مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۱، صفحه ۷۰-۶۱

کنترل مود لغزشی سیستم های پرش مارکوف همراه با تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم

نسیبه ظهرابی[۱]، حمیدرضا مومنی[۲]، امیرحسین ابوالمعصومی[۳]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، n_zohrabii@yahoo.com
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، momeni_h@modares.ac.ir
[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه برق، دانشگاه اراک، a_abolmasoumi@araku.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۷/۲۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۹/۲۳)

چکیده: در این مقاله طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی برای سیستم‌های پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه‌معلوم در حضور اغتشاش صورت گرفته است. روش ارائه شده کاملاً کلی می‌باشد و سیستم‌های پرش مارکوف با احتمال‌های انتقال کاملاً نامعلوم یا کاملاً معلوم را در بر می‌گیرد. در ابتدا شرایط کافی برای وجود سطح لغزش خطی و پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی ارائه گردیده است. در ادامه یک کنترل‌کننده مود لغزشی چنان طراحی شده است که مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته در زمان محدود به سطح لغزشی مورد نظر برسند و برای تمام زمان‌های بعدی در آن باقی بمانند. در نتیجه با اعمال قانون کنترل بدست آمده سیستم حلقه‌بسته پایدار تصادفی خواهد شد و طراحی کنترل‌کننده به پایان می رسد. تمام شرایط بدست آمده بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی می باشند که به وسیله نرم‌افزار روش‌های عددی به آسانی قابل حل هستند. در آخر یک مثال عددی برای تضمین کارایی و معتبر بودن روش پیشنهاد شده آورده شده است.

کلمات کلیدی: سیستم های پرش مارکوف؛ پایداری تصادفی؛ کنترل مود لغزشی؛ تأخیر زمانی؛ احتمال‌های انتقال نیمه‌معلوم؛ ناتساوی‌های ماتریسی خطی.

Sliding Mode Control of Time-Delay Markovian Jump Systems with Partly Known Transition Probabilities

Nasibeh Zohrabi, Hamid Reza Momeni, Amir Hossein Abolmasoumi

Abstract: In this paper, a sliding mode controller for time-delay Markovian jump systems with partly unknown transition probability matrix in presence of disturbance is designed. The proposed method is quite general and includes both systems with completely known and completely unknown transition probability rates. At first, sufficient conditions for existence of linear switching surface are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs) that guarantee the stochastic stability of sliding mode dynamics. Then, a sliding mode controller is designed such that the closed-loop system's state trajectories reach the desired sliding surface in a finite time and maintain there for all subsequent times. As a result, the stochastic stability of closed-loop system is guaranteed by applying a specifically designed control law. All of the conditions are presented in terms of linear matrix inequalities and can be simply solved by means of numerical software tools. Finally, a numerical example is given to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed method.

Keywords: Markovian Jump Systems (MJSs); Stochastic Stability; Sliding Mode Control (SMC); Time-Delay; Partly Unknown Transition Probabilities; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

۱- مقدمه

در عمل رفتار معادله حالت بعضی از سیستم‌های صنعتی تصادفی می‌باشد به همین دلیل نمی‌توان آن‌ها را به وسیله نمایش فضای حالت LTI مدل کرد. این طبقه از سیستم‌های دینامیکی به دلیل تغییرات ناگهانی در عناصر خود، در طبقه‌ای از سیستم‌های سوییچ‌شده اتفاقی به نام سیستم‌های تکه‌ای معین[1] یا سیستم‌های پرش مارکوف[2] قرار می‌گیرند. سیستم‌های سوییچ شده اتفاقی پرش مارکوف اولین بار در [۱] معرفی شدند و دارای دو جزء در بردار حالت خود هستند. جزء اول این بردار حالت، مقادیری در R^n می‌گیرد و دارای تغییرات پیوسته در زمان است. جزء دوم مقادیری در یک مجموعه محدود می‌گیرد و به طور تصادفی بین مقادیر محدود حالت سوییچ می‌کند. این جزء با یک فرآیند مارکوف زمان پیوسته نمایش داده می‌شود. این طبقه از سیستم‌ها به طور قابل قبولی برای مدل کردن سیستم‌های عملی مختلف استفاده می‌شوند. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به سیستم‌های تولید [۲]، سیستم‌های هوافضا [۳] و سیستم‌های مخابراتی [۴، ۵] اشاره کرد. در دهه های اخیر سیستم های پرش مارکوف به دلیل کاربردهای گسترده عملی توجه بسیاری از محققین و مهندسان کنترل را به خود جلب کرده و نتایج بسیاری نیز در این زمینه بدست آمده است. از جمله نتایج بدست آمده می‌توان به مسئله پایداری [۶]، پایدارسازی [۷]، کنترل H_∞ [۸، ۹، ۱۰] و مسئله فیلترینگ [۱۱] اشاره کرد. اطلاعات بیشتر در این زمینه در [۱۲] و مراجع درون آن یافت می‌شود.

یکی از مشخصه‌های سیستم‌های پرش مارکوف، ماتریس نرخ احتمال انتقال می‌باشد. ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت آماری رفتار پرش سیستم از یک مود به مود دیگر را مشخص می‌کند. دسترسی کامل به ماتریس نرخ احتمال انتقال، تجزیه و تحلیل و کنترل سیستم‌های پرش مارکوف را به مقدار زیادی ساده و راحت می‌کند. شایان ذکر است که در بیشتر مطالعات انجام شده، دسترسی کامل به اطلاعات ماتریس نرخ احتمال انتقال یک فرض عمومی برای تجزیه و کنترل سیستم‌های پرش مارکوف است. در حالی‌که در بیشتر کاربردهای عملی، بدست آوردن کامل احتمال‌های انتقال مورد بحث می باشد و یا تخمین تمامی عناصر ماتریس نرخ احتمال پیچیده، زمان‌بر و گران می باشد[۱۳، ۱۴]. بنابراین با توجه به مطالب گفته شده، مطالعه و بررسی حالت کلی‌تر این سیستم‌ها یعنی سیستم‌های پرش مارکوف با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه‌معلوم نسبت به تخمین آن‌ها امر مقرون‌به‌صرفه و بهتری می‌باشد. در سال‌های اخیر توجه محققان به این سیستم‌ها جلب شده است و نتایجی نیز در زمینه پایداری و پایدارسازی [۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۴، ۱۷]، کنترل H_∞ [۱۸ ، ۱۹] و مسئله فیلترینگ [۲۰] با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم بدست آمده است.

بدیهی است که وجود تأخیر یک دلیل مهم برای ناپایداری در عملکرد سیستم‌هاست. همچنین تجزیه و کنترل چنین سیستم‌هایی از مسائل دشوار کنترل می‌باشد. چگونگی اثر تأخیر بر روی پایداری سیستم‌های تأخیردار، در طول سالیان، علاقه و توجه وسیعی را در میان دانشمندان و محققین برانگیخته است. در دهه‌های اخیر نتایج بسیاری از جمله پایداری و پایدارسازی سیستم‌های پرش مارکوف تأخیردار بدست آمده است، به عنوان مثال می‌توان برای اطلاعات بیشتر به [۹، ۱۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶] مراجع کرد. این نتایج به دو صورت وابسته به تأخیر و مستقل از تأخیر می‌باشند. لازم به ذکر است در این مقاله سیستم مورد مطالعه سیستم پرش مارکوف با تأخیر زمانی است که در آن تأخیر متغیر با زمان و کران‌دار است. همچنین شرایط بدست آمده برای پایداری تصادفی مستقل از تأخیر می‌باشد.

