مجله کنترل
ISSN(print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۱۴-۱

طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی زمان پیوسته با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل – جبری با شرایط مرزی به روش اختلال هموتوپی

آذر السادات شعبانی [۱]، علیرضا فاتحی [۲]، فهیمه سلطانیان [۳]، رضا جمیل نیا [۴]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ ، تهران، ایران. shabani_82@yahoo.com
[۲] دانشیار، گروه پژوهشی اپیک، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران fatehi@kntu.ac.ir
[3] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷- ۱۹۳۹۵، تهران، ایران. f_soltanian@pnu.ac.ir
[4] استادیار ، دانشکده مهندسی مکانیک ،دانشگاه گیلان، صندوق پستی ۱۳۷۷۶-۴۱۹۹۶ ، رشت، ایران. jamilnia@guilan.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۲ ویرایش اول: ۱۳۹۷/۲/۵ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۴/۴ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۷

چکیده: در این مقاله طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین زمان پیوسته و حل معادلات دیفرانسیل-جبری حاصل از آن با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی اختلال هوموتوپی ارائه شده‌است. در هر لحظه بروزرسانی الگوریتم کنترل پیش‌بین زمان پیوسته، می‌بایست یک مساله کنترل بهینه حلقه‌باز حل‌شود. به‌منظور حل مساله کنترل پیش‌بین به صورت زمان پیوسته، مساله کنترل بهینه مذکور بایستی به روش غیرمستقیم حل‌شود. به این‌ترتیب که با بکارگیری حساب تغییرات و اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، شرایط لازم و کافی بهینگی مستخرج می‌شود. در این مقاله نشان داده‌می‌شود که مساله طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین زمان پیوسته با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل–جبری با شرایط مرزی معادل است. برای حل این دستگاه، روش نیمه‌تحلیلی اختلال هموتوپی پیشنهاد می‌شود که نتیجه آن بدست‌آمدن تابع کنترل و تابع حالت بهینه است. با داشتن این توابع می‌توان به آسانی از وضعیت حالت و کنترل در تمامی زمانها مطلع شد. روش ارائه شده می‌تواند برای طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین زمان پیوسته سیستم‌های خطی، غیرخطی و همچنین سیستم‌های متغیربازمان بکار رود. به منظور نشان دادن قابلیت و کارایی روش پیشنهادی چند مثال عددی همراه با شبیه‌سازی ارائه شده‌است.

کلمات کلیدی: کنترل پیش‌بین زمان-پیوسته، کنترل بهینه، اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، معادلات دیفرانسیل-جبری، روش اختلال هموتوپی

Design of nonlinear continuous time predictive controller by solving the differential-algebraic equations with boundary conditions using homotopy perturbation method

Azar Shabani, Alireza Fatehi, Fahimeh Soltanian, Reza Jamilnia

Abstract: In this paper, design of continuous time predictive controller and solving the resulting differential-algebraic equations are presented using the semi-analytical homotopy perturbation method. At any updating time of the continuous time predictive control algorithm, an optimal open loop control problem must be solved. In order to solve the predictive control problem in continuous time, the problem of optimal control is solved by an indirect method. For this purpose, the necessary and sufficient conditions for optimality are determined by applying the variational calculus and the Pontryagin's minimum principle. A system of differential-algebraic equations with boundary conditions is created. Homotopy perturbation method is proposed to semi-analytically solve this problem. By specifying the control and the state functions, we can obtain easily the control and the state values in every instance of the prediction horizon. The presented method can be used to design of continuous-time predictive controller of linear, nonlinear and time varying systems. To illustrate the reliability and efficiency of the proposed method, some numerical examples with simulation results are presented.

Keywords: Continuous-Time Model Predictive Control, Optimal Control, Pontryagin's Minimum Principle, differential-algebraic equations, Homotopy Perturbation Method.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

۱- مقدمه

یک سیستم کنترل، ابزاری است که از طریق تولید و اعمال مجموعه‌ای از دستورات و ورودی‌های کنترلی، رفتار یک دستگاه و یا فرایند را به سمت مقادیر مطلوب هدایت و تنظیم می‌کند. دسته‌ای از روش‌های کنترل نوین که مدل سیستم حضور مشخص و فعالی در ساختار کنترل‌کننده دارد، روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل [۱](MPC) است.

کنترل پیش‌بین، به یک دسته از الگوریتم‌ها اشاره دارد که سیگنال کنترل را برای بهینه‌سازی رفتار آینده یک سیستم محاسبه می‌کند. این روش از دهه ۱۹۷۰ توسعه‌یافته است و بطور گسترده‌ای در فرایندهای صنعتی بکاربرده شده‌است. با این وجود بیشتر تکنیک‌هایMPC به صورت زمان گسسته متمرکز شده‌اند و کمتر به شکل زمان پیوسته گسترش یافته‌اند.

در سال‌های اخیر، روش‌ها و تکنیک‌های مختلفی برای حل مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته صورت گرفته‌است، که می‌توان به موارد زیر اشاره‌کرد. در مقاله [۱]، بر اساس روش پرتابی چندگانه مستقیم[۲]، افق پیش‌بین[۳] را به زیر بازه‌هایی افرازکرده و با گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و پارامتری‌کردن متغیرهای حالت، مساله کنترل بهینه[۴] (OC) با بعد نامتناهی را به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی[۵] (NLP) با بعد متناهی تبدیل می‌کند. پس از انجام این مراحل، مساله NLP را با روش‌های عددی سریع براساس اطلاعات مشتق حل می‌کند. در [۲]و [۳]، در هر بازه نمونه‌برداری متغیر کنترل به صورت تابع ثابت در نظرگرفته شده‌است. ویژگی اصلی روش پیشنهادی مربوط به ماهیت قطعه‌ای بودن سیگنال کنترل است .این ویژگی منجر به یک مساله بهینه سازی قابل حل می شود که در آن تعداد متغیرهای کنترل کم می‌شود. مقاله [۴]، برای کاهش حجم محاسبات و سرعت بخشیدن به روند بهینه‌سازی، با در نظرگرفتن مجموعه‌ای از توابع حقیقی متعامد[۶]، تابع کنترل را به صورت بسط سری از آنها بیان می‌کند. در مقاله [۵]، ابتدا با روش هم‌نشانی متعامد مساله کنترل بهینه را به مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کند. سپس، برای یافتن مینیمم مطلق مساله بهینه‌سازی، روش‌های بهینه‌سازی سراسری را بکار می‌برد. در [۶]، در هر لحظه نمونه‌برداری مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته، مساله کنترل بهینه با استفاده از روش مستقیم[۷]، یعنی با پارامتری‌سازی و گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و حالت، به مساله NLP تبدیل شده و سپس آن را به روش برنامه‌ریزی غیرخطی حل می‌کند. در [۶]، با اشاره به این‌که گسسته‌سازی مساله کنترل بهینه در MPC، اغلب در نقاطی با فاصله برابر انجام می‌شود و تنها در صورتی‌که بازه‌های نمونه‌برداری به اندازه کافی کوچک باشند، این گسسته‌سازی دقت لازم را دارد که همراه با حجم محاسباتی بالا است. به این منظور برای بهبود دقت گسسته‌سازی و جلوگیری از بکارگیری تعداد زیربازه‌های زیاد، از روش شبه‌طیفی استفاده کرده‌است و متغیرهای حالت و کنترل را با چندجمله‌ایهای لاگرانژ تقریب می‌زند. در [۷]، مساله تعقیب کردن را برای سیستم‌های غیرخطی با بکارگیری MPC بیان می‌کند. به این صورت که ابتدا با مشتق‌گیریهای متوالی از معادله خروجی سیستم وبکارگیری آنها در بسط تیلور خروجی سیستم، خطای تعقیب‌کردن در افق پیش‌بین را به کمک بسط سری تیلور تقریب می‌زند. سپس، مساله بهینه‌سازی حاضر را به روش‌های متعارف حل می‌کند. ونگو و بوید در سال۲۰۰۸، طراحی کنترل پیش بین برای سیستم های غیرخطی زمان گسسته را با بکارگیری بهینه سازی سراسری مطرح کردند. از آنجایی که مساله برنامه‌ریزی غیرخطی ممکن است نامحدب باشد، ابتدا، با روش های موجود آن را محدب کرده و پس از خطی سازی آن را حل نمودند [۸]. پانوچیا و همکارانش در سال ۲۰۱۰، حل مساله رگلاتور خطی مقید زمان پیوسته را ارائه کردند. ابتدا بازه زمانی را با روش‌های مناسب به زیربازه هایی افراز کرده و در هر زیر بازه، تابع کنترل را به یکی از سه روش نگهدارنده مرتبه صفر ، نگهدارنده خطی قطعه ای و نگهدارنده مرتبه یک پارامتری نمودند. سپس، با تبدیل مساله کنترل بهینه به فرم یک مساله بهینه سازی با بعد متناهی، پارامترهای مجهول در پارامتری سازی‌ها را تعیین کردند. به این ترتیب، متغیرهای کنترل بهینه مشخص می‌شود [۹]. دیلن و همکارانش در سال ۲۰۱۴، مساله کنترل پیش بین غیرخطی را با بکارگیری الگوریتم بهینه سازی مشتق آزاد ارائه نمودند. از آنجایی که روش‌های بهینه سازی بر پایه گرادیان می باشند، لذا برای توابعی که مشتق‌پذیر نیستند مناسب نیست. بنابراین الگوریتم مشتق آزاد در این مقاله بررسی و بکار گرفته شد. البته، ابتدا مسائل کنترل بهینه موجود در کنترل پیش بین با روش پرتابی پارامتری شده و سپس، مساله برنامه ریزی غیرخطی حاصل را با الگوریتم مشتق آزاد حل نمودند [۱۰].

