مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۸، صفحه ۲۱-۱۵

خواص ساختاری سیستم‌های نمونه‌برداری چند نرخی

محمد مهدی شرع پسند[1]، محسن منتظری[2]

[1] عضو هیات علمی، گروه پژوهشی برق و الکترونیک، پژوهشکده برق، مکانیک و ساختمان، پژوهشگاه استاندارد ، sharepasand@standard.ac.ir

[2] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، m_montazeri@sbu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۶ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۲۴ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۹

چکیده: کاربرد سیستم‌های کنترل شبکه شده که در آن‌ها برای انتقال سیگنال‌های حسگری و کنترلی از یک شبکه مشترک استفاده می‌شود، در حال گسترش روزافزون بوده و لذا این سیستم ها، طی دهه اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. از سوی دیگر، سیستم‌های نمونه برداری چند نرخی از مدت‌ها پیش، موضوع پژوهش‌های متعدد بوده اند. در این مقاله ابتدا شرایطی که تحت آن یک سیستم شبکه شده، به صورت سیستم چند نرخی قابل مدل‌سازی است، بیان شده و سپس با استفاده از نتایج اخیر در حوزه سیستم‌های شبکه شده، آخرین نتایج موجود در خصوص کنترل‌پذیری و پایدارپذیری سیستم‌های نمونه برداری چند نرخی، توسعه داده شده است. بدین منظور، شرایط کافی که کنترل پذیری (پایدارپذیری) سیستم کنترل نمونه‌برداری شده چند نرخی را حفظ کند، ارائه شده است. مثالی عددی جهت تبیین نتایج ارائه شده‌است.

کلمات کلیدی: خواص ساختاری، سیستم‌های کنترل شبکه شده، سیستم‌های نمونه‌برداری چند نرخی، دنباله مخابراتی

Structural Properties of Multirate Sampled-Data Systems

Mohammad Mahdi Share Pasand, Mohsen Montazeri

Abstract: The application of Networked Control Systems (NCS) in which sensory and control signals are transmitted via shared data communication networks, is growing significantly and these systems have been the subject of research during the last decade. On the other hand, multirate sampled data systems have been investigated since a long time. In this paper, conditions under which a networked control system could be modeled as a multi rate sampled data system are provided. After that, using recent results in the field of networked control systems, existing results for controllability and stabilizability of multi rate sampled data systems are enhanced. For this purpose, sufficient conditions are provided based on the system eigenvalues, to preserve controllability (stabilizability) of a multi rate sampled data system. The results are compared to the existing results in the literature. A numerical example is included as well for clarification and comparison.

Keywords: Structural properties, Networked control systems, Multirate sampled data systems, communication sequence.

نویسنده عهده دار مکاتبات: محمد مهدی شرع پسند

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.4.1]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.15]

۱- مقدمه

سیستم‌های کنترل شبکه شده[1] یا تحت شبکه سیستم‌هایی هستند که در آن ها حلقه پسخور از طریق یک شبکه مشترک برقرار شده باشد [۱]. در این سیستم ها، داده‌های حسگری یا کنترلی از طریق شبکه به/از کنترل کننده (ها) ارسال/دریافت می‌شوند. این سیستم‌ها با گسترش کاربرد شبکه‌های انتقال داده، مخابرات بی سیم و شبکه‌های صنعتی، توسعه روزافزون یافته و امروزه بخش عمده‌ای از فرآیندهای صنعتی، توسط سیستم های کنترلی شبکه شده، کنترل می شوند. از مزایای استفاده از شبکه در حلقه کنترلی می توان به مزیت اقتصادی، سهولت بازپیکربندی[2] و عیب یابی و موارد مشابه اشاره نمود [۱].

چنین سیستم‌هایی در کنترل سیستم‌های گسترده صنعتی [۱] ، سیستم‌های کنترل هوشمند ساختمان [۲] ، کنترل کارکردهای اتومبیل [۳، ۴] مانند سیستم تعلیق، سیستم سوخت رسانی و مانند آن، و موارد مشابه بسیار کاربرد دارند. در یک سیستم شبکه شده، به دلیل محدودیت‌های شبکه مخابراتی (تاخیر، محدودیت پهنای باند، خطای ناشی از تعداد ارقام محدود داده[3]، از دست رفتن بسته های داده وغیره) رفتار پویای سیستم با سیستم اولیه (شبکه نشده) متفاوت می‌باشد. محدودیت‌های ناشی از حضور شبکه میان اجزای حلقه کنترل، بسته به پروتکل کنترل دسترسی در شبکه متفاوت می‌باشند. از دیدگاه کنترلی، شبکه‌های انتقال داده به دو نوع مبتنی بر رقابت[4] و بدون رقابت[5] طبقه‌بندی می‌شوند[۵]. در شبکه‌های بدون رقابت که مورد نظر این پژوهش هستند، کنترل کننده می‌تواند حسگر/عملگر مورد نظر خود را جهت برقراری ارتباط انتخاب نماید. این وضعیت با شبکه‌های مبتنی بر رقابت مانند اینترنت و اترنت که در آن گره‌ای که زودتر اقدام به درخواست تخصیص عرض باند می‌نماید، در اولویت قرار می‌گیرد، متفاوت است[۵].

