مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحه ۱۲-۱

کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه یک عملگر الاستیکی مورد استفاده در مفصل زانو

هادی صباغی کندری[۱]، علی کارساز[۲]

[۱] کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی خراسان، hadi.sabbaghi@khorasan.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی خراسان، karsaz@khorasan.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۸ ویرایش اول: ۱۳۹۶/۱۲/۲۲ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۲/۱۸ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۱۳

چکیده: سیستم‌های توانبخشی نظیر عملگرهای الاستیکی سری چرخشی باید بتوانند گشتاور دقیق مطلوب را تولید کنند. این مقاله به‌منظور توانبخشی در مفصل زانوی افراد معلول، به موضوع کنترل یک عملگر الاستیکی سری چرخشی پرداخته تا بتواند یک حرکت نرم در قدم زنی افراد را فراهم نماید. این عمگرها دارای مقاومت غیرخطی ذاتی و نیز با عدم قطعیت‌های دینامیک مدل روبرو بوده که چالش‌هایی در برابرکنترل دقیق آنها به‌وجود می‌آورند. به‌منظور کنترل دقیق این عملگرها، کنترل‌کننده علاوه بر کنترل گشتاور خروجی، می‌باید در برابر تغییرات پارامترها نیز مقاوم باشد. در این مقاله یک کنترل‌کننده مقاوم مبتنی بر نگرش بهینه طوری طراحی شده است که علاوه بر ارتقای عملکرد کنترلی در برابر عدم‌قطعیت‌ها نیز مقاوم باشد. مقایسه خروجی سیستم حلقه بسته با اعمال روش پیشنهادی نسبت به روش‌های مرسوم نظیر کنترل‌کننده مدلغزشی و کنترل‌کننده مدلغزشی-تطبیقی، به‌کمک شبیه‌سازی صورت گرفته است.

کلمات کلیدی: توانبخشی، کنترل بهینه، کنترل مقاوم، عدم‌قطعیت پارامتری.

Optimal Robust Control for a Series Elastic Actuator assisting Knee Joint

Hadi Sabbaghi, Ali Karsaz

Abstract: Rehabilitation and assistive systems such as rotary series elastic actuators (RSEA) should provide the desired torque precisely. In this paper, to improve the life quality of those who suffer from weak knees, the control problem of a rotary series elastic actuator (RSEA) has been studied in order to generate soft human walking motion. These actuators produce the require torque, but the nonlinear resistive and inertia loads inherent in the actuators, set challenges to generate the desired torque accurately. The nonlinear resistive factors and uncertainties in plant dynamics which make the precise torque control difficult should be considered. In this paper, a robust controller based on an optimized control approach is designed to enhance control performance and provide the robustness for modeling uncertainties. The simulation is used to compare the output results of the proposed algorithm with the conventional methods such as sliding mode and adaptive-sliding mode controllers.

Keywords: Rehabilitation, Optimum control, Robust control, Uncertainty of parameter.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

۱- مقدمه

امروزه هم‌زمان با پیشرفت علم در توانبخشی انسان و ربات استفاده از عملگرهای الاستیکی و کنترل دقیق آن‌ها به منظور رفع نیاز در این زمینه مورد توجه قرار گرفته است. این عملگرها که در حالت گشتاور یا نیرو کنترل می‌گردند، دارای اصطکاک ذاتی در حرکت مکانیکی می‌باشند که چالش‌هایی در برابر کنترل دقیق آن‌ها ایجاد می‌کند. تاکنون عملگرهای الاستیکی سری به‌وسیله مدل‌های مختلفی معرفی شده‌اند. مدل‌های ارائه شده هم‌چنین دارای عدم‌قطعیت هستند که مانع دیگری در برابر کنترل آنها به شمار می‌رود. این عملگرها در مفاصل انسان (کمر، زانو، مچ و...)کاربرد دارند. تعامل و تداخل فیزیکی در عملگرهای الاستیکی در نوعی خاص از ربات‌ها وجود دارد که بر متغیرهای کنترل-شونده و حتی عدم‌پایداری سیستم تأثیر گذارند[۱-۳]. در [۳] یک طرح کنترلی برای توانمندسازی عملگر الاستیکی جهت ایجاد امپدانس خروجی پایین پیشنهاد گردیده است، این طرح در حالت ردیابی نیروی دقیق و در وضعیت کنترل‌پذیری ایجاد شده و یک اثبات نظری پایداری به شکل حلقه بسته در آن‌جا ارائه گردیده است. سیستم استفاده شده در [۳] یک سیستم نامی است و هیچگونه عدم‌قطعیت و اغتشاش در سیستم مدل نشده و روش کنترلی آن PID می‌باشد که در سیستم‌های خطی کاربرد دارد. یک ضعف این مقاله درنظر نگرفتن عدم‌قطعیت یا اغتشاش مدل می‌باشدکه در واقعیت وجود دارد و ما سعی کرده‌ایم در این مقاله تاحد زیادی این مشکل را درنظر بگیریم. در [۴] یک کنترل‌کننده جدید برای تعامل بین انسان و ربات در توانبخشی با استفاده از عملگرالاستیکی ارائه گردید که با ترکیب جبران‌ساز حرکت مفصل، جبران‌ساز اصطکاک، مشاهده‌گر اغتشاش و یک کنترل فیدبک سیستم حلقه بسته توانست نیروی لازم را فراهم و پایداری لازم را داشته باشد. اما به‌نظر ثابت فنر دراین عملگر بالاست و راحتی لازم در آن لحاظ نگردیده است و عملاً تجهیزات آن سنگین وزن هستند حال آنکه در پژوهش ما ثابت فنر به‌کار رفته مقدار پایینی داشته و راحتی را نیز درنظر گرفته‌ایم. لقی در عملگرها نیز یکی از موضوعات مهم و مؤثر بر عملکرد ربات‌ها جهت دستیابی به نتایج مطلوب می‌باشد که دارای خاصیت غیرخطی است و به منظور جبران اثر آن یک معکوس لقی و کنترل تطبیقی فازی مقاوم پیشنهاد شده تا حرکت جسم و نیروهای داخلی را کنترل نماید و خروجی مقادیر مطلوب را دنبال کند[۵]. در این مقاله نیز از عدم‌قطعیت و اغتشاش بحثی صورت نگرفته و مدل، یک مدل نامی و فقط دارای خاصیت غیرخطی است.

امروزه برروی حرکات ربات‌های انسان‌نما و تطابق هرچه بیشتر آن با حرکات انسان پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است. این ربات‌ها دارای محدودیت‌هایی همچون دامنه حرکت، سرعت و غیره می‌باشند که برروی دینامیک‌های سیستم اثرگذارند پس باید به‌دنبال استراتژی‌های کنترلی برای جبران این محدودیت‌ها بود. در مقاله [۶] یک طرح کنترلی برای بهینه‌سازی گشتاور و منحنی امپدانس ارائه گردیده تا عملکرد سخت‌افزاری پیچیده که دارای محدودیت‌های تحریک هستند را به حداکثر برساند. مدل درنظرگرفته شده در[۶] نیز یک مدل نامی بوده و دقت کافی در اغتشاش را ندارد. در[۷] یک ربات دوپا با سه بازو که دارای دوفنر پیچشی یکسان می‌باشد مدل شده است. مدل ریاضی این ربات یک سیستم مکانیکی سه درجه آزادی است که هدف پایدارسازی چرخه حدی در حال حرکت، در هنگام ورود ضربات از طرف پای ربات می‌باشد. یک طرح کنترلی فیدبک نمایی غیرخطی پایدار به طور حلقه بسته ارائه گردیده و عملکرد سیستم که همان کنترل زوایای سیستم می-باشد را به همراه مقاومت آن نسبت به اختلاف متغیرها و عدم‌قطعیت‌ها بهبود می‌بخشد اما خروجی این سیستم زاویه بازوها بود و گشتاور در اینجا کنترل نگردیده است. در [۸] به‌منظور جلوگیری از ضربه ناگهانی و صدمه نرسیدن به شخص، یک واسط بین موقعیت مطلوب و موقعیت جاری قرار می‌گیرد. عملکرد در اینجا واسط را به وسیله کنترل‌کننده مدلغزشی ردیابی می‌کند تا عدم‌قطعیت مدل و خاصیت غیرخطی را جبران نماید. هدف نهایی در[۸] طراحی الگوریتمی است که بتواند راحتی را تضمین کند. نقص کار این مقاله تست گشتاور مطلوب در فرکانس خیلی پایین است یعنی حتی کمتر از سرعت حرکت پای انسان که بین ۱ تا ۴ هرتز متغیر است ولی ما ورودی کنترل را در فرکانس بالاتری نسبت به [۸] درنظر گرفتیم تا به واقعیت حرکت نزدیک‌تر باشیم البته فاز کنترلی ما در فاز قدم زدن شخص می‌باشد.

