

طراحی گشتاورهای غیر خطی زمان-محدود مقاوم برای ربات n -درجه آزادی در حضور نامعینی‌ها و غیر خطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده

علی ابویی^۱، حمیدرضا احمدزاده^۲، محمد حائری^۳ و محمد مهدی عارفی^۴

^۱استادیار، دانشکده مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Aliaboee@yazd.ac.ir

^۲دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Ahmadzadehhamid@yahoo.com

^۳استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

^۴دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، بخش مهندسی قدرت و کنترل، دانشگاه شیراز، Arefi@shirazu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۷

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۵/۱۴

دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳

چکیده: در این مقاله، ابتدا مدل دینامیکی جامعی برای ربات بازویی n -درجه آزادی دارای نامعینی ارائه می‌شود که شامل توصیف عملکرد غیرخطی‌سازهای ورودی از نوع شعاعی و ناحیه مرده است. سپس، مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم مسیرهای دلخواه به صورت روابط ریاضی فرمول‌بندی و بیان می‌شود. در ادامه با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید، چندین نوع گشتاورهای ورودی طراحی می‌شوند تا با وجود نامعینی‌ها و غیرخطی‌سازهای ورودی (شعاعی و ناحیه مرده)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات را در مدت زمان محدودی و بدون هیچ نوع خطاهای حالت ماندگاری به مسیرهای دلخواه برسانند. برای هر دسته از گشتاورهای پیشنهادی، پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n -درجه آزادی با استفاده از تعدادی لم‌های کاربردی و نامساوی‌های متداول به اثبات می‌رسد و هم‌چنین روابطی برای تخمین زمان‌های محدود همگرایی استخراج می‌شوند. این روابط، ارتباط زمان‌های محدود همگرایی را با شرایط اولیه ربات و پارامترهای اختیاری موجود در گشتاورهای ورودی نشان می‌دهند. در انتها، با استفاده از محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار MATLAB، گشتاورهای طراحی شده به مدل ربات صنعتی چهار-درجه آزادی SCARA با وجود غیرخطی‌سازهای ورودی اعمال می‌شوند که نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مناسب و قابل قبول ورودی‌های کنترلی پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: ربات بازویی n -درجه آزادی، غیرخطی‌سازهای شعاعی و ناحیه مرده، ردیابی زمان-محدود مقاوم، کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، ربات صنعتی SCARA.

Designing Robust Finite-Time Nonlinear Torques for a n -DOF Robot Manipulator with Uncertainties, Sector and Dead-Zone Nonlinearities

Ali Abooei, Hamidreza Ahmadzadeh, Mohammad Haeri, Mohammad Mehdi Arefi

Abstract: In this paper, a complete dynamical model is presented for an uncertain n -DOF robot manipulator containing description of sector and dead-zone nonlinearities. Next, robust finite-time tracking problem of desired trajectories is declared and formulated for the aforementioned robot manipulator. By defining innovative nonlinear sliding manifolds and developing the nonsingular terminal sliding mode control, several types of input torques are designed to exactly reach configuration variables of robot's joints to desired paths within the finite times in the presence of uncertainties, sector and dead-zone nonlinearities. By utilizing some applicable lemmas and well-known inequalities, for each class of the proposed input torques, the global finite-time stability of the closed-loop robot system is proven analytically. Also, several new formulas are extracted for determining the convergence finite times of the closed-loop system. These formulas demonstrate that mentioned times are dependent on robot's initial conditions and optional parameters of the suggested torques. Finally, by using MATLAB software, all classes of the designed torques are numerically simulated onto the SCARA industrial robot manipulator and obtained results show the acceptable performance of the suggested control scheme.

Keywords: n -DOF Robot manipulator, Sector and dead-zone nonlinearities; Robust finite-time tracking; Nonsingular terminal sliding mode control (NTSMC), SCARA industrial robot.

۱- مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر، ربات‌های ایستا (دارای تکیه‌گاه ثابت یا پایه‌ی غیرمتحرک متصل به زمین) که از چندین لینک^۱ با مفاصل چرخشی^۲ یا انتقالی^۳ تشکیل شده‌اند، در بسیاری از کاربردهای صنعتی جایگزین نیروی انسانی شده‌اند و نتیجتاً امروزه نقش مهم و غیرقابل انکاری در مکانیزه کردن و اتوماسیون صنایع مختلف دارند [۵-۱]. اغلب به آخرین مفصل این نوع ربات‌ها که با عنوان ربات‌های بازویی^۴ شناخته می‌شوند، یک وسیله یا چنگک مخصوص به نام مجری نهایی^۵ نصب می‌شود. با توجه به نوع مجری نهایی می‌توان از این ربات‌ها در کاربردهای گوناگونی هم چون رنگ‌آمیزی اشیاء، جابجایی قطعات و اجسام سنگین، جوشکاری، برش قطعات فلزی، تراشکاری و ... استفاده کرد. بنابراین با استناد به هدف در نظر گرفته شده برای این نوع ربات‌ها، مجری نهایی باید یک مسیر خاصی را در فضای سه‌بعدی اطراف خود طی کند. با در اختیار داشتن سینماتیک^۶ ربات و استفاده از روابط سینماتیکی معکوس، می‌توان مسیر مورد نظر مجری نهایی را به مسیرهای لازمه برای متغیرهای پیکربندی مفاصل^۷ (جابجایی‌های زاویه‌ای^۸ برای مفاصل چرخشی و جابجایی‌های خطی برای مفاصل انتقالی) تبدیل کرد. بنابراین برای آن که مجری نهایی در چنین ربات‌هایی بتواند وظیفه خاص خود را انجام دهد، موتورهای الکتریکی (هیدرولیکی و یا پنوماتیکی) موجود در مفصل‌ها باید گشتاورهای مناسبی را برای هدایت هر مفصل به مسیر مورد نظر فراهم سازند [۱۰-۶].

با توجه به انگیزش مطرح شده، مسئله طراحی گشتاورهای ربات با هدف رساندن متغیرهای پیکربندی مفصل‌ها به مسیرهای از پیش طراحی شده، تبدیل به موضوعی چالش برانگیز و جذاب در میان جامعه‌ی مهندسين کنترل شده است. بنابراین در راستای حل این مسئله، پژوهش‌ها و مطالعات گسترده‌ای [۴۷-۱] به چاپ رسیده‌اند که هر کدام راه کارهای کنترلی خاصی را به کار برده‌اند. شاخص‌ترین این روش‌های کنترلی عبارتند از: روش دینامیک معکوس [۱]، کنترل کننده‌های خطی PD و PID [۲۷-۲۴]، کنترل مد لغزشی^۹ [۱۵، ۷، ۸، ۳، ۲]، کنترل تطبیقی (وفقی) [۴۶، ۳۸، ۳۶، ۲۴، ۲۲، ۲۰، ۱۴]، روش کنترلی خطی سازی فیدبک^{۱۰} [۴۱]، کنترل پیش‌بین^{۱۱} [۲۸، ۲۱، ۱۳]، روش گام به عقب (پسگام)^{۱۲} [۳۱]، کنترل فازی [۳۳، ۴۲] و کنترل کننده‌های طراحی شده بر اساس شبکه‌های عصبی مصنوعی [۳۴، ۳۰]. شایان ذکر است برخی مراجع از تلفیق چندین روش کنترلی به منظور حل مسئله ردیابی برای بازوهای رباتی ایستا استفاده کرده‌اند. برخی از این روش‌های ترکیبی کنترلی عبارتند از: کنترل مد لغزشی-فازی غیرخطی [۳۵، ۳۲]، کنترل مد لغزشی-تطبیقی غیرخطی [۱۷، ۱۶، ۱۲، ۴]، کنترل مد لغزشی-بهینه، تلفیق کنترل تطبیقی با روش‌های فازی و شبکه‌های عصبی مصنوعی [۴۰، ۳۱، ۲۹، ۱۱]، روش کنترلی پسگام-تطبیقی [۳۹، ۳۷، ۱۸].

تمرکز بر روی مراجع فوق‌الذکر [۴۷-۱] نشان می‌دهد که اغلب این پژوهش‌ها، دارای چندین کاستی و نقص مشترک هستند که در ادامه چهار مورد از مهم‌ترین آن‌ها به صورت فهرست‌وار آورده می‌شوند و هر مورد در یک پارگراف جداگانه به صورت مبسوط مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

(الف) در نظر گرفتن مدل خطی‌سازی شده به جای مدل غیرخطی: برخی از مراجع [۲۴-۲۷] از مدل خطی‌سازی شده ربات حول نقطه کار استفاده کرده و کنترل کننده‌های خطی را برای رسیدن به هدف ردیابی مسیر پیشنهاد داده‌اند. با توجه به طراحی کنترل کننده بر اساس مدل خطی‌سازی شده، فقط پایداری مجانبی محلی^{۱۳} برای سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات تضمین می‌شود. با توجه به تغییر مداوم نقطه کار ربات‌ها، این روش‌های کنترلی کارایی چندانی نخواهند داشت.

(ب) عدم توجه به نامعینی‌های^{۱۴} مدل ربات: مدل اغلب ربات‌های صنعتی دارای نامعینی‌هایی است که می‌توانند ناشی از مواردی هم چون عدم قطعیت در محاسبه‌ی پارامترهای فیزیکی، وجود برخی ترم‌های دینامیکی لحاظ نشده، در نظر نگرفتن گشتاورهای اصطکاکی مفاصل و اغتشاش‌های خارجی باشند. برخی مراجع [۴۶، ۳۸، ۳۶، ۲۸، ۲۴، ۲۲، ۱۴] در حین فرآیند طراحی کنترل کننده‌ها، به نامعینی‌های مدل توجه نکرده‌اند که باعث بروز مشکلاتی در حین پیاده‌سازی عملی شده و در نتیجه عملکرد و بازده مورد نظر حاصل نمی‌شود یا حتی در مواردی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات رخ می‌دهد. بنابراین باید نامعینی‌های مدل را در هنگام فرآیند طراحی مورد توجه جدی قرار داد و از روش‌های کنترلی مقاوم استفاده کرد.

(پ) عدم توجه به محدودیت‌های غیرخطی عملگرهای^{۱۵} فیزیکی مفاصل ربات: هر ربات ایستا از تعدادی عملگر تشکیل شده است که ورودی‌های کنترلی از طریق آن‌ها به مفاصل اعمال می‌شوند. بنابراین محدودیت‌های غیرخطی عملگرها ممکن است باعث شوند که به جای گشتاورهای ورودی طراحی شده، توابعی غیرخطی از این گشتاورهای کنترلی به مفاصل ربات اعمال شوند. به عبارت دیگر این امکان وجود دارد که عملگرها نقش توابع غیرخطی ساز را در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به ربات بازی کنند [۴۱-۴۹، ۲۶، ۲۵، ۲۰، ۸، ۷]. رفتار غیرخطی‌گری عملگرها می‌تواند از نوع استاتیکی یا دینامیکی باشد و بر همین اساس، عملگرها به دو دسته‌ی کلی غیرخطی‌سازهای استاتیکی و دینامیکی تقسیم‌بندی می‌شوند. غیرخطی‌سازهای استاتیکی همان عملگرهایی هستند که توابعی غیرخطی چندحالتی از ورودی‌های کنترلی را به سیستم اعمال می‌کنند و هیچ مرتبه‌ی دینامیکی ندارند. غیرخطی‌سازهایی همچون اشباع^{۱۶} [۴۲، ۴۱، ۲۶، ۲۵، ۲۰، ۸]، ناحیه مرده^{۱۷} [۴۸، ۴۵، ۴۳، ۳۹، ۷] و شعاعی (قطاعی)^{۱۸} [۴۹، ۴۸، ۴۵] در این دسته جای می‌گیرند.

¹⁰ Feedback linearization¹¹ Model predictive control¹² Backstepping control¹³ Local asymptotic stability¹⁴ Uncertainties¹⁵ Actuators¹⁶ Saturation¹⁷ Dead-zone¹⁸ Sector nonlinearities¹ Link² Revolute joints³ Prismatic joints⁴ Robot manipulators⁵ End effector (Gripper)⁶ Kinematic⁷ Configuration variables⁸ Angular displacements⁹ Sliding mode control

مناسب، ۳) ارائه‌ی رابطه مشخص برای محاسبه و تخمین زمان محدود همگرایی سیستم حلقه‌بسته، ۴) قابلیت تلفیق ساده با روش‌های کنترلی دیگر به منظور برآورده ساختن خواسته‌های کنترلی بیشتر، ۵) تحقق فیزیکی ساده و پیاده‌سازی عملی ارزان [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۵۱، ۵۵-۵۳، ۵۹-۵۷].

با توجه به مباحث انگیزشی مطرح شده، در این مقاله مسئله ردیابی زمان-محدود مقاوم^۷ برای ربات n -درجه آزادی مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد. مدل ربات مورد مطالعه تحت تاثیر سه عامل (۱) نامعینی‌ها و اغتشاش، (۲) گشتاورهای اصطکاکی و (۳) غیرخطی‌سازهای ورودی^۸ از نوع شعاعی و ناحیه مرده می‌باشد. در این مقاله با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید، چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای ورودی کنترلی برای ربات n -درجه آزادی طراحی می‌شوند. هر دسته از این گشتاورهای پیشنهادی می‌توانند در مدت زمان محدود قابل تنظیم، متغیرهای پیکربندی ربات را به مسیرهای دلخواه از پیش طراحی شده برسانند. این مقاله در مقایسه با مقالات مرتبط دیگر، دارای چندین نوآوری شاخص و برجسته می‌باشد که در زیر به صورت فهرست‌وار به آنها اشاره می‌شود.

(۱) تضمین پایداری زمان-محدود مقاوم سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات در حضور نامعینی‌ها، گشتاورهای اصطکاکی و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده.

(۲) قابلیت تعمیم هر چهار دسته گشتاورهای پیشنهادی به کلاس وسیع و گسترده‌ای از ربات‌های بازویی ایستا.

(۳) استخراج روابط جدیدی برای تعیین و تخمین زمان‌های محدود همگرایی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات

(۴) قابلیت کاهش زمان‌های محدود همگرایی و بهبود کیفیت پاسخ‌های گذرای متغیرهای پیکربندی ربات به وسیله‌ی تنظیم مناسب پارامترهای آزاد موجود در گشتاورهای کنترلی پیشنهادی. در این مقاله روابط صریحی استخراج می‌شوند که نحوه‌ی وابستگی میان زمان‌های محدود همگرایی را با پارامترهای آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی بیان می‌کنند.

بخش‌های بعدی مقاله به شرح زیر ساماندهی و نوشته شده‌اند. در بخش دوم، مفاهیم ریاضی مرتبط با پایداری زمان-محدود مرور می‌شوند. بخش سوم به معرفی مدل ربات n -درجه آزادی و توصیف غیرخطی‌سازهای شعاعی و ناحیه مرده اختصاص می‌یابد. مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم در همین بخش فرمول‌بندی می‌شود. در بخش چهارم، طراحی چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای غیرخطی ورودی ربات انجام می‌پذیرد. نتایج شبیه‌سازی‌های مقاله بر روی ربات صنعتی SCARA در بخش پنجم آورده می‌شوند. بخش ششم به جمع‌بندی، نتیجه‌گیری کلی و بیان کارهای آینده اختصاص داده می‌شود.