از طرف دیگر، یکی از روش‌های کنترلی مقاوم مناسب برای کنترل سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها، اغتشاشات داخلی و خارجی و همچنین سیستم های غیرخطی، روش کنترل مود لغزشی می‌باشد. در این روش بر اساس قضیه کنترل مود لغزشی [۲۷] تمامی حالت‌های سیستم حلقه بسته به سوی یک سطح لغزش معین در فضا هدایت می‌شوند. این کار با اعمال یک نیروی کنترلی ناپیوسته به سیستم دینامیکی حلقه بسته صورت می‌گیرد. پس از برخورد با سطح لغزشی، رفتار سیستم توسط معادله سطح مذکور تعیین می شود. بدین معنی‌که بر روی سطح لغزش مورد نظر، مشخصه‌های مطلوب مانند پایداری، قابلیت رد اغتشاش، ردیابی و غیره تضمین می‌شود. اخیراً موضوع طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف توجه محققین رو به خود جلب کرده است، به عنوان مثال برای اطلاعات بیشتر به [۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱] مراجعه شود. شایان ذکر است که در تمام کارهای فوق، بررسی کنترل مود لغزشی سیستم های پرش مارکوف با فرض دسترسی کامل به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال صورت گرفته است. در حقیقت در آن‌ها چگونگی دسترسی به احتمال‌های انتقال و فرض نامعلوم بودن آن‌ها در نظر گرفته نشده و به سادگی طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی انجام شده است. در نتیجه ما در ابتدا مسئله کنترل مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم را در [۳۲] بررسی کردیم. سیستم مورد مطالعه در [۳۲] بدون تأخیر بوده و در نتیجه بدست آوردن شرایط LMI برای پایداری تصادفی آن به مراتب ساده تر بود. با توجه به تأثیر قابل توجه تأخیر بر عملکرد سیستم‌ها، پایداری و کنترل این سیستم‌ها همراه با تأخیر امری مهم و ضروری است. اگرچه تا به امروز مسئله کنترل مود لغزشی این سیستم‌ها با تأخیر متغیر با زمان مورد بررسی و مطالعه قرار نگرفته است. در نتیجه در این نوشتار هدف حصول پایداری و کنترل مود لغزشی سیستم‌های پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم می‌باشد. روش ارائه شده کاملاً کلی می‌باشد و سیستم‌های پرش مارکوف با احتمال‌های انتقال کاملا نامعلوم یا کاملاً معلوم را شامل می‌شود. به عبارت دیگر، اصطلاح به کار برده شده

[1] Piecewise deterministic systems
[2] Markovian jump systems

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

"ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم" به این معنی است که می‌تواند تمام عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال معلوم باشد و یا تعدادی از عناصر ماتریس نامعلوم باشند و یا حتی تمام عناصر ماتریس نامعلوم باشند. یعنی طراحی در این مقاله ، سه حالت فوق را پوشش می دهد. تمام نتایج بدست آمده بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی بوده و به وسیله نرم‌افزار روش‌های عددی به آسانی قابل حل هستند که این یکی از مزایای روش ارائه شده می‌باشد. در حقیقت در این مقاله بدست آوردن شرایط پایداری تصادفی برای سیستم پرش مارکوف تأخیردار بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی یکی از مسائل دشوار عددی بوده که در نهایت با استفاده از روش‌های خاصی که در ادامه آمده است، امکان‌پذیر شده است.

در این مقاله در ابتدا با ارائه تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از ماتریس‌های وزنی آزاد، ضریب سطح لغزش خطی برای پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی بدست آورده شده است. شرایط بدست آمده مستقل از تأخیر بوده و فقط وابسته به کران بالای مشتق تأخیر هستند. سپس با طراحی کنترل‌کننده، بر اساس قضیه کنترل مود لغزشی، مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته به سطح لغزشی مطلوب رسیده و برای تمام زمان‌های بعدی در آن‌جا باقی می‌مانند، یعنی $s(t)=0$ و $\dot{s}(t)=0$ هستند. در نتیجه با اعمال قانون کنترل $u(t)$ سیستم حلقه بسته پایدار تصادفی خواهد شد و طراحی کنترل‌کننده به پایان می‌رسد.

در ادامه این نوشتار، ابتدا در قسمت ۲، به معرفی سیستم تحت کنترل و ارائه مبانی ریاضی مورد استفاده در این مقاله می‌پردازیم. در این قسمت تعاریف و لم‌های مورد نیاز و همچنین فرم رگولار سیستم بدست آورده شده است. قسمت ۳ به طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی برای سیستم پرش مارکوف با تأخیر زمانی می‌پردازد. در این بخش در ابتدا با انتخاب سطح لغزش خطی، با ارائه قضیه ۱ پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس در قضیه ۲ طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی برای تضمین پایداری سیستم حلقه‌بسته صورت می‌گیرد. ارائه مثال عددی و نتایج شبیه‌سازی در قسمت ۴ آورده شده است و نتیجه گیری، قسمت نهایی مقاله را تشکیل می‌دهد.

۲- معرفی سیستم تحت کنترل و تعاریف لازم

این بخش به معرفی سیستم تحت کنترل و ارائه تعاریف و لم‌های مورد استفاده در این مقاله می‌پردازد. در ابتدا سیستم پرش مارکوف پیوسته در زمان همراه با تأخیر متغیر با زمان $\tau(t)$ تعریف شده در فضای احتمال (Ω,F,P) زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(r_t)x(t)+A_d(r_t)x(t-\tau(t))\\&\quad+B(r_t)[u(t)+F(r_t)w(t)]\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $x(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(t)\in\mathbb{R}^m$ ورودی کنترل کننده و $w(t)\in\mathbb{R}^l$ اغتشاش می‌باشد. $\tau(t)$ تأخیر متغیر با زمان است که در شرایط زیر صدق کند:

$$0\le\tau(t)\le\bar{\tau},\qquad |\dot{\tau}(t)|\le\mu<1 \tag{۲}$$

که در آن $\bar{\tau}$ حد بالای تأخیر زمانی می‌باشد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}&x(s)=\varphi(s),\qquad \forall s\in[-\bar{\tau},0]\\&x_s(t)=x(s+t),\ \ -\bar{\tau}\le s\le 0\end{aligned} \tag{۳}$$

$\{r_t,t\ge 0\}$ فرآیند مارکوف زمان پیوسته گسسته مقدار همگن و محدود می‌باشد که مقادیری در فضای حالت محدود $\ell=\{1,2,...,N\}$ می‌گیرد. این فرآیند تصادفی دارای نرخ‌های احتمال انتقال λ_{ij} می‌باشد و داریم:

$$\begin{cases}\Pr(r_{t+h}=j\,|r_t=i)=\begin{cases}\lambda_{ij}h+o(h), & if\ j\ne i\\ 1+\lambda_{ii}h+o(h), & if\ j=i\end{cases}\\ \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{o(h)}{h}\right)=0,\qquad h>0\end{cases} \tag{۴}$$