در[۹] و [۱۰] به‌منظور کنترل گشتاور، از الگوریتم‌های کنترل مقاوم و یا مدلغزشی استفاده می‌گردد که نقش این کنترل‌کننده‌ها به عنوان مشاهده‌گر اغتشاش می‌باشد، نکته قابل توجه در[۹] و[۱۰] آن است که برخلاف [۸] و کار ما در اینجا این کنترل‌کننده‌ها فقط به منظور تولید گشتاور دقیق و مطلوب، بدون توجه به راحتی به‌کار رفته‌اند. در [۱۱]روش مشاهده‌گر اغتشاش به‌کار برده شده است تا گشتاور مطلوب عملگر، به طور سریع در وضعیت‌های مختلف خروجی تولید گردد. همچنین از یک کنترل‌کننده PD با اعمال روش بهینه‌سازی درجه دوم استفاده گردیده است، ولی روش اصلی مقاله، کنترل پسخور نیرو می‌باشد که به‌وسیله آن گشتاور خروجی را کنترل می‌نماید. ضعف این روش استفاده از مدل نامی و بدون در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در مدل و سیستم است. در [۱۲] یک ساختار کنترلی به‌منظور کنترل نیروی خروجی عملگرهای الاستیکی ارائه گردیده است. این کنترل، براساس یک مدل خطی از عملگر الاستیکی بنا شده است که اگر شامل یک جبران‌ساز اغتشاش باشد، می‌تواند مدل سیستم به مدل تعمیم‌یافته عملگر الاستیکی که شامل دو ورودی اغتشاش است، تقلیل یابد. این روش این اجازه را می‌دهد که یک کنترل‌کننده در فضای حالت به همراه پارامترهای آن به-طور مستقیم طراحی شود. اما طبق نتایج بدست آمده خروجی گشتاور موتور دارای جهش بالا در برابر دامنه آن می‌باشد یعنی لازم بود یک

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

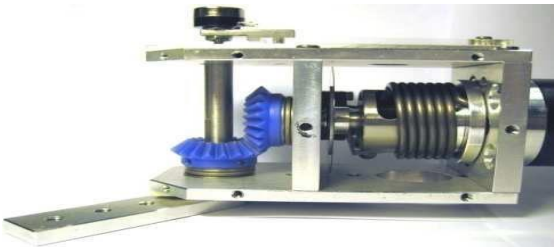
کنترل دیگر جهت کاهش بالازدگی‌ها اعمال گردد. عملگرها زمانی‌که در تعامل با انسان و یا حتی در موقعیت‌های غیرمنتظره قرار می‌گیرند باید انعطاف‌پذیری داشته باشند [۱۳]. این شرایط مناسب در صورت وجود امپدانس پایین در تمامی فرکانس‌های کاری عملگر، فراهم می‌گردد. در [۱۳] راه‌هایی به‌منظور انعطاف‌پذیری نیروی عملگرهای الاستیکی به‌وسیله حلقه‌های پسخور داخلی و با استفاده از سنسورهای خاص موقعیت، مورد آزمایش قرار گرفته است.

در [۱۴]شماتیکی از یک آشکارساز خطا و به‌همراه کنترل تطبیقی برای یک مفصل انعطاف‌پذیر ربات سه بازو که دارای عدم‌قطعیت مدل و خطاهای چند عملگر مختلف می‌باشد ارائه شده است. در ابتدا یک آشکارساز خطا طراحی می‌شود تا خطاهای عملگر آنالیز گردد. سپس شماتیک کنترل تطبیقی خطا با باندهای عملکردی مشخص طراحی می‌شود. سرعت و بیشترین بالازدگی برای خطاهای ردیابی‌شده مشخص می‌شود و نهایتا یک کنترل‌کننده تطبیقی اثرات آن را جبران خواهد نمود. ولی کنترل برروی زاویه خروجی بوده وصحبتی از گشتاور و نیرو در عملگر نشده است.

در این مقاله، کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه جهت جبران عدم‌قطعیت‌های پارامتری و به‌منظور بهبود پاسخ خروجی پیشنهاد می‌گردد تا گشتاور خروجی مقدار مطلوب گشتاور ورودی را به‌طور دقیق‌تری ردیابی نماید و این درحالی است که برخی مقالات قبلی به عدم‌قطعیت‌ها و برخی دیگر گشتاور را به‌عنوان خروجی درنظر نگرفته‌اند. این کنترل در دو سناریوی مختلف یک‌بار با یک پارامتر دارای عدم‌قطعیت در سیستم و بار دیگر با سه پارامتر دارای عدم‌قطعیت که مدل، دقیق‌تر و به واقعیت نیز نزدیک‌تر است طراحی شده که تا به‌حال در این نوع سیستم‌ها عدم‌قطعیت‌ها فقط با یک پارامتر درنظر گرفته می‌شدند. در بخش ۲ این مقاله مسئله موردنظر را تعریف و مدل آن را بیان می‌نماییم. کنترل مدلغزشی و بیان پارامترهای آن در بخش ۳ و روش کنترل مدلغزشی تطبیقی را در بخش ۴ ارائه می‌دهیم. همچنین روش پیشنهادی (کنترل مقاوم مبتنی بر روش بهینه) در بخش ۵ بحث خواهد شد. نتیجه شبیه‌سازی‌های انجام شده و مقایسه آن‌ها نیز در دوسناریو در بخش ۶ و نتیجه‌گیری در بخش ۷ ارائه خواهد گردید.

۲- تعریف مسئله و مدل ریاضی سیستم:

شکل (۱) ساختار یک عملگرالاستیکی چرخشی سری را نشان می‌دهد. عملگر موردنظر دارای یک موتورDC، یک فنر پیچشی و دوانکدر است که یکی در زانوی پای انسان و دیگری در کنار موتور نصب می‌گردند تا زاویه حرکت پا و زاویه حرکت موتور را در هر لحظه اندازه‌گیری کنند. فنر پیچشی به‌عنوان یک رابط به‌طور مستقیم بین موتور و پای انسان در محل مفصل زانو نصب گردیده و وظیفه انتقال گشتاور از موتور به پا را برعهده دارد. با کنترل زاویه حرکت موتور و اندازه‌گیری زاویه پا در مفصل زانو، گشتاور مطلوب با توجه به انحراف درست فنر تولید می‌شود.

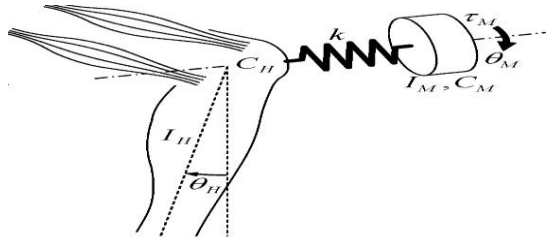


شکل ۱: نمای داخلی یک عملگر الاستیکی چرخشی [۱۵]

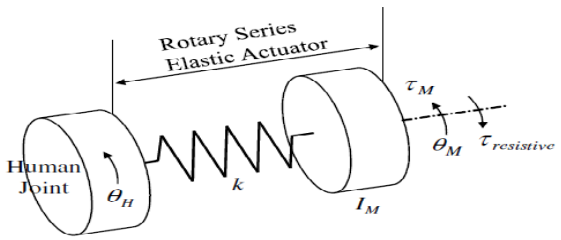


شکل ۲: نمای بیرونی یک عملگر الاستیکی چرخشی [۱۵]

گشتاور خروجی عملگر، به‌وسیله موتور DC و گشتاور مقاومتی غیرخطی، به‌وسیله گیربکس کاهنده متصل به موتور تولید می‌گردد. این گشتاور مقاومتی غیرخطی برای عملگر در تعامل با پای انسان، مشخصه غیرقابل قبولی بوده که در خلاف جهت گشتاور تولیدی موتور است و باید آن را جبران نمود [۱۱] و [۱۵]. در شکل ۳ شماتیکی از عملگر الاستیکی سری به کار رفته در مفصل زانو (در این شکل زاویه حرکت پا به‌طور دقیق مشخص شده است) و به‌طور جداگانه نشان داده‌شده است. طبق شکل ۳.ب که شماتیکی از این عملگر الاستیکی سری به‌طور جداگانه می‌باشد، معادله ریاضی سیستم به‌صورت (۱) بیان می‌گردد:



الف)



ب)

شکل ۳. الف) شماتیکی از عملگر بکار رفته در محل زانو ب) شماتیک عملگر الاستیکی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

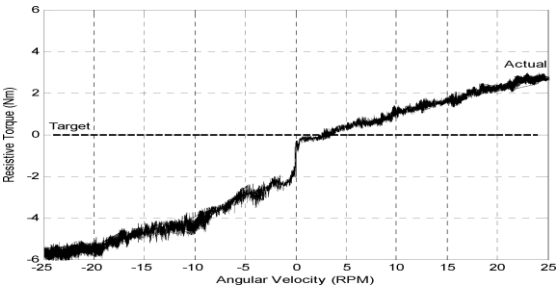
$$I_M \ddot{\theta}_M = \tau_M - k(\theta_M - \theta_H) - \tau_{res} \quad (۱)$$