علائم ریاضی. بردار $x \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر

غیرخطی‌سازهای دینامیکی عملگرهایی هستند که ارتباط میان ورودی و خروجی آن‌ها از طریق معادلات دیفرانسیلی غیرخطی چندوضعیتی توصیف می‌شود و این عملگرها مرتبه دینامیکی سیستم حلقه‌بسته‌ی تحت کنترل را افزایش می‌دهند. غیرخطی‌سازهایی همچون لقی^۱ [۴۶، ۴۴، ۴۷] و هیستریزس از این نوع هستند. برخی از مراجع در حین طراحی گشتاورهای کنترلی برای ربات‌ها به وجود غیرخطی‌سازها توجه نمی‌کنند که این موضوع باعث مشکلات عدیده‌ای از جمله کاهش سرعت پاسخ گذرای سیستم حلقه‌بسته، کاهش شدید دقت حرکت مجری نهایی ربات، عملکرد و کارایی نامطلوب سیستم حلقه‌بسته، رفتار دینامیکی غیرقابل انتظار از ربات تحت کنترل و حتی در مواردی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته رخ خواهد داد [۴۸، ۴۹]. بنابراین باید در حین طراحی کنترل‌کننده‌های ربات این موضوع لحاظ شده و اثبات پایداری‌های سیستم حلقه‌بسته با وجود رفتار غیرخطی‌گری عملگرها انجام شود.

(ت) عدم توجه به پایداری‌سازی زمان-محدود سرتاسری^۲ سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات: اغلب روش‌های کنترلی غیرخطی ارائه شده در بحث ردیابی مسیر ربات‌ها [۱، ۷-۴، ۱۴-۹، ۱۶، ۱۸، ۴۷-۲۰]، فقط پایداری مجانبی سیستم حلقه‌بسته را تضمین می‌کنند و بنابراین بعد از گذشت زمان نامحدود، خطاهای ردیابی به صفر همگرا می‌شوند. در بسیاری از کاربردهای عملی برای ربات‌ها لازم است که متغیرهای پیکربندی در مدت زمان محدودی دقیقاً به مسیرهای دلخواه برسند و بنابراین روش کنترلی مورد استفاده باید پایداری زمان-محدود سیستم حلقه‌بسته را تضمین کند [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹]. تاکنون سه روش و راه کار کلی برای پایداری‌سازی زمان-محدود سیستم‌های دینامیکی غیرخطی ارائه شده است [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۶۱] که عبارتند از: روش شبه-لیاپانوف مستقیم^۳ [۵۰، ۵۲]، روش هموزنی^۴ [۵۶، ۶۱] و روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین^۵ [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۵۱، ۵۳-۵۵، ۵۷-۵۹]. در راه کار اول که براساس قضیه‌ای مشابه با قضیه لیاپانوف پایه‌گذاری شده است، یافتن کاندیدای لیاپانوف مناسب که بتواند نامساوی موجود در قضیه را برآورده سازد، کاری سخت و زمان‌بر بوده و هم‌چنین الگوریتم سیستماتیکی در این روش برای طراحی وجود ندارد [۵۰، ۵۲]. روش پایداری‌سازی زمان-محدود هموزنی فقط قابلیت اعمال به سیستم‌های غیرخطی با درجه هموزنی منفی را دارد. با بهره‌گیری از این روش، فقط وجود زمان محدود برای همگرا شدن دقیق متغیرهای سیستم تحت مطالعه به نقطه تعادل تضمین شده و هیچ رابطه خاصی برای محاسبه و تخمین این زمان محدود ارائه نمی‌شود [۵۶، ۶۱]. رهیافت کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین بر اساس همان اصول کنترل مد لغزشی معمولی بنیان‌گذاری شده و روشی دو مرحله‌ای است که این مراحل در بخش چهارم مقاله توضیح داده خواهند شد. روش سوم برای پایداری‌سازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی، خمینه‌های لغزشی غیرخطی^۶ را جایگزین سطوح لغزشی خطی کرده است. این روش دارای ویژگی‌ها و برتری‌های شاخصی است که برخی از آنها عبارتند از: (۱) مقاوم بودن در برابر انواع نامعینی‌ها و اغتشاش خارجی، (۲) پاسخ گذرای سریع و

^۵ Nonsingular terminal sliding mode control

^۶ Nonlinear sliding manifolds

^۷ Robust finite-time tracking problem

^۸ Input nonlinearities

^۱ Backlash

^۲ Global finite-time stability

^۳ Direct Lyapunov-like

^۴ Homogenous control method

بگیرید. نمادهای $\|x\|$ و $\|A\|$ به ترتیب توصیف کننده‌ی نرم‌های اقلیدسی^۱ بردار x و ماتریس A هستند و با رابطه‌های $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ و $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ محاسبه می‌شوند که $\lambda_{\max}(A^T A)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ است. برای عدد حقیقی $\alpha \in \mathbb{R}$ دو نماد $|x|$ و $\text{sign}(x)$ به مفهوم تابع قدرمطلق و تابع علامت می‌باشند. شایان ذکر است که در سرتاسر این مقاله منظور دقیق از اصطلاحات پایداری زمان-محدود و ردیابی زمان-محدود همان پایداری زمان-محدود سرتاسری و ردیابی زمان-محدود سرتاسری است.

۲- تعریف و لم‌های کاربردی پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی

در این بخش، پس از تعریف پایداری زمان-محدود، چندین لم کاربردی مرتبط با پایداریسازی سیستم‌های غیرخطی ارائه می‌شوند. این لم‌ها در اثبات قضیه‌های اصلی مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱. سیستم غیرخطی مرتبه n رابطه (۱) را در نظر بگیرید که دارای نقطه تعادل $x = 0$ بوده و برای بردار شرط اولیه دلخواه x_0 دارای بردار پاسخ یکتای $x(t, x_0)$ است.

$$\dot{x} = f(x) \text{ with } f(0) = 0, x \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \text{ and } x(0) = x_0 \quad (1)$$

در این رابطه، $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع برداری پیوسته و $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ همسایگی باز از نقطه تعادل $x = 0$ می‌باشند. آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود محلی^۲ است اگر دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند.

(الف) نقطه تعادل $x = 0$ باید در ناحیه Γ پایدار مجانبی محلی باشد که $\hat{\Gamma} \subseteq \Gamma$ یک همسایگی باز حول نقطه تعادل است.

(ب) برای هر بردار شرط اولیه x_0 ، زمان محدود همگرایی $T(x_0): \hat{\Gamma} \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه (۲) برآورده شود.

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0 \text{ and } x(t, x_0) = 0 \text{ for } t \geq T(x_0) \quad (2)$$

در صورتی که $\Gamma = \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود سرتاسری^۳ است [50].

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را با $\Gamma = \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر تابع شعاعی بیکران^۴ پیوسته مشتق پذیر $V(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و دو عدد حقیقی $\rho_1 > 0$ و $0 < \rho_2 < 1$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_2}(x) \leq 0$ برآورده شود، آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود سرتاسری خواهد بود. علاوه بر این، نامساوی (۳) تخمینی از کران بالای زمان محدود همگرایی $T(x_0)$ ارائه می‌دهد که برای زمان‌های $t \geq T(x_0)$ همه‌ی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی با شروع از هر شرایط اولیه‌ای دقیقاً به نقطه تعادل $x = 0$ می‌رسند [50].

$$T(x_0) \leq (\rho_1(1 - \rho_2))^{-1} V^{1-\rho_2}(x_0) \quad (3)$$

لم ۲. سیستم غیرخطی (۱) را با $\Gamma = \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود سرتاسری است اگر تابع شعاعی بیکران پیوسته مشتق پذیر $V(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و سه عدد حقیقی $0 < \rho_1 < 1$ و $\rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 0$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_2}(x) + \rho_3 V(x) \leq 0$ برآورده شود. هم‌چنین، زمان محدود

همگرایی $T(x_0)$ چنان وجود دارد که برای $t \geq T(x_0)$ همگی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی با شروع از هر شرایط اولیه دلخواه دقیقاً به نقطه تعادل $x = 0$ همگرا می‌شوند و نامساوی (۴) می‌تواند تخمینی از کران بالای $T(x_0)$ ارائه دهد [62].

$$T(x_0) \leq (\rho_3(1 - \rho_2))^{-1} (\ln(\rho_3 V^{1-\rho_2}(x_0) + \rho_1) - \ln \rho_1) \quad (4)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی (۱) را با $\Gamma = \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود سرتاسری است اگر تابع شعاعی بیکران پیوسته مشتق پذیر $V(x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و اعداد حقیقی $\rho_2 > 0$ ، $\rho_1 > 0$ ، $\rho_5 = 1 + 0.5(\rho_3)^{-1}$ ، $\rho_4 = 1 - 0.5(\rho_3)^{-1}$ ، $\rho_3 > 1$ داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_4}(x) + \rho_2 V^{\rho_5}(x) \leq 0$ برآورده شود. علاوه بر این، تمامی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی برای زمان‌های $t \geq T$ دقیقاً به نقطه تعادل $x = 0$ می‌رسند. شایان ذکر است که نامساوی $T \leq \pi \rho_3 (\sqrt{\rho_1 \rho_2})^{-1}$ ، کران بالای زمان محدود همگرایی T را ارائه می‌دهد و این کران بالا، برخلاف رابطه‌های (۳) و (۴) به شرایط اولیه سیستم غیرخطی یعنی بردار x_0 بستگی ندارد [63].

لم ۴. سیستم غیرخطی مرتبه دوم رابطه (۵) را با ورودی کنترلی $g(x_1, x_2) = -\rho_1 \text{sign}(x_1) - \rho_2 \text{sign}(x_2)$ در نظر بگیرید که دو عدد حقیقی ρ_1 و ρ_2 شرط $\rho_1 > \rho_2 > 0$ را برآورده می‌سازند. آنگاه هر دو متغیر حالت x_1 و x_2 (با شروع از هر شرط اولیه‌ای) برای زمان‌های $t \geq T(x_1(0), x_2(0))$ دقیقاً به صفر همگرا می‌شوند.

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ and } \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \quad (5)$$

در رابطه (۶)، علاوه بر تخمینی از کران بالای $T(x_1(0), x_2(0))$ ، تابع لیپانوفی نیز معرفی شده است که با استفاده از آن می‌توان پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی (۵) را اثبات کرد. شایان ذکر است که کران بالای زمان $T(x_1(0), x_2(0))$ به تابع لیپانوف معرفی شده در لحظه $t = 0$ وابسته است.

$$T(x_1(0), x_2(0)) \leq 2(\min(\rho_4))^{-1} \sqrt{V(x_1(0), x_2(0))} \quad (6)$$

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.25(\rho_4)^2(h)^2 & \text{if } x_1 x_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{\rho})^2 x_2^2 & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25|x_1| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases}$$

مقدار عدد حقیقی $\bar{\rho}$ چنان انتخاب می‌شود که نامساوی $(\sqrt{2(\rho_1 + \rho_2)})^{-1} < \bar{\rho} < (\sqrt{2(\rho_1 - \rho_2)})^{-1}$ برقرار باشد و اعداد حقیقی ρ_3 ، ρ_4 و ρ_5 از تساوی‌های بیان شده در (۷) محاسبه می‌شوند [64].

$$\rho_3 = \rho_1 + \rho_2 \text{sign}(x_1 x_2)$$

$$\rho_4 = \sqrt{0.5 \rho_3} |\sqrt{2 \rho_3} \bar{\rho} - 1|$$

$$\rho_5 = \sqrt{2(\rho_3)^{-1}} (\sqrt{2 \rho_3} \bar{\rho} - 1)^{-1} \text{sign}(x_1 x_2) \quad (7)$$

لم ۵. سیستم غیرخطی مرتبه دوم (۵) را با ورودی کنترلی رابطه (۸) در نظر بگیرید که ρ_1 عددی حقیقی با شرط $0 < \rho_1 < 1$ است. آنگاه هر دو متغیر حالت x_1 و x_2 (با شروع از هر شرط اولیه‌ای) برای زمان‌های $t \geq T(x_1(0), x_2(0))$ دقیقاً به صفر واقعی می‌رسند.

³ Globally finite time stable

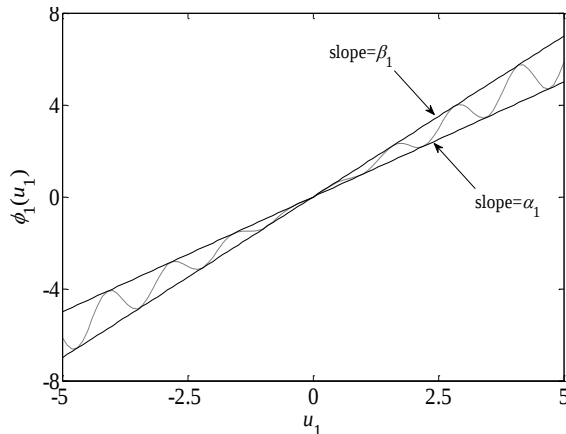
⁴ Radially unbounded

¹ Euclidean norm

² Locally finite time stable

(۱۴)

در رابطه (۱۴) که تابع غیرخطی ساز شعاعی $\phi_i(u_i)$ را توصیف می‌کند، ضرایب α_i, β_i اعداد حقیقی مثبت و معلوم می‌باشند. در واقع نامساوی (۱۴) بیانگر این موضوع است که تابع غیرخطی ساز $\phi_i(u_i)$ درون قطاع $[\alpha_i, \beta_i]$ قرار می‌گیرد. شکل ۱ تصویری مفهومی از نحوه عملکرد تابع غیرخطی ساز شعاعی $\phi_i(u_i)$ را برای $i = 1$ ارائه می‌دهد [48, 49].



شکل ۱. تصویری مفهومی از عملکرد تابع غیرخطی ساز $\phi_1(u_1)$ محصور شده درون قطاع $[\alpha_1, \beta_1]$ [48, 49].