که در آن $\lambda_{ij}\ge 0\,(i,j\in\ell,j\ne i)$ نشان‌دهنده نرخ انتقال از مود i در زمان t به مود j در زمان $t+h$ و $\lambda_{ii}=-\sum_{j=1,j\ne i}^{N}\lambda_{ij}$ برای هر $i\in\ell$ می‌باشد. ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \cdots & \lambda_{NN}\end{bmatrix} \tag{۵}$$

در ادامه برای راحتی فرایند مارکوف r_t به صورت اندیس i به کار برده می‌شود. بنابراین سیستم (۱) می تواند به صورت زیر دوباره نوشته شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))\\&\quad+B_i\left[u(t)+F_iw(t)\right]\end{aligned} \tag{۶}$$

به طوری‌که A_i، A_{di}، B_i و F_i ماتریس‌های ثابت معلوم با ابعاد مناسب هستند. همچنین فرض شده است که:

$$\|F_iw(t)\|\le f_i,\qquad f_i>0,\quad i\in\ell \tag{۷}$$

در اینجا نرخ‌های احتمال انتقال به صورت نیمه‌معلوم در نظر گرفته شده‌اند؛ بدین‌معنی‌که بعضی از عناصر در ماتریس نرخ احتمال انتقال Λ نامعلوم هستند. برای جداسازی علائم، فضای حالت ℓ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{cases}\ell=\ell_\kappa^i\bigcup\ell_{u\kappa}^i\\ \ell_k^i\triangleq\{j:\lambda_{ij}\ is\ known\}\\ \ell_{uk}^i\triangleq\{j:\lambda_{ij}\ is\ unknown\}\end{cases} \tag{۸}$$

اگر داشته باشیم $\ell_\kappa^i\ne\varnothing$، می‌توان ℓ_κ^i را به صورت زیر توصیف کرد:

$$\ell_\kappa^i=\left(\kappa_1^{\,i},...,\kappa_q^{\,i}\right),\ \forall 1\le q\le N \tag{۹}$$

که در آن $\kappa_q^{\,i}\in\mathbb{N}^+$ نماینده qامین عنصر معلوم در سطر i ماتریس Λ است. با توجه به مطالب گفته شده، سیستم پرش مارکوف همراه با

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال کاملاً نامعلوم یا کاملاً معلوم مورد بررسی قرار گرفته است و روش ارائه شده کاملاً کلی می‌باشد. در ادامه تعاریف و لم‌های مورد نیاز برای استفاده در اثبات قضیه‌های ارائه شده در این مقاله آمده است.

تعریف ۱- سیستم پرش مارکوف $\dot{x}(t)=A(r_t)x(t)$ پایدار تصادفی[1] (SS) است اگر یک مقدار ثابت محدود $T(x_0,r_0)$ وجود داشته باشد به طوری‌که رابطه زیر

$$E\left\{\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \,|x_0,r_0\right\}<T(x_0,r_0) \qquad (۱۰)$$

برای هر شرایط اولیه (x_0,r_0) برقرار باشد [۱۲].

لم ۱- سیستم پرش مارکوف $\dot{x}(t)=A(r_t)x(t)$ پایدار تصادفی (SS) است اگر وتنها اگر مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن و مثبت معین $P_i>0$ وجود داشته باشند به طوری‌که ناتساوی ماتریسی خطی (LMI) زیر برای هر $i\in\ell$ برقرار باشد [۱۲].

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j < 0 \qquad (۱۱)$$

لم ۲- فرض کنید $x(t)\in\mathbb{R}^n$، $y(t)\in\mathbb{R}^m$، $N\in\mathbb{R}^{n\times m}$، $\hat{N}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ و $\alpha>0$ باشند. در آن‌صورت اگر $N^TN\le\hat{N}$، آنگاه رابطه زیر برقرار است [۳۳].

$$2x^TNy \le \alpha|x|^2+\frac{1}{\alpha}y^T\hat{N}y \qquad (۱۲)$$

۲-۱- فرم رگولار[2] سیستم تحت کنترل

در این قسمت، در ابتدا یک ماتریس ناویژه[3] T_i برای بدست آوردن فرم رگولار سیستم (۶) به طوری انتخاب می‌شود که دارای خاصیت زیر باشد [۲۸]:

$$T_iB_i=\begin{bmatrix}0_{(n-m)\times m}\\ B_{2i}\end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

که در آن $B_{2i}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس ناویژه است. برای راحتی، T_i به صورت زیر تفکیک می‌شود:

$$T_i=\begin{bmatrix}U_{2i}^T\\ U_{1i}^T\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

که در آن $U_{1i}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ و $U_{2i}\in\mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ دو زیربلوک از ماتریس یکانی[4] حاصل از تجزیه مقادیر استثنایی[5] B_i هستند، یعنی:

$$B_i=\begin{bmatrix}U_{1i} & U_{2i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_i\\ 0_{(n-m)\times m}\end{bmatrix}V_i^T \qquad (۱۵)$$

$\Sigma_i\in\mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس قطری مثبت معین و $V_i\in\mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس یکانی [۳۴] می‌باشد. در ادامه با اعمال تبدیل حالت $z(t)=T_ix(t)$ به سیستم (۶)، فرم رگولار زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=\bar{A}_iz(t)+\bar{A}_{di}z(t-\tau(t))\\ &+\begin{bmatrix}0_{(n-m)\times m}\\ B_{2i}\end{bmatrix}\left[u(t)+F_iw(t)\right]\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در حالی‌که $\bar{A}_i=T_iA_iT_i^{-1}$ و $\bar{A}_{di}=T_iA_{di}T_i^{-1}$ هستند. با در نظر گرفتن $z(t)=[z_1^T(t)\;\; z_2^T(t)]^T$، می‌توان سیستم (۱۶) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t)&=\bar{A}_{11i}z_1(t)+\bar{A}_{12i}z_2(t)\\ &+A_{d11i}z_1(t-\tau(t))+A_{d12i}z_2(t-\tau(t))\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2(t)&=\bar{A}_{21i}z_1(t)+\bar{A}_{22i}z_2(t)\\ &+\bar{A}_{d21i}z_1(t-\tau(t))+\bar{A}_{d22i}z_2(t-\tau(t))\\ &+B_{2i}\left[u(t)+F_iw(t)\right]\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن $z_1(t)\in\mathbb{R}^{n-m}$ ، $z_2(t)\in\mathbb{R}^m$ هستند و پارامترهای دیگر به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\bar{A}_{11i}=U_{2i}{}^TA_iU_{2i}, && \bar{A}_{12i}=U_{2i}{}^TA_iU_{1i},\\ &\bar{A}_{d11i}=U_{2i}{}^TA_{di}U_{2i}, && \bar{A}_{d12i}=U_{2i}{}^TA_{di}U_{1i},\\ &\bar{A}_{21i}=U_{1i}{}^TA_iU_{2i}, && \bar{A}_{22i}=U_{1i}{}^TA_iU_{1i},\\ &\bar{A}_{d21i}=U_{1i}{}^TA_{di}U_{2i}, && \bar{A}_{d22i}=U_{1i}{}^TA_{di}U_{1i},\\ &B_{2i}=\Sigma_iV_i^T.\end{aligned}$$