در رابطه (۱) I_M اینرسی موتور، θ_M و θ_H به ترتیب زوایای موتور و پای انسان که توسط انکدرها اندازه‌گیری می‌شوند و همچنین k ثابت فنر به‌کار رفته بین موتور و پا می‌باشد. کنترل و مدل‌سازی این سیستم در فاز راه رفتن شخص بوده و در این حالت چون پای مصنوعی در هنگام راه رفتن از زمین جدا می‌شود و در حال حرکت است جرم شخص بر اینرسی اعمالی بر عملگر، تأثیری ندارد و فقط جرم پای طراحی شده به‌همراه جرم موتور، در اینرسی کلی سیستم لحاظ می‌گردد. در فاز قدم زنی[۱] وزن شخص به علت قرارگیری پا در هوا، در نحوه عملکرد عملگر الاستیکی موثر نبوده و تنها در حالت ایستاده، تمام وزن شخص به طور مستقیم به پا وارد می‌گردد. همچنین خواص دمپری و فنری عضلات چهارسر ران و عقب ران و ... در گشتاور غیرخطی لحاظ گردیده است.

معادله گشتاور مقاومتی غیرخطی، برحسب سرعت زاویه‌ای موتور به صورت معادله (۲) مدل گردیده است [۱۱] و [۱۵]:

$$\tau_{res} = a_1 + a_2 sign(\dot{\theta}_M) + a_3 \dot{\theta}_M \quad (۲)$$

که a_1، a_2 و a_3 به ترتیب ضرایب بایاس، اصطکاک غیرخطی و ضربه‌گیر خطی می‌باشند. نمودار گشتاور مقاومتی غیرخطی کولمب بر حسب سرعت زاویه‌ای موتور در شکل ۴ رسم شده است. لازم به ذکر است صحت سنجی مدل دینامیکی (۱) و (۲) مبتنی بر مراجع [۱۱] و [۱۵] بوده به عنوان مثال معادله گشتاور دینامیکی غیر خطی بدست آمده (۲) برای عملگر استاتیکی با ضرایب عددی در مرجع [۱۵] در شرایط آزمایشگاهی خاص، مورد بحث قرار گرفته که در این مقاله به عنوان پیش فرض از آن ضرایب استفاده خواهد شد.



شکل۴: گشتاور مقاومتی غیرخطی موتور [۱۵]

گشتاور فنر با اختلاف زاویه بین موتور (θ_M) و پا (θ_H)، رابطه مستقیم دارد، که در اینجا هدف ما ردیابی یک گشتاور دلخواه مطلوب توسط فنر می‌باشد که گشتاور را از موتور به پا جهت حرکت مطلوب انتقال دهد. سیستم را با نوع دیگری از مدل‌سازی یعنی توصیف فضای حالت بیان می‌نماییم. باتوجه به مدل سیستم، متغیرهای حالت به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که $x_1 = \theta_M$ به عنوان زاویهٔ حرکت موتور، $x_2 = \dot{\theta}_M$ سرعت زاویه‌ای موتور و $u = \tau_M$ گشتاور ورودی موتور می‌باشد. لذا مدل فضای حالت سیستم به صورت معادله (۳) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{I_M} x_1 + \frac{1}{I_M} u - \frac{\tau_{res}}{I_M} + \frac{k}{I_M} \theta_H \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (۳)$$

طبق رابطه (۲)، τ_{res} اصطکاک ذاتی، تابعی غیرخطی از سرعت زاویه‌ای موتور $(\dot{\theta}_M)$ است، بنابراین:

$$\tau_{res} = f(x_2) \quad (۴)$$

می‌باشد. چنانچه مشاهده می‌شود رابطه (۳) به‌علت وجود τ_{res} یک مدل فضای حالت غیرخطی است. گشتاور خروجی توسط عملگر الاستیکی چرخشی تولید می‌گردد که به صورت معادله (۵) می‌باشد:

$$\tau = k(\theta_M - \theta_H) \quad (۵)$$

حال با توجه به معادله (۵) و گشتاور مطلوب ورودی (τ_d)، زاویه مطلوب موتور به‌صورت معادله (۶) بدست می‌آید:

$$\theta_{Md} = \frac{\tau_d}{k} + \theta_H \quad (۶)$$

پس اگر کنترل‌کننده طوری طراحی شود که $\theta_M = \theta_{Md}$ گردد در این صورت گشتاور خروجی (تولیدی)، گشتاور مطلوب را ردیابی خواهد کرد یعنی $\tau = \tau_d$.

۳- کنترل مد لغزشی[۱۵]:

در صورت وجود عدم‌قطعیت یا دینامیک‌های مدل‌نشده در پارامترهای سیستم و مدل، بر روی خروجی تأثیرگذار خواهد بود و امکان ایجاد ناپایداری سیستم خواهد شد که باید خروجی را در مقابل این عدم-قطعیت‌ها مقاوم کرد [۱۶]. در [۱۵] طراحی یک کنترل‌کننده مدلغزشی جهت کنترل و افزایش مقاومت خروجی در مقابل عدم‌قطعیت‌ها پیشنهاد شده است که به بررسی اجمالی از آن می‌پردازیم. با تعریف رابطه خطا به صورت $E = \theta_M - \theta_H$ داریم:

$$\tilde{E} = E - E_d = (\theta_M - \theta_H) - (\theta_{Md} - \theta_H) \Rightarrow \tilde{E} = \theta_M - \theta_{Md} \quad (۷)$$

در صورتی‌که $\theta_M = \theta_{Md}$ شود خطا به صفر میل می‌کند. صفحه لغزش به صورت معادله (۸) تعریف می‌گردد:

$$S = (\frac{d}{dt} + \lambda)\tilde{E} \quad (۸)$$

[۱]- Swing

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

برای اطمینان از اینکه خطای $\tilde{E}$ به صفر میل می‌کند، متغیر لغزش باید به صفر میل کند که این شرط، معادل باقی‌ماندن برروی صفحه S می‌باشد. معادله کنترل مدلغزشی همراه با روش کنترل مدلغزشی- تطبیقی در بخش ۴ بیان می‌گردد.

٤- کنترل گشتاور خروجی به روش کنترل مدلغزشی- تطبیقی[۱۷]:

کنترل‌کننده تطبیقی ابزاری با پارامترهای قابل تنظیم، همراه با مکانیزمی برای تنظیم و تخمین پارامترها می‌باشد [۱۸]. کنترل تطبیقی فقط به‌منظور تخمین پارامترهای دارای عدم‌قطعیت استفاده شده و مقدار تخمینی آن‌ها به یک کنترل‌کننده مدلغزشی اعمال می‌گردد. فیدبک‌های حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$v = v_1 + k(\theta_H - \theta_M) - \tau_{res} \qquad (۹)$$

$$u = v - k(\theta_H - \theta_M) + \tau_{res} \qquad (۱۰)$$

در [۱۷] اینرسی موتور (I_M) ، پارامتر دارای عدم‌قطعیت است. با اعمال کنترل‌های فوق و با توجه به معادله (۳) و در نظرگرفتن $p = \frac{1}{I_M}$ ، می‌توان p را تخمین زد. با فرض $\tilde{p} = \hat{p} - p$، که $\tilde{p}$ اختلاف مقدار واقعی پارامتر p و تخمین آن یعنی $\hat{p}$ می‌باشد و ورودی کنترل v، قانون تطبیق به صورت معادله (۱۱) بدست می‌آید [۱۷]:

$$\dot{\hat{p}} = -g\tilde{p}v^2 \qquad (۱۱)$$

که در آن g پارامتر صحیح و مثبت تطبیق است. با توجه به صفر قرار دادن مشتق صفحه لغزش بخش ۳ و اعمال $\hat{p}$ تخمین زده شده، قانون کنترل مدلغزشی به صورت معادله (۱۲) بدست می‌آید [۱۰].

$$v_1 = \frac{1}{\hat{p}(x)}[-\hat{f}(x) - CE(x) - ksat(\frac{S}{\phi})] \qquad (۱۲)$$

در کنترل‌کننده مدلغزشی به جای استفاده از تابع علامت $(sign(S))$ از تابع اشباع $(sat(S))$ استفاده شده است به‌همین دلیل به‌آن کنترل‌کننده مدلغزشی هموار گفته می‌شود.