رابطه (۱۵) نحوه عملکرد تابع غیرخطی ساز ناحیه مرده $\phi_i(u_i)$ را شرح می‌دهد که $\phi_{+i}(u_i)$ و $\phi_{-i}(u_i)$ توابعی غیرخطی مثبت نامعلوم از گشتاور ورودی u_i هستند. $0 < \beta_{+i} > 0$ و $0 < \beta_{-i} > 0$ ، $u_{-i} < 0$ ، $u_{+i} > 0$ حقیقی ثابت و معلوم هستند که دو عدد حقیقی β_{+i} و β_{-i} همواره دو نامساوی $0 < \beta_{+i} \leq \phi_{+i}(u_i)$ و $0 < \beta_{-i} \leq \phi_{-i}(u_i)$ را ارضا می‌کنند.

$$\phi_i(u_i) = \begin{cases} (u_i - u_{+i})\phi_{+i}(u_i) & \text{if } u_i > u_{+i} \\ 0 & \text{if } u_{-i} \leq u_i \leq u_{+i} \\ (u_i - u_{-i})\phi_{-i}(u_i) & \text{if } u_i < u_{-i} \end{cases} \quad (15)$$

شکل ۲ تصویری مفهومی از نحوه عملکرد تابع غیرخطی ساز ناحیه مرده $\phi_i(u_i)$ را برای $i = 1$ ارائه می‌دهد. برای ربات n -درجه آزادی رابطه (۱۱)، همواره فرض ۲ در سرتاسر مقاله برقرار است.

فرض ۲. برای ربات n -درجه آزادی، دو بردار $q \in \mathbb{R}^n$ و $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ همواره و در هر لحظه از زمان به طور فیزیکی با حسگرهای (سنسورهای) دقیق اندازه‌گیری شده و در اختیار می‌باشند. بنابراین در تولید گشتاورهای ورودی مفصل، می‌توان از این دو بردار استفاده کرد.

در ادامه، مسئله ردیابی زمان-محدود مقاوم برای ربات n -درجه آزادی، به فرم روابط ریاضی فرمول‌بندی می‌شود. بردار مسیرهای مورد نظر برای متغیرهای پیکربندی مفصل (چرخشی یا انتقالی) ربات به فرم $q_d(t) = [q_{d1} \ q_{d2} \ \dots \ q_{dn}]^T$ انتخاب می‌شود که انتخاب مناسب η_d می‌تواند باعث شود که مجری نهایی ربات عمل خاصی را در فضای سه بعدی اطراف خودش انجام دهد. در مسئله ردیابی ذکرشده، گشتاورهای ورودی $u \in \mathbb{R}^n$ باید چنان طراحی شوند که بتوانند بردار

$$\theta(x_1, x_2) = -|x_2|^{\rho_1} \text{sign}(x_2) - |\ell(x_1, x_2)|^{\rho_1(2-\rho_1)-1} \text{sign}(\ell(x_1, x_2)) \quad (8)$$

$$\ell(x_1, x_2) = x_1 + (2 - \rho_1)^{-1} |x_2|^{2-\rho_1} \text{sign}(x_2)$$

کران بالای $t \geq T(x_1(0), x_2(0))$ از نامساوی رابطه (۹) تخمین زده می‌شود که ρ_2 و ρ_3 دو عدد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 1$ می‌باشند [50].

$$T_{conv} \leq (\varpi(1 - \rho_1))^{-1} (3 - \rho_1) (V(x_1(0), x_2(0)))^{\frac{1-\rho_1}{3-\rho_1}} \quad (9)$$

که تابع $V(x_1, x_2)$ توسط رابطه (۱۰) معرفی می‌شود.

$$V(x_1, x_2) = \frac{2-\rho_1}{3-\rho_1} |\ell(x_1, x_2)|^{\frac{3-\rho_1}{2-\rho_1}} + \rho_2 x_2 \ell(x_1, x_2) + \frac{\rho_3}{3-\rho_1} |x_2|^{3-\rho_1} \quad (10)$$

$$\varpi = - \max_{(x_1, x_2) \in \Xi} \dot{V}(x_1, x_2) \quad \text{with } \Xi = \{(x_1, x_2) : V(x_1, x_2) = 1\}$$

۳- توصیف مدل ربات بازویی n -درجه آزادی با غیرخطی‌سازهای ورودی و بیان مسئله ردیابی

مدل جامع دینامیکی یک ربات بازویی n -درجه آزادی به فرم رابطه (۱۱) قابل توصیف است که $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ بیانگر متغیرهای پیکربندی ربات بوده و بردارهای $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ و $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ به ترتیب مشتق مرتبه‌های اول و دوم $q \in \mathbb{R}^n$ هستند. $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، ماتریس اینرسی^۱ ربات می‌باشد که همواره متقارن و مثبت معین^۲ است.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) = \phi(u) + \tau_{dis} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، ماتریس نیروهای کوریولیس و گریز از مرکز^۳ و بردار نیروهای گرانشی و جاذبه^۴ با نمادهای ماتریسی $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $G(q) \in \mathbb{R}^n$ معرفی شده‌اند. بردار $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ بیانگر نیروهای اصطکاک موجود در مفاصل ربات است که توسط رابطه (۱۲) قابل توصیف می‌باشند. در رابطه (۱۲)، $f_{ci}, f_{si}, \varepsilon_i, \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ پارامترهای ثابت و معلوم هستند [9].

$$F(\dot{q}) = [f_1(\dot{q}_1) \ f_2(\dot{q}_2) \ \dots \ f_n(\dot{q}_n)]^T$$

$$f_i(\dot{q}_i) = \left(f_{ci} + (f_{si} - f_{ci}) e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\varepsilon_i}\right)^2} \right) \text{sign}(\dot{q}_i) + \sigma_i \dot{q}_i \quad (12)$$

with $i = 1, 2, \dots, n$.

نماد برداری $\tau_{dis} \in \mathbb{R}^n$ (بیان شده در (۱۱)) بیانگر نامعینی‌های موجود در مدل ربات می‌باشد که می‌توانند ناشی از عدم قطعیت‌های پارامتری، دینامیک‌های مدل نشده و گشتاورهای اغتشاش خارجی وارده بر مفاصل ربات باشند. در سرتاسر مقاله، فرض ۱ همواره برای بردار نامعینی τ_{dis} برقرار می‌باشد.

فرض ۱. نرم اقلیدسی بردار نامعینی $\tau_{dis} \in \mathbb{R}^n$ همواره در رابطه (۱۳) صدق می‌کند که ضرایب حقیقی مثبت $\lambda_h, \varpi_h, h = 0, 1, 2, \dots, n$ همواره معلوم و در اختیارند.

$$\|\tau_{dis}\| \leq \sum_{h=0}^n (\lambda_h \|q\|^h + \varpi_h \|\dot{q}\|^h) = \chi(\|q\|, \|\dot{q}\|) \quad (13)$$

بردار گشتاورهای ورودی مفصل $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \in \mathbb{R}^n$ است که نقش ورودی‌های کنترلی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات را دارند. $\phi(u) = [\phi_1(u_1) \ \phi_2(u_2) \ \dots \ \phi_n(u_n)]^T \in \mathbb{R}^n$ بردار توابع غیرخطی‌سازهای ورودی هستند که رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) به ترتیب نحوه عملکرد غیرخطی‌سازهای شعاعی و ناحیه مرده را توصیف می‌کنند. $\alpha_i u_i^2 \leq \phi_i(u_i) u_i \leq \beta_i u_i^2$ and $\phi_i(0) = 0$ with $i = 1, 2, \dots, n$.

³ Coriolis and centripetal forces

⁴ Gravitational forces

¹ Inertia matrix

² Symmetric and positive definite matrix

۴- طراحی چهار دسته گشتاورهای غیرخطی مفاصل ربات بازوئی n -درجه آزادی

با توجه به ویژگی های منحصر به فرد روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، از تعمیم این روش و تعریف خمینه های لغزشی غیرخطی جدید برای حل مسئله ردیابی زمان-محدود مقاوم ربات استفاده می شود. طراحی گشتاورهای ورودی مفاصل ربات با این روش غیرخطی از دو مرحله تشکیل شده است که عبارتند از: (الف) تعریف خمینه های لغزشی غیرخطی مناسب با هدف پایداری سازی زمان-محدود دینامیک مد لغزشی.

(ب) طراحی گشتاورهای غیرخطی ورودی به منظور رساندن متغیرهای حالت ربات n -درجه آزادی به دینامیک مد لغزشی در مدت زمان محدود [51, 53-55, 57-59].

در مرحله (الف) با استفاده از بردارهای خطاهای ردیابی، خمینه های لغزشی غیرخطی چنان تعریف می شوند که دینامیک مد لغزشی مرتبط با سیستم حلقه بسته ی ربات، دارای پایداری زمان-محدود با زمان محدود همگرایی T_s باشد. در مرحله (ب) گشتاورهای ورودی غیرخطی چنان طراحی می شوند تا بتوانند همه خطاهای ردیابی ربات را در زمان محدود T_r بر روی خمینه های لغزشی غیرخطی قرار دهند یا به عبارت دیگر گشتاورهای ورودی باید قادر باشند در زمان محدود T_r ، وجود دینامیک مد لغزشی را برای سیستم حلقه بسته ی ربات تضمین کنند. بنابراین بعد از زمان محدود کلی $T_t = T_s + T_r$ ، هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم ربات n -درجه آزادی که به صورت رابطه (۱۸) فرمول بندی شده است، برآورده می شود.

۴-۱ طراحی گشتاورهای ورودی با فرض غیرخطی ساز شعاعی

زیربخش های ۴-۱-۱ و ۴-۱-۲ به ترتیب به طراحی دسته های اول و دوم از گشتاورهای ورودی ربات با فرض وجود غیرخطی سازه های شعاعی اختصاص یافته اند.

۴-۱-۱ طراحی دسته اول از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته اول از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه های لغزشی غیرخطی $s(t) = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]^T \in \mathbb{R}^n$ به صورت رابطه (۱۹) تعریف می شود که $l_{ji}, j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n$ اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $l_{1i} > l_{2i} > 0$ هستند.

$$s(t) = M\theta, \quad \theta = e_{even} + \int_0^t l_1 \text{sign}(e_{odd}(\varsigma)) d\varsigma + \int_0^t l_2 \text{sign}(e_{even}(\varsigma)) d\varsigma$$

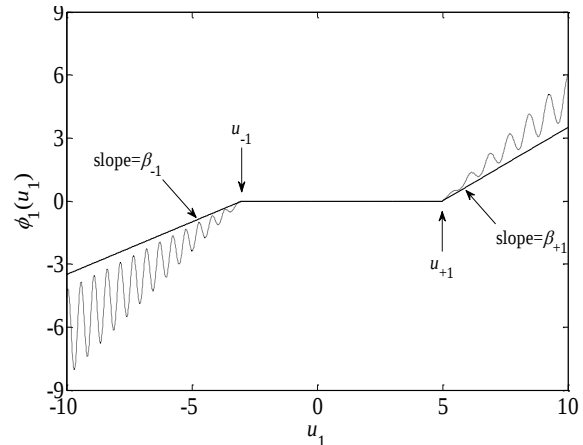
$$l_1 \text{sign}(e_{odd}) = [l_{11} \text{sign}(e_1) \ l_{12} \text{sign}(e_3) \ \dots \ l_{1n} \text{sign}(e_{2n-1})]^T$$

$$l_2 \text{sign}(e_{even}) = [l_{21} \text{sign}(e_2) \ l_{22} \text{sign}(e_4) \ \dots \ l_{2n} \text{sign}(e_{2n})]^T \quad (19)$$

گشتاورهای ورودی (۲۰) برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان-محدود پیشنهاد می شوند که در این رابطه، $\chi(\|q\|, \|\dot{q}\|)$ همان کران بالای بردار نامعینی هاست (قبلاً در فرض ۱ معرفی شده است). علاوه بر این، $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ همان اعداد حقیقی مثبت موجود در غیرخطی ساز شعاعی رابطه (۱۴) هستند. در رابطه (۲۰)، $\zeta_i, \eta_i, \eta_2 \geq 0$ و $\eta_1 \geq 0$ اختیاری با شرایط $\zeta_i > 1, \xi_i > (\alpha_i)^{-1}$ هستند که توسط طراح و کاربر تعیین می شوند. این اعداد حقیقی اختیاری هم بر روی انرژی کنترلی و هم بر روی زمان محدود مورد نیاز برای تضمین

متغیرهای پیکربندی مفاصل را در مدت زمان محدود T_t به طور کاملاً دقیق به بردار مسیرهای مورد نظر $q_d(t)$ برسانند. فرض ۳ همواره برای بردار مسیرهای دلخواه $q_d(t)$ برقرار است.

فرض ۳. بردار مسیرهای دلخواه $q_d(t) \in \mathbb{R}^n$ همواره مشخص بوده و تمام درایه های آن توابعی هستند که حداقل تا دو بار پیوسته و مشتق پذیر می باشند. به عبارت دیگر، همواره فرض بر این است که $\dot{q}_d(t) = [\dot{q}_{d1} \ \dot{q}_{d2} \ \dots \ \dot{q}_{dn}]^T$ و $\ddot{q}_d(t) = [\ddot{q}_{d1} \ \ddot{q}_{d2} \ \dots \ \ddot{q}_{dn}]^T$ وجود دارند و می توانند در طراحی گشتاورهای ورودی ربات مورد استفاده قرار گیرند.