از آن‌جایی که تاخیر انتشار داده در شبکه‌های بدون رقابت، ثابت و معمولا قابل اغماض است [۶] محدودیت اصلی در این شبکه‌ها محدودیت عرض باند می‌باشد. محدودیت عرض باند بدین معناست که تمامی اطلاعات حسگری یا عملگری نمی‌توانند در یک لحظه و به طور همزمان از طریق شبکه انتقال داده شوند. لذا در حالی که الگوریتم‌های کنترلی موجود، تمامی حسگرها به طور همزمان خوانده شده و تمامی سیگنالهای کنترلی به طور همزمان به فرآیند اعمال می‌شوند، در سیستم شبکه شده، حسگرها طی یک توالی یا دنباله مخابراتی حسگر/خروجی[6] توسط کنترل کننده خوانده شده و بردار کنترلی نیز بر اساس یک دنباله مخابراتی عملگر/ورودی[7] به عملگر ارسال می‌شود. در نتیجه سیگنالهای حسگری و کنترلی با تاخیرهای متفاوت و متغیر ارسال می‌شوند[۷]. این مساله منجر به ایجاد تفاوتهای اساسی میان سیستم شبکه شده و سیستم اولیه می‌شود[۷]. از جمله این تفاوتها می‌توان به تغییر خصوصیات ساختاری سیستم اولیه و از دست رفتن احتمالی کنترل‌پذیری، رویت‌پذیری و خصوصیات مشابه اشاره نمود. [۱۲–۸] هم‌چنین یک قانون کنترلی پایدارساز برای سیستم اولیه ممکن است برای سیستم شبکه شده پایدارساز نبوده و لذا بی توجهی به دینامیک شبکه منجر به از دست رفتن پایداری شود. قانون کنترل/رویت بهینه برای سیستم اولیه لزوما قانون بهینه یا حتی مناسبی برای سیستم شبکه شده نمی‌باشد. این موارد انگیزه اصلی پژوهشهای پیشین به منظور توسعه روشهای کنترل و تخمین به سیستمهای دارای محدودیت مخابراتی اعم از اینکه شبکه به کار رفته مبتنی بر رقابت بوده و یا بدون رقابت باشد، شده است.

در اثر حضور شبکه به عنوان یک دینامیک جدید در حلقه کنترلی، سه‌گانه حسگر، عملگر، کنترل کننده به چهارگانه حسگر،عملگر، شبکه و کنترل‌کننده تبدیل شده و مدلسازی شبکه بر اساس تاثیرات آن بر عملکرد کنترل و تخمین شامل تاخیر، محدودیت عرض باند و از دست رفتن داده از اهمیت خاصی برخوردار است [۱۳و۱۴]. هم‌چنین زمان‌بندی دسترسی حسگرها و عملگرها به شبکه برای ارسال/دریافت داده حائز اهمیت می‌باشد. تعیین زمان‌بندی دسترسی که می‌توان آن را صورت تعمیم یافته زمان نمونه‌برداری دانست، ممکن است به دو روش صورت پذیرد. روش نخست تعیین زمان‌بندی و سپس تعیین قانون کنترلی می‌باشد. در این روش ابتدا یک دنباله مخابراتی مشخص تعیین شده و سپس برای سیستم حاصل (که در نتیجه ادغام با دنباله مخابراتی منظور شده، به صورت یک سیستم خطی تغییر پذیر با زمان یا ترکیبی در می آید) قانون کنترلی تعیین می‌شود. این روش در فصل ششم [۵]، [۸ – ۱۲] و بسیاری منابع دیگر اتخاذ شده است. در روش دوم ابتدا یک قانون کنترلی تعیین شده و سپس سعی می‌شود برای سیستم حلقه بسته یک روش زمان‌بندی مناسب انتخاب شود. در این روش برخلاف روش اول، لازم است ارتباطی میان پایداری حلقه بسته و دنباله مخابراتی (که معمولا بر حسب حداکثر تاخیر ایجاد شده بیان می‌شود) استخراج گردد. این روش در فصل هفتم [۵] و [۱۵] دنبال شده است.

اولین مساله مورد بررسی در رویکرد نخست، موضوع خواص ساختاری سیستم شبکه شده است. یک دنباله مخابراتی مناسب می‌تواند تاثیر بسزایی روی عملکرد کنترل و تخمین داشته باشد. حداقل خصوصیتی که این دنباله باید احراز نماید، این است که خواص ساختاری سیستم اولیه را حفظ نماید بدین معنا که با فرض کنترل‌پذیر/رویت پذیر بودن سیستم اولیه، سیستم شبکه شده نیز کنترل پذیر/ رویت پذیر باشد. لذا لازم است خصوصیات چنین دنباله‌ای معرفی شوند. حفظ خواص ساختاری سیستم با توجه به کاربرد نظریه کنترل بهینه برای سیستم‌های خطی تغییرپذیر با زمان، زمینه ساز استفاده از روشهای کنترل و تخمین بهینه مجذوری LQR و

---

[1] Networked Control Systems (NCS)
[2] Reconfiguration
[3] Quantization error
[4] Contention-based
[5] Contention free
[6] Sensor/output Communication sequence
[7] Actuator/input Communication sequence

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.4.1]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.15]

LQG بوده و لذا بخش عمده‌ای از مساله کنترل و تخمین سیستمهای شبکه شده را مرتفع می‌نماید.