۵- کنترل بهینه و کنترل مقاوم با رهیافت بهینه (روش پیشنهادی):

در این مقاله تاکید اصلی بر مبنای کنترل بهینه در طراحی کنترل مقاوم است [۱۹]. این موضوع به‌همراه ارائه روش کنترل بهینه برای سیستم‌های خطی توصیف می‌گردد. سیستم کنترل‌شده به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x} = A(q)x + Bu \qquad (۱۳)$$

هدف از طراحی پسخورد حالت، پایدارسازی سیستم برای تمام qهای ممکن در کران داده شده است. جواب مساله کنترل مقاوم فوق بستگی به برقراری شرط سازگاری برای عدم‌قطعیت دارد که بدین منظور لازم است عدم‌قطعیت پارامتری qمعادله (۱۳) در فضای برد B باشد. اکنون با توجه به معادله (۳) که معادله اصلی سیستم است و خطی-سازی فیدبکی آن، مدل فضای حالت سیستم خطی‌شده به صورت معادله (۱۴) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -qk & -qa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} u \qquad (۱۴)$$

در صورتی‌که در سیستم فقط پارامتر q دارای عدم‌قطعیت باشد مثلکاری که در [۱۵] بیان شده عدم‌قطعیت سازگار است و درصورتی‌که k و a_3 نیز دارای عدم‌قطعیت باشند، عدم‌قطعیت ناسازگار بوده و کنترل آن نسبت به حالت سازگار سخت‌تر خواهد بود. در اینجا $q = \frac{1}{I_M}$، پارامتر دارای عدم‌قطعیت سیستم و محدوده تغییرات آن $[q_{\min} \quad q_{\max}]$ است. درابتدا سیستم را سازگار فرض کرده و مسئله را حل می‌نماییم.

الف) سیستم با عدم‌قطعیت سازگار:

اگر عدم‌قطعیت شرط سازگاری را دارا باشد، همیشه جواب مساله کنترل مقاوم وجود داشته و به‌راحتی با حل مسئله کنترل بهینه قابل دستیابی است. حل مسئله کنترل بهینه با اعمال محدودیت‌هایی بر روی تابع هزینه بدست می‌آید. بر اساس ویژگی‌های کنترل بهینه اثبات می‌شود که جواب مساله کنترل بهینه که توسط معادله همیلتن_ ژاکوبی_ بلمن (*HJB*[1]) توصیف می‌گردد، همان جواب مسئله کنترل مقاوم است. اکنون فرض کنید عدم‌قطعیت در ماتریس ورودی وجود داشته باشد. با فرض اینکه عدم‌قطعیت پارامتری q از طریق ماتریس ورودی B وارد سیستم گردد و عدم‌قطعیت در $A(q)$ نیز در شرط سازگاری صدق کند داریم:

$$\dot{x} = A(q)x + BD(q)u \qquad (۱۵)$$

ماتریس ورودی که یک ماتریس مربعی $m \times m$ و دارای عدم-قطعیت می‌باشد با $D(q)$ نشان داده شده است.

ابتدا فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

فرض۱: مقدار نامی $q_0 \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$، وجود دارد به قسمی که سیستم $(A(q_0), B)$ پایدارپذیر باشد، که در اینجا q_0 میانگین بازه آن انتخاب می شود.

فرض۲: برای هر $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$، ماتریس ثابت $D(q)$ وجود دارد به طوری‌که :

$$0 < D_0 < D(q) \qquad (۱۶)$$

[1] *Hamilton-Jacobi-Bellman*

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]

[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

با توجه به معادله (۱۵) و (۱۶) چنانچه $q_0 = 1$ لحاظ شود، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $D_0 = 1$ بدست می‌آید.

فرض۳: برای هر $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$، ماتریس $\phi(q)$ که عدم‌قطعیت را نشان می‌دهد با ابعاد $m \times n$ وجود دارد به طوری‌که:

$$A(q) - A(q_0) = BD_0\phi(q) \qquad (۱۷)$$

که $\phi(p)$ محدود است. طبق معادله (۱۷) و فرض ۲ خواهیم داشت:

$$\phi(q) = \begin{bmatrix} -k\,\Delta q & -a_3\Delta q \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

پس هدف ما حل مسئله کنترل مقاوم به‌منظور پایدارسازی سیستم با عدم‌قطعیت پارامتری می‌باشد.

مساله کنترل مقاوم و تبدیل آن به مسئله کنترل بهینه:

اگر سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیریم:

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad (۱۹)$$

هدف یافتن قانون کنترل است به طوری‌که تابعی زیر حداقل گردد:

$$j(x,t) = \int_t^{t_f} L(x,u)d\tau \qquad (۲۰)$$

که در آن t زمان فعلی، t_f زمان نهایی، $x = x(t)$ حالت فعلی و $L(x,u)$ تابع هدف است.

تابع هزینه درجه دوم با درنظر گرفتن $L(x,u) = x^T x + u^T R u_0$ به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

$$j(x,t) = \int_t^{t_f} f(x^T Q x + u^T R u)d\tau \qquad (۲۱)$$

اگر $j(x,t)$ را حداقل هزینه تحت کنترل باشد [۱۹]. معادله همیلتن- ژاکوبی- بلمن به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\min_{u \in R^m} = \left\{ L(x,u) + \left(\frac{\delta j^*}{\delta x}\right)^T f(x,u) \right\} = 0 \qquad (۲۲)$$

قانون کنترل پسخورد $u = kx$ باید چنان تعیین شود که سیستم حلقه بسته پایدارگردد.

برای سیستم کمکی

$$\dot{x} = A(q_0)x + BDu \qquad (۲۳)$$

قانون کنترل پسخورد $u = kx$ را چنان می‌یابیم که تابعی هزینه

$$\int_0^\infty (x^T Fx + x^T x + u^T u)dt = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt \qquad (۲۴)$$

حداقل گردد که در آن F حد بالای عدم-قطعیت $\phi(q)^T \phi(q)$ است. یعنی برای هر $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$:

$$\phi(q)^T \phi(q) \le F \qquad (۲۵)$$

می‌باشد. در اینجا طبق معادله (۱۸) برای F خواهیم داشت:

$$F = \max(\phi^T\phi) = \max \begin{bmatrix} (k\Delta q)^2 & ka_3(\Delta q)^2 \\ ka_3(\Delta^2 q) & (a_3\Delta q)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k(q_{\max}-q_0))^2 & ka_3(q_{\max}-q_0)^2 \\ ka_3(q_{\max}-q_0)^2 & (a_3(q_{\max}-q_0))^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

برای حل مساله کنترل بهینه ابتدا معادله جبری ریکاتی:

$$A(q_0)^T W + WA(q_0) + F + I - WBDD^T B^T W = 0 \qquad (۲۷)$$

را بر حسب W حل می‌کنیم $(R = R^{-1} = I)$. لذا جواب مسئله کنترل بهینه $u = -D^T B^T W x$ خواهد بود که در آن $k = -D^T B^T W$ می‌باشد.

از آنجا که $(A(q_0), B)$ پایدارپذیر و $F \ge 0$، جواب مسئله کنترل بهینه وجود دارد. فرض کنید جواب به صورت $u = kx$ باشد. اثبات می‌شود که این جواب، جواب مسئله کنترل مقاوم نیز می‌باشدکه در اینجا از اثبات آن صرف‌نظر شده است.

در واقع با اعمال کنترل‌کننده $u = Kx$ سیستم در نقطه پایدار صفر قرار خواهد گرفت و ما به منظور ردیابی یک نقطه خاص می‌بایست قطب‌های سیستم را در مکان مطلوب جایابی نماییم.

حال درصورتی‌که پارامترهای k و a_3 نیز علاوه بر q، عدم‌قطعیت داشته باشند سیستم با عدم‌قطعیت ناسازگار بوده و حل مسئله کمی پیچیده‌تر خواهد شد.

ب) سیستم با عدم‌قطعیت ناسازگار:

در اینجا عدم‌قطعیت هم در ماتریس ورودی (B) و هم در ماتریس حالت (A) وجود دارد ولی در شرط سازگاری صدق نمی‌کند. در این صورت برای فضای حالت سیستم داریم:

$$\dot{x} = A(q,k,a_3) + BD(q)u \qquad (۲۸)$$

به‌دلیل اینکه q دارای عدم‌قطعیت است پس باید $q_0 \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$ و $a_{3_0} \in [a_{3\min} \quad a_{3\max}]$ و $k_0 \in [k_{\min} \quad k_{\max}]$ وجود داشته باشد تا سیستم پایدار گردد و همچنین یک ماتریس ثابت D_0 طوری انتخاب گردد که $0 < D_0 < D(q)$ باشد که در اینجا مقادیر q_0، k_0 و a_{3_0} و همچنین D_0، میانگین مقادیر حداقل و حداکثر کران‌ها انتخاب شده‌اند. ابتدا عدم‌قطعیت در A را به دوبخش سازگار و ناسازگار تبدیل می-نماییم به‌طوری‌که در فضای برد BD وجود داشته باشد. با فرض:

$$\Delta A = A(q,k,a_3) - A(a_0,k_0,a_{3_0}) \qquad (۲۹)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

داریم:

$$\Delta A = (BD)(BD)^{+}\Delta A + (I-(BD)(BD)^{+})\Delta A \quad (۳۰)$$

با انتخاب دو پارامتر G و H به‌صورت زیر به عنوان پارامترهای کمکی که کران‌های بالای عدم‌قطعیت‌ها را معرفی می‌نمایند مسئله را به یک مسئله کنترل بهینه تبدیل می‌نماییم.

$$\begin{aligned}&\alpha^{-2}(\Delta A)^{T}\,\Delta A \le H\\&(\Delta A)^{T}\,(BD)^{T}\,(BD)(\Delta A)\le G\end{aligned} \quad (۳۱)$$

سیستم نامی کمکی را به‌صورت:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(q_0,k_0,a_{30})x + BD_0u\\&\quad+\alpha(I-(BD)(BD)^{+})v\end{aligned} \quad (۳۲)$$

درنظر می‌گیریم. این سیستم دارای یک ورودی مجازی اضافه می‌باشد که در حل مسئله به ما کمک می‌نماید.