شکل ۲. تصویری از عملکرد تابع غیرخطی ساز ناحیه مرده $\phi_1(u_1)$ [48, 49]
برای فرمول بندی مسئله ردیابی، دو بردار خطای $e_{odd} \in \mathbb{R}^n$ و $e_{even} \in \mathbb{R}^n$ به صورت رابطه (۱۶) تعریف می شوند.

$$e_{odd} = [e_1 \ e_3 \ \dots \ e_{2n-1}]^T$$

$$= [q_1 - q_{d1} \ q_2 - q_{d2} \ \dots \ q_n - q_{dn}]^T$$

$$e_{even} = [e_2 \ e_4 \ \dots \ e_{2n}]^T$$

$$= [\dot{q}_1 - \dot{q}_{d1} \ \dot{q}_2 - \dot{q}_{d2} \ \dots \ \dot{q}_n - \dot{q}_{dn}]^T \quad (16)$$

با در نظر گرفتن دو بردار خطای تعریف شده و استفاده از مدل دینامیکی ربات n -درجه آزادی (۱۱)، سیستم دینامیکی مرتبط با خطاهای ردیابی مفاصل ربات به فرم رابطه (۱۷) حاصل می شود. بدیهی است که سیستم (۱۷) متشکل از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم است که همگی دارای اندرکنش متقابل هستند.

$$\dot{e}_{odd} = e_{even}$$

$$\dot{e}_{even} = -M^{-1}(C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}))$$

$$+ M^{-1}\phi(u) + M^{-1}\tau_{dis} - \ddot{q}_d \quad (17)$$

با توجه به سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷)، مسئله ی ردیابی زمان-محدود مقاوم ربات به فرم (۱۸) بازنویسی می گردد. رابطه (۱۸) بیانگر این موضوع است که برای فراهم ساختن هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم ذکر شده، گشتاورهای ورودی مفاصل ربات n -درجه آزادی باید به گونه ای طراحی گردند که بعد از زمان محدود T_t ، دو بردار خطای ردیابی e_{odd} و e_{even} به صفر همگرا شوند و برای زمان های $t \geq T_t$ این دو بردار همواره صفر واقعی باشند. بنابراین، برآورده شدن هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم ربات n -درجه آزادی معادل با برآورده شدن شرایط رابطه (۱۸) می باشد.

$$\lim_{t \rightarrow T_t} e_{odd} = 0, \text{ and } e_{odd} = 0 \text{ for } \forall t \geq T_t$$

$$\lim_{t \rightarrow T_t} e_{even} = 0, \text{ and } e_{even} = 0 \text{ for } \forall t \geq T_t \quad (18)$$

تبدیل کنند. در مرحله دوم، نشان داده می‌شود که دینامیک مد لغزشی دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و خطاهای ردیابی بعد از زمان T_s به صفر واقعی می‌رسند. با جمع‌بندی این دو مرحله، اثبات می‌گردد که گشتاورهای ورودی (۱۹) و (۲۰)، شرایط رابطه (۱۸) را در مدت $T_t = T_r + T_s$ برآورده خواهند ساخت. برای اثبات ادعای مرحله اول، کاندیدای لیاپانوف به صورت $V(t) = 0.5\|s\|^2 = 0.5s^T s$ می‌شود که مشتق آن $\dot{V}(t) = s^T(t)\dot{s}(t)$ به فرم رابطه (۲۴) قابل بیان است.

$$\dot{V} = s^T (\dot{M}\theta + M(\dot{e}_{even} + l_1 \text{sign}(e_{odd}) + l_2 \text{sign}(e_{even}))) \quad (24)$$

جایگذاری $\dot{e}_{even}$ (از رابطه (۱۷)) در رابطه (۲۴)، به نامساوی رابطه (۲۵) خواهیم رسید.

$$\dot{V} = s^T (\dot{M}\theta - C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q}) - G(q) + \phi(u)) + s^T (\tau_{dis} - M\ddot{q}_d + M l_1 \text{sign}(e_{odd}) + M l_2 \text{sign}(e_{even})) \quad (25)$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز^۱ و در نظر گرفتن فرض ۱ (یعنی $\|\tau_{dis}\| \leq \chi(\|q\|, \|\dot{q}\|)$)، تساوی رابطه (۲۵) به نامساوی رابطه (۲۶) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} \leq \{s^T \phi(u) + \|s\|(\|\dot{M}\|\|\theta\| + \|C\|\|\dot{q}\| + \|F\| + \|G\| + \chi) + \|s\|\|M\|(\|\ddot{q}_d\| + \|l_1 \text{sign}(e_{odd})\| + \|l_2 \text{sign}(e_{even})\|)\} \quad (26)$$

با توجه به تعریف Π_2 (بیان شده در رابطه (۲۰))، نامساوی (۲۶) به فرم ساده شده $\dot{V} \leq s^T \phi(u) + \|s\|\Pi_2$ تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن $\Pi_1 + \Pi_2$ و نامساوی $s^T \phi(u) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i |s_i|$ (که اثبات آن در پیوست ۱ آمده است)، فرم ساده شده نامساوی (۲۶) به صورت نامساوی (۲۷) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{V} \leq \|s\|\Omega - \|s\| \Pi_1 - \Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i |s_i| \quad (27)$$

با تعریف $\mu = \min_i (\alpha_i \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ و در نظر گرفتن نامساوی $-\sum_{i=1}^n |s_i| \leq -\|s\|$ ، رابطه (۲۷) به نامساوی (۲۸) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} \leq \|s\|\Omega(1 - \mu) - \|s\| \Pi_1 \quad (28)$$

از آنجایی که اعداد حقیقی دلخواه ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ با شرط $\xi_i > 1/\alpha_i$ انتخاب می‌شوند، بدیهی است که $\mu = \min_i (\alpha_i \xi_i) > 1$ همواره بوده و در نتیجه ترم $\|s\|\Omega(1 - \mu)$ همواره نامثبت خواهد بود. با در نظر گرفتن این موضوع، نامساوی (۲۸) به نامساوی $\dot{V} \leq -\|s\| \Pi_1$ تبدیل می‌شود. در ادامه با جایگذاری $\Pi_1 = \eta_0 \|s\| + \eta_1 \|s\|^{h_1} + \eta_2 \|s\|^{h_2}$ (مطابق با رابطه (۲۰)) و در نظر گرفتن تعریف کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|s\|^2$ ، نامساوی $\dot{V} \leq -\|s\| \Pi_1$ به رابطه (۲۹) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} + 2\eta_0 V + \sqrt{2h_1+1}\eta_1 V^{0.5(h_1+1)} + \sqrt{2h_2+1}\eta_2 V^{0.5(h_2+1)} \leq 0 \quad (29)$$

با فرض $\eta_0 = \eta_2 = 0$ و انتخاب $\eta_1 = \sqrt{2h_1+1}$ ، $\varphi_1 = 0.5(h_1+1)$ و $\rho_2 = 0.5(h_1+1)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $s(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ تضمین می‌گردد.

با فرض $\eta_2 = 0$ و انتخاب $\eta_1 = \sqrt{2h_1+1}$ ، $\varphi_1 = 0.5(h_1+1)$ و $\rho_2 = 0.5(h_1+1)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $s(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ تضمین می‌گردد.

وجود دینامیک مد لغزشی تاثیر بسزایی دارند. بدیهی است برای ربات n -درجه آزادی، تعداد کل پارامترهای اختیاری مرتبط با گشتاورهای دسته اول $3n + 4$ است. قضیه ۱ نشان می‌دهد که گشتاورهای غیرخطی ورودی پیشنهاد شده با رابطه‌های (۱۹) و (۲۰)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n -درجه آزادی برآورده سازند.

$$\begin{aligned} u_i &= -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i), \text{ with } i = 1, 2, \dots, n. \\ \Omega &= \Pi_1 + \Pi_2 \text{ and } \xi_i > (\alpha_i)^{-1} \\ \Pi_1 &= \eta_0 \|s\| + \eta_1 \|s\|^{h_1} + \eta_2 \|s\|^{h_2} \\ h_1 &= 1 - \zeta^{-1} \text{ and } h_2 = 1 + \zeta^{-1} \\ \Pi_2 &= \chi + \|\dot{M}\|\|\theta\| + \|C\|\|\dot{q}\| + \|G\| + \|F\| + \\ &\quad + \|M\|(\|\ddot{q}_d\| + \|l_1 \text{sign}(e_{odd})\| + \|l_2 \text{sign}(e_{even})\|) \end{aligned} \quad (20)$$

قضیه ۱. ربات بازویی n -درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۱۴) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ در نظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهاد شده با رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به طور کاملاً دقیق به بردار $q_d(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $q(t) = q_d(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۲۲) تعیین شوند.

$$\begin{aligned} (i): & \text{ if } \eta_0 = \eta_2 = 0 \text{ then } T_r \leq \left(\eta_1 (1 - h_1) \right)^{-1} (\|s(0)\|)^{1-h_1} \\ (ii): & \text{ if } \eta_2 = 0 \text{ then } T_r \leq \left(\eta_0 (1 - h_1) \right)^{-1} \left(\ln \left(\frac{\eta_0 (\|s(0)\|)^{1-h_1} + \eta_1}{\eta_1} \right) \right) \\ (iii): & \text{ if } \eta_0 = 0 \text{ then } T_r \leq \pi \zeta \left(\sqrt{2^{1+0.5(h_1+h_2)} \eta_1 \eta_2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

و

$$\begin{aligned} T_s &= \max_i (T_{s_i}), \text{ with } i = 1, 2, \dots, n. \\ T_{s_i} &\leq 2(\min(l_{4_i}))^{-1} \sqrt{\Psi_i(e_{2i-1}(t=T_r), e_{2i}(t=T_r))} \\ \Psi_i &= \begin{cases} 0.25(l_{4_i})^2(h_i)^2 & \text{if } e_{2i-1}e_{2i} \neq 0 \\ 0.25(\bar{l}_i)^2 e_{2i}^2 & \text{if } e_{2i-1} = 0 \\ 0.25|e_{2i-1}| & \text{if } e_{2i} = 0 \end{cases} \\ h_i &= (l_{3_i})^{-1} e_{2i} \text{sign}(e_{2i-1}) + l_{5_i} \sqrt{|e_{2i-1}|} + 0.5(l_{3_i})^{-1} e_{2i}^2 \\ \text{در رابطه (۲۲)، } \bar{l}_i &\text{ از } \left(\sqrt{2(l_{1_i} + l_{2_i})} \right)^{-1} < \bar{l}_i < \left(\sqrt{2(l_{1_i} - l_{2_i})} \right)^{-1} \\ \text{انتخاب می‌شوند. هم‌چنین } l_{5_i} &\text{ و } l_{4_i}, l_{3_i} \text{ توسط رابطه (۲۳) تعیین می‌شوند.} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} l_{3_i} &= l_{1_i} + l_{2_i} \text{sign}(e_{2i-1}e_{2i}) \\ l_{4_i} &= \sqrt{0.5\bar{l}_{3_i}} \sqrt{2\bar{l}_{3_i}\bar{l}_i - 1} \\ l_{5_i} &= \sqrt{2(l_{3_i})^{-1} (\sqrt{2\bar{l}_{3_i}\bar{l}_i} - 1)^{-1} \text{sign}(e_{2i-1}e_{2i})} \end{aligned} \quad (23)$$

اثبات. این اثبات دو مرحله‌ای بوده و در مرحله اول اثبات می‌شود که گشتاورهای ورودی پیشنهادی می‌توانند وجود دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ را در زمان محدود T_r تضمین دهند. در این مرحله نشان داده می‌شود که گشتاورهای ورودی می‌توانند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) را برای زمان‌های $t \geq T_r$ به دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ تبدیل کنند.

¹ Cauchy-Schwartz inequality

می‌دهد که گشتاورهای ورودی توصیف شده با رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n -درجه آزادی فراهم سازند.

قضیه ۲. ربات بازویی n -درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۱۴) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ در نظر بگیرد. چنانچه گشتاورهای ورودی طراحی شده با رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) فراهم شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $q_d(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $q(t) = q_d(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۳۳) تعیین شوند.

$$\begin{aligned} T_s &= \max_i (T_{s_i}), \text{ with } i = 1, 2, \dots, n \\ T_{s_i} &\leq (\omega_i(1 - o_i))^{-1} (3 - o_i) (\Psi_i(e_{2i-1}(t = T_r), e_{2i}(t = T_r)))^{\frac{1-o_i}{3-o_i}} \\ \Psi_i(e_{2i-1}, e_{2i}) &= \frac{2-o_i}{3-o_i} |Y_i(e_{2i-1}, e_{2i})|^{\frac{3-o_i}{2-o_i}} + \\ &\quad + \theta_{1i} e_{2i} Y_i(e_{2i-1}, e_{2i}) + \frac{\theta_{2i}}{3-o_i} |e_{2i}|^{3-o_i} \\ \omega_i &= - \max_{(e_{2i-1}, e_{2i}) \in \Xi_i} \Psi_i(e_{2i-1}, e_{2i}) \\ \text{with } \Xi_i &= \{(e_{2i-1}, e_{2i}) : \Psi_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1\} \end{aligned} \quad (33)$$

در رابطه (۳۳)، $\theta_{1i}, i = 1, 2, \dots, n$ و θ_{2i} اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \theta_{1i} < 1$ و $\theta_{2i} > 1$ هستند. ■

اثبات. این اثبات مشابه با اثبات قضیه ۱، دو مرحله‌ای است و مرحله اول آن کاملاً با اثبات قبلی یکسان است. بنابراین فقط اثبات مرحله دوم ارائه می‌شود. در مرحله دوم اثبات، برای زمان‌های $t \geq T_r$ دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ به صورت رابطه (۳۴) نتیجه می‌شود که از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم بدون اندرکنش تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{2i-1} &= e_{2i} \\ \dot{e}_{2i} &= -|e_{2i}|^{o_i} \text{sign}(e_{2i}) - |Y_i|^{o_i(2-o_i)-1} \text{sign}(Y_i) \\ Y_i(e_{2i-1}, e_{2i}) &= e_{2i-1} + (2 - o_i)^{-1} |e_{2i}|^{(2-o_i)} \text{sign}(e_{2i}) \\ \text{with } i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (34)$$

با قیاس میان هر کدام از n زیرسیستم غیرخطی رابطه (۳۴) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۵ (رابطه‌های (۵) و (۸))، پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی (۳۴) مشخص می‌گردد و خطاهای ردیابی ربات که بر روی دینامیک مد لغزشی قرار گرفته‌اند بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s (که توسط رابطه (۳۳) توصیف می‌شود) به صفر واقعی همگرا می‌شوند. در آخر، با توجه به دو مرحله‌ای ذکر شده نتیجه می‌شود که بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $q_d(t)$ می‌رسد و شروط (۱۸) برآورده می‌شوند. اثبات قضیه ۲ در همین جا پایان می‌پذیرد. ■

۴-۲ طراحی گشتاورهای ورودی با فرض غیرخطی‌ساز ناحیه مرده

زیربخش‌های ۴-۲-۱ و ۴-۲-۲ به ترتیب به طراحی دسته‌های سوم و چهارم از گشتاورهای ورودی ربات با فرض وجود غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده اختصاص یافته‌اند.

$2\eta_0$ و استاندارد به لم ۲، می‌توان نتیجه گرفت که $s(t)$ و $V(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (ii) از رابطه (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ تضمین می‌گردد.

با فرض $\eta_0 = 0$ و انتخاب $\rho_1 = \sqrt{2^{h_1+1}}\eta_1$ ، $\rho_2 = \sqrt{2^{h_2+1}}\eta_2$ ، $\rho_3 = \zeta$ ، $\rho_4 = 0.5(h_2 + 1)$ ، $\rho_5 = 0.5(h_1 + 1)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $s(t)$ و $V(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (iii) از رابطه (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ تضمین می‌گردد. در اینجا اثبات مرحله اول به پایان می‌رسد.