این موضوع در [۱۱و ۱۶] برای سیستم‌هایی که سیگنال کنترلی / حسگری در صورت عدم دسترسی به شبکه به صفر بازنشانده می‌شود و در [۵ و ۸–۱۲] برای سیستم‌هایی که از نگهدار مرتبه صفر در خروجی و ورودی سیستم اولیه، استفاده می‌کنند، بررسی شده است. نتایج در بخش آتی به همراه مدل به کار رفته برای سیستم شبکه شده، جهت مرور و مقایسه با نتایج این پژوهش آورده می‌شود. در بخش سوم، به موضوع دوره تناوب دنباله مخابراتی پرداخته شده و نتایج پژوهش ارائه می‌شود. در بخش چهارم، با ارائه یک مثال عددی، نتایج این پژوهش با نتایج پژوهشهای پیشین مقایسه می‌شود. بخش پنجم به جمع‌بندی و نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

۲- بیان مساله

توصیف خطی تغییرناپذیر با زمان زیر برای سیستم اولیه مورد نظر می‌باشد.

$$x(k+1) = A_{n\times n}x(k) + Bu(k) \tag{۱}$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$u(k) = S_A(k)\hat{u}(k) + \bar{S}_A(k)u(k-1) \tag{۲}$$

$$\hat{y}(k) = S_S(k)y(k) + \bar{S}_S(k)\hat{y}(k-1) \tag{۳}$$

ماتریس‌های زمان‌بندی $S_A(k)$ ، $S_S(k)$ نشان‌دهنده دسترسی/عدم دسترسی یک عملگر/حسگر به شبکه انتقال داده در k امین پنجره زمانی می‌باشند. به عبارت دیگر، اگر درایه قطری $S_A(k)(i,i)$ برابر ۱ باشد به این معناست که عملگر i ام در k امین پنجره زمانی یعنی بازه زمانی $t_k \le t \le t_{k+1}$ به شبکه دسترسی داشته و لذا داده‌های به روز شده را از سوی کنترل‌کننده دریافت می‌نماید. در صورتی که این درایه صفر باشد، به معنای آن است که عملگر i ام در بازه زمانی مذکور، به شبکه دسترسی نداشته و لذا باید از داده‌های قبلی استفاده نماید. ماتریس‌های مکمل زمانبندی $\bar{S}_A(k)$ و $\bar{S}_S(k)$به عنوان تفاضل ماتریس‌های زمان بندی از ماتریس همانی با ابعاد یکسان تعریف میشوند. به عبارت دیگر؛

$$\bar{S}_A(k) = I - S_A(k)$$

$$\bar{S}_S(k) = I - S_S(k)$$

در[۹، ۱۰ و ۱۷] فرض شده است که عملگر در این بازه زمانی، سیگنال کنترلی را به صفر بازنشانی می‌نماید. در حالی که [۵،۸ و ۱۲] فرض رایج‌تر نگهدار مرتبه صفر را در نظر گرفته‌اند. این مقاله نیز مدل نگهدار مرتبه صفر را در نظر می‌گیرد. ترم دوم سمت راست رابطه (۲) و (۴) بیان‌کننده استفاده از نگهدار مرتبه صفر هستند. بدین معنا که در شرایط عدم ارتباط با شبکه، مقادیر قبلی استفاده می‌شوند. درایه‌های غیر قطری ماتریسهای زمان بندی برابر صفر است.

$$S_A(k) = \mathrm{diag}(s_{Ai}(k))$$

$$S_S(k) = \mathrm{diag}(s_{Si}(k)) \tag{۴}$$

ماتریسهای زمان‌بندی (۲) الی (۴) در پژوهشهای بسیاری به عنوان مدل شبکه به کار رفته اند. از جمله می‌توان به [۱۲–۸] اشاره نمود. این ماتریسها برای مدلسازی سیستمهای نمونه برداری شده چند نرخی نیز استفاده شده‌اند[۱۷]. این ماتریس‌ها می‌توانند از دست رفتن بسته های داده را نیز مدلسازی نمایند[۵]. محدودیت عرض باند شبکه عبارتست از:

$$\mathrm{rank}(S_A(k)) \le b_A \forall k \in Z$$

$$\mathrm{rank}(S_S(k)) \le b_S \quad \forall k \in Z \tag{۵}$$

در نتیجه، سیستم حاصل از اتصال شبکه با عرض باند محدود به سیستم اولیه، می‌تواند با ادغام بردارهای نگهدار مرتبه صفر ورودی و/یا خروجی در بردار حالت به صورت سیستم تغییر پذیر با زمان خطی زیر توصیف شود.

$$A(k) = \begin{bmatrix} A & B\bar{S}_A(k) \\ 0 & \bar{S}_A(k) \end{bmatrix}, B(k) = \begin{bmatrix} BS_A(k) \\ S_A(k) \end{bmatrix} \tag{۶}$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ S_S(k)C & \bar{S}_S(k) \end{bmatrix}$$

$$C(k) = \begin{bmatrix} S_S(k)C & \bar{S}_S(k) \end{bmatrix} \tag{۷}$$

رابطه (۶) ارتباط ورودی و حالت و رابطه (۷) ارتباط خروجی و حالت را نشان می‌دهد. می‌توان با ادغام هر دو بردار در بردار حالت، رابطه کلی‌تری را استخراج نمود.