۳- کنترل مود لغزشی سیستم تحت کنترل

۳-۱- پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی

در این قسمت پایداری تصادفی مستقل از تأخیر دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر طبق قضیه کنترل مود لغزشی [۳۵] معادله (۱۷) به عنوان دینامیک مود لغزشی شناخته شده است. در ابتدا سطح لغزشی خطی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$s(t)=[C_{1i}\quad C_{2i}]z(t) \qquad (۱۹)$$

در حالی‌که C_{2i} برای هر $i\in\ell$ معکوس‌پذیر است. با تعریف $C_i=C_{2i}^{-1}C_{1i}\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ و جایگذاری $z_2(t)=-C_iz_1(t)$ و $z_2(t-\tau(t))=-C_iz_1(t-\tau(t))$ در (۱۷)، دینامیک مود لغزشی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1(t)=\tilde{A}_iz_1(t)+\tilde{A}_{di}z_1(t-\tau(t)),\\ &\tilde{A}_i=\bar{A}_{11i}-\bar{A}_{12i}C_i,\tilde{A}_{di}=\bar{A}_{d11i}-\bar{A}_{d12i}C_i\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در ادامه، در قضیه ۱، طراحی پارامتر سطح لغزش خطی C_i برای پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) صورت گرفته است.

قضیه ۱- دینامیک مود لغزشی (۲۰) همراه با تأخیر متغیر با زمان $\tau(t)$ با احتمال‌های انتقال نیمه‌معلوم (۸) پایدار تصادفی است اگر دسته ماتریس‌های $X_i>0$ ، $R>0$ ، $W_i=W_i^T$ و Y_i به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه ناتساوی‌های ماتریس خطی (LMIs) زیر برای هر $i\in\ell$ برقرار باشند:

[1] Stochastically stable
[2] Regular form
[3] Nonsingular
[4] Unitary matrix
[5] Singular value decomposition

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

$$\begin{bmatrix} \zeta_i+\lambda_{ii}X_i & X_i & \Gamma_i & \left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right) \\ X_i & -R & 0 & 0 \\ * & 0 & -\Xi_i & 0 \\ * & 0 & 0 & -2X_i+(1-\mu)^{-1}R \end{bmatrix}<0, i\in\ell_\kappa^i \quad (۲۱)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_i & X_i & \Gamma_i & \left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right) \\ X_i & -R & 0 & 0 \\ * & 0 & -\Xi_i & 0 \\ * & 0 & 0 & -2X_i+(1-\mu)^{-1}R \end{bmatrix}<0, i\in\ell_{u\kappa}^i \quad (۲۲)$$

$$\begin{bmatrix} -W_i & X_i \\ X_i & -X_j \end{bmatrix}\le 0, \qquad j\in\ell_{u\kappa}^i,\ j\ne i \quad (۲۳)$$

$$X_j-W_i\ge 0, \qquad j\in\ell_{u\kappa}^i, j=i \quad (۲۴)$$

که در آن

$$\Gamma_i=\left[\sqrt{\lambda_{i\kappa_1^i}}X_i,...,\sqrt{\lambda_{i\kappa_{i-1}^i}}X_i,\sqrt{\lambda_{i\kappa_{i+1}^i}}X_i,...,\sqrt{\lambda_{i\kappa_q^i}}X_i\right] \quad (۲۵)$$

$$\Xi_i=diag\left\{X_{\kappa_1^i},...,X_{\kappa_{i-1}^i},X_{\kappa_{i+1}^i},...,X_{\kappa_q^i}\right\} \quad (۲۶)$$

$$\zeta_i=\bar{A}_{11i}X_i-\bar{A}_{12i}Y_i+X_i\bar{A}_{11i}^T-Y_i^T\bar{A}_{12i}^T-\sum_{j\in\ell_\kappa^i}\lambda_{ij}W_i$$

می‌باشند و $\kappa_1^i,...,\kappa_q^i$ در (۹) تعریف شده‌اند. علاوه براین اگر مجموعه LMI های (۲۱) تا (۲۴) دارای یک جواب ممکن بر پایه X_i و Y_i باشند، در آن‌صورت C_i به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_i=Y_iX_i^{-1} \quad (۲۷)$$

اثبات قضیه ۱- در ابتدا تابع لیاپانوف را به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$V(z_1(t),i)=z_1^T(t)P_iz_1(t)+\int_{-\tau(t)}^{0}z_1^T(t+\theta)Qz_1(t+\theta)d\theta \quad (۲۸)$$

که در آن Q یک ماتریس مثبت معین است.

سپس با استفاده از مفهوم عملگر مشتق متوسط[1] [۳۶] برای سیستم‌های تصادفی پرش مارکوف، مشتق تابع لیاپانوف (۲۸) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Im V(z_1(t),i)=\frac{d}{dt}\left[z_1^T(t)P_iz_1(t)\right]+\frac{d}{dt}\left[\int_{-\tau(t)}^{0}z_1^T(t+\theta)Qz_1(t+\theta)d\theta\right] \quad (۲۹)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\Im V(z_1(t),i)=z_1^T(t)\Big(&P_i\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP_i+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j\Big)z_1(t)\\&+z_1^T(t-\tau(t))\tilde{A}_{di}^TP_iz_1(t)\\&+z_1^T(t)P_i\tilde{A}_{di}z_1(t-\tau(t))+z_1^T(t)Qz_1(t)\\&-(1-\dot{\tau}(t))z_1^T(t-\tau(t))Qz_1(t-\tau(t))\end{aligned} \quad (۳۰)$$

با توجه به این‌که $|\dot{\tau}(t)|\le\mu$ است، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\Im V(z_1(t),i)\le z_1^T(t)\Big(&P_i\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP_i\\&+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j+Q\Big)z_1(t)\\&-(1-\mu)z_1^T(t-\tau(t))Qz_1(t-\tau(t))\\&+z_1^T(t-\tau(t))\tilde{A}_{di}^TP_iz_1(t)\\&+z_1^T(t)P_i\tilde{A}_{di}z_1(t-\tau(t))\end{aligned} \quad (۳۱)$$

برای دو جمله آخر (۳۱) با استفاده از ناتساوی (۱۲) موجود در لم ۲ و تعریف $\tilde{Q}=(1-\mu)Q$ ناتساوی زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}2z_1^T(t)P_i\tilde{A}_{di}z_1(t-\tau(t))\le\\z_1^T(t)P_i\tilde{A}_{di}\tilde{Q}^{-1}\tilde{A}_{di}^TP_iz_1(t)\\+z_1^T(t-\tau(t))\tilde{Q}z_1(t-\tau(t))\end{aligned} \quad (۳۲)$$

با استفاده از (۳۲) برای $\Im V(z_1(t),i)$ داریم:

$$\begin{aligned}\Im V(z_1(t),i)\le z_1^T(t)\Big(&P_i\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP_i\\&+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j+Q\\&+P_i\tilde{A}_{di}\tilde{Q}^{-1}\tilde{A}_{di}^TP_i\Big)z_1(t)\end{aligned} \quad (۳۳)$$

در نتیجه در (۳۳)، برای این‌که $\Im V(z_1(t),i)<0$ باشد، باید ناتساوی زیر برقرار باشد:

$$P_i\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP_i+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j+Q+P_i\tilde{A}_{di}\tilde{Q}^{-1}\tilde{A}_{di}^TP_i<0 \quad (۳۴)$$