در مرحله دوم برای زمان‌های $t \geq T_r$ سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) به دینامیک مد لغزشی $s(t) = 0$ مطابق با رابطه (۳۰) تبدیل می‌شود که متشکل از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم منفک از هم است.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{2i-1} &= e_{2i} \\ \dot{e}_{2i} &= -l_{1i} \text{sign}(e_{2i-1}) - l_{2i} \text{sign}(e_{2i}) \\ \text{with } i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (30)$$

مقایسه‌ی هر کدام از n زیرسیستم غیرخطی رابطه (۳۰) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۴ (رابطه (۵))، پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی (۳۰) را نتیجه می‌دهد. فلذا خطاهای ردیابی ربات قرار گرفته بر روی دینامیک مد لغزشی، بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s به صفر واقعی همگرا می‌شوند که T_s می‌تواند توسط رابطه (۲۲) تخمین زده شود. در انتها با استاندارد به دو مرحله‌ای ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که بردار متغیرهای پیکربندی ربات $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار مسیرهای موردنظر $q_d(t)$ می‌رسد و هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۱۸) برآورده می‌گردد. اثبات قضیه ۱ در همین جا پایان می‌پذیرد. ■

۲-۱-۴ طراحی دسته دوم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته دوم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $\mathfrak{R}^n \in [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]^T = s(t)$ به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود که در این رابطه، $o_i, i = 1, 2, \dots, n$ اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < o_i < 1$ هستند.

$$\begin{aligned} s &= M\theta, \text{ with } i = 1, 2, \dots, n \\ \theta &= e_{\text{even}} + \int_0^t \text{sig}^o(e_{\text{even}}(\varsigma)) d\varsigma + \int_0^t \text{sig}^{o(2-o)-1}(Y(\varsigma)) d\varsigma \\ Y_i(e_{2i-1}, e_{2i}) &= e_{2i-1} + (2 - o_i)^{-1} |e_{2i}|^{(2-o_i)} \text{sign}(e_{2i}) \\ \text{sig}^o(e_{\text{even}}) &= \begin{bmatrix} |e_2|^{o_1} \text{sign}(e_2) \\ |e_4|^{o_2} \text{sign}(e_4) \\ \vdots \\ |e_{2n}|^{o_n} \text{sign}(e_{2n}) \end{bmatrix} \\ \text{sig}^{o(2-o)-1}(Y) &= \begin{bmatrix} |Y_1|^{o_1(2-o_1)-1} \text{sign}(Y_1) \\ |Y_2|^{o_2(2-o_2)-1} \text{sign}(Y_2) \\ \vdots \\ |Y_n|^{o_n(2-o_n)-1} \text{sign}(Y_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

گشتاورهای ورودی مقاوم برای تضمین زمان-محدود دینامیک مد لغزشی به صورت همان رابطه (۲۰) پیشنهاد می‌شوند با این تفاوت که Π_2 به صورت رابطه (۳۲) اصلاح می‌گردد.

$$\Pi_2 = \chi + \|\dot{M}\| \|\theta\| + \|\dot{C}\| \|\dot{q}\| + \|\dot{G}\| + \|\dot{F}\| + \|\dot{M}\| (\|\ddot{q}_d\| + \|\text{sig}^o(e_{\text{odd}})\|) + \|\text{sig}^{o(2-o)-1}(Y)\| \quad (32)$$

شایان ذکر است که برای ربات n -درجه آزادی، تعداد کلی پارامترهای آزاد مرتبط با گشتاورهای دسته دوم $2n + 4$ است. قضیه ۲ نشان

دوم قضیه ۱ یکسان است. بنابراین اثبات قضیه ۳ در همین جا پایان می‌پذیرد ■.

۲-۴ طراحی دسته چهارم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته چهارم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $s(t) \in \mathbb{R}^n$ به صورت همان رابطه (۳۱) تعریف می‌شود. گشتاورهای ورودی مقاوم برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان-محدود توسط رابطه (۳۵) پیشنهاد می‌شوند که Π_2 نیز به صورت رابطه (۳۲) اصلاح شده باشد. شایان ذکر است که برای ربات n -درجه آزادی، تعداد کلی پارامترهای آزاد مرتبط با گشتاورهای دسته چهارم $2n + 4$ است. قضیه ۴ نشان می‌دهد که گشتاورهای ورودی پیشنهادی شده با رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n -درجه آزادی فراهم سازند.

قضیه ۴. ربات بازویی n -درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۱۵) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ در نظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهاد شده با رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $q_d(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $q(t) = q_d(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۲۳) تعیین شوند.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه‌های قبلی، این اثبات نیز دو مرحله‌ای است. مرحله اول این اثبات اخیر، کاملاً با اثبات مرحله اول قضیه ۳ یکسان است. هم‌چنین، مرحله‌ی دوم این اثبات نیز کاملاً با اثبات مرحله دوم قضیه ۲ همانند است. بنابراین اثبات قضیه ۴ در همین جا پایان می‌پذیرد ■.

۵- نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری بر روی مدل ربات چهار درجه آزادی SCARA

برای انجام شبیه‌سازی‌ها، از یک مدل بازوی ربات صنعتی به نام SCARA [9] استفاده خواهد شد که دارای چهار درجه آزادی است. شکل ۳ تصویری از این ربات صنعتی را همراه با دستگاه‌های مختصات مفاصل نشان می‌دهد که دستگاه‌ها با توجه به قرارداد DH^۱ تعیین شده‌اند و برای نوشتن معادلات سینماتیکی و دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۳ نشان می‌دهد ربات SCARA از چهار مفصل تشکیل شده که دو مفصل اول از نوع چرخشی بوده و حرکت در صفحه افقی را به وجود می‌آورند. مفصل سوم این بازوی رباتی از نوع انتقالی بوده و حرکت خطی را در راستای محور عمود بر صفحه افقی ایجاد می‌کند. مفصل چهارم که لینک سوم را به مجری نهایی متصل می‌کند، از نوع چرخشی بوده و باعث چرخش مجری نهایی حول محور عمود بر صفحه افقی می‌گردد [9]. برای این ربات، بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل به فرم $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t)]^T$ زاویه‌ای مفصل‌های اول و دوم حول محورهای عمودی z_1, z_2, z_3

۲-۴ طراحی دسته سوم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته سوم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $s(t) \in \mathbb{R}^n$ به صورت کاملاً یکسان با رابطه (۱۹) تعریف می‌شود. گشتاورهای غیرخطی ورودی (۳۵) برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان-محدود پیشنهاد می‌شوند که در این رابطه، $\beta_{+i}, \beta_{-i}, u_{-i}, u_{+i}, i = 1, 2, \dots, n$ همان اعداد حقیقی مثبت موجود در غیرخطی‌ساز ناحیه مرده رابطه (۱۵) هستند.

$$u_i = \begin{cases} -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i) + u_{-i} & \text{if } s_i > 0 \\ 0 & \text{if } s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n. \\ -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i) + u_{+i} & \text{if } s_i < 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\Omega = \Pi_1 + \Pi_2, \text{ with } \xi_i > (\min(\beta_{+i}, \beta_{-i}))^{-1} = (\beta_i^*)^{-1}$$

$$h_1 = 1 - \zeta^{-1} \text{ and } h_2 = 1 + \zeta^{-1}$$

$$\Pi_1 = \eta_0 \|s\| + \eta_1 \|s\|^{h_1} + \eta_2 \|s\|^{h_2}$$

$$\Pi_2 = \chi + \|M\| \|\theta\| + \|C\| \|\dot{q}\| + \|G\| + \|F\| + \|M\| \|\ddot{q}_d\| + \|l_1 \text{sign}(e_{\text{odd}})\| + \|l_2 \text{sign}(e_{\text{even}})\|$$

در رابطه (۳۵)، $\xi_i, \zeta, \eta_0, \eta_1, \eta_2$ اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $\xi_i > (\min(\beta_{+i}, \beta_{-i}))^{-1}$ ، $\zeta > 1$ ، $\eta_0 \geq 0$ ، $\eta_1 \geq 0$ و $\eta_2 \geq 0$ هستند. واضح است که برای ربات n -درجه آزادی، تعداد کل پارامترهای اختیاری مرتبط با گشتاورهای دسته سوم $3n + 4$ است. قضیه ۳ نشان می‌دهد که گشتاورهای ورودی پیشنهادی با رابطه‌های (۱۹) و (۳۵)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n -درجه آزادی برآورده سازند.

قضیه ۳. ربات بازویی n -درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۱۵) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ در نظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهاد شده با رابطه‌های (۱۹) و (۳۵) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $q(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $q_d(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $q(t) = q_d(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۲۲) تعیین شوند.

اثبات. این اثبات مشابه با اثبات قضیه‌های ۱ و ۲، دو مرحله‌ای است. مرحله اول اثبات روندی مشابه با اثبات مرحله اول قضیه‌های ۱ و ۲ دارد. با طی کردن فرآیندی کاملاً یکسان با مرحله اول دو اثبات قبلی، نامساوی $\dot{V} \leq s^T \phi(u) + \|s\| \Pi_2$ حاصل می‌شود. با استناد به $\Omega = \Pi_1 + \Pi_2$ و نامساوی $s^T \phi(u) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|$ (که اثبات آن در پیوست ۲ آمده است)، نامساوی $\dot{V} \leq (\|s\| \Omega - \|s\| \Pi_1 - \Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|)$ نتیجه می‌گردد. با تعریف $\Delta = \min_i (\beta_i^* \xi_i), i = 1, 2, \dots, n$ و در نظر گرفتن $(-\sum_{i=1}^n |s_i| \leq -\|s\|)$ ، نامساوی اخیر برای $\dot{V}$ به فرم ساده شده‌ی $\dot{V} \leq (\|s\| \Omega (1 - \Delta) - \|s\| \Pi_1)$ تبدیل می‌شود. از آنجایی که اعداد حقیقی دلخواه ξ_i با شرط $\xi_i > 1/\beta_i^*$ انتخاب می‌شوند، $\Delta = \min_i (\beta_i^* \xi_i)$ همواره $\Delta > 1$ بوده و در نتیجه ترم $\|s\| \Omega (1 - \Delta)$ همواره نامثبت خواهد بود. با اعمال این موضوع، نامساوی $\dot{V} \leq -\|s\| \Pi_1$ برای $\dot{V}$ حاصل می‌شود. ادامه اثبات مرحله اول این قضیه با اثبات مرحله اول قضیه ۱ کاملاً یکسان است. اثبات مرحله دوم نیز دقیقاً با اثبات مرحله

¹ Denavit-Hartenberg

مقادیر عددی مرتبط با پارامترهای فیزیکی $m_i, i = I_i, i = 1, 2, 3, 4$ و $a_1, a_2, a_{c_1}, a_{c_2}$ در جدول ۱ آورده شده‌اند.

برای ربات صنعتی SCARA، بردار گشتاور اصطکاکی مفصل به فرم $f_i(q_i), i = 1, 2, 3, 4$ از رابطه (۱۲) تعیین می‌شوند. جدول ۲، شاترده ضرایب ثابت مرتبط با چهار گشتاور اصطکاکی ربات SCARA را نشان می‌دهد. در تمام شبیه‌سازی‌های مرتبط با این بخش از مقاله، شرایط اولیه برای ربات SCARA، بردار نامعینی‌ها و بردار مسیرهای دلخواه به فرم رابطه (۳۸) در نظر گرفته شده‌اند. با توجه این τ_{dis} و استاندارد به فرض ۱، $\chi(\|q\|, \|\dot{q}\|)$ به فرم $\chi(\|q\|, \|\dot{q}\|) = 0.6 + 0.2\|q\| + 0.15\|\dot{q}\|$ می‌گردد.

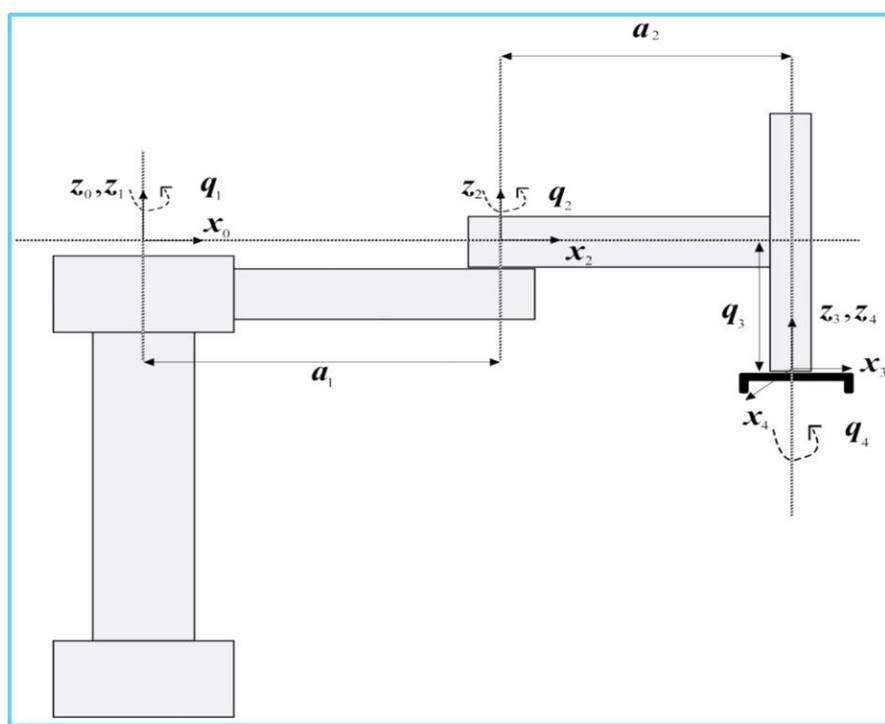
$$\begin{aligned} q(0) &= \left[\frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0.05 \quad \frac{\pi}{2} \right]^T \\ \dot{q}(0) &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \tau_{dis} &= 0.2q + 0.15\dot{q} + \\ &+ [0.1 \sin(6t) \quad 0.15 \sin(4\pi t) \quad 0.2 \sin(5t) \quad 0.15 \sin(5\pi t)]^T \\ q_d(t) &= \left[\frac{\pi}{6} \sin(t) \quad \frac{\pi}{8} \cos(2t) \quad 0.15 \quad \frac{\pi}{6} \right]^T \end{aligned} \quad (38)$$

جابجایی خطی مفصل سوم در راستای محور z_3 و q_4 جابجایی زاویه‌ای مجری نهایی حول محور z_4 می‌باشد. مدل دینامیکی این ربات دقیقاً از رابطه (۱۱) تبعیت می‌کند که ماتریس‌های $M(q)$ ، $C(q, \dot{q})$ و $G(q)$ با رابطه (۳۶) بیان شده‌اند.

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} p_1 + p_2 \cos(q_2) & p_3 + 0.5p_2 \cos(q_2) & 0 & -p_5 \\ p_3 + 0.5p_2 \cos(q_2) & p_3 & 0 & -p_5 \\ 0 & 0 & p_4 & 0 \\ -p_5 & -p_5 & 0 & p_5 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -0.5p_2 \dot{q}_2 \sin(q_2) & -0.5p_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0.5p_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8p_4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

شایان ذکر است که p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 در رابطه (۳۷) معرفی شده‌اند.

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 a_{c_1}^2 + m_2 (a_1^2 + a_{c_2}^2) + (m_3 + m_4) (a_1^2 + a_2^2) + \sum_{i=1}^4 I_i \\ p_2 &= 2a_1 a_{c_2} m_2 + 2a_1 a_2 (m_3 + m_4) \\ p_3 &= m_2 a_{c_2}^2 + a_2^2 (m_3 + m_4) + \sum_{i=2}^4 I_i \\ p_4 &= (m_3 + m_4), p_5 = I_4 \end{aligned} \quad (37)$$



شکل ۳. تصویری از بازوی ربات صنعتی چهار درجه آزادی SCARA همراه با دستگاه‌های مختصات تعیین شده برای مفصل ربات [9].

جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی ربات صنعتی SCARA [9].