تعریف ۱– دنباله مخابراتی متناوب خروجی (σ_{ps}) /ورودی (σ_{pa}) یک مجموعه مرتب از ماتریس‌های زمان‌بندی خروجی/ورودی است. این دنباله تعداد اعضای نامحدود داشته و متناوب می‌باشد. یک تناوب از چنین دنباله‌ای به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\sigma_{pa} = \{S_A(0), \dots S_A(p_A - 1)\}$$

$$\sigma_{ps} = \{S_S(0), \dots S_S(p_S - 1)\}$$

که در آن p_A دوره تناوب دنباله مخابراتی عملگرها و p_S دوره تناوب دنباله مخابراتی حسگرها را نشان می دهند.

تعریف ۲– دنباله مخابراتی متناوب خروجی/ورودی مجازنامیده می‌شود اگر به تمامی حسگرها/عملگرها در هر تناوب دنباله لااقل یک بار دسترسی داده شود[۵]. در نتیجه رتبه ماتریس حاصل از جمع ماتریسهای زمان بندی حسگر/ عملگر، با تعداد حسگرها/ عملگرها برابر خواهد بود.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.4.1]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.15]

(دسترسی مکرر به یک حسگر/عملگر، رتبه این ماتریس را اضافه نخواهد کرد)به عبارت دیگر:

$$rank \sum_{k=0}^{p_S-1} S_S(k) = n_y$$
$$rank \sum_{k=0}^{p_A-1} S_A(k) = n_u \quad (۸)$$

۳- دنباله مخابراتی و خواص ساختاری سیستم شبکه شده

ذیلا ارتباط میان خصوصیات یک دنباله مخابراتی و خواص ساختاری سیستم بررسی شده است. این دو لم از [۱۸] نقل می‌شوند.

لم ۱- سیستم شبکه شده (۷) با دنباله مخابراتی خروجی σ_{ps}رویت‌پذیر/آشکارپذیر است اگر: [۱۸]

- سیستم اولیه (۱) رویت‌پذیر/آشکارپذیر باشد.
- دنباله مخابراتی خروجی σ_{ps} مجاز باشد.

لم ۲- سیستم شبکه شده (۶) با دنباله مخابراتی ورودی $\sigma_{pa} = \{S_A(0), \dots S_A(p_A-1)\}$ کنترل‌پذیر/پایدارپذیر است اگر: [۱۸]

- سیستم اولیه (۱) کنترل‌پذیر/پایدارپذیر باشد.
- دنباله مخابراتی ورودی σ_{pa} مجاز باشد.
- چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی ورودی به ازای هیچ یک از مقادیر ویژه ماتریس حالت اولیه، صفر نشود؛

$$g_a(\lambda) \neq 0 \quad \forall\, \lambda\colon \det(\lambda I - A) = 0$$
$$g_a(\mu) \triangleq \det\big(G_a(\mu)\big) = \det\Big(\sum_{l=0}^{p-1} S_A(l) \sum_{j=0}^{p-1} \mu^j \prod_{q=l+1}^{p-j+l-1} \bar{S}_A(q)\Big) \quad (۹)$$

نکته: اگر دنباله مخابراتی مجاز نباشد، چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی (۹) متحدا برابر صفر بوده و لذا سیستم شبکه شده کنترل ناپذیر خواهد بود.

رابطه‌ای مشابه (۹) به صورت دیگری نیز بر اساس پارامترهای متفاوتی از دنباله مخابراتی در [۵] و [۸] بیان شده است. شرایط مطرح شده در [۵] و [۸] هر دو شرایط کافی می‌باشند. لازم است توجه شود (۹) تعمیمی از شرط زمانهای نمونه برداری سالم[1] است که در خصوص سیستم‌های گسسته نمونه‌برداری شده شناخته شده است[۱۹] . این شرط بیان می دارد که به منظور حفظ خواص ساختاری یک سیستم زمان-پیوسته، کافی است زمان نمونه برداری، شرط زیر را احراز نماید؛

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_b} \neq \exp\left(\frac{2\pi l\sqrt{-1}}{p_A}\right) \qquad \forall\, \lambda_a \neq \lambda_b\,, l = \cdots, -1,0,1, \dots$$

که در رابطه فوق $\lambda_a \neq \lambda_b$ هر دو مقدار ویژه متمایز سیستم (۱) می باشند. سمت راست این رابطه ریشه های معادله زیر هستند که حالت خاصی از چند جمله ای (۹) است.