طبق بررسی‌های انجام شده، در تمامی روش‌های فوق، در حین حل مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته، از روش‌های خطی‌سازی، گسسته‌سازی و یا پارامتری‌سازی استفاده شده‌است و هیچکدام از آنها مسئله کنترل پیش‌بین را به صورت زمان پیوسته حل نکرده‌است. از طرفی همانطورکه می‌دانیم موضوع کنترل مقاوم در فضای زمان پیوسته از غنای خوبی برخوردار است. لذا این‌ها از انگیزه‌های این مقاله در پیشنهاد کنترل پیش‌بین زمان پیوسته است و نشان داده می‌شود که طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین سیستم‌های غیرخطی زمان پیوسته، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری[۸] (DAEs) با شرایط مرزی معادل است. سپس، با حل این دستگاه به روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوپی[۹](HPM)، تابع کنترل و تابع حالت بهینه

[1] Model Predictive Control
[2] Multiple shooting direct method
[3] Predictive Horizon
[4] Optimal control
[5] Nonlinear programming problem
[6] Orthonormal functions
[۷] Direct method
[۸] Differential-Algebraic Equations
[9] Semi analytical Homotopy Perturbation Method

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

به صورت زمان پیوسته مشخص می‌شود.

ساختار کلی بخش‌های مقاله به این صورت است که ابتدا مساله مورد بررسی این پژوهش، یعنی مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته در بخش دوم بیان می‌گردد. از آنجایی‌که در هر لحظه بروزرسانی الگوریتم مورد نظر، بایستی یک مساله کنترل بهینه حل شود، لذا در بخش سوم، مساله کنترل بهینه و رویکردهای حل آن بازگومی‌شود. از طرفی برای حل مساله کنترل بهینه، روش غیرمستقیم[1] بکاربرده شده‌است، که منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری با شرایط مرزی می‌شود. برای حل این دستگاه، روش نیمه‌تحلیلی اختلال هموتوپی استفاده شده‌است که در بخش چهارم اشاره‌ای به این روش می‌شود. در بخش پنجم، الگوریتم پیشنهادی طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین سیستم‌های زمان پیوسته ارائه شده‌است. در بخش ششم، مثال‌های عددی و شبیه سازی و در بخش هفتم، نتیجه‌گیری بیان می‌گردد.

۲- بیان مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته

سیستم زمان پیوسته غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = k\big(x(t)\big) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (۱)$$

با حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$، شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}^n$، خروجی $y(t) \in \mathbb{R}^r$ و ورودی کنترل $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ ، که U مجموعه‌ای فشرده و شامل مبدا است. تابعی غیرخطی $f: \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}^n$ و $k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ نسبت به تمام مولفه‌ها هموار (پیوسته و مشتق‌پذیر) است. در اینجا فرض می‌شود سیستم (۱) برای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و هر تابع کنترل پیوسته $u: \mathbb{R}^+ \to U$ جواب منحصر بفردی دارد.

با توجه به هدف طراح، که معمولا رساندن حالت یا خروجی سیستم به مقدار مطلوب با حداقل تلاش کنترلی است، تابعی هزینه[2] با افق نامتناهی زیر در نظرگرفته می‌شود:

$$J_\infty(x_0, u) = \int_0^\infty g(x(t), u(t), t)dt \quad (۲)$$

که $g: \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}^+$ تابعی‌ای پیوسته است. به این ترتیب، مساله (۱) و (۲) یک مساله بهینه‌سازی با قیود دیفرانسیل- جبری تشکیل می‌دهد. اگر این مساله بهینه‌سازی بتواند برای افق نامتناهی حل شود و همچنین هیچ اختلال و عدم تطابق مدل و سیستم هم وجود نداشته‌باشد، پس می‌توان تابع کنترل پیداشده در لحظه $t = 0$ را برای سیستم در تمام زمان‌های $t \geq 0$ بکار برد. در حالت کلی چنین نیست و به خاطر اغتشاشات و عدم تطابق مدل و سیستم، رفتار سیستم واقعی با رفتار پیش‌بینی شده از مدل متفاوت است. در این مقاله، برای جبران این اختلاف، می‌توان از تکنیک‌های کنترل افق لغزان مانند کنترل پیش‌بین استفاده نمود.

در کنترل پیش‌بین، ابتدا، بر اساس شرایط کنونی متغیرهای حالت، پیش‌بینی رفتار آینده سیستم از روی مدل سیستم و در نظرگرفتن تابعی هزینه،کنترل-های بهینه محاسبه می‌شود. سپس، کنترل‌های بهینه محاسبه‌شده، در بخش کوچکی از بازه زمانی به سیستم دینامیکی اعمال می‌گردد. با جلو بردن بازه نمونه‌برداری و تکرار این فرایند، یک حلقه کنترلی ایجاد می‌شود. در واقع، این حلقه بسته کنترلی، از محاسبه کنترل‌های بهینه از شرایط لحظه‌ای متغیرهای حالت بدست‌می‌آید. با توجه به ایده کنترل پیش‌بین و تئوری مساله کنترل بهینه، می‌توان گفت که طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای سیستم زمان پیوسته (۱) و (۲) طبق الگوریتم زیر در چهار گام انجام می-شود:

الگوریتم۱: ابتدا افق پیش‌بین HP، گام بروزرسانی $\delta > 0$، (توجه‌کنید که لزوما δ یک مقدار ثابت نیست ولی کوچکتر از افق پیش‌بین تعریف می‌شود) و دنباله لحظات بروزرسانی $\{t_i\}_{i\geq 0}$ بطوری‌که $t_{i+1} = t_i + \delta$ را در نظربگیرید.

۱- اندازه‌گیری و یا تعیین حالت سیستم در لحظه t_i ، x_{t_i}.

۲- تعریف مسئله کنترل بهینه زیر و حل آن برای مشخص‌کردن جواب $u^*_{HP}: [t_i, t_i + HP) \to \mathbb{R}^m$:

$$\min_{u \in pc([t_i, t_i+HP], R^m)} J_{HP}(x, u) = \int_{t_i}^{t_i+HP} g(x(t), u(t), t)dt$$

$$s.t \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_i) = x_{t_i}$$

که $pc([a, b], \mathbb{R}^m)$، مجموعه همه توابع پیوسته قطعه‌ای $\alpha: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ را نشان می‌دهد.

۳- اعمال کنترل $u_{MPC}(t) = u^*_{HP}(t)$ بر سیستم در بازه $t \in [\, t_i, t_i + \delta)$ و نادیده گرفتن باقیمانده سیگنال کنترل.

٤- تکرار فرایند فوق برای لحظه بروزرسانی بعدی $t_{i+1} = t_i + \delta$.

۳- مساله کنترل بهینه و رویکردهای حل آن

همانطورکه در بخش ۲ بیان شد، درهر گام کنترل پیش‌بین با یک مساله OC روبرو می‌شویم که می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} &min\, J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \\ &s.t \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ &\qquad x(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (۳)$$

هدف از حل مساله کنترل بهینه، تعیین تابع کنترل قابل قبول $u^*(t) = [u^*_1(t), \dots, u^*_m(t)]$ است که باعث‌شود سیستم، تابع حالت قابل

[1] Indirect method

[2] Cost functional

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

قبول $x^*(t) = [x^*_1(t), \dots, x^*_n(t)]$ را تعقیب نموده و تابعی J را حداقل نماید. برای حل این مساله و تضمین پایداری حالت ماندگار، تابع جریمه $h(x(t_f), t_f)$ که تابعی از زمان نهایی و حالت نهایی است، به تابع هزینه اضافه می‌شود. به این ترتیب تابع هزینه J به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \qquad (۴)$$

تعریف ۱: زوج $(x(\cdot), u(\cdot))$ جواب قابل قبول برای (۳) گفته می‌شود اگر در قیود مساله صدق نماید.

تعریف ۲: جواب قابل قبول $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ مینیمم موضعی ضعیف مساله (۳) با تابع هزینه (۴) گفته می‌شود اگر برای $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ و برای همه جواب‌های قابل قبول $(x(\cdot), u(\cdot))$ که در شرط $\|x - x_0\|_\infty < \varepsilon_1$ و $\|u - u_0\|_\infty < \varepsilon_2$ صدق می‌کنند، داشته باشیم $J(x_0(.), u_0(.)) \le J(x(.), u(.))$. به‌طور معمول به مینیمم موضعی، جواب بهینه نیز گفته می‌شود.

تعریف ۳: جواب $(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$ مینیمم مطلق گفته می‌شود اگر شرایط بالا برای $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \infty$ برقرار باشد.

بطورکلی، سه روش متداول برای حل مساله کنترل بهینه وجود دارد که عبارتند از: روش برنامه‌ریزی پویا، روش مستقیم و روش‌غیرمستقیم.

در روش برنامه‌ریزی پویا[1] [۱۱]، یک سیاست بهینه‌یابی با بکارگیری "اصل بهینگی" بدست می‌آید که منجر به حل معادلات متوالی می‌شود. در روش‌های مستقیم[2] [۱۲]، از طریق گسسته‌سازی و پارامتری‌سازی متغیرها، مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. سپس، مساله حاصله با استفاده از الگوریتم‌های متداول حل می‌گردد. در روش‌های غیرمستقیم با استفاده از حساب تغییرات و اصل حداقل‌یابی پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی که یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای را تشکیل می‌دهد، استخراج می‌شود. سپس، با حل آن با روش‌های مربوطه، تابع کنترل و تابع حالت بهینه بدست می‌آید. در این مقاله برای حل مساله کنترل بهینه موردنظر از روش غیرمستقیم استفاده می‌شود. در ادامه، پیرامون روش غیرمستقیم قضایایی بیان می‌شود.

۱-۳ روش غیرمستقیم حل مساله کنترل بهینه [۹و۱۰]

در روش غیرمستقیم حل مساله کنترل بهینه، به‌واسطه بهره‌مندی از فرآیند تحلیلی و مباحث حساب تغییرات، جواب بدست‌آمده حداقل در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند. پس به نظر می‌رسد این روش، امکان ارائه پاسخ بهینه با دقت بالا را در میان روش‌های حل مساله کنترل بهینه دارا باشد.

