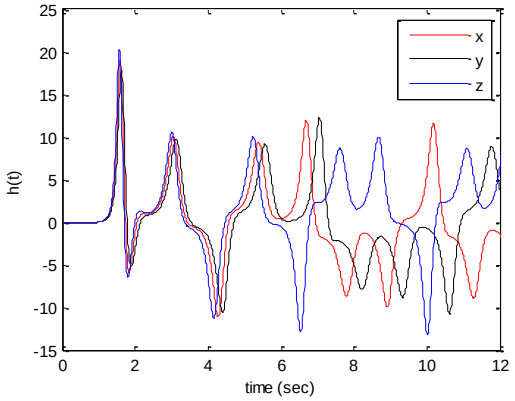
شکل ۴، شبیه‌سازی پاسخ حلقه باز سیستم به یک سیگنال اغتشاش پله‌ای با دامنه واحد که در دقایق ۱ تا ۲ به سیستم وارد شده است را نشان می‌دهد. ۳ دسته پارامتر برای شبیه‌سازی سیستم در نظر گرفته شده است که ۲ تای آن‌ها به طور تصادفی از بین مجموعه مجاز پارامترها انتخاب شده و دسته سوم، پارامترهایی است که سیستم به ازای آن رفتار آشوب‌گونه از خود نشان می‌دهد. چنانچه در شکل ۴ مشخص است، سیستم حلقه‌باز با اعمال اغتشاش از حال سکون خارج شده و رفتار نوسانی و یا آشوب‌ناک از خود نشان می‌دهد. در شکل ۵، رفتار سیستم حلقه بسته با همان پارامترها در حضور سیگنال اغتشاش نمایش داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، سیستم موفقیت خوبی در رد اغتشاش با بهره حدود 10^{-3} داشته است.

۵- نتیجه‌گیری

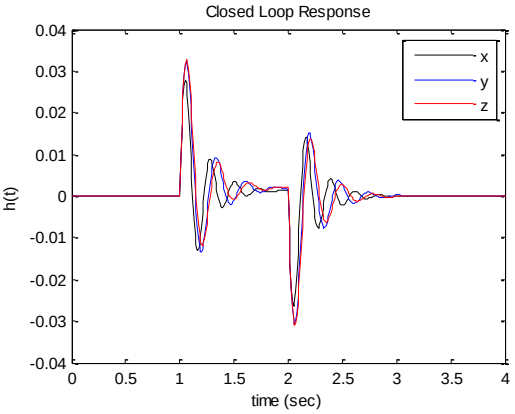
در این مقاله به ارائه یک روش الگوریتمی برای طراحی کنترلگر PI مقاوم برای سیستم‌های غیر خطی پرداخته شده است. طراحی به کمک روش مجموع مربعات انجام شده و پایداری از طریق دوگان قضیه لیاپانوف به اثبات رسیده است. تحلیل‌ها همگی با استفاده از مدل غیرخطی انجام شده و برخلاف روش‌های کلاسیک، هیچ‌گونه محافظه

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

کاری ناشی از خطی سازی در طراحی وجود ندارد. روش ارائه شده همچنین عدم قطعیت موجود در سیستم غیرخطی را به شکل عدم قطعیت پارامتری در نظر گرفته است و بنابراین آزادی عمل بیشتری به طراح می‌دهد. اثبات پایداری در حضور عدم قطعیت به کمک قضیه S-Procedure تعمیم‌یافته انجام شده است. مثال‌های عددی، کارایی کنترلگر ارائه شده در رد اغتشاش وارد شده به سیستم غیر خطی را با شبیه‌سازی عددی نشان داده اند.



شکل ۴- پاسخ حلقه باز سیستم به سیگنال اغتشاش



شکل ۵ پاسخ سیستم حلقه بسته به سیگنال اغتشاش

مراجع

[1] S. Bennett, "Nicholas Minorsky and the automatic steering of ships," *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 4, pp. 10-15, 1984.

[2] N. Minorsky, "Directional Stability of Automatically Steered Bodies," *Journal of the American Society for Naval Engineers* ,vol. 34, pp. 280-309, 1922.