با اعمال مکمل شور در (۳۴) ناتساوی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} P_i\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP_i+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j+Q & P_i\tilde{A}_{di} \\ * & -\tilde{Q} \end{bmatrix}<0 \quad (۳۵)$$

با جایگذاری $\tilde{A}_i$ و $\tilde{A}_{di}$ از (۲۰) در (۳۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_i\left(\bar{A}_{11i}-\bar{A}_{12i}C_i\right)+\left(\bar{A}_{11i}-\bar{A}_{12i}C_i\right)^TP_i+\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}P_j+Q & P_i\left(\bar{A}_{d11i}-\bar{A}_{d12i}C_i\right) \\ * & -\tilde{Q} \end{bmatrix}<0 \quad (۳۶)$$

سپس با ضرب $X_i=P_i^{-1}$ در دو طرف ناتساوی (۳۶) و تعریف $Y_i=C_iX_i$ ناتساوی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} J_i+X_i\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}X_j^{-1}X_i+X_iQX_i & \bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i \\ * & -X_i\tilde{Q}X_i \end{bmatrix}<0 \quad (۳۷)$$

$$J_i=\bar{A}_{11i}X_i-\bar{A}_{12i}Y_i+X_i\bar{A}_{11i}^T-Y_i^T\bar{A}_{12i}^T$$

با استفاده از مکمل شور ناتساوی (۳۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$-X_i\tilde{Q}X_i-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y\right)^T\left(J_i+X_i\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}X_j^{-1}X_i+X_iQX_i\right)^{-1}\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y\right)<0 \quad (۳۸)$$

[1] Weak infinitesimal operator

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

در ادامه برای برخورد با جمله غیرخطی $-X_i\tilde{Q}X_i$ در (۳۸) از نکته ۱ استفاده کرده‌ایم.

نکته ۱ : با توجه به این‌که رابطه زیر

$$(X_i-\tilde{Q}^{-1})\tilde{Q}(X_i-\tilde{Q}^{-1})=X_i\tilde{Q}X_i-2X_i+\tilde{Q}^{-1}\geq 0$$

همیشه برقرار است، خواهیم داشت:

$$-X_i\tilde{Q}X_i\leq -2X_i+\tilde{Q}^{-1} \qquad (۳۹)$$

در نتیجه با در نظر گرفتن ناتساوی (۳۹) در نکته ۱ و به‌کار بردن آن در (۳۸) خواهیم داشت:

(۴۰)

$$-2X_i+\tilde{Q}^{-1}-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y\right)^T$$
$$\left(J_i+X_i\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}X_j^{-1}X_i+X_iQX_i\right)^{-1}\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y\right)<0$$

با اعمال دوباره مکمل شور به (۴۰) ناتساوی ماتریسی زیر بدست می‌آید:

(۴۱)

$$\begin{bmatrix} J_i+X_i\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}X_j^{-1}X_i+X_iQX_i & \bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i \\ * & -2X_i+\tilde{Q}^{-1}\end{bmatrix}<0$$

در این مرحله برای بررسی احتمال‌های انتقال نیمه معلوم ناتساوی ماتریسی (۴۱) با استفاده از مکمل شور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_i+X_i\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}X_j^{-1}X_i+X_iQX_i$$
$$-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)\left(-2X_i+\tilde{Q}^{-1}\right)^{-1} \qquad (۴۲)$$
$$\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)^T<0$$

با توجه به این نکته که $\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}=0$ است، رابطه زیر همیشه برقرار است:

$$\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij}W_i=0 \qquad (۴۳)$$

که در آن $W_i=W_i^T$ ماتریس‌های وزنی آزاد[1] هستند. در حقیقت ماتریس‌های W_i، ماتریس‌های انتخابی هستند. برای حل مسئله عدم دسترسی کامل به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال، عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس احتمال انتقال را به وسیله (۸) به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\Psi_i=J_i+\sum_{j\in\ell_\kappa^i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i-W_i\right)$$
$$+\sum_{j\in\ell_{u\kappa}^i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i-W_i\right)+X_iQX_i$$
$$-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)\left(-2X_i+\tilde{Q}^{-1}\right)^{-1} \qquad (۴۴)$$
$$\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)^T<0$$

با توجه به این‌که $\lambda_{ij}\geq 0\ (i,j\in\ell,j\neq i)$ و $\lambda_{ii}<0$، $\left(\lambda_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{ij}\right)$ می‌باشند، واضح است که برای هر $i\in\ell_\kappa^i$، $\Psi_i<0$ می‌شود اگر مجموعه LMI های زیر برقرار باشند:

$$\zeta_i+\lambda_{ii}X_i+\sum_{j\in\ell_\kappa^i,j\neq i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i\right)$$
$$+X_iQX_i-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right) \qquad (۴۵)$$
$$\left(-2X_i+\tilde{Q}^{-1}\right)^{-1}\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)^T<0,\ i\in\ell_\kappa^i$$

$$\sum_{j\in\ell_{u\kappa}^i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i-W_i\right)<0,\ \ i\in\ell_\kappa^i \qquad (۴۶)$$

از طرف دیگر، واضح است که برای هر $i\in\ell_{u\kappa}^i$، $\Psi_i<0$ می‌شود اگر مجموعه LMI های زیر برقرار باشند:

$$\zeta_i+\sum_{j\in\ell_\kappa^i,j\neq i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i\right)+X_iQX_i$$
$$-\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)\left(-2X_i+\tilde{Q}^{-1}\right)^{-1} \qquad (۴۷)$$
$$\left(\bar{A}_{d11i}X_i-\bar{A}_{d12i}Y_i\right)^T<0,\qquad i\in\ell_{u\kappa}^i$$

(۴۸)

$$\lambda_{ii}\left(X_j-W_i\right)+\sum_{j\in\ell_{u\kappa}^i,j\neq i}\lambda_{ij}\left(X_iX_j^{-1}X_i-W_i\right)<0,\ i\in\ell_{u\kappa}^i$$

که ζ_i در قضیه ۱ تعریف شده است.

بنابراین اگر مجموعه ناتساوی‌های ماتریسی خطی (۴۵) تا (۴۸) برقرار باشند، پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) تضمین می‌شود. با تعریف $R=Q^{-1}$ و در نظر گرفتن (۲۵) و (۲۶) و اعمال مکمل شور، ناتساوی‌های (۲۱) و (۲۲) به ترتیب برای $i\in\ell_\kappa^i$ و $i\in\ell_{u\kappa}^i$ معادل ناتساوی‌های (۴۵) و (۴۷) هستند. به طور مشابه، ناتساوی‌های (۲۳) و (۲۴) به ترتیب از ناتساوی‌های (۴۶) و (۴۸) بدست می‌آیند. در نتیجه اگر مجموعه LMI های (۲۱) تا (۲۴) برقرار شوند، در آن‌صورت $C_i=Y_iX_i^{-1}$ می‌شود و پایداری تصادفی سیستم (۲۰) تضمین می‌شود و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۳-۲- طراحی کنترل کننده مود لغزشی و بدست آوردن قانون کنترل

در این قسمت به طراحی قانون کنترل $u(t)$ برای تضمین رسیدن مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته به سطح لغزش $s(t,i)=0$ برای سیستم پرش مارکوف همراه با تأخیر زمانی با احتمال‌های انتقال نیمه معلوم می‌پردازیم. در حقیقت، بدون دسترسی به عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال Λ، کنترل‌کننده مود لغزشی وابسته به مود برای پایداری تصادفی سیستم حلقه‌بسته طراحی گردیده است.