قضیه ۱(شرایط لازم بهینگی) [۱۳]: فرض‌کنید $(x^*(t), u^*(t))$ مینیمم موضعی مساله (۳) با تابع هزینه (۴) باشد. آنگاه تابع هم حالت پیوسته مشتق‌پذیر $\lambda(t): [t_0, t_f] \to R^n$ وجود دارد بطوری‌که بر حسب تابع همیلتونین:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)[f(x(t), u(t), t)] \qquad (۵)$$

روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\,(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ \dot{\lambda}^* = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\,(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \\ \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \le \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \\ \qquad \text{for all admissible } u(t) \in U \end{cases}$$

and

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f)\right]^T \delta x_f + \left[\mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f)t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f)\right]\delta t_f = 0 \qquad (۶)$$

رابطه

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \le \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$$

تاکید بر "اصل حداقل‌یابی پونتریاگین" دارد، که u^* باید تابع همیلتونین $\mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$ را مینیمم کند.

قضیه ۲(شرایط کافی بهینگی) [۱۴]: فرض‌کنید $(x(t), u(t))$ جواب قابل قبول مساله (۳) با تابع هزینه (۴) باشد که در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند. اگر $g(x, u, t)$ و هر کدام از مولفه‌های $f(x, u, t)$ نسبت به (x, u) برای هر $t \in [t_0, t_f]$ مشتق‌پذیر و محدب باشند آنگاه $(x(t), u(t))$ یک مینیمم مطلق مساله کنترل بهینه است.

با توجه به فرضیات قضایای فوق، با حل دستگاه (۶) می‌توان جواب بهینه مساله کنترل بهینه (۳) با تابع هزینه (۴) را بیابیم. دستگاه (۶) یک مساله مقدار مرزی است که در صورت غیرخطی بودن معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری و نوع شرایط اولیه و مرزی آن، یافتن جواب دقیق و تحلیلی برای آن مشکل می‌باشد. در [۱۴]، روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوپی برای حل آن بکار گرفته شده‌است.

٤-روش اختلال هموتوپی

بیشتر پدیده‌هایی که در طبیعت و تکنولوژی با آنها مواجه می‌شویم با استفاده از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مدل سازی می‌شوند که در بسیاری موارد یافتن جواب دقیق آن امکان‌پذیر نیست. روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی گوناگونی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد.

[1] Dynamic Programming
[2] Direct method

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

روش نیمه تحلیلی اختلال هموتوپی، برای حل معادلات غیرخطی[۱۵] دستگاه معادلات دیفرانسیل–جبری با مقادیر اولیه[۱۶]، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۱۷] و ... بکار گرفته شده‌است.

روش اختلال هموتوپی، ترکیبی از روش اختلال کلاسیک و روش هموتوپی می‌باشد [۲۶] . روش اختلال، بر پایه وجود پارامتر و یا متغیرهای کوچک (اختلال) در معادله بنا گذاشته شده‌است. برای بهبود این روش و بکارگیری آن در معادلات بدون اختلال، جی هوان هی [۱۲] در سال۱۹۹۹ روش اختلال هموتوپی را معرفی کرد. به این صورت که ابتدا، با بکارگیری مفهوم هموتوپی در توپولوژی، اقدام به ساخت یک معادله هموتوپی وابسته به معادله مورد نظر کرد. در این معادله هموتوپی، پارامتر اختلال وجود دارد که در بازه [۱و۰] تغییر می‌کند. سپس روش اختلال را بر معادله هموتوپی بکار گرفت. در روش اختلال، ابتدا جواب معادله را به صورت یک سری توانی بر حسب پارامتر اختلال با ضرایب مجهول(تابع) در نظر می‌گیرد. سپس، با جایگزین کردن آن سری در معادله هموتوپی و برابر قرار دادن ضرایب توانهای یکسان پارامتر اختلال، معادلات خطی حاصل می‌شود که با حل دنباله‌وار آنها توابع مجهول در سری بدست می‌آیند. برای توضیح ایده اصلی روش اختلال هموتوپی، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$A(x(t)) - f(t) = 0\,, \mathcal{B}(x) = 0 \quad , t \in \Omega \tag{۷}$$

که A عملگر دیفرانسیل کلی، $\mathcal{B}$ عملگر مرزی و $f(t)$ یک تابع تحلیلی معلوم است. به‌طور کلی عملگر A را می‌توان به دو قسمت $\mathcal{L}$ و $\aleph$ تقسیم کرد، که $\mathcal{L}$ عملگر خطی و $\aleph$ عملگر غیرخطی است. بنابراین معادله (۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big) + \aleph\big(x(t)\big) - f(t) = 0 \quad , \mathcal{B}(x) = 0 \tag{۸}$$

برای حل معادله (۸)، ابتدا، یک هموتوپی $v(t,p): \Omega \times [0,1] \to R$ که در شرط زیر صدق می‌کند ساخته می‌شود:

$$\mathcal{H}(v,p) = \mathcal{L}\big(v(t,p)\big) - \mathcal{L}\big(x_0(t)\big) + p\mathcal{L}\big(x_0(t)\big) + p\aleph\big(v(t,p)\big) - pf(t) = 0 \tag{۹}$$

که $v(t,p)$ یک تابع مجهول، $p \in [0,1]$ یک پارامتر جانشانی و $x_0(t)$ یک تقریب اولیه از جواب معادله دیفرانسیل (۸) که باید در شرایط مرزی صدق کند، می‌باشند. از معادله (۹) واضح است وقتی $p = 0$ است، $v(t,0) = x_0(t)$ می‌باشد و وقتی $p = 1$ است، $v(t,1) = x(t)$. می‌باشد. به عبارتی، با تغییر p از صفر تا یک، جواب $v(t,p)$ از $x_0(t)$ بطور یکنواخت به $x(t)$ تغییر می‌کند. فرض کنید جواب معادله (۹) به صورت یک سری از p نوشته شود:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{۱۰}$$

که $v_i(t), i = 0,1, \ldots$ توابع مجهول هستند که طبق روش اختلال بدست می‌آیند. با قراردادن $p = 1$ در رابطه (۱۰) جواب تقریبی معادله (۸) حاصل می‌شود:

$$x(t) = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{۱۱}$$

سرعت همگرایی سری (۱۱) به جواب واقعی معادله (۷)، به عملگر $A(v)$ بستگی دارد [۵] و [۱۸]. با جایگزین کردن رابطه (۱۰) در هموتوپی (۹) و برابر قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان p در دو طرف تساوی، معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\big(v_m(t)\big) \\ &= -\aleph_{m-1}\big(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_{m-1}(t)\big), m \geq 1, \quad \mathcal{B}(v_m) = 0 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که $\aleph_i,\ i \geq 0$ ضرایب p^i در عملگر غیرخطی $\aleph$ هستند:

$$\begin{aligned} &\aleph\big(v(t)\big) \\ &= \aleph_0\big(v_0(t)\big) + p\aleph_1\big(v_0(t), v_1(t)\big) \\ &+ p^2\aleph_2(v_0(t), v_1(t), v_2(t)) + \cdots \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که $v_m(t)$، $m \geq 1$ با حل معادلات (۱۲) به آسانی بدست می‌آیند.

۵- روش پیشنهادی برای حل مساله کنترل پیش‌بین غیرخطی زمان پیوسته

همانطورکه در بخش (۲) بیان شد، طبق الگوریتم ۱، مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته به‌طور مکرر طی چهار گام انجام می‌پذیرد. اکنون با توجه به دینامیک سیستم، تابعی هزینه و روش حل غیر مستقیم مساله کنترل بهینه می‌توانیم الگوریتم زیر را برای حل مساله کنترل پیش‌بین زمان پیوسته ارائه دهیم.

تابعی هزینه و سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید [۱۹]:

$$\begin{aligned} &J = h(x(T), T) + \int_{t_0}^{T} g(x(t), u(t), t)dt \\ &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ &y(t) = k(x(t)) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای مساله (۱۴)، که یک کنترل‌کننده فیدبک در چارچوب کنترل افق لغزان می‌باشد، به صورت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل–جبری طبق الگوریتم زیر در چهار گام انجام می‌شود:

الگوریتم ۲: ابتدا افق پیش‌بین HP، گام بروزرسانی $\delta > 0$، (توجه‌کنید که لزوما δ یک مقدار ثابت نیست ولی کوچکتر از افق پیش‌بین تعریف می‌شود) و دنباله لحظات بروزرسانی $\{t_i\}_{i \geq 0}$ بطوریکه $t_{i+1} = t_i + \delta$، را در نظربگیرید.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

۱- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (DAEs) زیر به روش اختلال هموتوپی برای بدست آوردن جواب‌های تقریبی توابع حالت $x_{MPC}(t)$، هم‌حالت $\lambda_{MPC}(t)$ و کنترل $u_{MPC}(t)$، در بازه $[t_i, t_i + HP)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ \dot{\lambda} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t), t)\right]^T \lambda(t) - \\ \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(\, x(t), u(t), t) \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial u}(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t), t)\right]^T \lambda(t) \\ x(t_i) = x_i \\ \lambda(t_i + HP) = \frac{\partial h}{\partial x}\big(x(t_i + HP)\big) \end{cases} \quad (۱۵)$$

در روش اختلال هموتوپی، ابتدا متناظر با هر یک از معادلات (جبری و دیفرانسیل) دستگاه (۱۵)، یک هموتوپی ساخته می‌شود. جواب‌های تقریبی‌ای برای دستگاه (۱۵) به صورت سری‌هایی از مرتبه دلخواه s با ضرایب مجهول، مانند زیر در نظر گرفته می‌شود که با جایگزین کردن آنها در هموتوپی‌های ساخته شده، توابع مجهول سری بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x(t) \cong \hat{x}(t) = x_0(t) + p x_1(t) + \cdots + p^s x_s(t) \\ \lambda(t) \cong \hat{\lambda}(t) = \lambda_0(t) + p\lambda_1(t) + \cdots + p^s \lambda_s(t) \\ u(t) \cong \hat{u}(t) = u_0(t) + p u_1(t) + \cdots + p^s u_s(t) \end{cases}$$

سپس با قرا دادن $p = 1$، جواب‌های تقریبی دستگاه (۱۵) مشخص می‌شود:

$$x_{MPC}(t) = x_0(t) + x_1(t) + \cdots + x_s(t)$$
$$\lambda_{MPC}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t) + \cdots + \lambda_s(t)$$
$$u_{MPC}(t) = u_0(t) + u_1(t) + \cdots + u_s(t)$$

۲- اعمال کنترل $u_{MPC}(t)$ بر سیستم در بازه $t \in [\, t_i, t_i +$ $\delta)$ و نادیده گرفتن باقیمانده سیگنال کنترل.