[3] K. J. Åström and T. Hägglund, *Advanced PID control*: ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.

[4] Q. G. Wang, Z. Ye, and W. J. Cai, *PID Control for Multivariable Processes*: Springer, 2008.

[5] H. Panagopoulos and K. J. Åström, "PID control design and $\mathcal{H}\infty$ loop shaping," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 10, pp. 1249-1261, 2000.

[6] C.-M. A Fransson, B. A Lennartson, T. A Wik, and P.-O. A Gutman, "On optimizing PID controllers for uncertain plants using Horowitz bounds," in *IFAC Workshop on digital control: Past, present, and future of PID control, Terassa, Spain*, Terassa, Spain, 2000.

[7] B. Labibi, H. J. Marquez, and T. Chen, "LMI optimization approach to robust decentralized controller design," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 904-924, 2011.

[8] B. R. Barmish, *New tools for robustness of linear systems*: Macmilllan, 1994.

[9] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel, *Robust control :the parametric approach*: Prentice Hall PTR, 1995.

[10] I. Horowitz, "Quantitative feedback theory," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, vol. 129, pp. 215-226, 1982.

[11] P. A. Parrilo, "Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization," PhD, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000.

[12] D. Henrion and A. Garulli, *Positive Polynomials In Control*: Springer, 2005.

[13] Z. Jarvis-Wloszek, R. Feeley, T. Weehong, S. Kunpeng, and A. Packard, "Some controls applications of sum of squares programming," in *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, 2003, pp. 4676-4681.

[14] A. Papachristodoulou and S. Prajna, "A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis," in *American Control Conference*, 2005, pp. 2686-2700 vol. 4.

[15] A. Papachristodoulou and S. Prajna, "On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition," in *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, 2002, pp. 3482-3487 vol.3.

[16] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and W. Fen, "Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach," in *Control Conference, 2004. 5th Asian*, 2004, pp. 157-165 Vol.1.

[17] Y. Zhi, G. Zhao, and J. Yu, "Robust static output feedback for a class of nonlinear uncertain systems," in *Proceedings of the 2011 International Conference on Computational and Information Sciences, ICCIS 2011*, 2011, pp. 1163-1166.

[18] H. Zakeri and S. Ozgoli, "A Polynomial Modeling and State Feedback Control of Blood Glucose

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

Regulatory in Diabetic Patients," in *4th International Conference on Intelligent and Advanced Systems (ICIAS2012)*, Kuala Lumpur, Malaysia, 2012, pp. 647-651.

[19] M. Krug, S .Saat, and S. K. Nguang, "Nonlinear robust H ∞ static output feedback controller design for parameter dependent polynomial systems: An iterative sum of squares approach," in *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011 ,pp. 3502-3507.

[20] A. Rantzer, "A dual to Lyapunov's stability theorem," *Systems & Control Letters*, vol. 42, pp. 161-168, 2001.

[21] S. Prajna, P. A. Parrilo, and A. Rantzer, "Nonlinear control synthesis by convex optimization," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 310-314, 2004.

[22] W. Tan, "Nonlinear Control Analysis and Synthesis using Sum-of-Squares Programming," PhD dissertation, Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, USA, 2006.

[23] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and P. A. Parrilo, "Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver," in *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, 2002, pp. 741-746 vol.1.

[24] J. Löfberg, "YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, 2004, pp. 284-289.

[25] J. Löfberg, "Pre- and Post-Processing Sum-of-Squares Programs in Practice," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54 ,pp. 1007-1011, 2009.

[26] H. Didier, "LMIs for Robust Stabilization of Systems with Ellipsoidal Uncertainty," presented at the Process Control Conference, Slovakia, 2001.

[27] O. D. Crisalle, H. M. Mahon, and D. Bonvin, "Study of robust control designs using the critical-direction method for ellipsoidal uncertainties," in *Southcon/94. Conference Record*, 1994, pp. 173-180.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.3.9]
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-09]