قضیه ۲- سیستم پرش مارکوف (۱۶) همراه با تأخیر متغیر با زمان $\tau(t)$ و احتمال‌های انتقال نیمه معلوم (۸) را در نظر بگیرید. فرض کنید سطح لغزش به صورت (۱۹) انتخاب شده باشد و C_i از قضیه ۱ بدست آمده باشد. اگر ماتریس‌های $\theta_i>0$ و $V_i=V_i^T$ به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه LMI های زیر برای هر $i\in\ell$ برقرار باشند:

[1] Free weighting matrices

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

$$\theta_j - V_i \le 0, \qquad j \in \ell^i_{u\kappa}, j \ne i \tag{۴۹}$$

$$\theta_j - V_i \ge 0, \qquad j \in \ell^i_{u\kappa}, j = i \tag{۵۰}$$

در آن‌صورت مسیرهای حالت سیستم (۱۶) با استفاده از قانون کنترل زیر می‌توانند در زمان محدود به سطح لغزشی $s(t,i)=0$ وارد شوند:

$$\begin{aligned} u(t) = &-(C_{2i}B_{2i})^{-1}\left(\begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\left(\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t-\tau(t))\right)\right) \\ &-(\varepsilon_i + f_i)\, sign\left(B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\right) \\ &-\frac{1}{2}(\theta_i C_{2i} B_{2i})^{-1} \sum_{j\in\ell^i_\kappa} \lambda_{ij}\left(\theta_j - V_i\right) s(t) \end{aligned} \tag{۵۱}$$

که در آن $\varepsilon_i > 0$ یک مقدار ثابت کوچک معلوم است.

اثبات قضیه ۲- در ابتدا تابع لیاپانوف را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$V(z,t,i) = \frac{1}{2} s^T(t)\theta_i s(t) \tag{۵۲}$$

برطبق معادله‌های (۱۶) و (۱۹)، $\dot{s}(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\dot{z}(t) \\ &= \begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\Big(\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t-\tau(t)) \\ &\qquad + \begin{bmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ B_{2i}\end{bmatrix}\left[u(t) + F_i w(t)\right]\Big) \end{aligned} \tag{۵۳}$$

با استفاده از عملگر مشتق متوسط و در نظر گرفتن (۵۳)، مشتق تابع لیاپانوف (۵۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \Im V(z,t,i) = &\, s^T(t)\theta_i\left(\begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\left(\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t-\tau(t))\right)\right) \\ &+ s^T(t)\theta_i C_{2i} B_{2i}\left[u(t) + F_i w(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell} \lambda_{ij} s^T(t)\theta_j s(t) \end{aligned} \tag{۵۴}$$

با توجه به این‌که $\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij} = 0$، معادله زیر برای ماتریس‌های اختیاری $V_i = V_i^T$ برقرار است:

$$-\frac{1}{2}\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij} s^T(t) V_i s(t) = 0, \quad i \in \ell \tag{۵۵}$$

$V_i = V_i^T$ ماتریس‌های وزنی آزاد می‌باشند. با اضافه کردن سمت چپ معادله (۵۵) به (۵۴) و تفکیک عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس نرخ احتمال انتقال به وسیله (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Im V(z,t,i) = &\, s^T(t)\theta_i\begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\left(\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t-\tau(t))\right) \\ &+ s^T(t)\theta_i C_{2i} B_{2i}\left[u(t) + F_i w(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij} s^T(t)\theta_j s(t) - \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell}\lambda_{ij} s^T(t) V_i s(t) \\ = &\, s^T(t)\theta_i\begin{bmatrix} C_{1i} & C_{2i}\end{bmatrix}\left(\bar{A}_i z(t) + \bar{A}_{di} z(t-\tau(t))\right) \\ &+ s^T(t)\theta_i C_{2i} B_{2i}\left[u(t) + F_i w(t)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell^i_\kappa}\lambda_{ij}\left(s^T(t)\left(\theta_j - V_i\right)s(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell^i_{u\kappa}}\lambda_{ij}\left(s^T(t)\left(\theta_j - V_i\right)s(t)\right) \end{aligned} \tag{۵۶}$$

با جایگذاری قانون کنترل $u(t)$ (۵۱) در (۵۶) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Im V(z,t,i) = &\, s^T(t)\theta_i C_{2i} B_{2i}\left(-(\varepsilon_i + f_i)\, sign\left(B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\right)\right. \\ &\left. + F_i w(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\ell^i_{u\kappa}}\lambda_{ij}\left(s^T(t)\left(\theta_j - V_i\right)s(t)\right) \end{aligned} \tag{۵۷}$$

توجه داشته باشید که ناتساوی‌های (۴۹) و (۵۰) به ترتیب برای $i \in \ell^i_\kappa$ و $i \in \ell^i_{u\kappa}$ معادل ناتساوی زیر هستند:

$$\frac{1}{2}\sum_{j\in\ell^i_{u\kappa}}\lambda_{ij}\left(s^T(t)\left(\theta_j - V_i\right)s(t)\right) < 0 \tag{۵۸}$$

بنابراین با توجه به ناتساوی‌های (۴۹) ، (۵۰) و همچنین رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Im V(z,t,i) &\le -(\varepsilon_i + f_i)\left\|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\right\| \\ &\quad + f_i \left\|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\right\| \\ &\le -\varepsilon_i \left\|B_{2i}^T C_{2i}^T \theta_i s(t)\right\| < 0 \end{aligned} \tag{۵۹}$$

توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} \left\|\theta_i s(t)\right\|^2 &= \left(\theta_i^{\frac{1}{2}} s^T(t)\right)^T \theta_i \left(\theta_i^{\frac{1}{2}} s^T(t)\right) \\ &\ge \lambda_{min}(\theta_i)\left\|\theta_i^{\frac{1}{2}} s^T(t)\right\|^2 \end{aligned} \tag{۶۰}$$

و

$$V(z,t,i) = \frac{1}{2} s^T(t)\theta_i s(t) = \frac{1}{2}\left\|\theta_i^{\frac{1}{2}} s^T(t)\right\|^2 \tag{۶۱}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Im V(z,t,i) \le -\phi_i V^{\frac{1}{2}}(z,t,i) \tag{۶۲}$$

$$\phi_i = \sqrt{2}\varepsilon_i \min_{i\in\ell}\left(\lambda_{\min}(\theta_i)\right)^{\frac{1}{2}} \min_{i\in\ell}\left\{\left(\lambda_{\min}\left(C_{2i}B_{2i}B_{2i}^T C_{2i}^T\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

که در آن $\phi_i > 0$ است. با استفاده از رابطه دینکین[1] [۳۶] در ناتساوی (۶۲)، داریم:

$$2E\left[V\left(z(t), r(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le -\phi_i t + 2V^{\frac{1}{2}}\left(z(0), r(0)\right) \tag{۶۳}$$

در نتیجه می‌توان گفت یک زمان رسیدن t^* به صورت زیر

$$t^* = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(z_0, r_0)}{\phi_i} \tag{۶۴}$$