قانون کنترل $u=Kx$ و $v=Lx$ را چنان باید تعیین نمود که تابعی هزینه معادله (۳۳) کمینه گردد.

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}(x^{T}(G+\rho^{2}H+\beta^{2}I)x+u^{T}u+\rho^{2}v^{2}v)dt\\&=\int_0^{\infty}(x^{T}\tilde{Q}x+u^{T}\tilde{R}u)dt\end{aligned} \quad (۳۳)$$

که در این‌صورت جواب مسئله کنترل بهینه $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=-\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^{T}Sx$ خواهد بود. این جواب با حل معادله ریکاتی که جواب یکتایی دارد بدست می‌آید:

$$S\tilde{A}+\tilde{A}^{T}S+\tilde{Q}-S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^{T}S=0 \quad (۳۴)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\tilde{A}=A(q_0,k_0,a_{3_0}),\ \tilde{B}=\begin{bmatrix}BD_0 & \alpha(I-(BD)(BD))^{+}\end{bmatrix}\\&\tilde{Q}=G+\rho^{2}H+\beta^{2}I \qquad \tilde{R}=\begin{bmatrix}I & 0\\0 & \rho^{2}I\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (۳۵)$$

می‌باشد. قانون کنترل با فرض این تغییرات به‌صورت معادله (۳۶) بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(BD)^{T}S\\-\alpha^{2}\rho^{2}(I-(BD)(BD))^{+}S\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}K\\L\end{bmatrix}x \quad (۳۶)$$

در اینجا سه پارامتر α، β و ρ باید طوری انتخاب گردند که بافرض $u=Kx$ و $v=Lx$ شرط $\beta^{2}I-2\rho^{2}L^{2}L>0$ برقرار باشد تا $u=Kx$ جواب مسئله کنترل مقاوم گردد.

اثبات: تابع لیاپانوف را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$V(x)=\min_{u\in R^{m}}\int_0^{\infty}(x^{T}(G+\rho^{2}H+\beta^{2}I)x+u^{T}u+\rho^{T}v^{T}v)dt \quad (۳۷)$$

که این معادله به صورت معادله (۳۸) تبدیل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\min_{u,u}(x^{T}(G+\rho^{2}H+\beta^{2}I)x+u^{T}u+\rho^{T}v^{T}v)\\&+V_x^{T}(A(q_0)x+BDu)+\alpha(I-(BD)(BD)^{+})V))=0\end{aligned} \quad (۳۸)$$

این تابع باید در معادله همیلتن- ژاکوبی- بلمن صدق کند و مشتق آن نیز نسبت به u باید صفر باشد یعنی:

$$\begin{aligned}&x^{T}(G+\rho^{2}H+\beta^{2}I)x+x^{T}k^{T}kx\\&+\rho^{2}x^{T}L^{T}Lx+V_x^{T}(A(q_0,k_0,a_{3_0})x\\&+BDKx+\alpha(1-(BD)(BD)^{+}Lx)=0\end{aligned} \quad (۳۹)$$

و همچنین

$$\begin{aligned}&2x^{T}k^{T}+V_x^{T}BD=0\\&2\rho^{2}x^{T}L^{T}+V_x^{T}\alpha(I-(BD)(BD)^{+})=0\end{aligned} \quad (۴۰)$$

که در آن $(BD)^{+}=((BD)^{T}\,BD)^{-1}(BD)^{T}$ است.

بدیهی است که برای یک تابع لیاپانوف رابطه (۴۱) برقرار خواهد بود:

$$\begin{cases}V(x)>0 & x\neq 0\\V(x)=0 & x=0\end{cases} \quad (۴۱)$$

حال نشان می‌دهیم که $\dot{V}(x)<0$ به ازای تمام $x\neq 0$ است.

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x)\\&=V_x^{T}\dot{x}\\&=V_x^{T}(A(p)x+BD(Kx+E(p)Kx))\\&=V_x^{T}(A(p_0)x+BDKx+\alpha(I-(BD)(BD)^{+}Lx)\\&\quad+V_x^{T}(A(p)-A(p_0))x-V_x^{T}\alpha(I-(BD)(BD)^{+})Lx\\&\quad+V_x^{T}BDE(p)Kx=V_x^{T}(A(p_0)x+BDKx\\&\quad+\alpha(I-(BD)(BD)^{+}Lx)+V_x^{T}BD(BD)^{+}(A(p)-A(p_0))x\\&\quad+V_x^{T}\alpha(I-(BD)(BD)^{+})(A(p)-A(p_0))x\\&\quad-V_x^{T}\alpha(I-(BD)(BD)^{+})Lx+V_x^{T}BDE(p)Kx\end{aligned} \quad (۴۲)$$

از رابطه (۳۹) داریم:

$$\begin{aligned}&V_x^{T}(A(q_0)x+BDKx+\alpha(I-(BD)(BD)^{+})Lx)\\&=-x^{T}(G+\rho^{2}H+\beta^{2}I)x-x^{T}K^{T}Kx-\rho^{2}x^{T}L^{T}Lx\end{aligned} \quad (۴۳)$$

و همچنین از رابطه (۴۰):

$$\begin{aligned}&V_x^{T}(BD)(BD)^{+}(A(q)-A(q_0))x=\\&-2x^{T}K^{T}(BD)^{+}(A(q)-A(q_0))x\\&V_x^{T}(BD)E(q)Kx=-2x^{T}K^{T}E(q)Kx\end{aligned} \quad (۴۴)$$

و از رابطه (۴۱)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

$$V_x^T \alpha(I-(BD)(BD)^+)Lx = -2\rho^2 x^T L^T Lx$$
$$V_x^T (I-(BD)(BD)^+)(A(q)-A(q_0))x = -2\alpha^{-1}\rho^2 x^T L^T (A(q)-A(q_0))x \quad (۴۵)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) =& V_x^T (A(q_0)x + BDKx \\ &+\alpha(I-(BD)(BD)^+)Lx) \\ &+V_x^T (BD)(BD)^+(A(q)-A(q_0))x \\ &+V_x^T (I-(BD)(BD)^+)(A(q)-A(q_0))x \\ &-V_x^T \alpha(I-(BD)(BD)^+)Lx + V_x^T BDE(q)Kx \\ =& -x^T(G+\rho^2 H+\beta^2 I)x - x^T K^T Kx \\ &-\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T (BD)^+(A(q) \\ &-A(q_0))x - 2\alpha^{-1}\rho^2 x^T L^T (A(q) \\ &-A(q_0))x + 2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx\end{aligned} \quad (۴۶)$$

از رابطه (۳۱) :

$$\begin{aligned}&-x^T K^T Kx - 2x^T K^T (BD)^+(A(q)-A(q_0))x \\ &= -x^T (K-(BD)^+(A(q)-A(q_0)))^T (K^T-(BD)^+(A(q)-A(q_0)))x \\ &+x^T ((BD)^+(A(q)-A(q_0)))^T ((BD)^+(A(q)-A(q_0)))x \\ &\le x^T ((A(q)-A(q_0))^T (BD)^{+T}(BD)^+(A(q)-A(q_0)))x \\ &\le x^T Gx\end{aligned} \quad (۴۷)$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}&-2\alpha^{-1}\rho^2 x^T L^T (A(q)-A(q_0))x \\ &\le \rho^2 x^T L^T Lx + \alpha^{-2}\rho^2 x^T (A(q)-A(q_0))^T (A(q)-A(q_0))x \\ &\le \rho^2 x^T L^T Lx + \rho^2 x^T Hx\end{aligned} \quad (۴۸)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) =& -x^T(G+\rho^2 H+\beta^2 I)x - x^T K^T Kx - \rho^2 x^T L^T Lx \\ &-2x^T K^T (BD)^+(A(q)-A(q_0))x \\ &-2\alpha^{-1}\rho^2 x^T L^T (A(q)-A(q_0))x \\ &+2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx \\ \le& -x^T(G+\rho^2 H+\beta^2 I)x - \rho^2 x^T L^T Lx + x^T Gx \\ &+\rho^2 x^T L^T Lx + \rho^2 x^T Hx + 2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx \\ =& -x^T(\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L)x - 2x^T K^T E(q)Kx \\ \le& -x^T(\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L)x\end{aligned} \quad (۴۹)$$

اگر شرط کافی $\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L > 0$ برقرار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x) < 0 \quad x \neq 0 \\ &\dot{V}(x) = 0 \quad x = 0\end{aligned} \quad (۵۰)$$

بنابراین برای تمام $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$ و $a_3 \in [a_{3\min} \quad a_{3\max}]$ و $k \in [k_{\min} \quad k_{\max}]$ سیستم پایدار بوده و $u = Kx$ جواب مسئله کنترل مقاوم است. جهت ردیابی گشتاور مطلوب توسط گشتاور خروجی باید قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند.