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mu^j = 0$$

در حد اطلاعات نویسندگان این مقاله، تاکنون پژوهشی بر روند انتخاب دنباله مخابراتی به نحوی که شرط (۹) احراز شود، صورت نگرفته است. در صورت عدم احراز شرط کافی (۹) سیستم حاصل از ادغام دنباله مخابراتی در دینامیک سیستم اولیه، ممکن است کنترل‌پذیر نباشد. لم‌های زیر که از نتایج این پژوهش هستند، ارتباط حالت تعمیم یافته (شرط (۹)) را با سیستم‌های چند نرخی نمونه‌برداری شده بیان می‌کنند. در لم۳ ، ابتدا برخی خواص جالب توجه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه مطرح می شود و سپس در لم ۴ ، ارتباط میان نتایج [۱۸] با نتایجی که پیشتر برای سیستم‌های چند نرخی مطرح شده است [۱۷] ارائه می‌شود.

ماتریس $G_a(\mu)$ یک ماتریس قطری است که هریک از درایه‌های روی قطر آن یک چندجمله‌ای $g_{ai}(\mu)$ بوده و دترمینان این ماتریس حاصل ضرب این چند جمله ای ها می باشد. لم ۳، برخی خصوصیات درایه های این ماتریس را بیان می نماید که در ادامه این مقاله، مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

لم ۳- در خصوص رابطه (۹) موارد زیر برقرار است:

الف) هر یک از درایه‌های این ماتریس به صورت زیر قابل بیان است.

$$g_{ai}(\mu) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} \mu^{p-j-1} \quad (۱۱)$$

که در آن $n_j^{(i)}$ تعداد دسترسی داده شده به i امین عملگر در یک دوره تناوب دنباله مخابراتی استکه پس از آن دسترسی، لااقل تا j بازه زمانی (یا بیشتر) بعدی، دسترسی دیگری به i امین عملگر داده نشود.به عنوان مثال اگر به i_1 امین عملگر در هر بازه زمانی، یک دسترسی داده شود، $n_0^{(i_1)}$برابر دوره تناوب و $n_j^{(i_1)}$ به ازای $j > 1$ برابر صفر است. به عنوان مثالی دیگر، اگر به i_2 امین عملگر تنها یک بار در هر دوره تناوب دسترسی داده شود، در آن صورت $n_j^{(i_2)}$ به ازای $j < p$ برابر واحد است.

ب) هم‌چنین:

$$n_j^{(i)} \geq n_{j+1}^{(i)} \geq 0 \;\; i = 1..n_u \quad (۱۲)$$

پ) مجموع ضرائب هر یک از درایه‌های قطری برابر دوره تناوب دنباله مخابراتی ورودی است.

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} = p \quad i = 1..n_u \quad (۱۳)$$

اثبات-

الف) با توجه به تعریف ماتریس‌های زمان‌بندی در (۴)، و تعریف چندجمله‌ای مشخصه در (۹)، واضح است که ماتریس $G_a(\mu)$ قطری است. با برابر قرار دادن (۹) و (۱۱) و استفاده از نتیجه (۱۰)، به ازای هر مقدار دلخواه μ ، ضریب جمله μ^{p-j-1} عبارتست از:

$$n_j^{(i)} = \sum_{l=0}^{p-1} S_A(l)(i,i) \prod_{q=l+1}^{p+j-l-1} \bar{S}_A(q)\,(i,i) \quad (۱۴)$$

[1] Non-pathological sampling periods

با توجه به ساختار ماتریس زمان‌بندی، ترمهای مجموع در سمت راست (۱۴) همواره صفر هستند مگر به ازای $l = k$ که در لحظه k به عملگر i ام دسترسی داده شده باشد. از سوی دیگر حاصل ضرب درایه‌های قطری $\bar{S}_A(q)$ تنها در صورتی غیر صفر خواهد بود که در بازه زمانی $l+1 \le q \le p+j-l-1$ دسترسی دیگری به عملگر i ام داده نشود. در غیر این صورت، اگر در این بازه دسترسی به عملگر i ام داده شود، درایه قطری متناظر $\bar{S}_A(q)(i,i)$ صفر شده و حاصل ضرب صفر می‌شود. بنابراین $n_j^{(i)}$ شمارنده تعداد دسترسی‌هایی است که پس از آنها تا j بازه زمانی، دسترسی دیگری به عملگر i ام داده نشده باشد.

ب) با توجه به نتیجه بخش (الف)، واضح است که تعداد دسترسی‌های داده شده به عملگر i ام که پس از آن تا j بازه زمانی دسترسی دیگری به آن عملگر داده نشده است، از تعداد دسترسی های داده شده به همان عملگر که پس از آن تا $j+1$ بازه زمانی دسترسی دیگری وجود ندارد، بیشتر است. ضمنا تفاضل این مقدار برابر تعداد دسترسی‌های داده شده به عملگر مذکور است که پس از آنها دقیقا تا $j+1$ بازه بعدی دسترسی دیگری وجود نداشته باشد. هم‌چنین می‌توان توجه نمود که:

$$n_j^{(i)} = 0 \quad j > p-1\,,\ \ i = 1..n_u \qquad (۱۵)$$

پ) با توجه به نتیجه بخش (ب) از همین لم، $n_j^{(i)}$ تعداد بازه‌های زمانی قرار گرفته پس از یک دسترسی به عملگر iام که در آنها دسترسی دیگری به آن عملگر داده نشده است، می‌شمارد.