وجود دارد به طوری‌که $V(z,t,i) = 0$، و به دنبال آن $s(t,i) = 0$ برای $t \ge t^*$ برقرار است. بنابراین با اعمال قانون کنترل مطلوب، مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته در زمان محدود به سطح لغزشی تعیین‌شده (۱۹) می‌رسند و این اثبات را کامل می‌کند. ■

[1] Dynkin's formula

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

۴- مثال عددی و شبیه سازی

در این قسمت به بیان یک مثال عددی برای نشان دادن اعتبار و درستی روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم. سیستم پرش مارکوف تأخیردار (۶) با احتمال‌های انتقال نیمه معلوم (۸) با سه مود عملیاتی $N=3$ و ماتریس‌ها و پارامترهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix},\quad A_{d1}=\begin{bmatrix}-2 & 0.1\\ 0.5 & -1\end{bmatrix},$$
$$A_2=\begin{bmatrix}-0.15 & -0.49\\ 1.5 & -2.1\end{bmatrix},\quad A_{d2}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 0.1 & 0.5\end{bmatrix},$$
$$A_3=\begin{bmatrix}-0.3 & -0.15\\ 1.5 & -1.8\end{bmatrix},\quad A_{d3}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.2\\ 0.1 & -0.3\end{bmatrix},$$
$$B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},$$
$$F_1=F_2=F_3=1,$$
$$w(t)=0.1\sin(t),\quad \mu=0.92$$

ماتریس نرخ احتمال انتقال به صورت زیر داده شده است:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}? & ? & 1.1\\ 0.2 & ? & ?\\ 0.9 & 0.2 & -1.1\end{bmatrix}$$

در ابتدا با حل مجموعه ناتساوی‌های ماتریسی خطی (۲۱)- (۲۴) در قضیه ۱ توسط جعبه ابزار LMI در نرم‌افزار MATLAB، داریم:

$$X_1=0.1840,\ X_2=0.2116,\ X_3=0.3003,$$
$$Y_1=1.1626,\quad Y_2=1.2732,\quad Y_3=2.4042,$$
$$W_1=0.1754,\ W_2=0.1828,\quad R=0.0139.$$

در نتیجه پارامتر سطح لغزشی خطی C_i با استفاده از (۲۷) به صورت زیر بدست می‌آید:

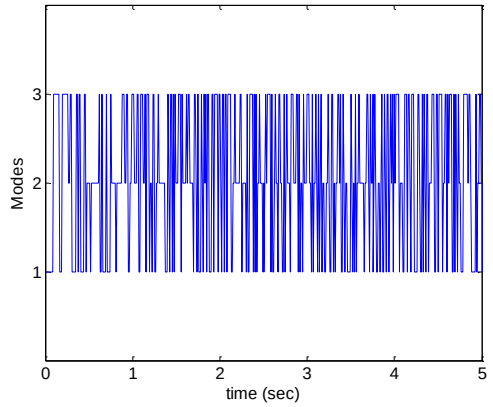
$$C_1=6.3181,\quad C_2=6.0184,\quad C_3=8.0050$$

که در نتیجه منجر به پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی (۲۰) می‌شود.

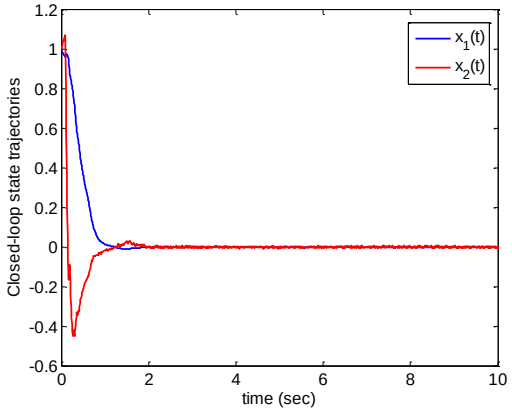
در مرحله بعد برای طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی به شکل (۵۱) حل ناتساوی‌های ماتریسی خطی (۴۹) و (۵۰) در قضیه ۲ صورت می‌گیرد و نتایج زیر را به همراه دارد:

$$\theta_1=2.7392,\quad \theta_2=1.4755,\quad \theta_3=0.4918,$$
$$V_1=2.1074,\quad V_2=0.9837,\quad V_3=1$$

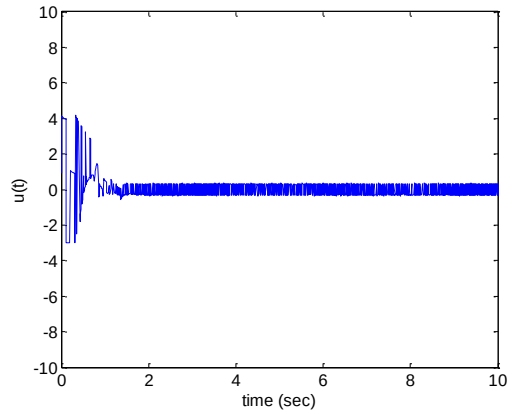
با انتخاب $f_1=f_2=f_3=0.1$ و $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0.2$ و در نظر گرفتن $\tau(t)=0.45+0.25\sin(5t)$ و $\dot{\tau}(t)<0.92$، نتایج شبیه‌سازی به صورت زیر بدست می‌آید. شکل ۱ فرآیند مارکوف $\{r_t,t\geq 0\}$ را نشان می‌دهد. شکل ۲ مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را برای مقادیر اولیه $x(0)=[1\ \ 1]^T$ نشان می‌دهد. همچنین قانون کنترل $u(t)$ اعمال شده به سیستم حلقه بسته در شکل ۳ آورده شده است. ناپیوستگی‌های موجود در ابتدای شکل سیگنال کنترلی به دلیل پرش سیستم پرش مارکوف از یک مود عملیاتی به مود دیگر می‌باشد. لازم به ذکر است که می‌توان با قرار دادن $\frac{s}{|s|+0.01}$ به جای $sign(s)$ در رابطه قانون کنترل $u(t)$، سیگنال کنترلی با وزوز[1] کمتر را بدست آورد که در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۱: تغییرات زمانی مود سیستم $r(t)$



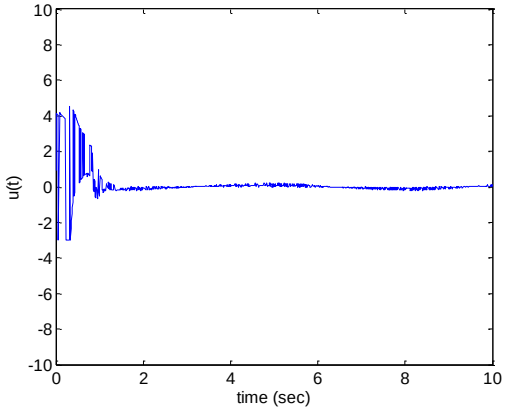
شکل ۲: مسیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ سیستم حلقه بسته



شکل ۳: قانون کنترل $u(t)$

[1] Chattering

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]