۶- نتایج شبیه‌سازی:

شبیه‌سازی‌ها در دوسناریوی مختلف، که در سناریوی اول شبیه‌سازی‌ها با همان پارامترهای [۱۵] که فقط یک پارامتر آن دارای عدم‌قطعیت است، اجرا می‌گردد. و خطای ناشی از کنترل‌کننده مقاوم با رویکرد بهینه (روش پیشنهادی) با خطاهای ناشی از اعمال دو کنترل‌کننده دیگر یعنی کنترل‌کننده مدلغزشی_ تطبیقی و مدلغزشی به‌تنهایی به سیستم، مقایسه می‌گردند. در سناریوی دوم شبیه‌سازی‌ها با وجود عدم قطعیت در سه پارامتر که ناسازگار با سیستم هستند و با کمک کنترل پیشنهادی و کنترل‌کننده‌های بیان‌شده یعنی کنترل‌کننده‌های مدلغزشی تطبیقی و مدلغزشی به تنهایی اجرا می‌گردد که نوآوری مقاله نیز در آن برجسته‌تر گردیده است.

تعریف خطا:

با تعریف معیارهای خطا به صورت زیر می‌توان نتایج حاصل را مقایسه نمود.

میانگین قدرمطلق خطا (Mean Absolute Error):

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \hat{x}_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|e_i| \quad (۵۱)$$

که $\hat{x}_i$ مقدار تخمین x_i و $e_i = x_i - \hat{x}_i$ است.

میانگین مربع خطا (Mean Square Error):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(e_i)^2 \quad (۵۲)$$

که در اینجا نیز $\hat{x}_i$ مقدار تخمین x_i و $e_i = x_i - \hat{x}_i$ است.

انحراف معیار خطا (Standard Deviation of *error*)

$$STD = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x_i - \bar{x}_i]^2} \quad (۵۳)$$

$\bar{x}_i$ مقدار متوسط x_i می‌باشد.

۶-۱- سناریوی اول:

در این سناریو سیستم جبران‌شده با سه کنترل‌کننده مدلغزشی، مدلغزشی-تطبیقی و روش کنترلی پیشنهادی (مقاوم با رویکرد بهینه) برای عملگر با توجه به مقادیر پارامتری که به‌طور عملی در [۱۱] و [۱۵] مورد آزمایش قرار گرفته و تعیین شده‌اند، شبیه‌سازی می‌گردد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

یعنی $I_M = 1(kgm^2)$، $k = 0.23(Nm/\deg)$ و همچنین ضرایب گشتاور $a_3 = 0.1414(Nm/red^{-1})$ مقاومتی $a_1 = -1.509\times10^{0}(Nm)$، $a_2 = 9.572\times10^{-1}(Nm)$ می‌باشند. پارامتر I_M دارای مقدار متوسط گفته شده بوده و با ۲۰٪ عدم‌قطعیت در نظر گرفته شده است که در [۱۵] نیز همین یک پارامتر با عدم‌قطعیت لحاظ گردیده است. در اینجا طبق معادله (۲۳) و متغیرهای کمکی معادله (۳۰) داریم:

$$F = \begin{bmatrix} (k(q_{\max}-q_0))^2 & ka_3(q_{\max}-q_0)^2 \\ ka_3(q_{\max}-q_0)^2 & (a_3(q_{\max}-q_0))^2 \end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$\begin{aligned} Q &= F + I \\ R &= I = 1 \end{aligned} \quad (۵۵)$$

با توجه به معادلات (۲۷) و (۵۴) و (۵۵) و حل مسئله ریکاتی، ورودی کنترل مقاوم مبتنی به روش کنترل بهینه به صورت معادله (۵۶) بدست می‌آید:

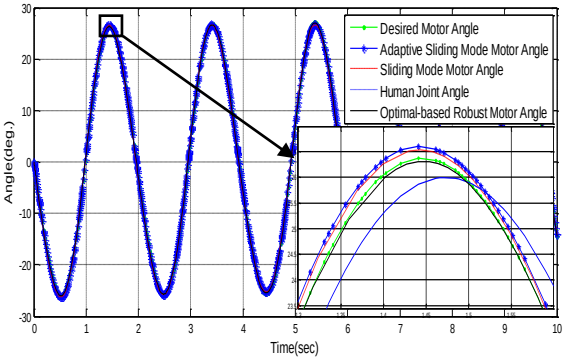
$$u = \begin{bmatrix} -0.9013 & -1.2805 \end{bmatrix} x \quad (۵۶)$$

با تغییر کوچکی در معادله (۵۶) و به‌منظور ردیابی نقطه دلخواه، کنترل‌کننده را به صورت زیر تغییر می‌دهیم تا قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند.

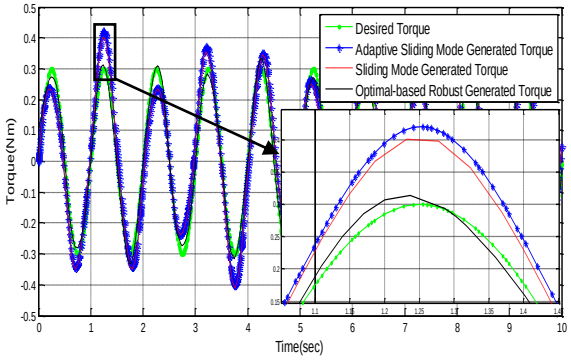
$$\begin{aligned} u = &\begin{bmatrix} -0.9013C_0 & -1.2805C_1 \end{bmatrix} x \\ &+ C_0\theta_{Md} + C_1\dot{\theta}_{Md} + \ddot{\theta}_{Md} \end{aligned} \quad (۵۷)$$

که با انتخاب قطب‌ها در ۵۰- و ۷۰-، C_0 و C_1 انتخاب می‌گردند.

به دلیل در دسترس نبودن پروفایل دقیق گشتاور ورودی به عملگرهای زانو از طرف مغز انسان جهت ایجاد یک قدم زنی استاندارد، گشتاور مطلوب به شکل متغیر با زمان و در محدوده فرکانس کاری پای انسان در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله گشتاور مطلوب ورودی یک موج سینوسی با دامنه ۰/۳ Nm و فرکانس ۱ Hz می‌باشد که در شکل ۶ نشان داده شده است همچنین با یک تبدیل کوچک مطابق روابط ذکر شده می‌توان زاویه حرکت مفصل را به عنوان خروجی مدل نیز درنظر گرفت سیگنال در نظر گرفته شده برای گشتاور مطلوب به شکل سینوسی در واقع شبیه سازی از فرامین مغز انسان به ماهیچه‌های پا در اشخاص سالم جهت بکارگیری در افراد معلول است همچنین θ_H نیز به‌عنوان ورودی دوم یک موج سینوسی با دامنه ۲۶ deg و فرکانس ۰/۵ Hz در نظر گرفته می‌شود بازه حرکت زانو را حدود ۵۲۳ و به صورت مثبت و منفی در نظر گرفته‌ایم تا فنر زیاد جمع و یا باز نشود و از حالت خطی خارج نگردد [۱۱]. در شکل ۵ رسم شده است. شکل ۵ شبیه‌سازی زوایای موتور با کمک سه کنترل‌کننده بیان شده را به همراه زوایای مطلوب ورودی موتور که باید موتور این زاویه را با الگوریتم‌های کنترلی ردیابی نماید را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد ردیابی زاویه مطلوب موتور با کمک روش پیشنهادی به‌خوبی صورت گرفته است. این زاویه مطلوب اگر با ردیابی دقیق‌تری توسط موتور صورت گیرد گشتاور خروجی دقیق‌تری را به دنبال خواهد داشت. در شکل۶ که ردیابی گشتاورها را نشان می‌دهد می‌توان مشاهده کرد که گشتاور خروجی به کمک روش پیشنهادی، ورودی مطلوب را با دقت بالایی ردیابی کرده و علاوه بر این که سرعت بالایی در ردیابی داشته است بالازدگی‌ها در روش‌های دیگر در شکل مشهود است در حالی که گشتاور خروجی با روش پیشنهادی از همان ابتدا بدون بالازدگی بوده و به طور دقیق‌تری ورودی مطلوب را دنبال کرده است. تصدیق این ردیابی در شکل ۷ نیز مشخص است که دامنه خطای ردیابی به‌طور قابل توجهی کاهش یافته است و سرعت ردیابی نیز به طور چشمگیری افزایش می‌یابد. به خاطر وضوح بیشتر بعضی از شکل‌ها، قسمتی از آن‌ها بزرگنمایی شده است.