۳- تعیین حالت سیستم در لحظه t_{i+1} با تابع حالت $x_{MPC}(t)$ بدست‌آمده در گام (۱)، $x_{t_{i+1}} = x_{MPC}(t_{i+1})$.

٤- تکرار فرایند فوق برای لحظه بروزرسانی بعدی $t_{i+1} = t_i + \delta$.

برای حل دستگاه (۱۵) به روش اختلال هموتوپی، مقادیر اولیه متغیرهای هم حالت، $\lambda(t_0)$، مشخص نیست. لذا، ابتدا به صورت مجهول $\lambda(t_0) = \alpha, \alpha \in R^n$ در نظرگرفته می‌شوند. سپس، بعد از حل دستگاه،، مقادیر مجهول α با توجه به شرط مرزی $\lambda(t_i + HP) = \frac{\partial h}{\partial x}\big(x(t_i + HP)\big)$ بدست می‌آیند.

نکته ۱: برای پیاده سازی کنترل کننده طراحی شده زمان پیوسته آن را به صورت نمونه-داده[1] پیاده‌سازی می‌نماییم که اثر گسسته‌سازی در اجرای کنترل‌کننده پیوسته طراحی شده در سیستم‌های دیجیتالی دیده‌شود.

۱-۵ پایداری

در MPC، یک مساله کنترل بهینه افق نامتناهی با دنباله‌ای از مسائل افق متناهی در چارچوب کنترل افق لغزان تقریب زده‌می‌شود. بطور کلی، به خاطر استفاده از افق پیش‌بین متناهی، پایداری سیستم حلقه بسته تضمین شده نیست. به منظور دستیابی به پایداری، روش‌ها و تکنیک‌های مختلفی ارائه شده‌است. در [۲۰]، با در نظرگرفتن فرضیاتی بر دینامیک سیستم، جمله جریمه حالت نهایی $\big(X(t+HP)\big)^T P(X(t+HP))$ را به تابعی هزینه و قید نامساوی نهایی $X(t+HP) \in \Omega$ را به قیود مساله کنترل بهینه حلقه باز اضافه می‌نماید. سپس، وجود و نحوه انتخاب ماتریس جریمه حالت نهایی P و ناحیه نهایی Ω به گونه‌ای که شرط پایداری حلقه بسته تضمین شود را نشان می‌دهد [قضیه ۱، ۱۸]. البته شرایط بیان شده برای پایداری، کافی است و لازم نمی‌باشند. وجود قید نامساوی نهایی افزوده، حل مساله کنترل بهینه حلقه باز را دشوار می کند و اجرای آنلاین مساله از نظر زمان محاسباتی با مشکل روبرو می شود. در [۲۱] نشان می‌دهد که یک انتخاب مناسب از افق پیش‌بین می‌تواند برقراری قید نامساوی نهایی را تضمین نماید [لم ۲، ۲۲]. سپس، در [قضیه ۱، ۲۲] شرایط پایداری سیستم حلقه بسته را بیان می کند. در [۲۲]، آنالیز پایداری کنترل‌کننده‌های افق لغزان را بر اساس تابع لیاپانوف به عنوان جمله جریمه نهایی بررسی شده-است. در [قضیه ۴، ۲۰] وجود افق پیش‌بینی که پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین کند، بیان می کند.

٦- مثال‌های عددی و شبیه‌سازی

در این بخش، می‌خواهیم به منظور نشان دادن قابلیت و کارایی الگوریتم پیشنهادی ۲، چند مثال عددی به‌همراه نتایج حاصل از شبیه‌سازی مربوطه ارائه نماییم. از طرفی، همانطور که می‌دانیم عوامل مختلفی بر روی کیفیت پاسخ تاثیرگذار است. لذا در مثالهای ارائه شده، برخی از این موارد نیز بررسی شده‌است. در مثال ۱، یک مسئله کنترل پیش‌بین خطی نامتغیر با زمان[2] (LTI) حل می‌شود، تا ایده کلی روش روشن شود. علاوه بر آن در این مثال، تاثیر انتخاب افق پیش‌بین بر کنترل‌کننده، مقاوم بودن روش پیشنهادی و مقایسه روش پیشنهادی با روش کنترل پیش‌بین زمان گسسته نیز مدنظر قرار گرفته است. در مثال ۲، کارایی روش پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین سیستم پیوسته خطی متغیر با زمان[3] (LTV) چند ورودی چند خروجی[4] (MIMO) به‌همراه تاثیر ماتریس‌های وزنی بر آن بررسی می‌شود. در مثال ۳، دینامیک غیرخطی زمان پیوسته هلیکوپتر

[1] Sampled Data
[2] Linear Time Invariant
[3] Linear time varying
[4] Multi Input Multi Output

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

آزمایشگاهی که در بخشی از فضای کاری پایدار و در بخش دیگر ناپایدار است، در فضای حالت آورده شده‌است. در بخش اول این مثال، حذف خطای حالت ماندگار و در بخش دوم مثال، اعمال روش پیشنهادی در نقطه کار ناپایدار سیستم و امکان پایدارسازی آن مورد بررسی قرار گرفته‌است.

۱-۶ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته خطی نامتغیر با زمان

در این بخش، ایده کلی روش پیشنهادی، تاثیر انتخاب افق پیش‌بین بر کنترل کننده، مقایسه روش پیشنهادی با روش کنترل پیش‌بین زمان گسسته و در نهایت مقاوم بودن روش پیشنهادی به صورت عددی بررسی می‌شود.

مثال ۱: مساله یک ورودی یک خروجی[1](SISO) زمان پیوسته با سیگنال مرجع خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = -0.1x(t) + u(t)\\&y(t) = 0.1x(t)\\&y_{ref} = 0.5\chi_{[10,20)} + 0.75\chi_{[20,30)} + 0.25\chi_{[30,\infty)}\end{aligned} \quad (۱۶)$$

که تابع خی عبارت است از

$$\chi_{[a,b)} = \begin{cases}0 & t < a\\ 1 & a \le t < b\\ 0 & t \ge b\end{cases} \quad (۱۷)$$

هدف طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای دنبال‌کردن سیگنال مرجع بوسیله خروجی است، لذا تابعی هزینه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}J = \overbrace{[y(t_f) - y_{ref}(t_f)]^T H\,[y(t_f) - y_{ref}(t_f)]}^{h}\\ + \int_{t_0}^{t_f} [y(t) - y_{ref}(t)]^T Q[y(t)\\ - y_{ref}(t)] + u^T R u dt\end{aligned} \quad (۱۸)$$

طبق روش پیشنهادی، برای تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل–جبری با شرایط مرزی، ابتدا تابع همیلتونین زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq Q\big(0.1x(t) - y_{ref}(t)\big)^2 +\\ Ru^2(t) + \lambda^T(t)[-0.1x(t) + u(t))]\end{aligned} \quad (۱۹)$$

با مشتق‌گیری از این تابع نسبت به u خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 2Ru + \lambda(t) = 0 \implies u = \frac{-\lambda(t)}{2R} \quad (۲۰)$$

such that $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = 2R > 0, R$: ماتریس (اسکالر) معین مثبت

به این ترتیب، دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی معادل مساله کنترل بهینه بر بازه بروزرسانی $[t_0, t_f]$ عبارت است از:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -0.1x(t) + \dfrac{-\lambda(t)}{2R}\\ \dot{\lambda}(t) = -2Q\big(0.1x(t) - y_{ref}(t)\big).(0.1) + 0.1\lambda(t)\\ x(t_0) = x_0\\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{t=t_f} = 2H\big(0.1x(t_f) - y_{ref}(t_f)\big).(0.1) - \lambda(t_f) = 0\end{cases} \quad (۲۱)$$

جواب نیمه تحلیلی مرتبه s دستگاه (۲۱)، طبق روش اختلال هموتوپی به صورت زیر در نظرگرفته می‌شود:

$$\begin{cases}x(t) \cong \hat{x}(t) = x_0(t) + px_1(t) + \cdots + p^s x_s(t)\\ \lambda(t) \cong \hat{\lambda}(t) = \lambda_0(t) + p\lambda_1(t) + \cdots + p^s \lambda_s(t)\end{cases} \quad (۲۲)$$