برای $j^* > 0$ اگر $n_{j^*}^{(i)} \neq 0$ باشد به معنای قرار داشتن j^* بازه زمانی است که به عملگر i ام اختصاص ندارند. بنابر نتیجه بخش (پ) از همین لم، این تعداد j^* بار شمرده می‌شود، بنابراین به ازای هر ضریب غیر صفر $n_{j^*}^{(i)} \neq 0$ ، کل بازه‌های زمانی موجود در یک تناوب به جز بازه‌های اختصاص داده شده به عملگر i ام در مجموع (۱۳) شمارش می‌شوند. برای $j^* = 0$ ، $n_{j^*}^{(i)}$ یا $n_0^{(i)}$ تعداد دسترسی‌های عملگر i ام که پس از آن در صفر بازه زمانی بعدی دسترسی دیگری به آن عملگر وجود ندارد می‌شمارد. لذا $n_0^{(i)}$ تعداد کل دسترسی‌های داده شده به عملگر i ام را می‌شمارد. بنابراین مجموع (۱۳) عبارتست از:

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} = n_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{p-1} n_j^{(i)} = p; i = 1..n_u$$

ترم نخست ($n_0^{(i)}$) تعداد دسترسی داده شده به عملگر i ام و ترم دوم تعداد دسترسی داده نشده به این عملگر را می‌شمارد که جمعا برابر طول دوره تناوب است. می‌توان توجه نمود که مجموع (۱۵) برابربرد ماتریس $G_A(1)$ ؛$trace(G_A(1))$ است.

لم ٤– اگر فاصله زمانی میان تمامی دسترسی‌های متوالی داده شده به یک عملگر ثابت باشد، درایه‌های قطری ماتریس چندجمله‌ای مشخصه زمان‌بندی (۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$g_{Ai}(\mu) = {n_0}^{(i)} \sum_{j=0}^{\frac{p}{{n_0}^{(i)}}-1} \mu^{p-j-1} \qquad (۱۶)$$

اثبات– چون فاصله زمانی میان تمام دسترسی‌های متوالی به هر عملگر، مقدار ثابتی است، لذا اگر این مقدار ثابت را برای عملگر i ام برابر $d^{(i)}$ در نظر بگیریم، دو حالت زیر قابل تمایز خواهند بود:

حالت ۱. در صورتی که طول بازه (j) از فاصله ثابت میان تمامی دسترسی‌ها ($d^{(i)}$) کمتر باشد، تمامی دسترسی‌های داده شده به عملگر i ام در محاسبه ${n_j}^{(i)}$ شمرده می‌شوند.

حالت ۲. در صورتی که طول بازه از فاصله ثابت میان تمامی دسترسی‌ها بیشتر باشد، لااقل یک دسترسی دیگر به عملگر مزبور در بازه زمانی j وجود خواهد داشت و لذا هیچ یک از دسترسی‌ها شمرده نشده و ${n_j}^{(i)}$ صفر خواهد بود.لذا می‌توان نوشت:

$${n_j}^{(i)} = \begin{cases} 0 & j > d^{(i)} \\ {n_0}^{(i)} & j \le d^{(i)} \end{cases} \qquad (۱۷)$$

بر این اساس (۱۶) نتیجه می‌شود.

لازم به ذکر است (۱۶) مضرب ثابتی از یک چندجمله‌ای AOP است که ریشه‌های آن ریشه‌های مختلط واحد بوده و روی محیط دایره واحد در صفحه مختلط قرار می‌گیرند. برای نشان‌دادن این موضوع کافی است توجه شود:

$$\sum_{j=0}^{\frac{p}{{n_0}^{(i)}}-1} \mu^{p-j-1} = \frac{\mu^{\frac{p}{{n_0}^{(i)}}} - 1}{\mu - 1} \qquad (۱۸)$$

هم‌چنین می‌توان توجه نمود که دنباله‌های مخابراتی با فاصله زمانی ثابت، مدل کننده سیستم‌های چند نرخی هستند و لذا (۱۶) شرایط کافی برای کنترل‌پذیری/پایدارپذیری سیستم‌های چند نرخی را بیان می‌کند. این موضوع در قالب قضیه۱ بیان شده است.

قضیه ۱– یک سیستم نمونه‌برداری شده چند نرخی کنترل‌پذیر/پایدارپذیر است اگر:

- سیستم زمان-پیوسته کنترل‌پذیر/ پایدارپذیر باشد.
- کوچکترین زمان نمونه برداری (کهسایر زمانهای نمونه‌برداری مضربی طبیعی از آن هستند) شرایط زمان نمونه برداری سالم برای سیستم‌های نمونه‌برداری تک نرخی را احراز نماید.
- سیستم حاصل از نمونه‌برداری با کمترین زمان نمونه برداری قطبی برابر با ریشه رابطه (۱۸) نداشته باشد.