مقدار عددی	معرفی فیزیکی	پارامتر فیزیکی	مقدار عددی	معرفی فیزیکی	پارامتر فیزیکی
$0.0287m_1 (kg.m^2)$	ممان اینرسی لینک اول	I_1	۱۵ (kg)	جرم لینک اول	m_1
$0.08m_2 (kg.m^2)$	ممان اینرسی لینک دوم	I_2	۱۲ (kg)	جرم لینک دوم	m_2
$0.05 (kg.m^2)$	ممان اینرسی لینک سوم	I_3	۳ (kg)	جرم لینک سوم	m_3
$0.02m_4 (kg.m^2)$	ممان اینرسی لینک چهارم	I_4	۳ (kg)	جرم لینک چهارم	m_4
$0.4 (m)$	طول لینک دوم	a_2	۰.۵ (m)	طول لینک اول	a_1
$0.2 (m)$	فاصله مرکز جرم لینک دوم از مفصل دوم	a_{c_2}	۰.۲۵ (m)	فاصله مرکز جرم لینک اول از مفصل اول	a_{c_1}

جدول ۲. مقادیر عددی مرتبط با ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی مفاصل ربات صنعتی SCARA [9].

مقدار عددی	ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی	مقدار عددی	ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی
$0.1(N)$	$\bar{f}_{c1}$	$0.49(N.m)$	$\bar{f}_{c1}$
$1.65(N)$	$\bar{f}_{s1}$	$3.5(N.m)$	$\bar{f}_{s1}$
$0.08(kg/s)$	σ_1	$0.15(kg.m/s)$	σ_1
$0.12(m/s)$	ε_1	$0.19(rad/s)$	ε_1
$0.1(N.m)$	$\bar{f}_{c2}$	$0.31(N.m)$	$\bar{f}_{c2}$
$0.7(N.m)$	$\bar{f}_{s2}$	$2.8(N.m)$	$\bar{f}_{s2}$
$0.03(kg.m/s)$	σ_2	$0.12(kg.m/s)$	σ_2
$0.03(rad/s)$	ε_2	$0.15(rad/s)$	ε_2

$$\begin{aligned} o_1 = o_2 = o_3 = o_4 = 0.1 \\ l_{21} = l_{22} = l_{23} = 8, l_{24} = 9.9 \\ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \xi_4 = 1.1, \\ \zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \quad (41)$$

شکل ۶، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۳۱)، (۲۰) و در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۳۹) نشان می‌دهد. این شکل به وضوح نشان می‌دهد بعد از زمان محدود 3.75(sec)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات به مسیرهای دلخواه رسیده‌اند. شکل ۷، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته دوم را ارائه می‌دهد.

۵-۳ نتایج شبیه‌سازی دسته سوم از گشتاورهای

ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۱۹) و (۳۵) به ربات SCARA اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز ناحیه مرده در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم رابطه (۴۲) در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین با مقایسه با رابطه (۱۵)، ضرایب $\beta_{+i}, \beta_{-i}, u_{-i}, u_{+i}, i = 1, 2, 3, 4$ به صورت رابطه (۴۳) نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \phi_1(u_1) = \begin{cases} (u_1 - 3)(1 - 0.2 \sin(u_1)) & \text{if } 3 < u_1 \\ 0 & \text{if } -2 \leq u_1 \leq 3 \\ (u_1 + 2)(0.8 - 0.2 \cos(u_1)) & \text{if } u_1 < -2 \end{cases} \\ \phi_2(u_2) = \begin{cases} (u_2 - 2)(0.7 - 0.2 \cos(u_2)) & \text{if } 2 < u_2 \\ 0 & \text{if } -1 \leq u_2 \leq 2 \\ (u_2 + 1)(0.4 + 0.2 \sin(u_2)) & \text{if } u_2 < -1 \end{cases} \quad (42) \\ \phi_1(u_1) = \phi_3(u_3), \phi_2(u_2) = \phi_4(u_4) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \beta_{+1} = \beta_{+3} = 0.8, \beta_{-1} = \beta_{-3} = 0.6 \\ \beta_{+2} = \beta_{+4} = 0.5, \beta_{-2} = \beta_{-4} = 0.2 \\ u_{+1} = u_{+3} = 3, u_{-1} = u_{-3} = -2 \\ u_{+2} = u_{+4} = 2, u_{-2} = u_{-4} = -1 \end{aligned} \quad (43)$$

مقادیر اختیار شده برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته سوم در رابطه (۴۴) آورده شده است.

$$\begin{aligned} l_{11} = l_{12} = l_{13} = l_{14} = 10 \\ l_{21} = l_{22} = l_{23} = 8, l_{24} = 9.9 \\ \xi_1 = \xi_3 = 2, \xi_2 = \xi_4 = 6 \\ \zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \quad (44)$$

شکل ۸، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی ربات صنعتی SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۱۹) و (۳۵) و در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۴۰) نشان می‌دهد. با کمی دقت در این شکل، می‌توان دید که بعد از زمان محدود 1.4(sec)، چهار متغیر پیکربندی ربات دقیقاً به مسیرهای دلخواه همگرا شده‌اند. شکل ۹، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای ورودی دسته سوم را به تصویر کشیده است.

در تمامی شبیه‌سازی‌ها از تابع هموار $\frac{2}{\pi} \arctan(100s)$ به جای تابع علامت استفاده شده است تا پدیده چترینگ (وزوز) کاهش یابد. در ادامه، چهار دسته گشتاورهای ورودی پیشنهادی به طور جداگانه بر روی ربات صنعتی SCARA مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند و زیربخش‌های ۵-۱، ۵-۲، ۵-۳ و ۵-۴ به ترتیب نتایج شبیه‌سازی‌های مرتبط با دسته اول تا چهارم از گشتاورهای غیرخطی ورودی را ارائه می‌دهند.

۵-۱ نتایج شبیه‌سازی دسته اول از گشتاورهای

ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) به ربات SCARA اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم رابطه (۳۹) در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین با مقایسه با رابطه (۱۴)، ضرایب $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$ به صورت $\alpha_1 = 2.8, \alpha_2 = 1.9, \alpha_3 = 1.35, \alpha_4 = 1$ نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \phi_1(u_1) &= (3 + 0.2 \sin(u_1))u_1 \\ \phi_2(u_2) &= (2 + 0.1 \sin(u_2))u_2 \\ \phi_3(u_3) &= (1.5 + 0.15 \sin(u_3))u_3 \\ \phi_4(u_4) &= (1.1 + 0.1 \cos(u_4))u_4 \end{aligned} \quad (39)$$

مقادیر انتخابی برای پارامترهای حقیقی و آزاد گشتاورهای ورودی دسته اول در رابطه (۴۰) آورده شده است.

$$\begin{aligned} l_{11} = l_{12} = l_{13} = l_{14} = 10 \\ l_{21} = l_{22} = l_{23} = 8, l_{24} = 9.9 \\ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \xi_4 = 1.1 \\ \zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \quad (40)$$

شکل ۴، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی ربات صنعتی SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۱۹) و (۲۰) و در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۳۹) نشان می‌دهد. با کمی دقت در این شکل، می‌توان دید که بعد از زمان محدود 2.35(sec)، چهار متغیر پیکربندی ربات به مسیرهای مورد نظر رسیده‌اند. شکل ۵، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته اول را به تصویر کشیده است.

۵-۲ نتایج شبیه‌سازی دسته دوم از گشتاورهای

ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، برای به حرکت درآوردن مفاصل ربات صنعتی SCARA گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲) اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم همان رابطه (۳۹) در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر انتخابی برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته دوم در رابطه (۴۱) آورده شده است.

۴-۵ نتایج شبیه‌سازی دسته چهارم از گشتاورهای

ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، برای به حرکت درآوردن مفاصل ربات صنعتی SCARA گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی ساز ناحیه مرده در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم همان رابطه (۴۲) در نظر گرفته شده‌اند و پارامترهای مرتبط با این غیرخطی‌سازها توسط همان رابطه (۴۳) نتیجه می‌شوند. مقادیر انتخابی برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته چهارم در رابطه (۴۵) آورده شده‌اند.

$$\begin{aligned} o_1 = o_2 = o_3 = o_4 &= 0.1 \\ \xi_1 = \xi_3 = 2 \text{ و } \xi_2 = \xi_4 &= 6 \\ \zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 &= 5 \end{aligned} \quad (45)$$

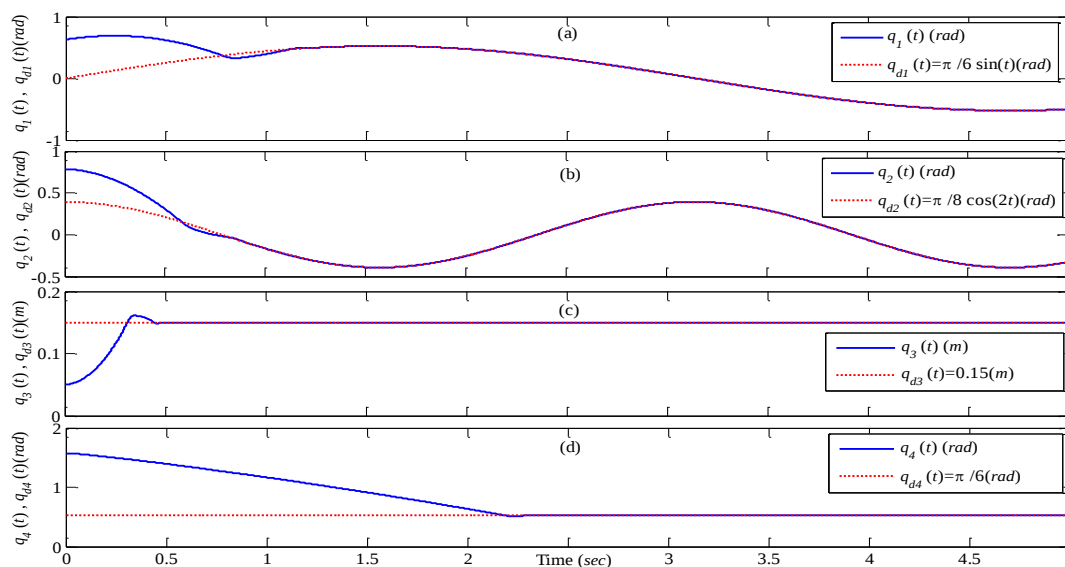
شکل ۱۰، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) و در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۳۹) نشان می‌دهد. این شکل به وضوح نشان می‌دهد بعد از زمان محدود (3.4 sec)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات به مسیرهای دلخواه رسیده‌اند. شکل ۱۱، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته چهارم را ارائه می‌دهد. با تمرکز بر روی شکل‌های ۴، ۶، ۸ و ۱۰ می‌توان زمان‌های همگرایی زوایای مفاصل ربات SCARA به مسیرهای مورد نظر را برای هر چهار دسته گشتاورهای طراحی شده استخراج کرد. جدول شماره ۴ این زمان‌های همگرایی را نشان می‌دهد.

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

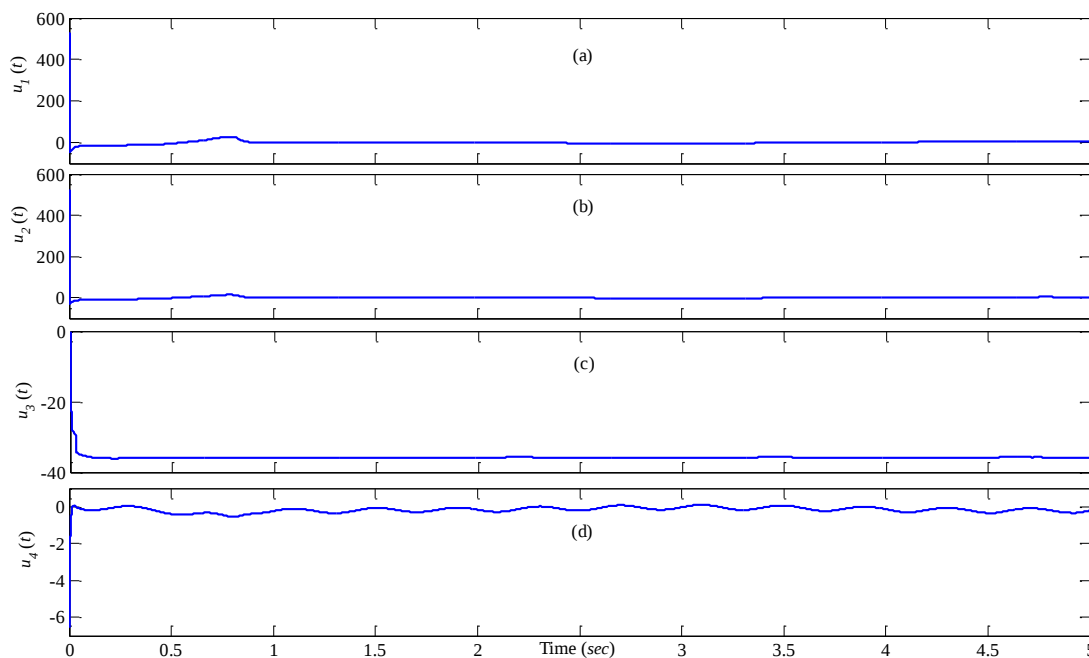
در این مقاله، مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود سرتاسری مقاوم برای ربات بازویی n -درجه آزادی که تحت تاثیر نامعینی‌ها و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده بود، مورد بررسی قرار گرفت. با تعمیم روش

غیرخطی کنترل مد لغزشی ترمینال و تعریف خمینه‌های لغزشی ابتکاری، چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای غیرخطی ورودی پیشنهاد شدند تا متغیرهای پیکربندی ربات را در زمان‌های محدود قابل تنظیمی به مسیرهای دلخواه از قبل طراحی شده برسانند. برای هر دسته از گشتاورهای ورودی طراحی شده، پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n -درجه آزادی به صورت تحلیلی به اثبات رسید و رابطه‌ای به فرم نامساوی برای تخمین زمان محدود همگرایی استخراج شد. نتایج شبیه‌سازی عددی بر روی ربات صنعتی SCARA نشان داد که هر چهار دسته گشتاورهای ورودی پیشنهادی می‌توانند هدف ردیابی ذکر شده را به خوبی فراهم سازند.