توابع $x_0(t)$ و $\lambda_0(t)$ جواب‌های تقریبی اولیه دستگاه (۲۱) می‌باشند، که معمولا به صورت توابع ثابت، برابر مقادیراولیه داده شده، در نظرگرفته می‌شوند یعنی $x_0(t) = x_0$ و $\lambda_0(t) = \alpha$ توابع مجهول $x_i(t), i = 0, .., s$ و $\lambda_i(t)$ باید به‌گونه‌ای مشخص‌شوند که در شرایط اولیه مساله صدق‌کنند (توجه شود که لزوما تابع‌های تقریبی $\hat{x}(t)$ و $\hat{\lambda}(t)$ بدست‌آمده، چندجمله‌ای مرتبه s نمی‌باشند. نوع تابع بدست‌آمده، به عملگرهای معادله و جواب تقریبی اولیه در نظر گرفته شده از معادله بستگی دارد):

$$\begin{cases}\hat{x}(t_0) = x_0: \ \text{if } x_0(t) = x_0 \ \text{ then}\\ \qquad x_1(t_0) = \cdots = x_s(t_0) = 0\\ \hat{\lambda}(t_0) = \alpha: \ \text{if } \lambda_0(t) = \alpha \ \text{ then}\\ \qquad \lambda_1(t_0) = \cdots = \lambda_s(t_0) = 0\end{cases} \quad (۲۳)$$

اگر برای هر یک از معادلات دستگاه همگن (۲۱) عملگر خطی را $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$، و جملات باقیمانده را عملگر غیرخطی $\aleph$ در نظر بگیریم، با توجه به هموتوپی (۹) داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\hat{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}(x_0) + p\frac{d}{dt}(x_0) =\\ &\qquad p\left(-0.1\big(\hat{x}(t)\big) + \frac{-1}{2R}\big(\hat{\lambda}(t)\big)\right)\\ &\frac{d}{dt}\big(\hat{\lambda}(t)\big) - \frac{d}{dt}(\alpha) + p\frac{d}{dt}(\alpha) =\\ &\qquad p\left(-0.2Q\big(\hat{x}(t) - y_{ref}(t)\big) + 0.1\big(\hat{\lambda}(t)\big)\right)\end{aligned} \quad (۲۴)$$

با جایگزین کردن سری‌های (۲۲) در روابط (۲۴) و سپس، مساوی قرادادن ضرایب توان‌های یکسان p و حل معادلات بدست‌آمده از آن می‌توان توابع مجهول را بدست آورد:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \int_{t_0}^{t}\left(-0.1x_0 + \frac{-1}{2R}\alpha\right)dt\\ x_2(t) &= \int_{t_0}^{t}\left(-0.1x_1(t) + \frac{-1}{2R}\lambda_1(t)\right)dt\\ &\vdots\\ \lambda_1(t) &= \int_{t_0}^{t} -0.2Q(x_0 - y_{ref}(t) + 0.1\alpha)\,dt\\ \lambda_2(t) &= \int_{t_0}^{t}\big(-0.2Qx_1(t) + 0.1\lambda_1(t)\big)\,dt\\ &\vdots\end{aligned}$$

[1] Single Input Single Output

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

با حل معادلات فوق، توابع $x_i(t), i = 1,..,s$ و $\lambda_i(t)$ مشخص می‌شوند. با قرادان در روابط (۲۲)، تقریب‌هایی از تابع حالت $x(t)$ و تابع هم حالت $\lambda(t)$ و سپس به کمک $u(t) = \frac{-\lambda(t)}{2R}$، تابع کنترل مشخص می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی با در نظرگرفتن پارامترهای مساله به صورت $Q = H = 10$، $s = 2R = 0.02$ (تعداد جملات سری هموتوپی)، گام بروزرسانی $\delta = 0.5$ و دو مقدار افق پیش بین $HP = 2,3$ در شکل (۱) نشان داده شده‌است. جواب‌های تقریبی تابع حالت و تابع کنترل بدست‌آمده عبارت هستند از($HP = 2$):

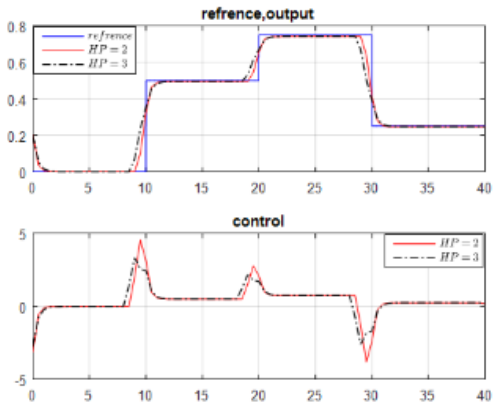
$$x(t) = \begin{cases} 2 - 3.3148t & [0,0.5] \\ 0.6266 - 0.5679t & [0.5,1] \\ 0.1560 - 0.0973t & [1,1.5] \\ 0.0351 - 0.0167t & [1.5,2] \\ \vdots \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 9.688t - 3.1147 & [0,0.5] \\ 1.6598t - 1.3635 & [0.5,1] \\ 0.2843t - 0.3757 & [1,1.5] \\ 0.04871t - 0.0887 & [1.5,2] \\ \vdots \end{cases}$$

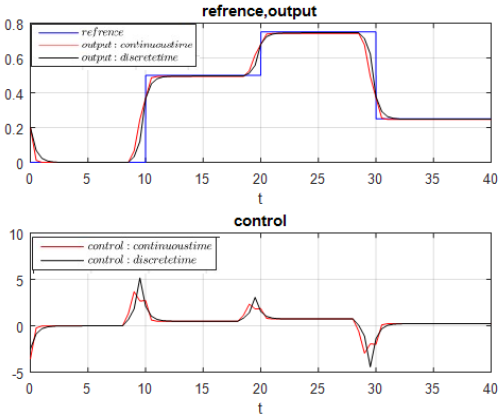
همانطور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، کنترل کننده پیش‌بین، سیگنال مرجع را در طول افق پیش‌بین دارد، لذا با توجه به پیشبینی خطا در آینده، سیگنال کنترل را زودتر از پیش آمدن تغییر در سیگنال مرجع اعمال می‌کند.

برای مقایسه روش پیشنهادی با کنترل پیش‌بین زمان گسسته[۲۳]، ابتدا با در نظر گرفتن زمان نمونه‌برداری $Ts = 0.5$، مساله زمان پیوسته (۱۶) را به سیستم زمان گسسته تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(k+1) = 0.9512\,x(k) + 0.4877\,u(k) \\ y(k) = 0.1x(k) \end{cases} \quad (۲۵)$$



شکل ۱) پاسخ سیستم کنترل پیش‌بین زمان پیوسته مثال ۱، برای دو مقدار افق پیش‌بین $HP = 2,3$



شکل ۲): مقایسه پاسخ سیستم مثال ۱ به دو روش کنترل پیش‌بین زمان پیوسته و زمان گسسته با افق پیش‌بین $HP = 3$

جدول ۱: نتایج مقایسه کنترل پیش‌بین پیوسته و گسسته مثال ۱

معیار		پله اول	پله دوم	پله سوم
زمان نشست	پیوسته	۲/۲۲	۲/۳۵	۲/۹۷
	گسسته	۴/۱۶	۳/۵۲	۶/۵
نسبت حداکثر انحراف سیگنال کنترل زمان گسسته به پیوسته		۱/۵۴۰۷	۱/۴۱۸۵	۱/۶۹۳۹

با توجه به $Ts = 0.5$، ماتریس‌های وزنی مساله زمان گسسته، $Q_d = 0.5Q_c$ و $R_d = 0.5R_c$ می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی مقایسه حل مساله (۱۶) به روش پیشنهادی و مساله (۲۵) به روش کنترل پیش‌بین گسسته با در نظر گرفتن HP=3، $Q_c = 10$ و $R_c = 0.02$ در شکل (۲) و جدول(۱) آورده شده‌است. مشاهده می‌شود که زمان نشست و دامنه سیگنال کنترلی کنترل پیش‌بین زمان گسسته تقریبا یک و نیم برابر زمان پیوسته است.

در الگوریتم پیشنهادی، مقدار افق پیش بین در نظر گرفته شده فقط در محاسبه مقدار شرط نهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل–جبری متناظر با مسئله کنترل بهینه وارد می‌شود لذا می‌توان گفت که افزایش افق پیش بین تا زمانیکه مرتبه هموتوپی ثابت باشد تاثیری در حجم محاسبات مربوط به اجرای شبیه سازی ندارد. در حالیکه در کنترل پیش‌بین گسسته، افزایش افق کنترل و افق پیش‌بین باعث افزایش بعد ماتریس‌ها شده که در زمان محاسبه معکوس ماتریس‌ها و عملیات مقدماتی ماتریس‌ها که در بدست آوردن سیگنال کنترل وجود دارد تاثیر می‌گذارد. برای نشان دادن این موضوع، در مثال ۱ زمان محاسبات با در نظر گرفتن افق پیش‌بین برابر ۲ و ۶ بطور متوسط ۰/۱۵ درصد تغییر می کند به عبارتی حجم محاسبات تغییر آنچنانی ندارد. این نتیجه ای است که از نظر تئوری هم انتظار می رفت.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

با توجه به وجود اغتشاشات نامعلوم و عدم تطابق دقیق مدل و پلنت، بحث مقاوم بودن[1] روش پیشنهادی از اهمیت اساسی و مهمی برخوردار است. اما در این مثال، میزان مقاومت روش به نامعینی در پارامترهای مدل به صورت عددی بررسی شده است. در روش پیشنهادی، مقدار حالت در هر بازه بروزرسانی بر اساس تابع حالت بدست آمده از گام قبلی اندازه‌گیری می‌شود. نتایج بررسی مقاوم بودن روش پیشنهادی، برای چهار حالت زیر در شکل (۳) مشاهده می‌شود:

I. اندازه‌گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس تابع حالت بدست آمده از حل مساله.

II. اندازه‌گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶).

III. اندازه‌گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶) همراه با نامعینی که مقدار ویژه آن ۰/۰۵- درنظر گرفته شده است.

IV. اندازه‌گیری حالت سیستم در هر بازه بروزرسانی بر اساس اعمال سیگنال کنترل بدست آمده بر مدل (۱۶) همراه با نامعینی که مقدار ویژه آن ۰/۲ - درنظر گرفته شده است.

همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، علی رغم اینکه سرعت پلنت حلقه باز دو برابر تغییر کرده است، پاسخ خروجی تغییر قابل توجهی ندارد. این نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، نسبت به تغییر نامعینی در سرعت پلنت حلقه باز مقاومت خوبی دارد.

۲-۶ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته خطی متغیر با زمان

مثال۲: سیستم MIMO زمان پیوسته LTV زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} 0.25\sin t + 0.5 & 0 \\ 0 & -0.25\sin 2t - 0.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2+\sin t \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \qquad (۲۶)$$

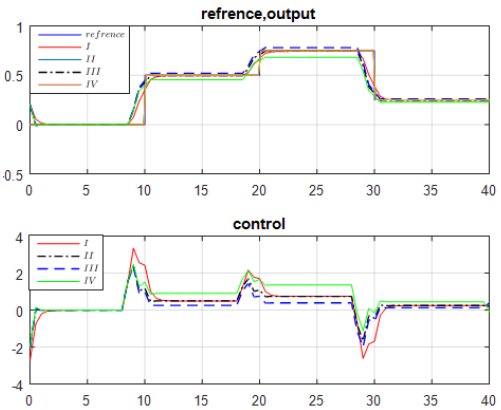
مقادیر ویژه سیستم عبارتند از :

$$\{0.25\sin t + 0.5, -0.25\sin 2t - 0.5 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

واضح است که مقادیر ویژه در بازه‌های $[0.25, 0.75]$ و $[-0.75, -0.25]$ تغییر می‌کنند، لذا سیستم ناپایدار است.

فرض‌کنید حالت اولیه سیستم $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ یا خروجی متناظرش $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ و سیگنال مرجع $\mathbf{y}_{ref} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد. هدف دنبال کردن سیگنال مرجع بوسیله خروجی به روش کنترل پیش‌بین زمان پیوسته پیشنهادی است. لذا، تابعی هزینه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$J = \overbrace{[\mathbf{y}(t_f) - \mathbf{y}_{ref}(t_f)]^T \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} [\mathbf{y}(t_f) - \mathbf{y}_{ref}(t_f)]}^{h} + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{ref}(t)]^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{ref}(t)] + \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} dt \qquad (۲۷)$$



شکل ۳) بررسی مقاوم بودن روش پیشنهادی مثال ۱ با مقادیر ویژه ۰/۱، ۰/۰۵ و ۰/۲.

ابتدا تابع همیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t) \triangleq [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{ref}(t)]^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{ref}(t)] + \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad (۲۸)$$

با مشتق‌گیری از آن نسبت به $\mathbf{u}$ داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 2\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\frac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{u},t)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{-0.5}{2R_1}\lambda_1(t) \\ u_2 = \dfrac{-(2+\sin t)}{2R_2}\lambda_2(t) \end{cases}$$

such that $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}^2} = 2\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0$, ماتریس معین مثبت : $\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ (۲۹)

به این ترتیب، دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مساله عبارت است از:

[1] Robustness

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (0.25\,\sin t + 0.5)x_1(t) + 0.5\left(\frac{-0.5}{2R_1}\lambda_1(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) = (-0.25\,\sin 2t - 0.5)x_2(t) + (2+\sin t)\left(\frac{-(2+\sin t)}{2R_2}\lambda_2(t)\right) \\ \dot{\lambda_1}(t) = -2Q_1\big(x_1(t) - y_{1ref}(t)\big) + 2Q_2\big(-x_1(t) - x_2(t) - y_{2ref}(t)\big) - 0.25\sin t\lambda_1(t) - 0.5\lambda_1(t) \\ \dot{\lambda_2}(t) = 2Q_2\big(-x_1(t) - x_2(t) - y_{2ref}(t)\big) + 0.25\sin 2t\lambda_2(t) + 0.5\lambda_2(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0} \\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{t=t_f} = 2H_1\big(x_1(t_f) - y_{1ref}(t_f)\big) - 2H_2\big(-x_1(t_f) - x_2(t_f) - y_{2ref}(t_f)\big) - \lambda_1(t_f) = 0 \\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|_{t=t_f} = -2H_2\big(-x_1(t_f) - x_2(t_f) - y_{2ref}(t_f)\big) - \lambda_2(t_f) = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (۳۰)$$

جواب نیمه‌تحلیلی مرتبه s دستگاه (۳۰)، طبق روش اختلال هموتوپی به صورت زیردر نظرگرفته می‌شود:

$$\begin{cases} x_1(t) \cong \hat{x}_1(t) = x_{01}(t) + px_{11}(t) + \cdots + p^s x_{s1}(t) \\ x_2(t) \cong \hat{x}_2(t) = x_{02}(t) + px_{12}(t) + \cdots + p^s x_{s2}(t) \\ \lambda_1(t) \cong \hat{\lambda}_1(t) = \lambda_{01}(t) + p\lambda_{11}(t) + \cdots + p^s \lambda_{s1}(t) \\ \lambda_2(t) \cong \hat{\lambda}_2(t) = \lambda_{02}(t) + p\lambda_{12}(t) + \cdots + p^s \lambda_{s2}(t) \end{cases} \quad (۳۱)$$

توابع مجهول $i = 0,..,s$ و $x_{ij}(t), j = 1,2$ و $\lambda_{ij}(t)$ را به‌گونه‌ای بدست می‌آوریم که:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x_0}, \quad \text{if } \mathbf{x_0}(\mathbf{t}) = \mathbf{x_0} \\ \text{then } \mathbf{x_1}(\mathbf{t_0}) = \cdots = \mathbf{x_s}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \text{if } \boldsymbol{\lambda_0}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha} \\ \text{then } \boldsymbol{\lambda_1}(\mathbf{t_0}) = \cdots = \boldsymbol{\lambda_s}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (۳۲)$$

اگر برای هر یک از معادلات دستگاه همگن(۳۰) عملگر خطی را $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}$ و عملگر غیرخطی $\aleph = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ در نظر بگیریم و برای توابع متغیر با زمان $f(t)$، بسط تیلور مرتبه دلخواه r حول نقطه t_0 را قرار دهیم:

$$g_1 = \text{taylor}(\sin t, t_0, r)$$
$$g_2 = \text{taylor}(\sin 2t, t_0, r)$$

آنگاه با توجه به هموتوپی(۹) داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big(\hat{x}_1(t)\big) - \frac{d}{dt}(x_{01}) + p\frac{d}{dt}(x_{01}) = p\left((0.25\,g_1 + 0.5)\hat{x}_1(t) + 0.5\left(\frac{-0.5}{2R_1}\hat{\lambda}_1(t)\right)\right) \\ \frac{d}{dt}\big(\hat{x}_2(t)\big) - \frac{d}{dt}(x_{02}) + p\frac{d}{dt}(x_{02}) = p\begin{pmatrix}(-0.25\,g_2 - 0.5)\hat{x}_2(t) + \\ (2+g_1)\left(\frac{-(2+g_1)}{2R_2}\hat{\lambda}_2(t)\right)\end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\big(\hat{\lambda}_1(t)\big) - \frac{d}{dt}(\alpha_1) + p\frac{d}{dt}(\alpha_1) = p\begin{pmatrix}-2Q_1\big(\hat{x}_1(t) - y_{1ref}(t)\big) + \\ 2Q_2\big(-\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) - y_{2ref}(t)\big) - \\ 0.25g_1\hat{\lambda}_1(t) - 0.5\hat{\lambda}_1(t)\end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\big(\hat{\lambda}_2(t)\big) - \frac{d}{dt}(\alpha_2) + p\frac{d}{dt}(\alpha_2) = p\begin{pmatrix}2Q_2\big(-\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) - y_{2ref}(t)\big) + \\ 0.25g_2\hat{\lambda}_2(t) + 0.5\hat{\lambda}_2(t)\end{pmatrix} \end{cases} \quad (۳۳)$$

با مساوی قرادادن ضرایب توان‌های یکسان p در (۳۳) و حل معادلات بدست‌آمده می‌توان توابع مجهول را بدست آورد. سپس، با قرار دادن توابع بدست‌آمده در معادلات (۳۱)، تقریب‌هایی از تابع حالت $\mathbf{x}(t)$ و تابع هم حالت $\boldsymbol{\lambda}(t)$ و سپس به کمک (۲۹)، تابع کنترل $\mathbf{u}(t)$ مشخص می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی با در نظرگرفتن پارامترهای مساله به صورت $s = 3$ (تعداد جملات سری هموتوپی)، $r = 3$ (مرتبه سری تیلور)، گام بروزرسانی $\delta = 0.1$ ، افق پیش‌بین $HP = 2$ و ماتریس‌های وزنی زیر در شکل (۴) دیده می‌شود.

I. $\quad R = \begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

$$II.\quad R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}10&0\\0&2\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}10&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$III.\quad R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}20&0\\0&5\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}20&0\\0&2\end{bmatrix}$$

جواب‌های تقریبی تابع حالت و تابع کنترل بدست‌آمده برای انتخاب ماتریس‌های وزنی (I) عبارت هستند از:

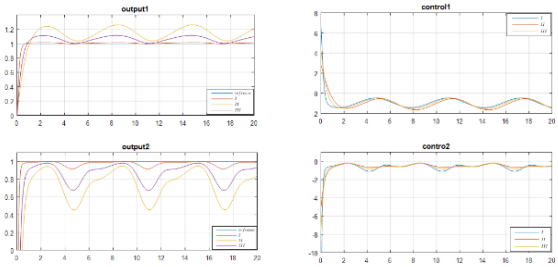
$$x_1(t)=\begin{cases}4.5900t-2.5000t^2+0.1912t^3 & [0,0.1]\\ 0.0726+4.0445t-4.2969\,t^2+0.1508t^3-0.0036t^4-0.0002t^5 & [0.1,0.2]\\ \vdots\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}3-48.1927t+136.2786t^2+103.1506\,t^3+19.1210t^4-0.1946t^5 & [0,0.1]\\ 1.5171-22.1763t+32.1109\,t^2+27.5618\,t^3+4.0592\,t^4-0.5013t^5+\\ 0.0155t^6-.0006t^7 & [0.1,0.2]\\ \vdots\end{cases}$$

$$u_1(t)=\begin{cases}9.1799-14.5900t-100.7648t^2-78.9141t^3-9.6559t^4 & [0,0.1]\\ 8.2591-26.3414t+31.8454t^2-19.6921t^3-2.3895t^4+0.1688t^5-0.0028t^5 & [0.1,0.2]\\ \vdots\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}-23.3464+136.6536t-766.6469t^2-717.9417t^3-188.4085t^4-19.8201t^5 & [0,0.1]\\ -12.9709+75.4939t-158.1542t^2-185.4210t^3-47.3085t^4-2.4951t^5+\\ 0.6232t^6-0.0262t^7+0.0004t^8 & [0.1,0.2]\\ \vdots\end{cases}$$

با توجه به نتایج شکل (۴)، دیده می‌شود که با تنظیم ماتریس‌های وزنی می‌توان خطای ماندگار و نوسانات پاسخ سیستم را کاهش داد. در این مثال، بهترین پاسخ در انتخاب‌های ماتریس‌های وزنی فوق، انتخاب (I) است که خروجی اول تقریبا بدون نوسان سیگنال مرجع را دنبال می‌کند.