اثبات قضیه ۱– بر اساس لم ۲،در صورت احراز شرط (۹) سیستم چند نرخی خصوصیات ساختاری خود را حفظ خواهد کرد. با توجه به (۱۶)، شرط (۹) به نداشتن قطبی برابر با ریشه‌های رابطه (۱۸) کاسته می‌شود. بنابراین، در مورد سیستمهای چند نرخی، شرایط لم ۲، به شرایط فوق کاسته خواهد شد. لذا، سیستم چند نرخی کنترل پذیر/ پایدار پذیر است اگر، سیستم زمان-گسسته تک نرخی کنترل پذیر/پایدارپذیر بوده (شرایط اول و دوم این قضیه) و رابطه (۱۸) براورده شود (شرط سوم این قضیه). بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

قضیه۱، شرایط کنترل‌پذیری/پایدارپذیری را برای یک سیستم چند نرخی بیان می‌کند. این شرایط کافی بوده و در مقایسه با آخرین نتایج موجود که از جمله در [۱۷]و [۲۰]گزارش شده است، ساده‌تر هستند.این نتایج تعمیمی از زمان‌های نمونه‌برداری سالم[۲۱] می‌باشند. در [۱۷] مساله کنترل‌پذیری سیستم چند نرخی بر حسب رتبه ماتریس کنترل‌پذیری سیستم بالابرده شده که دارای ابعاد بیشتری

می‌باشد، مطرح شده است. در [۲۰] شرط نداشتن قطبی روی دایره واحد مطرح شده است که در مقایسه با شرایط قضیه ۱ فوق‌الذکر، محدودکننده‌تر است. لذا قضیه ۱، شرایط کنترل‌پذیری برای طیف وسیع‌تری از سیستم‌ها را بیان می‌نماید.

مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی به منظور تبیین نتایج و مزیت قضیه ۱ در مقایسه با آخرین نتایج موجود در [۱۱] ،ارائه می‌شود. سیستم کنترل‌پذیر زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ , b=1$$

چون این سیستم دارای سه قطب روی دایره واحد است، نتایج [۱۱] نمی تواند در خصوص کنترل پذیری سیستم چند نرخی/ تحت شبکه حاصل از هر دنباله مخابراتی، به کار رود.جدول زیر برخی دنباله‌های مخابراتی و خواص ساختاری سیستم حاصل را خلاصه کرده است.

ردیف	دنباله مخابراتی	نتیجه	توضیحات
۱	$\binom{1}{2}$	کنترل‌پذیر	سیستم تک نرخی
۲	$\{1,2\}$	کنترل‌پذیر	سیستم تک نرخی با محدودیت عرض باند
۳	$\left\{\binom{1}{2},1\right\}$	کنترل‌پذیر	سیستم چند نرخی
۴	$\left\{\binom{1}{2},1,1\right\}$	کنترل‌ناپذیر	
۵	$\left\{\binom{1}{2},1,1,1\right\},\left\{\binom{1}{2}\right.$	کنترل‌پذیر	
۶	$\left\{\binom{1}{2},1,1,1,1,1\right\}$	کنترل‌ناپذیر	

در ردیف نخست جدول (دنباله مخابراتی عملگر $\binom{1}{2}$) فرض شده است که دسترسی همزمان هر دو ورودی به شبکه (به روز رسانی هر دو عملکر با نرخ یکسان و به صورت همزمان) می باشد. در ردیف دوم، (دنباله مخابراتی $\{1,2\}$) فرض شده است که ابتدا عملگر اول و پس از آن عملگر دوم به روزرسانی می شوند. به عبارت دیگر، ورودی ها به جای آنکه همزمان به روزرسانی شده یا به شبکه متصل شوند، با فاصله زمانی یک زمان نمونه برداری، به روزرسانی می شوند. در ردیف سوم (دنباله مخابراتی $\left\{\binom{1}{2},1\right\}$) فرض شده است که ابتدا دو ورودی به صورت همزمان به روز رسانی شده و پس از آن ورودی (عملگر) اول به تنهایی به روزرسانی می شود. به عبارت دیگر، ورودی اول با نرخی دو برابر ورودی دوم، به روزرسانی می شود. لذا سیستم معرفی شده در ردیف سوم، یک سیستم چند نرخی است. ردیفهای چهارم و پنجم نیز سیستمهای چند نرخی دیگر که در آنها نرخ به روزرسانی ورودی اول سه، چهار، پنج و شش برابر نرخ به روزرسانی ورودی دوم است را نشان می دهند. با توجه به این جدول، اولا شرایط کنترل پذیری سیستم چند نرخی با استفاده از نتایج این مقاله، ساده تر از شرایط معرفی شده در [۱۱] می باشد. چون [۱۱] برای کنترل پذیری (پایدارپذیری) سیستم چند نرخی، فرض کرده است که سیستم اولیه (تک نرخی) هیچ قطبی روی دایره واحد نداشته باشد. این فرض بسیار محدود کننده بوده و عملا بسیاری از سیستمهای زمان- گسسته حاصل از گسسته سازی سیستمهای زمان-پیوسته، قطب یا قطبهایی روی دایره واحد دارند. از جمله، سیستم مورد بحث در این مثال، دارای سه قطب روی داریره واحد است. در نتیجه بر اساس نتایج [۱۱] نمی توان هیچ فرم چند نرخی برای این سیستم تصور نمود که کنترل پذیر باشد. به عبارت دیگر، شرایط کافی ارائه شده در [۱۱] برای کنترل پذیری سیستم مطروحه در این مثال، راه حلی ارائه نمی نماید. بر اساس شرایط به دست آمده در این مقاله (قضیه ۱)، برای سیستمهای زمان-گسسته دارای قطبهای متعدد روی دایره واحد نیز، امکان کنترل پذیری (پایدار پذیری) فراهم خواهد بود. براین نیل به این مقصود، کافی است دنباله مخابراتی به نحوی انتخاب شود که شرایط قضیه (۱) برآورده شوند. این مساله در ردیف ۵ جدول برای سیستمهای چند نرخی احراز شده است.