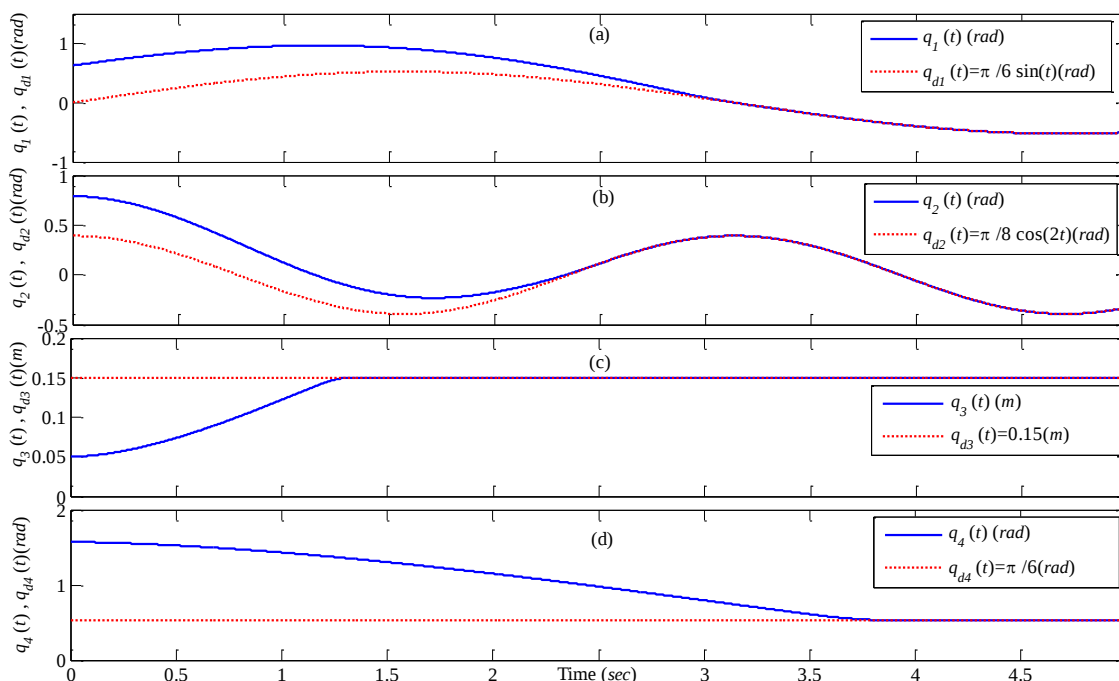
به عنوان اولین گام در راستای کارهای آینده، پارامترهای عددی مدل نیروهای اصطکاک، ثابت‌های عددی موجود در غیرخطی‌سازهای ورودی (شعاعی و ناحیه مرده) و ضرایب عددی کران بالای بردار نامعینی‌ها را نامعلوم (اما نامتغیر با زمان) در نظر گرفته و با بکارگیری روش کنترل مد لغزشی ترمینال-تطبیقی، گشتاورهای ورودی پیشنهادی چنان اصلاح می‌شوند که هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم برآورده شده و قوانین تطبیق زمان-محدود برای تخمین پارامترهای عددی نامعلوم ذکر شده حاصل گردند. به عنوان گام دوم در راستای کارهای آینده، فرض خواهد شد که فقط بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات ($q \in \mathbb{R}^n$) به صورت فیزیکی در اختیار بوده و مشتق این بردار یعنی ($\dot{q} \in \mathbb{R}^n$) به صورت عملی قابل اندازه‌گیری نبوده و بنابراین به طراحی رویتگر زمان-محدود کاهش مرتبه یافته پرداخته خواهد شد تا بردار $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ را تخمین بزنند. در ادامه همین گام دوم، رویتگر زمان-محدود طراحی شده به سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n -درجه آزادی افزوده خواهد شد و پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته (شامل گشتاورهای ورودی کنترلی و رویتگر) مورد بازبینی و اثبات مجدد قرار خواهد گرفت.



شکل ۴. پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته اول و فرض در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d1}(t)$; (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d2}(t)$; (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d3}(t)$; (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d4}(t)$.



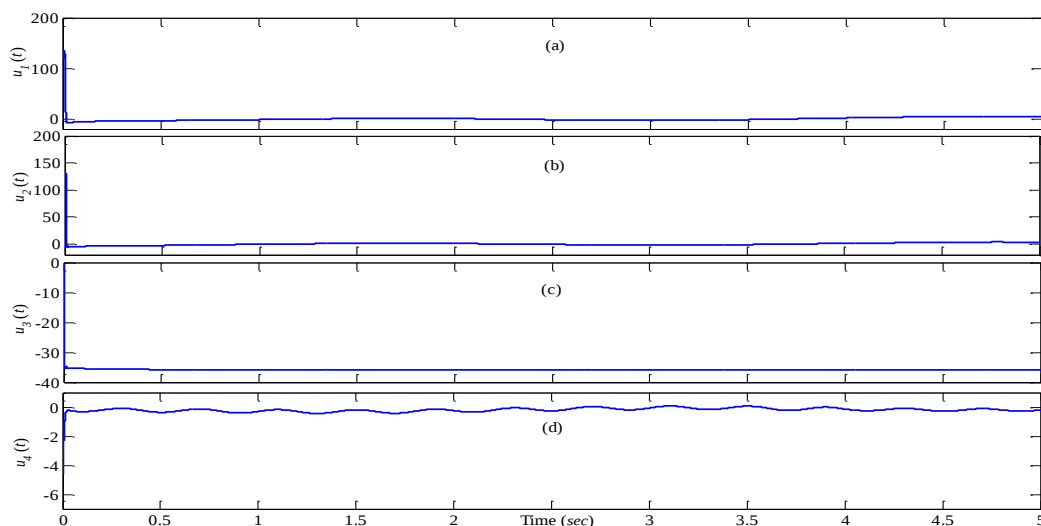
شکل ۵. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته اول با فرض در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$; (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$; (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$; (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$



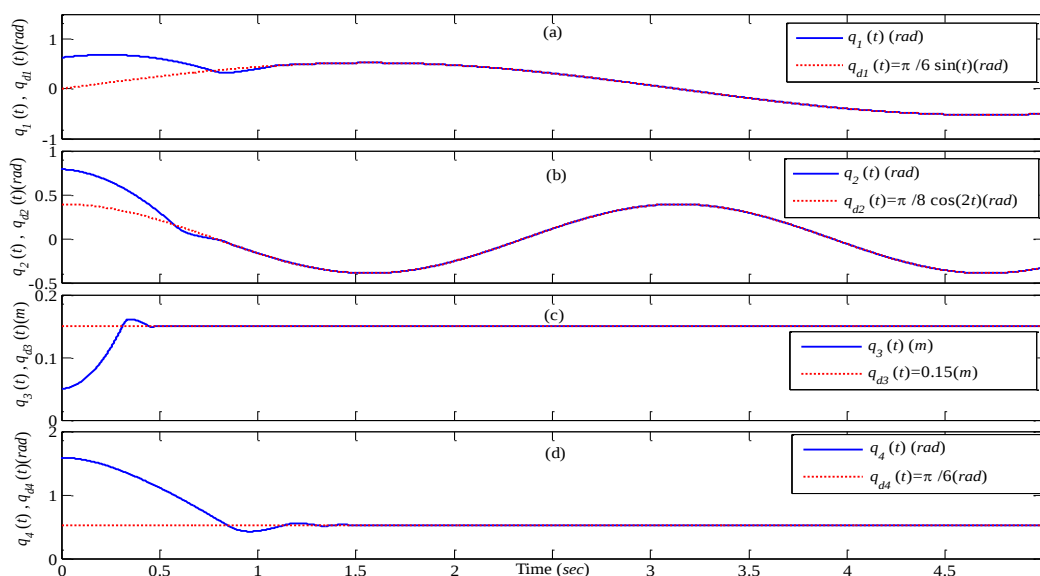
شکل ۶. پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته دوم و فرض در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_2(t)$; (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d2}(t)$; (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d3}(t)$; (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d4}(t)$

جدول ۳. زمان‌های همگرایی زوایای مفاصل ربات SCARA به مسیرهای مورد نظر برای هر چهار دسته گشتاورهای طراحی شده

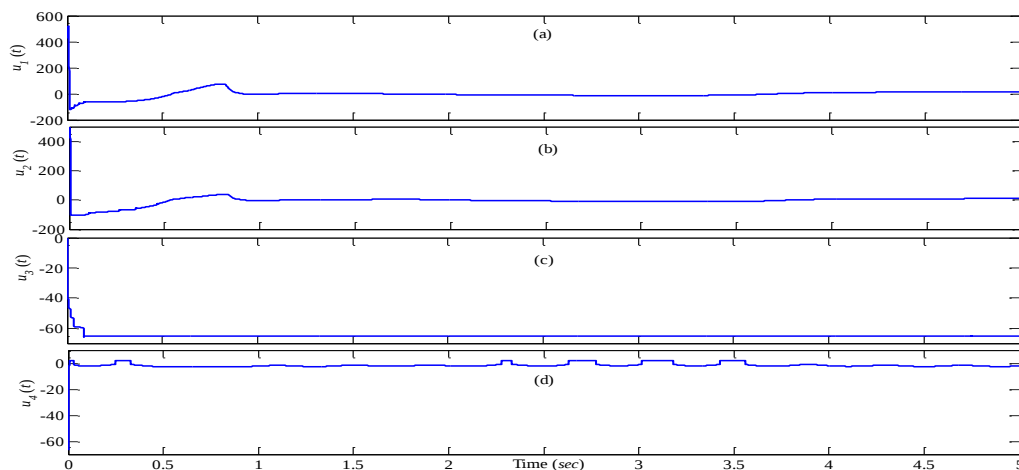
دسته گشتاور و نوع غیرخطی ساز	$q_1(t) \rightarrow q_{d1}(t)$	$q_2(t) \rightarrow q_{d2}(t)$	$q_3(t) \rightarrow q_{d3}(t)$	$q_4(t) \rightarrow q_{d4}(t)$
دسته اول از گشتاورها با غیرخطی ساز شعاعی	1.15(sec)	0.75(sec)	0.55(sec)	2.35(sec)
دسته دوم از گشتاورها با غیرخطی ساز شعاعی	3(sec)	2.45(sec)	1.3(sec)	3.75(sec)
دسته سوم از گشتاورها با غیرخطی ساز ناحیه مرده	1.1(sec)	0.8(sec)	0.5(sec)	1.4(sec)
دسته چهارم از گشتاورها با غیرخطی ساز ناحیه مرده	2.95(sec)	2.4(sec)	1.25(sec)	3.45(sec)



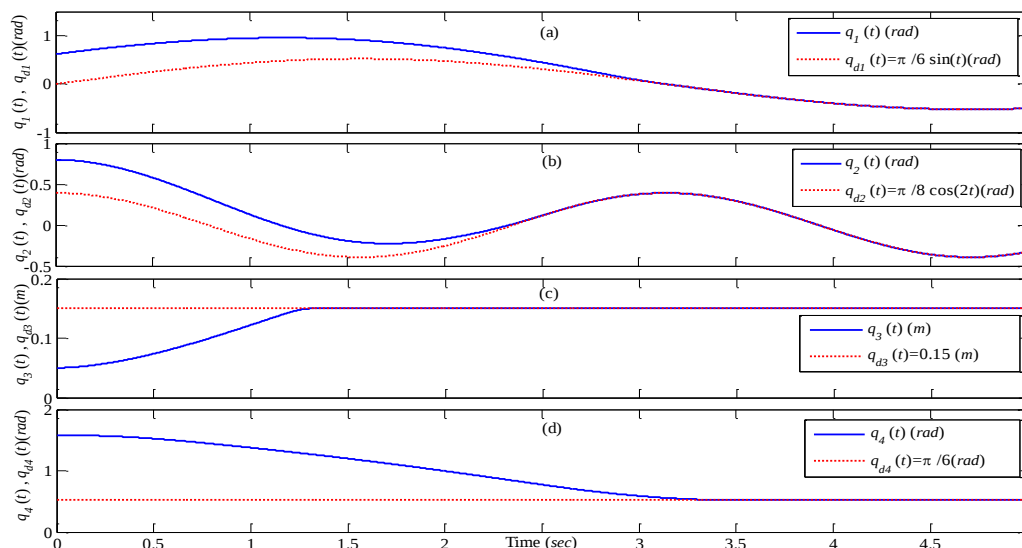
شکل ۷. پاسخ های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته دوم با فرض در نظر گرفتن غیرخطی سازه های شعاعی. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$; (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$; (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$; (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$



شکل ۸. پاسخ های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته سوم و فرض در نظر گرفتن غیرخطی سازه های ناحیه مرده. (a): پاسخ های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d1}(t)$; (b): پاسخ های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d2}(t)$; (c): پاسخ های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d3}(t)$; (d): پاسخ های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d4}(t)$

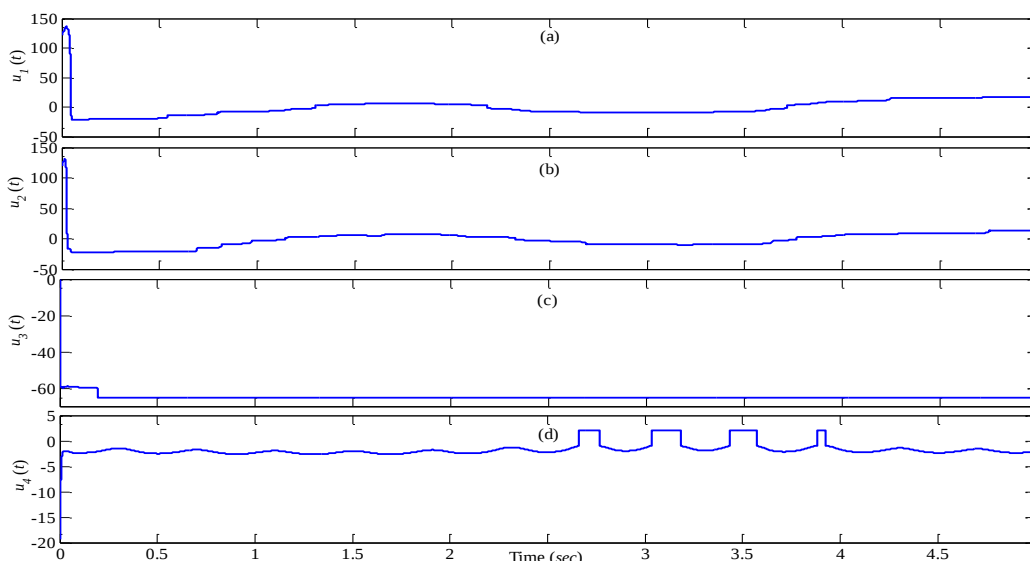


شکل ۹. پاسخ های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته سوم با فرض در نظر گرفتن غیرخطی سازه های ناحیه مرده. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$; (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$; (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$; (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$



شکل ۱۰. پاسخ‌های زمانی پیگیربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته چهارم و فرض در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ‌های زمانی

$q_{d1}(t)$ و $q_1(t)$: (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d2}(t)$: (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d3}(t)$: (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d4}(t)$



شکل ۱۱. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته چهارم با فرض در نظر گرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$: (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$: (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$

(d): پاسخ زمانی $u_4(t)$

مراجع

- [4] M. D. Tran and H. J. Kang, "Adaptive terminal sliding mode control of uncertain robotic manipulator based on local approximation of a dynamic system," *Nerocomputing*, vol. 228, no. 1, pp. 231-240, 2017.
- [5] K. Kaltsoukalas, S. Makris, and G. Chrysosouris, "On generating the motion of industrial robot manipulators," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 32, no. 1, pp. 65-71, 2015.
- [6] G. Rigatos, P. Siano, and G. Raffo, "An H-infinity nonlinear control approach for multi-DOF robotic manipulator," *IFAC-Paper Online*, vol. 49, no. 12, pp. 1406-1411, 2016.
- [1] N. Adhikary and C. Mahanta, "Inverse dynamics based robust control method for position commanded servo actuators in robot manipulators," *Control Engineering Practice*, vol. 66, no. 1, pp. 146-155, 2017.
- [2] Z. Ma and G. Sun, "Dual terminal sliding mode control design for rigid robotic manipulator," *Journal of the Franklin Institute*, doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.01.034, Available online 4 February, 2017.
- [3] M. Galicki, "Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulator," *Automatica*, vol. 67, no. 1, pp. 165-170, 2016.