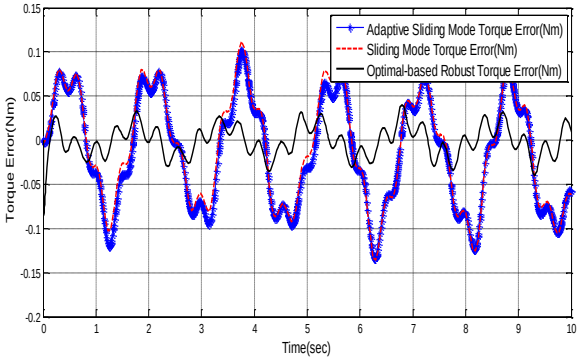


شکل ۵: نمودار زوایای سیستم (سناریوی اول): زوایای حرکت موتور با سه کنترل‌کننده و زاویه مطلوب موتور جهت ردیابی، مقدار نامی پارامتر $I_M = 1(kgm^2)$ به همراه ۲۰٪ عدم‌قطعیت.



شکل ۶: نمودار گشتاورهای سیستم (سناریوی اول): گشتاورهای موتور با سه کنترل‌کننده و گشتاور مطلوب موتور جهت ردیابی، مقدار نامی پارامتر $I_M = 1(kgm^2)$ به همراه ۲۰٪ عدم‌قطعیت.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]



شکل۷: نمودار خطاهای گشتاور سیستم (سناریوی اول): خطاهای گشتاور خروجی با روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های کنترل مدلغزشی و روش کنترل مدلغزشی تطبیقی.

میزان خطای گشتاورها با اعمال این کنترل‌کننده‌ها در جدول ۱ نیز مشاهده می‌گردد. بامشاهده درصد بهبود کنترل‌کننده پیشنهادی نسبت به دو کنترل‌کننده دیگر از صحت عملکرد این روش اطمینان حاصل می‌گردد.

جدول۱: مقادیر خطای گشتاور خروجی در ۱۰ ثانیه عملکرد سیستم (سناریوی اول):

معیار خطا / کنترل کننده	*STD* (*Nm*)	*MSE* (*Nm*)	*MAE* (*Nm*)
مدلغزشی هموار[۱۵]	۰/۰۲۰۶	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۱۹۴
مدلغزشی-تطبیقی هموار[۱۷]	۰/۰۲۲۰	۰/۰۰۰۷۲	۰/۰۱۵۴
پیشنهادی (بهینه مقاوم)	۰/۰۱۵۳	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۶۵
درصد بهبود(روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی هموار)	٪ ۲۵/۶۵	٪ ۶۷/۶۶	٪ ۶۶/۵۸
درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی-تطبیقی هموار)	٪۳۰	٪ ۶۴/۳۲	٪ ۵۷/۸۸

۲-۷. سناریوی دوم:

در این سناریو با فرض اینکه سه پارامتر I_M و k و a_3 دارای مقادیر متوسط $I_M=1(kgm^2)$، $k=0.23(\frac{NM}{rad})$ و $a_3=1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$ و ۲۰٪ عدم‌قطعیت باشند شبیه‌سازی اجرا شده است. سیستم به‌دلیل وجود سه عدم‌قطعیت، یک سیستم دارای عدم‌قطعیت ناسازگار است. با توجه به معادله (۱۸) و مقادیر متوسط گفته شده برای سیستم کمکی داریم:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q_0k_0 & -q_0a_{3_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.05\end{bmatrix}v \quad (۵۸)$$

در اینجا $q_0=1$، $k_0=0.23$ و $a_{3_0}=1414$ همان مقادیر متوسط پارامترهای مورد نظر می‌باشد. تابعی هزینه نیز برای این سیستم با انتخاب $\beta=10$، $\rho=1$ و $\alpha=0.05$ نیز به‌صورت معادله (۵۹) است:

$$j_{u,v}=\int_0^{\infty}+\begin{bmatrix}400(\Delta kq)^2 & 400(\Delta kq)(\Delta ka_3)\\ 400(\Delta kq)(\Delta ka_3) & 400(\Delta ka_3)^2\end{bmatrix} \quad (۵۹)$$
$$+\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 100\end{bmatrix}+u^Tu+v^Tv)$$
$$x^T(\begin{bmatrix}(\Delta kq)^2 & (\Delta kq)(\Delta ka_3)\\ (\Delta kq)(\Delta ka_3) & (\Delta ka_3)^2\end{bmatrix}$$

که در آن داریم:

$$\Delta kq=k_{\max}q_{\max}-k_0q_0$$
$$\Delta ka_3=k_{\max}a_{3_{\max}}-k_0a_{3_0} \quad (۶۰)$$

با حل مسأله جبری ریکاتی $S\tilde{A}+\tilde{A}^TS+\tilde{Q}-S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^TS=0$ که در آن

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q_0k_0 & -q_0a_{3_0}\end{bmatrix} \quad \tilde{B}=\begin{bmatrix}0 & 0.05 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\tilde{Q}=\begin{bmatrix}104.1068 & 2.5248\\ 2.5248 & 101.5521\end{bmatrix} \quad \tilde{R}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (۶۱)$$

می‌باشند. در این صورت $u=kx$ و $v=Lx$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u=-\begin{bmatrix}8.74 & 10076.09\end{bmatrix}x$$
$$v=-\begin{bmatrix}4.8682 & 0.4370\\ 0 & 0\end{bmatrix}x \quad (۶۲)$$

این جواب‌ها اگر در شرط $\beta^2I-2\rho^2L^2L>0$ صدق کند $u=kx$ جواب کنترل است، که در زیر تصدیق این شرط بیان شده است.

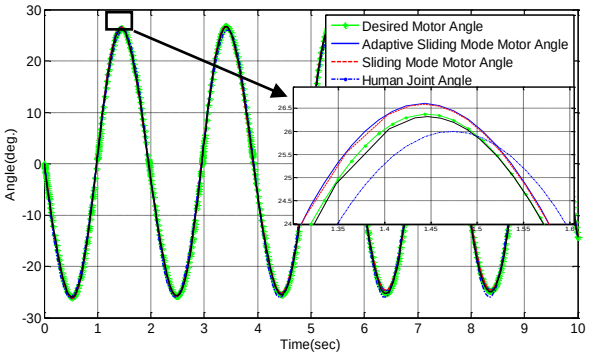
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

$$\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 100\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4.8682 & 0.4370\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}4.8682 & 0.4370\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad (۶۳)$$
$$=\begin{bmatrix}52.6013 & -4.2548\\ -4.25 & 99.6181\end{bmatrix}>0$$

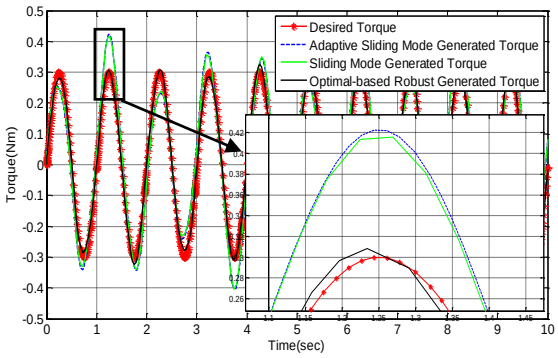
پس $u=kx$ جواب مسأله کنترل مقاوم است. با تغییر کوچکی در معادله (۶۲) و به منظور ردیابی نقطه دلخواه، کنترل‌کننده را به صورت زیر تغییر می‌دهیم تا قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند. که با انتخاب قطب‌ها در ۱۰-و۲۰-، C_0 و C_1 انتخاب می‌گردند.

$$u=\begin{bmatrix}-8.74C_0 & -10076C_1\end{bmatrix}x+C_0\theta_{Md}+C_1\dot{\theta}_{Md}+\ddot{\theta}_{Md} \quad (۶۴)$$