شکل ۴) پاسخ سیستم کنترل پیش‌بین پیوسته مثال ۲ با انتخاب‌های ماتریس وزنی I، II و III

۳-۶ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته غیرخطی (مثال کاربردی هلیکوپتر مدل CE150) [۲۵]

در این بخش عملکرد روش پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای هلیکوپتر آزمایشگاهی مدل CE150 بررسی می‌شود. در هلیکوپتر، زاویه‌ی صفحات چرخش اصلی و جانبی ثابت هستند و تنها کارکرد پره‌ها، حفظ تعادل زاویه‌ای در دو صفحه‌ی عمودی و افقی با مشخصه‌های زاویه‌ای ψ و ϕ می‌باشد. تنها ورودی‌های کنترلی هلیکوپتر تعداد دور چرخش پره‌های آن است. که به ترتیب با u_1 و u_2 نشان داده می‌شوند. گشتاور تولید شده توسط پره‌ی اصلی عمدتا در صفحه‌ی عمودی Elevation (ψ) تاثیر می‌گذارد و گشتاور تولید شده توسط پره‌ی جانبی در صفحه‌ی افقی Azimuth (ϕ) تاثیر دارد. با بررسی شرایط کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری دو زیر سیستم SISO افقی و عمودی مطمئن می‌شویم که هر دو قابل کنترل هستند.

در این بخش هدف، کنترل مسیر مجزای SISO، افقی است. در عمل با بستن هر یک از دو پیچ جداگانه‌ای که برای سلب حرکت از هلیکوپتر در صفحه‌های افقی و عمودی تعبیه شده‌اند، و فرمان ندادن به ورودی مسیر قفل شده، می‌توان دو زیر سیستم SISO مستقل به وجودآورد. برای شروع طراحی کنترل‌کننده، ابتدا، معادلات دیفرانسیل غیرخطی فضای حالت حاکم بر هلیکوپتر را در نظر می‌گیریم:

$$f_\psi(\mathbf{x}(t),u_1(t),t)=\begin{bmatrix}x_2\\ \frac{1}{I}\left(-\tau_g\sin(x_1)-B_\varphi x_2+a_1x_3^2+b_1x_3\right)\\ x_4\\ \frac{1}{T_1^2}\left(u_1-x_3-2T_1x_4\right)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi\\\dot\psi\\\alpha\\\dot\alpha\end{bmatrix}$$

$$g_\psi(\mathbf{x}(t),u_1(t),t)=[x_1] \qquad (۳۴)$$

در مدل دینامیکی بیان‌شده، چهارمتغیر حالت وجود دارد که حالت و رفتار سیستم را در هر لحظه بیان می‌نمایند و یک متغیر کنترل وجود دارد که نحوه رفتار سیستم را کنترل می‌کند. پارامترهای این مدل در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲: پارامترهای فضای حالت سیستم دینامیکی مثال (۳)

$a_1=0.1807$	$I=0.0054$	$T_1=0.3$
$b_1=0.0028$	$B_\varphi=0.0011$	$\boldsymbol{\tau_g=0.0755}$

از آنجایی‌که تابعی هزینه بر اساس متغیرهای حالت نوشته می‌شود، برای بدست آوردن نقطه‌ی تعادل $\hat{\mathbf{x}}$، با فرض خروجی مرجع $\mathbf{y_d}$، حالتی که

هلیکوپتر مستقیما رو به جلو و با زاویه‌ی $\mathbf{r}$ قرار داشته باشد، معادلات زیر بایستی حل شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = 0 \\ y_d = r \end{cases} \quad (۳۵)$$

با حل معادلات فوق نقطه تعادل بدست می‌آید:

$$\textbf{if } y_d = 70^0 = 0.9397(\text{radian}) \quad \textbf{then} \quad \hat{x} = [0.9397, 0, 0.6189, 0]^T \quad \textbf{and} \quad \hat{u} = [0.6189]$$

$$\text{if } y_d = 90^0 = 1.5708(\text{radian}) \quad \text{then} \quad \hat{x} = [1.5708, 0, 0.6387, 0]^T \quad \text{and} \quad \hat{u} = [0.6387]$$

هدف حفظ هلیکوپتر در نقطه تعادل است، لذا برای طراحی کنترل‌کننده، تابعی هزینه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\min J = [x_1(t_f) - x_{1ref}(t_f)]^T H_1 [x_1(t_f) - x_{1ref}(t_f)] + [x_3(t_f) - x_{3ref}(t_f)]^T H_3 [x_3(t_f) - x_{3ref}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [x_1(t) - x_{1ref}(t)]^T Q_1 [x_1(t) - x_{1ref}(t)] + [x_3(t) - x_{3ref}(t)]^T Q_3 [x_3(t) - x_{3ref}(t)] + u^T R u dt \quad (۳۶)$$

طبق الگوریتم ۲، با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر با روش اختلال هموتوپی در هر زیر بازه بروزرسانی، تابع حالت و تابع کنترل بهینه بدست‌می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I}\left(-\tau_g \sin(x_1) - B_\emptyset x_2 + a_1 x_3^2 + b_1 x_3\right) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{T_1^2}\left(-x_3 - 2T_1 x_4 - \frac{1}{T_1^2 2R}\lambda_4\right) \\ \dot{\lambda}_1 = -2Q_1(x_1 - x_{1d}) + \frac{\tau_g}{I}\lambda_2 \cos(x_1) \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + \frac{B_\emptyset}{I}\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_3 = -2Q_3(x_3 - x_{3d}) - \frac{2a_1}{I}\lambda_2 x_3 - \frac{b_1}{I}\lambda_2 + \frac{1}{T_1^2}\lambda_4 \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3 + \frac{2T_1}{T_1^2}\lambda_4 \\ u = \frac{-1}{T_1^2 2R}\lambda_4 \end{cases} \quad (۳۷)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ x_3(t_0) = x_{30} \\ x_4(t_0) = x_{40} \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} 2H_1(x_1(t_f) - x_{1ref}) - \lambda_1(t_f) = 0 \\ \lambda_2(t_f) = 0 \\ 2H_3(x_3(t_f) - x_{3ref}) - \lambda_3(t_f) = 0 \\ \lambda_4(t_f) = 0 \end{cases} \quad (۳۸)$$

نتایج شبیه‌سازی، برای حفظ موقعیت هلی‌کوپتر در زاویه $70^\circ = 1.2217(rad)$، با پارامترهای داده شده در جدول ۳، در شکل (۵) نشان داده‌شده‌است. طبق روش پیشنهادی، جواب‌های تقریبی توابع حالت و تابع کنترل مساله با در نظرگرفتن پارامترهای جدول ۳ مربوط به شکل (۵) عبارت هستند از:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1.0472 + 0.3153t^2 & [0,0.05] \\ 1.0472 + 0.0017t + 0.2966t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0.6306t - 0.0642t^2 & [0,0.05] \\ 0.0003 + 0.6481t - 0.5495t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} 0.6093 - 0.2476t^2 & [0,0.5] \\ 0.6095 - 0.0138\,t - 0.0462\,t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} -0.4952 + 2.5437t^2 & [0,0.05] \\ -0.0080 - 0.3240t + 2.3161t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 3.6041 - 97.4538t + 614.1250\,t^2 & [0,0.05] \\ 9.8578 - 155.3022t + 597.2224t^2 & [0.05,0.1] \\ \vdots \end{cases}$$

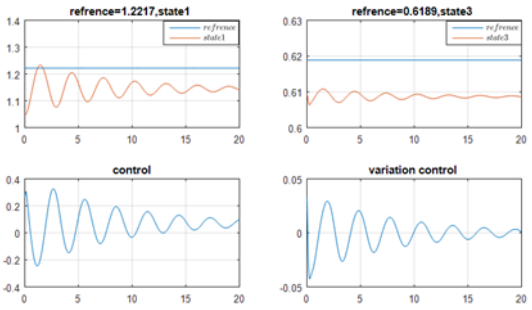
همانطورکه در شکل(۵) دیده می‌شود، با شروع از نقطه $[1.0472,0,0.6093,0]$ ($60^\circ = 1.0472(rad)$) و اعمال تابع کنترل بدست آمده بر هلیکوپتر، سیستم، مسیر مرجع را با خطای حالت ماندگار دنبال می‌کند. برای حذف خطای حالت ماندگار، انتگرال‌گیر به مساله اضافه می‌کنیم. با این کار تعداد حالت‌های سیستم ۲ تا اضافه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی مسئله کنترل پیش‌بین پیوسته برای این سیستم جدید و تنظیم مجدد پارامترهای ماتریس‌های وزنی، در شکل (۶) آورده شده‌است.