- Applications*, vol. 10, no. 13, pp. 1565-1572, 2016.
- [18] B. Baigzadehnoe, Z. Rahmani, A. Khosravi, and B. Rezaie, "On position/force tracking control problem of cooperative robot manipulators using adaptive fuzzy backstepping approach," *ISA Transactions*, vol. 70, no. 1, pp. 432-446, 2017.
- [۱۹] علی ابویی، مسعود مروج خراسانی و محمد حائری، "ردیابی زمان محدود سرتاسری کلاس جامعی از سیستم های غیرخطی با استفاده از کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیر تکین" مجله علمی و پژوهشی کنترل و ابزار دقیق، جلد ۹، شماره ۴، تابستان ۱۳۹۴، صفحات ۳۹-۲۷.
- [20] D. J. López-Araujo, A. Zavala-Río, V. Santibáñez, and F. Reyes, "Global adaptive regulation of robot manipulators with bounded inputs," *IFAC Proceedings Volume*, vol. 45, no. 22, pp. 881-888, 2012.
- [21] J. Wilson, M. Charest, and R. Dubay, "Non-linear model predictive control schemes with application on a 2-link vertical robot manipulator," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 41, no. 1, pp. 23-30, 2016.
- [22] P. R. Ouyang, W. J. Zhang, and M. M. Gupta, "An adaptive switching learning control method for trajectory tracking of robot manipulators," *Mechatronics*, vol. 16, no. 1, pp. 51-61, 2006.
- [23] T. Sun, H. Pei, Y. Pan, H. Zhou, and C. Zhang, "Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators," *Neurocomputing*, vol. 74, no. 14, pp. 2377-2384, 2011.
- [24] P. Tomei, "Adaptive PD controller for robot manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 565-570, 1991.
- [25] A. Zavala-Río and V. Santibáñez, "A natural saturating extension of the PD-with-desired-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 2, pp. 386-391, 2007.
- [26] A. Zavala-Río and V. Santibáñez, "Simple extensions of the PD-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 5, pp. 958-965, 2006.
- [27] R. Kelly, "Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 7, pp. 934-938, 1998.
- [7] S. I. Han and J. Lee, "Finite-time sliding surface constrained control for a robot manipulator with an unknown dead-zone and disturbance," *ISA Transactions*, vol. 65, no. 1, pp. 307-318, 2016.
- [8] A. Abooei, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri, "Finite Time Control of Robotic Manipulators with Position Output Feedback," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 16, pp. 2982-2999, 2017.
- [9] A. Mohammadi, M. Tavakoli, H. J. Marquez, and F. Hashemzadeh, "Nonlinear disturbance observer design for robotic manipulators," *Control Engineering Practice*, vol. 21, no. 3, pp. 253-267, 2013.
- [10] X. Wang and J. Zhao, "Autonomous switched control of load shifting robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 9, pp. 7161-7170, 2017.
- [11] M. Wang and A. Yang, "Dynamic learning from adaptive neural control of robot manipulators with prescribed performance," *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 8, pp. 2244-2255, 2017.
- [12] J. Lee, P. H. Chang, and M. Jin, "Adaptive integral sliding mode control with time-delay estimation for robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 8, pp. 6796-6804, 2017.
- [13] G. Paolo, I. A. Ferrara, and L. Magni, "MPC for robot manipulators with integral sliding mode generation," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 3, pp. 1299-1307, 2017.
- [14] H. Wang, "Adaptive control of robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics," *IEEE Transactions on Automatics Control*, vol. 62, no. 2, pp. 948-954, 2017.
- [15] Y. Wang, L. Gu, Y. Xu, and X. Cao, "Practical tracking control of robot manipulators with continuous fractional-order nonsingular terminal sliding mode," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 10, pp. 6194-6204, 2016.
- [16] J. Baek, M. Jin, and S. Han, "A new adaptive sliding-mode control scheme for application to robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, pp. 3628-3637, 2016.
- [17] D. Nojavanzadeh and M. Badamchizadeh, "Adaptive fractional-order non-singular fast terminal sliding mode control for robot manipulators," *IET Control Theory and*

- Integrated Manufacturing*, vol. 44, no. 1, pp. 129-143, 2017.
- [38] D. Zhang and B. Wei, "A review on model reference adaptive control of robotic manipulators," *Annual Reviews in Control*, vol. 43, no. 1, pp. 188-198, 2017.
- [39] S. H. Park and S. I. Han, "Robust-tracking control for robot manipulator with dead-zone and friction using backstepping and RFNN controller," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, no. 12, pp. 1397-1417, 2011.
- [40] W. He, Y. Dong, and C. Sun, "Adaptive neural impedance control of a robotic manipulator with input saturation," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 46, no. 3, pp. 334-344, 2016.
- [41] E. Aguinaga-Ruiz, A. Zavala-Rio, V. Santibanez, and F. Reyes, "Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 4, pp. 934-944, 2009.
- [42] V. Santibanez, R. Kelly, and M. A. Llama, "A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 362-372, 2005.
- [43] W. Deng, J. Yao, and D. Ma, "Robust adaptive asymptotic tracking control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 12, pp. 5686-5707, 2015.
- [44] S. Hasanzadeh, F. Janabi-Sharifi, and P. Keenan, "Backlash characterization and position control of a robotic catheter manipulator using experimentally-based kinematic model," *Mechatronics*, vol. 44, no. 1, pp. 94-106, 2017.
- [45] K. C. Hsu, W. Y. Wang, and P. Z. Lin, "Sliding mode control for uncertain nonlinear systems with multiple inputs containing sector nonlinearities and dead-zones," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 34, no. 1, pp. 374-380, 2004.
- [46] B. K. Dinh, M. Xiloyannis, L. Cappello, C. W. Antuvan, S. C. Yen, and L. Masia, "Adaptive backlash compensation in upper limb soft wearable exoskeletons," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 92, no. 1, pp. 173-186, 2017.
- [28] F. Temurtas, H. Temurtas, and N. Yumusak, "Application of neural generalized predictive control to robotic manipulators with a cubic trajectory and random disturbances," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 54, no. 1, pp. 74-83, 2006.
- [29] W. He, D. O. Amoateng, C. Yang, and D. Gong, "Adaptive neural network control of a robotic manipulator with unknown backlash-like hysteresis," *IET Control Theory and Applications*, vol. 11, no. 4, pp. 567-575, 2017.
- [30] C. Sun, W. He, and J. Hong, "Neural network control of a flexible robotic manipulator using the lumped spring-mass model," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 8, pp. 1863-1874, 2017.
- [31] R. J. Wai and R. Muthusamy, "Design of fuzzy-neural-network-inherited backstepping control for Robot manipulator including actuator dynamics," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 709-722, 2014.
- [32] M. R. Soltanpour, P. Otadolajam, M. H. Khooban, "Robust control strategy for electrically driven robot manipulators: adaptive fuzzy sliding mode," *IET Science, Measurement and Technology*, vol. 9, no. 3, pp. 322-334, 2015.
- [33] Z. Li, C. Yang, C. Y. Su, S. Deng, F. Sun, and W. Zhang, "Decentralized fuzzy control of multiple cooperating robotic manipulators with impedance interaction," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 1044-1056, 2015.
- [34] Z. Zhang, L. Zheng, J. Yu, Y. Li, and Z. Yu, "Three recurrent neural networks and three numerical methods for solving a repetitive motion planning scheme of redundant robot manipulators," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 3, pp. 1423-1434, 2017.
- [35] M. Vijay and D. Jena, "PSO based neuro fuzzy sliding mode control for a robot manipulator," *Journal of Electrical Systems and Information Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 243-256, 2017.
- [36] P. Gierlak and M. Szuster, "Adaptive position/force control for robot manipulator in contact with a flexible environment," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 95, no. 1, pp. 80-101, 2017.
- [37] N. Nikdel, M. A. Badamchizadeh, V. Azimirad, and M. A. Nazari, "Adaptive backstepping control for an n -degree of freedom robotic manipulator based on combined state augmentation," *Robotics and Computer-*

- [58] Z. Zuo, "Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks," *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 305–309, 2015.
- [59] A. Abooe, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri "Global Finite Time Stabilization of a Class of Uncertain MIMO Nonlinear Systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 2, pp 021007 (1-9), 2016.
- [60] H. Liu, T. Zhang, and X. Tian, "Continuous output-feedback finite-time control for a class of second-order nonlinear systems with disturbances," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 2, pp. 218–234, 2016.
- [61] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101–127, 2005.
- [62] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- [63] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu, "Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics," *IET Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 14, pp. 2165–2170, 2015.
- [64] A. Polyakov and A. Poznyak, "Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: "Twisting" controller for second-order sliding mode realization," *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444–448, 2009.
- [47] T. Yang, S. Yan, and Z. Han, "Nonlinear model of space manipulator joint considering time-variant stiffness and backlash," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 341, no. 1, pp. 246–259, 2015.
- [48] A. Abooe and M. Haeri, "Stabilization of commensurate fractional order polytopic nonlinear differential inclusion subject to input nonlinearity and unknown disturbances," *IET Control Theory & Applications*, vol. 7, no. 12, pp. 1624–1633, 2013.
- [49] علی ابوبی و محمد حائری، "سنکرون سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با وجود پارامترهای نامعلوم و غیرخطی ساز شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی" *مجله علمی و پژوهشی کنترل و ابزار دقیق*، جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحات ۵۷–۶۹.
- [50] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678–682, 1998.
- [51] Z. Zuo and L. Tie, "A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems," *International Journal of Control*, vol. 87, no. 2, pp. 363–370, 2016.
- [52] A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, "Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach," *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 332–340, 2015.
- [53] X. H. Zhang, K. Zhang, and X. J. Xie, "Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feed forward systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 8, pp. 1794–1814, 2016.
- [54] S. E. Parsegov, A. E. Polyakov, and P. S. Shcherbakov, "Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 110–115, 2013.
- [55] Y. Feng, X. Yu, and F. Han, "On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1715–1722, 2013.
- [56] Y. Zhang, G. Liu, and B. Luo, "Finite-time cascaded tracking control approach for mobile robots," *Information Sciences*, vol. 284, no. 1, pp. 31–43, 2014.
- [57] S. Mondal and C. Mahanta, "Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 2356–2377, 2014.

پوست ۱. اثبات نامساوی $(s^T \phi(u) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i |s_i|)$ با در نظر گرفتن گشتاورهای (۲۰) و غیرخطی سازه‌های شعاعی (۱۴).
 با جایگذاری u_i از رابطه (۲۰) در نامساوی مرتبط با غیرخطی ساز شعاعی (۱۴)، رابطه (۱-۱) حاصل می‌شود.

$$\alpha_i \xi_i^2 \Omega^2 \text{sign}^2(s_i) \leq -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i) \phi_i(u_i) \text{ with } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1-1)$$
 حال با ضرب ترم s_i^2 در طرفین نامساوی (۱-۱) و در نظر گرفتن حقیقت $\alpha_i \xi_i \text{sign}(s_i) = |s_i|$ رابطه (۲-۱) نتیجه می‌گردد.

$$\alpha_i \xi_i^2 \Omega^2 |s_i|^2 \leq -\xi_i \Omega |s_i| s_i \phi_i(u_i) \text{ with } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-1)$$
 با توجه به مثبت بودن ترم $\xi_i \Omega |s_i|$ و حذف این ترم از طرفین نامساوی (۱-۲)، نامساوی رابطه (۳-۱) حاصل می‌گردد.

$$s_i \phi_i(u_i) \leq -\alpha_i \xi_i \Omega |s_i| \text{ with } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-1)$$
 بدیهی است که $(s^T \phi(u) = \sum_{i=1}^n s_i \phi_i(u_i) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i |s_i|)$ از رابطه (۳-۱) به راحتی نتیجه می‌شود و اثبات پایان می‌پذیرد. ■

پیوست ۲. اثبات نامساوی $(s^T \phi(u) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|)$ با

در نظر گرفتن گشتاورهای (۳۵) و غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده (۱۵).

با در نظر گرفتن $s_i < 0$ و استناد به گشتاورهای ورودی (۳۵)، نامساوی $u_i > u_{+i}$ نتیجه می‌شود. در ادامه با ارجاع به همین $u_i > u_{+i}$ و غیرخطی‌ساز ناحیه مرده (۱۵) و $\beta_i^* = \min(\beta_{+i}, \beta_{-i})$ ، رابطه (۱-۲) نتیجه می‌شود.

$$(u_i - u_{+i})\phi_i(u_i) = -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i)\phi_i(u_i) \geq \beta_{+i} \xi_i^2 \Omega^2 \text{sign}^2(s_i) \geq \beta_i^* \xi_i^2 \Omega^2 \text{sign}^2(s_i) \quad (1-2)$$

with $i = 1, 2, \dots, n$.

در ادامه با در نظر گرفتن $s_i > 0$ و استناد به گشتاورهای ورودی (۳۵)، نامساوی $u_i < u_{-i}$ نتیجه می‌گردد. در ادامه با توجه به $u_i < u_{-i}$ و غیرخطی‌ساز ناحیه مرده (۱۵)، رابطه (۲-۲) بدست می‌آید.

$$(u_i - u_{-i})\phi_i(u_i) = -\xi_i \Omega \text{sign}(s_i)\phi_i(u_i) \geq \beta_{-i} \xi_i^2 \Omega^2 \text{sign}^2(s_i) \geq \beta_i^* \xi_i^2 \Omega^2 \text{sign}^2(s_i) \quad (2-2)$$

with $i = 1, 2, \dots, n$.

بنابراین برای هر دو حالت $s_i < 0$ و $s_i > 0$ ، همواره نامساوی $s_i \text{sign}(s_i) = |s_i|$ به نامساوی رابطه (۳-۲) خواهیم رسید.

$$s_i \phi_i(u_i) \leq -\beta_i^* \xi_i \Omega |s_i| \quad \text{with } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-2)$$

بدیهی است که $(s^T \phi(u) = \sum_{i=1}^n s_i \phi_i(u_i) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|)$ از رابطه (۳-۲) به راحتی بدست می‌آید و اثبات پایان می‌پذیرد. ■