شکل ۴: قانون کنترل $u(t)$ با وزوز کمتر

با توجه به نتایج شبیه‌سازی، مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته در زمان محدود به سطح لغزشی مطلوب می‌رسند و صحت روش پیشنهاد شده را تأیید می‌کنند.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی برای سیستم‌های پرش مارکوف با تأخیر زمانی با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم در حضور اغتشاش مورد مطالعه قرار گرفت. در حقیقت برای حل مسئله نیمه معلوم بودن عناصر ماتریس نرخ احتمال انتقال، فضای احتمال محدود را به دو فضا با عناصر معلوم و نامعلوم افراز کردیم. همچنین سطح لغزش مورد نظر را خطی در نظر گرفته‌ایم. در این طراحی، در ابتدا با استفاده از ماتریس‌های وزنی آزاد و تفکیک عناصر معلوم و نامعلوم ماتریس نرخ احتمال انتقال، شرایط مستقل از تأخیر برای تضمین پایداری تصادفی دینامیک مود لغزشی بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شد و بر اساس آن ضریب سطح لغزش مورد نظر بدست آمد. سپس با انتخاب تابع لیاپانوف وابسته به مود و استفاده از ماتریس وزنی آزاد، طراحی قانون کنترل مود لغزشی $u(t)$ برای تضمین رسیدن مسیرهای حالت سیستم حلقه بسته به سطح لغزشی مطلوب صورت گرفته و در نتیجه پایداری تصادفی سیستم حلقه بسته حاصل شد. در آخر با ارائه یک مثال عددی، کارایی و درستی روش پیشنهاد شده نشان داده شد.

مراجع

[1] N. Krasovskii and E. A. Lidskii, “Analytical design of controllers in systems with random attributes. I. Statement of the problem, method of solving,” Autom. Remote Control, vol. 22, pt. Part 1–3, pp. 1021–1294,1961.

[2] G. L. Olsder and R. Suri, “Time optimal control of parts-routing in a manufacturing system with failure prone machines,” in Proceedings of 19th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 722–727, 1980.

[3] K. S. Narendra and S. S. Tripathi, “Identification and optimization of aircraft dynamics,” J. Aircraft, vol. 10, no. 4, pp. 193–199, 1973.

[4] Z. Mao, B. Jiang, and P. Shi, “H_∞ fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems,” IET Control Theory & Applications, 1(5), 1336–1343, 2007.

[5] A. H. Abolmasoumi and H. R. Momeni, “TCP Congestion Control for the Networks with Markovian Jump Parameters,” Advances in Electrical and Computer Engineering, 2011.

[6] X. Feng, K.A. Loparo, Y. Ji and H. J. Chizeck, “Stochastic Stability properties of jump linear systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, no. 1, pp. 38-53, 1992.

[7] Y. Ji and H. J. Chizeck, “Controllablity, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control,” IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 35, no. 7, pp 777-788, 1990.

[8] C. E. de Souza and M. D. Fragoso, “H_∞ control for linear systems with Markovian jumping parameters,” Control Theory and advanced Technology, vol. 9, no. 2, pp. 457-466, 1993.

[9] M. Mohammadian, A. H. Abolmasoumi, and H. R. Momeni, “H_∞ mode-independent filter design for Markovian jump genetic regulatory networks with time-varying delays,” Neurocomputing, p 10–18, 2012.

[10] A. H. Abolmasoumi and H. R. Momeni, “Robust Observer-based H_∞ Control of a Markovian Jump System with Different Delay and System Modes,” International Journal of Control, Automation, and Systems 9(4):768-776, 2011.

[11] P. Shi, E. K. Boukas and R. K. Agarwal, “Kalman filtering for continuous time uncertain systems with Markovian jumping parameters,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 8, pp. 1592-1597, 1999.

[12] E. K. Boukas, Stochastic Switching Systems: Analysis and Design . Birkhauser, New York, NY, 2006.

[13] L.X. Zhang, and E.K. Boukas, “Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities,” Automatica, 45(2), 436–468, 2009.

[14] L. Zhang and J. Lam, “Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]

[26] G. Wang, Q. Zhang, and V. Sreeram, "Robust delay-range-dependent stabilization of Markovian jump systems with mode-dependent time-delays and nonlinearities." Optimal Control Applications and Methods, 31 (3), 249–264, 2010.

[27] Y. Xia, and Y. Jia, "Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: An LMI approach," IEEE Transaction on Automatic Control, 48,1086_1092, 2003.

[28] P. Shi, Y. Xia, G. P. Liu, and D. Rees, "On designing of sliding-mode control for stochastic jump systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol.51, no. 1, pp. 97–103, Jan. 2006.

[29] Y. Niu, D. W. C. Ho, and X. Wang, "Sliding mode control for Itô stochastic systems with Markovian switching," Automatica, vol. 43, pp.1784–1790, 2007.

[30] L. Wu, P. Shi, and H. Gao, "State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 5, 2010.

[31] Y. Zhang, S. Xu, and Y. Chu, "Sliding mode observer–controller design for uncertain Markovian jump systems with time delays," International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012.

[32] N. Zohrabi, H. R. Momeni, and A. H. Abolmasoumi, "Sliding Mode Control of Markovian Jump Systems with Partly Unknown Transition Probabilities," IFAC Joint conference, Grenoble, France, February 2013.

[33] X. Mao, and C. Yuan. Stochastic differential equations with Markovian switching. Imperial College Press, 2006.

[34] K. S. Kim, Y. Park, and S. H. Oh, "Designing of robust sliding surfaces for parametric uncertain systems: A Riccati approach," Automatica, vol. 36, pp. 1041-1048, 2000.

[35] J. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "variable structure control: A survey." IEEE Transaction on Industrial Electronics, 40(1), 2-22, 1993.

[36] H. J. Kushner, Stochastic Stability and Control. New York: Academic, 1967.

descriptions," IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 55, NO. 7, 2010.

[15] Y. Zhang, Y. He, M. Wu and J. Zhang, "Stabilization for Markovian jump systems with partial information on transition probability based on free-connection weighting matrices," Automatica 47, 79–84, 2011.

[16] Y. Wang, Z. Zuo, and Y. Cui, "Stochastic stabilization of Markovian jump systems with partial unknown transition probabilities and actuator saturation," Circuits System Signal Process, 31:371–383, 2012.

[17] J. Feng, J. Lam, and Z. Shu, "Stabilization of Markovian systems via probability rate synthesis and output feedback," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 3, 2010.

[18] L.X. Zhang, and E. K. Boukas, "H_∞ control for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities," International Journal of Robust and Nonlinear Control, 19(8), 868–883, 2009.

[19]L.X. Zhang, and E. K. Boukas, "Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities," Automatica, 45(6), 1462–1467, 2009.

[20] X. Luan, F. Liu and P. Shi, "Finite-time filtering for non-linear stochastic systems with partially known transition jump rates," IET Control Theory and Applications, 2010.

[21] K. Benjelloun, E. K. Boukas and H. Yang, "Robust stabilizability of uncertain linear time-delay systems with Markovian jumping parameters," Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, vol.118, pp. 776-783, 1996.

[22] E. K. Boukas, Z. K. Liu and P. Shi, "Delay-dependent stability and output feedback stabilization of Markovian jump systems with time delay," International Journal of Control, vol. 74, no. 4, pp. 329-331, 2001.

[23] Y. Cao and J. Lam, "Robust H_∞ control of uncertain Markovian jump systems with time delay," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, pp. 77–82, 2000.

[24] E.K. Boukas and Z.K. Liu Deterministic and Stochastic Time Delay Systems. Birkhauser, Boston, 2002.

[25] M. Wu, Y. He, J. She, and G. Liu. Delay-dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay systems. Automatica, 40:1435-1439, 2004.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-10]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.3.6.2]