٤- نتیجه گیری

در این مقاله ضمن مرور نتایج پژوهشهای پیشین در زمینه خصوصیات دنباله مخابراتی ورودی و خروجی که خواص ساختاری یک سیستم تحت شبکه را حفظ کنند، برخی خصوصیات جالب توجه ضرایب چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی ارائه شده و شرایطی که تحت آن حفظ خواص ساختاری سیستم چند نرخی تضمین می‌شود، استخراج شده ونتایج موجود در خصوص کنترل‌پذیری سیستم‌های چند نرخی بهبود داده شده است. یک مثال عددی برای نشان دادن مزیت نتایج به دست آمده در مقایسه با پژوهشهای پیشین نیز ارائه شده است.

مراجع

[1] Zeltwanger, H., “An inside look at the fundamentals of CAN”, Control Engineering, 42.1 (1995), 81-87.

[2] Kastner, Wolfgang, et al. "Communication systems for building automation and control." Proceedings of the IEEE 93.6 (2005): 1178-1203.

[3] Gaid, ME Mongi Ben, ArbenCela, and YskandarHamam. "Optimal integrated control and scheduling of networked control systems with communication constraints: application to a car suspension system." *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 14.4 (2006): 776-787.

[4] Qu, Zhihua. “Cooperative control of dynamical systems: applications to autonomous vehicles”. Springer Science & Business Media, 2009.

[5] Longo, Stefano, et al. Optimal and robust scheduling for networked control systems. *CRC Press, 2013.*

[6] Gupta, Rachana Ashok, and Mo-Yuen Chow. "Networked control system: overview and research trends." *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 57.7 (2010): 2527-2535.

[7] Zhang, Lixian, HuijunGao, and OkyayKaynak. "Network-induced constraints in networked control systems—a survey." *Industrial Informatics, IEEE Transactions on* 9.1 (2013): 403-416.

[8] Longo, Stefano, Guido Herrmann, and Phil Barber. "Controllability, observability in networked control." *Robust Control Design*, 6.1,(2009): 438-446.

[9] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "Structural Properties of Networked Control Systems with Bandwidth Limitations and Delays." *Asian Journal of Control* 19.3 (2017): 1228-1238.

[10] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "Structural properties, LQG control and

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.4.1]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.15]

scheduling of a networked control system with bandwidth limitations and transmission delays." *IEEE/CAA Journal of AutomaticaSinica* (2017).

[11] Hristu-Varsakelis, Dimitrios. "Short-period communication and the role of zero-order holding in networked control systems." *Automatic Control, IEEE Transactions on* 53.5 (2008): 1285-1290.

[12] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "*L*-Step Reachability and Observability of Networked Control Systems with Bandwidth Limitations: Feasible Lower Bounds on Communication Periods." *Asian Journal of Control* (2017).

[13] Bushnell, Linda G. "Networks and control." *IEEE Control Systems Magazine* 21.1 (2001): 22-23.

[14] Baillieul, John, and Panos J. Antsaklis. "Control and communication challenges in networked real-time systems." *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007): 9-28.

[15] Walsh, Gregory C., Hong Ye, and Linda G. Bushnell. "Stability analysis of networked control systems." *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 10.3 (2002): 438-446.

[16] Pasand, Mohammad Mahdi Share, and Mohsen Montazeri. "Kalman Filtering with Optimally Scheduled Measurements in Bandwidth Limited Communication Media." *ETRI Journal* 39.1 (2017): 13-20.

[17] Longhi, Sauro. "Structural properties of multirate sampled-data systems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.3 (1994): 692-696.

[18] Suzuki, Tatsuo, et al. "Controllability and stabilizability of a networked control system with periodic communication constraints." *Systems & Control Letters* 60.12 (2011): 977-984.

[19] Åström, Karl J., and BjörnWittenmark. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.

[20] Wang, Jiandong, Tongwen Chen, and Biao Huang. "Multirate sampled-data systems: computing fast-rate models." *Journal of process control* 14.1 (2004): 79-88.

[21] Middleton, Rick, and Jim Freudenberg. "Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions." Automatica 31.2 (1995): 315-319.