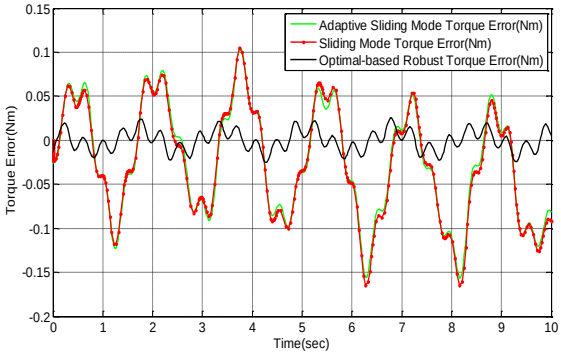
شکل۸ شبیه‌سازی زوایای موتور با کمک سه کنترل‌کننده بیان شده را به همراه زوایای مطلوب موتور که باید توسط موتور ردیابی شود را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌گردد ردیابی زاویه به کمک کنترل‌کننده پیشنهادی به خوبی صورت گرفته است. شکل ۹ نیز ردیابی گشتاور خروجی را نشان می‌دهد. بالازدگی‌ها در روش‌های دیگر در شکل مشهود است در حالی که روش پیشنهادی بالازدگی خیلی پایینی دارد. شکل ۱۰ نیز که خطای این ردیابی را نشان می‌دهد تصدیق می‌نماید که کنترل‌کننده پیشنهادی بهبود قابل توجهی را در دامنه خطا به‌وجود آورده و سرعت ردیابی بهتری را دارد.



شکل ۸ : نمودار زوایای سیستم (سناریوی دوم): زوایای حرکت موتور با سه کنترل‌کننده و زاویه مطلوب موتور جهت ردیابی، مقادیر نامی پارامترها $I_M=1(kgm^2)$ ، $k=0.23(\frac{NM}{rad})$ و $a_3=1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$ به همراه ۲۰٪ عدم‌قطعیت در هر سه پارامتر.



شکل ۹: نمودار گشتاورهای سیستم (سناریوی دوم): گشتاورهای موتور با سه کنترل‌کننده و گشتاور مطلوب موتور جهت ردیابی، مقادیر نامی پارامترها $I_M=1(kgm^2)$ ، $k=0.23(\frac{NM}{rad})$ و $a_3=1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$ به همراه ۲۰٪ عدم‌قطعیت در هر سه پارامتر.



شکل ۱۰: نمودار خطاهای ردیابی گشتاور مطلوب سیستم (سناریوی دوم) توسط روش پیشنهادی و مقایسه با دو کنترل‌کننده دیگر

میزان خطا و بهبود روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش‌های بیان شده در جدول زیر مشخص شده است. طبق این جدول روش پیشنهادی درصد بهبود بالایی در ردیابی گشتاور خروجی را نشان می‌دهد.

جدول۲: مقادیر خطای گشتاور خروجی در ۱۰ ثانیه عملکرد سیستم، سناریوی دوم

معیارخطا / کنترل کننده	*STD* (*Nm*)	*MSE* (*Nm*)	*MAE* (*Nm*)
مدلغزشی هموار[۱۵]	۰/۰۵۷	۰/۰۰۳۸	۰/۰۴۸۸
مدلغزشی-تطبیقی هموار[۱۷]	۰/۰۵۸۹	۰/۰۰۴۰	۰/۰۵۱۹
پیشنهادی(بهینه مقاوم)	۰/۰۳۶۱	۰./۰۰۲۵	۰/۰۳۱۰
درصد بهبود(روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی هموار)	٪ ۳۷/۵	٪ ۳۷/۶۴	٪ ۳۶
درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی-تطبیقی هموار)	٪ ۳۸	٪ ۳۴	٪ ۴۰/۲۱

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]

[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]

۷- نتیجه گیری:

در این مقاله کنترل دقیق یک عملگر الاستیکی سری مورد کاربرد در توانبخشی انسان مورد توجه قرار گرفت. عملگر موردنظر به دلیل دارابودن خاصیت غیرخطی و همچنین عدم‌قطعیت در برخی پارامترهای آن، کنترل دقیق آن را بامشکل مواجه کرده بود. به‌همین دلایل بالازدگی‌هایی در دامنه خروجی گشتاور سیستم مشاهده گردید. دراینجا به‌منظور کنترل گشتاور سیستم و مقابله با تغییرات ناخواسته خروجی دراثر تغییر پارامترها، کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه طراحی گردید این کنترل‌کننده علاوه بر بهینه بودن، در برابر تغییرات پارامترها نیز مقاوم است و با اعمال آن به سیستم بهبودهای قابل توجهی در گشتاور خروجی نسبت به اعمال دیگر کنترل‌کننده‌ها مشاهده گردید تا جاییکه در حالت ناسازگار حدود ۴۰٪ بهبود در یکی از معیارها و در حالت سازگار هم تا ۶۶٪ بهبود در روش پیشنهادی مشهود گردید.

مراجع

[1] Paluska. D, and herr. H, 2006, ″Series elasticityand actuator power output,″ in IEEE international conference on Robotics and Automation (ICRA), pp. 1830-1833.

[2] pratt. J, kupp. B, and Morse. C., 2002, ″ Series Elastic actuators for high fidelity force control, ″Industrial Robot: An International journal, 29, pp. 234-241.

[3] pratt. G, and Williamson. M, 1995, ″Series Elastic Actuators, ″in IEEE International conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 399-406.

[4] Yu. H, Huang. S, Chen.G, Pan. G, 2015, " Human-robot interaction control of rehabilitation robot with series elastic actuator," IEEE Trans. Robot, pp. 1552-3098.

[5] Liu. Z, Chen. C, and Zhang. Y, 2013, ″Decentrlized Robust Fuzzy Adaptive Control of Humanoid Robot Manipulation with Unknown Actuator backlash, ″IEEE Trans. fuzzy sys., pp, 1063 6706.

[6] J. Braun. D, Petit. F, Huber. F, Smaget, p.v.d., Albu-Schaffer, A., Vijayakumar, S, 2013, " Robots Driven by Compliant Actuators: Optimal Control Under Actuatin Constraints," IEEE Trans. Robot, vol. 29, NO. 5, pp. 1552-3098.

[7] X. Miranda La Hera, P., S. Sheriaev, A., B. Freidovich, L., Metin, U., andV.Gusev, S., 2013, " Stable Walking Gaits for a Tree-Link Planar Biped Robot With One Actuator," IEEE Trans.Robot, vol. 29, NO. 3, 1552-3098.

[8] Bae, J., Kong, K., Tomizuka, M., 2011, " Control algorithms for prevention of impact in rehabilitation systems,"IEEE/ASME International conference on Advanced Inteligent Mechatronics (AIM2011), pp. 128- 133.

[9] Kong. K., Bae. J., Tomizuka. M., 2010, " A Compact Rotary Series Elastic Actuator for Knee Joint Assistive System," proceedings of the IEEE International Conference on Robotica and Automation (ICRA), pp. 2940-2945.

[10] Bae. J., Kong. K., Tomizuka. M., 2010, " Gait Phase-Based Smoothed Sliding Mode Control for a Rotary Series Elastic Actuator Installed on the Knee Joint," Proceeding on American Control Conference (ACC), pp. 6030-6035.

[11] Kong, K., Bae, J., and Tomizuka, M., 2009, "Control of Rotary Series Elastic Actuator for Ideal Force-Mode Actuation in Human-Robot Interaction Applications," IEEE/ASME Trans. Mechatron., vol. 14, pp. 105–118.

[12] Grun. M., Moller, R., Konigorski, U., 2012, " Model Based Control of Series Elastic Actuators," The Fourth IEEE RAS/EMBS Int. Conf. on Biomedical Robotics and Biomechatronics, pp. 538- 543.

[13] W. Sensinger. J, F.ff. Weir. W., 2006, "Improvements to Series Elastic Ectuator," MESA-2006-108.

[14] Yoo. S.J, 2012," Actuator fault detection and adaptive accommodation control of flexible-joint robots, ″IET Control Theory Appl., vol. 6, no. 10, pp. 1497-1507.

[15] Bae. J., Kong. K., Tomizuka. M., 2011 "Gait Phase-Based Control for a Rotary Series Elastic Actuator Assisting the Knee Joint," J. Med. Devices, vol.5, no. 3. pp. 310-316.

[16] Slotin. J., and Li. W, "Applied Nonlinear Control," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[17] Sabbaghi. H., Karsaz, A., Mahdavi Majd. M., 2016, " Adaptive Sliding Mode Control for Series Elastic Actuator Assisting Rehabilitation System," 1st Int. Conf. on New Research Achievements in Electrical and Computer Engineering.

[18] Astrom, karl. and Wittenmark. B., ″Adaptive control ″Addison-Wesley, 1934.

[19] Lin, F. Robust control Design an Optimal Control Approach, John Wiley& Sons Ltd.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-07]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.2.5.8]
[DOI: 10.29252/joc.13.2.1]