در این بخش، هدف، بررسی طراحی کنترل کننده به روش پیشنهادی برای یک سیستم ناپایدار و امکان پایدارسازی آن است. از آنجایی‌که هلیکوپتر در زاویه ۷۰ درجه پایدار است، اما از زاویه حدود ۸۵ درجه به بالا ناپایدار می‌باشد [۲۵]، لذا طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای زاویه ۹۰ درجه (۱/۵۷۰۸رادیان) بررسی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی، با در نظرگرفتن پارامترهای جدول ۳ شکل (۷)، در شکل (۷) مشاهده می‌شود.

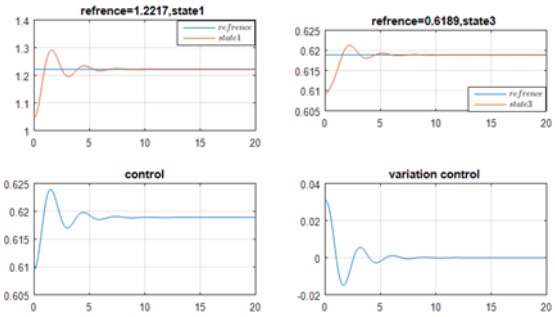
جدول ۳: پارامترهای مثال۳، برای زاویه ۷۰ درجه بدون انتگرالگیرشکل(۵)، با انتگرال‌گیر شکل (۶) و زاویه ۹۰ درجه شکل (۷)

پارامترها	شکل(۵)	شکل(۶)	شکل(۷)
HP	2	2	2
s	3	3	3
δ	0.05	0.1	0.1
R	1	1	0.25
$H_1 = H_3$	8	8	0.25,1,10,20
$Q_1 = Q_3$	80	80	10

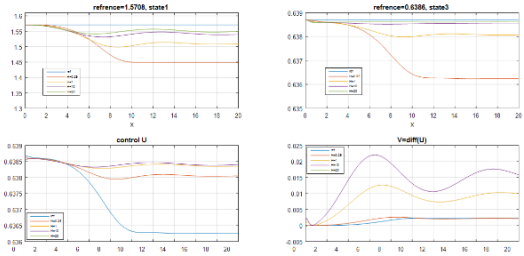
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]



شکل ۵) پاسخ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته هلیکوپتر برای زاویه ۷۰ درجه



شکل ۶) پاسخ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته هلیکوپتر برای زاویه ۷۰ درجه با اضافه کردن انتگرال‌گیر و تنظیم پارامترها



شکل ۷) پاسخ کنترل پیش‌بین زمان پیوسته برای حفظ زاویه ۹۰ درجه (۱/۵۷۰۸ رادیان) مثال۳، برای مقادیر مختلف ماتریس وزنی H

همانطورکه دیده می‌شود با طراحی کنترل‌کننده توانسته‌ایم وضعیت هلی-کوپتر را در زاویه ۹۰ درجه حفظ کنیم. هدف از نتایج ارائه شده در شکل (۷)، نشان دادن رابطه خطای ماندگار با ماتریس وزنی است و دیده می‌شود که با تنظیم ماتریس‌های وزنی می‌توان خطای ماندگار را تنظیم نمود. نتایج برای ماتریس‌های وزنی متفاوت $H = 0.25,1,10,20$ آورده شده-است.

۵-نتیجه‌گیری

از آنجایی‌که در کارهای انجام شده در زمینه طراحی کنترل کننده پیش‌بین زمان پیوسته، مساله را نهایتا به شکل یک سیستم زمان گسسته تبدیل نموده و به صورت زمان گسسته حل نموده‌اند.از طرفی همانطورکه می‌دانیم موضوع کنترل مقاوم در فضای زمان پیوسته از غنای خوبی برخوردار است. لذا این‌ها از انگیزه‌های این مقاله در پیشنهاد کنترل پیش‌بین زمان پیوسته است و نشان داده می‌شود که طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین سیستم‌های غیرخطی زمان پیوسته، با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری (DAEs) با شرایط مرزی معادل است. با حل متوالی دستگاه مذکور، به روش نیمه‌تحلیلی اختلال هموتوپی، تابع کنترل و تابع حالت بدست می-آید. بر خلاف روش‌هایی که تابع کنترل را در بازه‌های بروزرسانی ثابت فرض می‌کنند، در این روش، تابع کنترل و تابع حالت بهینه برای تمامی زمان‌ها مشخص می‌شوند. همانطور که در مثال‌ها نیز دیده می‌شود این روش قابلیت حل مساله زمان پیوسته خطی، غیر خطی، نامتغیر بازمان و متغیر با زمان را دارد. حل مساله به روش پیشنهادی زمان محاسباتی بالایی دارد و در حال حاضر تنها برای سیستم‌های کند مانند فرایندهای شیمیایی که زمان نمونه‌برداری بالایی دارند مناسب است. بحث کاهش زمان محاسباتی در روش پیشنهادی کنترل پیش بین زمان پیوسته، موضوع تحقیقاتی آتی نویسندگان می‌باشد. همچنین، بحث مقاوم بودن روش پیشنهادی از اهمیت بسزایی برخوردار است و در مثال اول، مقاوم بودن روش به صورت عددی بررسی و نشان داده شد. با این وجود بدیهی است بررسی تحلیلی این مسئله نیاز به تحقیقات بیشتری دارد.

مراجع

[1] Kirches C., Wirsching L., Bock J.P, 2012, “Efficient direct multiple shooting for nonlinear model predictive control on long horizon”, Schloder Journal of Process Control 22, pp. 540– 550.

[2] Magni L., Scattolini R., 2004, “Model predictive control of continuouse time nonlinear systems with picewise constant control”, IEEE transactions on automatic control, vol. 49, NO. 6, pp. 900 – 906.

[3] Magni L., Scattolini R., 2007, “Tracking of non-square nonlinear continuous time systems with piecewise constant model predictive control”, Journal of Process Control 17, pp. 631–640.

[4] Wang L., 2001, “continuous time model predictive control design using orthonormal functions”, INT.J.control, vol. 74, NO. 16, pp. 1588-1600.

[5] Cizniar M., Fikar M., Latifi M.A., 2008, “Design of constrained nonlinear model predictive control based on global optimization”, 18th European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 18 Bertrand Braunschweig and Xavier Joulia (Editors).

[6] Findeisen R., Raff T., Allgower F., 2007, “Sampled-Data Model Predictive Control for Constrained Continuous Time Systems,” Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Contraints, pp.207-235.

[7] Li S.E., Xu SH., Ku D., 2016, “Efficient and accurate computation model predictive control using

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]

pseudospectral discretization", Neurocomputing, 177, pp. 363–372.
[8] Chen W.H., 2004, "Predictive Control of General Nonlinear Systems Using Approximation", IEE proceedings: control theory and applications, 151 (2), pp. 137-144.
[9] Wang, Y., Boyd, S., (2008), "Fast model predictive control using online optimization", The International Federation of Automatic Control,Vol. 41, pp. 6974-6979.
[10] Pannocchia, G., Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., Marquardt, M., (2010)," On computing solutions to the continuous time constrained linear quadratic regulator", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, pp. 2192-2198.
[11] Daehlen, J. S., Otto Eikrem, G., (2014), "Nonlinear model predictive control using trust region derivative free optimization", Journal of Process Control, Vol. 24, pp. 1106-1120.
[12] D.E. Kirk, "Optimal control theory: an introduction", Dover Books on Electical Engineering Series, 2004.
[13] T.J. Böhme, B. Frank, "Direct Methods for Optimal Control", In: Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles. Advances in Industrial Control. Springer, Cham, 2017.
[14] Mangasarian O.L., 1996, "sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems", J. SIAM control, Vol. 4, No. 1.
[15] He J. H., 1999 "Homotopy perturbation technique", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 178 (3), pp. 257-262.
[16]Aslam Noor M., 2010, "Some iterative methods for solving nonlinear equations using homotopy perturbation method", international journal of computer mathematics, Vol. 87, No. 1, pp. 141-149.
[17] Soltanian F., Dehghan M., Karbassi S.M., 2010, "Solution of the differential algebraic equations via homotopy perturbation method and their engineering applications", International Journal of Computer Mathematics, Vol. 87, No. 9, pp.1950-1974.
[18] Roozi A., Alibeiki E., Hosseini S.S., Ebrahimi M., 2011, "Homotopy perturbation method for special nonlinear partial differential equations", Journal of King Saud University – Science, vol 23, issue 1, pp. 99-103.
[19] Ayati Z., Biazar J., 2015, "On the convergence of Homotopy perturbation Method", Journal of the Egyptian Mathematical Society, vol.23 (2), pp. 424-428.
[20] Chen H., Allgower F., 1998, "A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability", Automatica, Vol. 34, No. 10, pp. 1205-1217.
[21] Chen H., Allgower F., 1997, "A quasi infinite horizon nonlinear predictive control scheme for stable", IFAC Proceedings Volumes, Vol. 30, No. 9, pp. 529-534.
[22] Jadbabaie A., Hauser J., 2005, "On the stability of receding horizon control with a general terminal cost", IEEE Transactions on Automati control, Volume 50, issue 5, pp. 674 – 678.
[23] Camacho E.F., Bordons C., Model Peredictive Control, Advanced Texbooks in Control and Signal Processing, Springer, Cham, 2004.
[24] Fu H.S, Han B., 2006, A homotopy method for nonlinear inverse problems, Applied Mathematics and Computation, vol.183, pp. 1270–1279.
[۲۵] طاهرسیما، حنیف."طراحی کنترل‌کننده هوشمند برای هلیکوپترآزمایشگاهی"، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۵.
[۲۶] قربانی، اصغر. "روش اختلال هموتوپی هی و کاربرد آن"، دانشگاه فردوسی مشهد، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۶.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-25]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.4.6.6]
[DOI: 10.29252/joc.12.4.1]