مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۸، صفحه ۶۳-۴۹

طراحی کنترل همزمان‌سازی وضعیت در یک ساختار آرایش پرواز ماهواره و در حضور خطای اندازه‌گیری حسگرها

سید سعید نصرالهی[۱]، فرزانه عبدالهی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل دکترای مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ss_nasrolahi@aut.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، f_abdollahi@aut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۴/۲۷ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲۷

چکیده: هدف از این مقاله، طراحی کنترل‌کننده‌ی وضعیت با هدف همزمان‌سازی آن در یک ساختار آرایش پرواز ماهواره و با لحاظ خطای اندازه‌گیری حسگرهاست. مهمترین نوآوری مقاله حاضر، استخراج بهره‌های کنترلی با رویکرد غیرمتمرکز در ساختار چندعامله و با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری بردارهای جهت و سرعت زاویه‌ای است. ماهواره‌ها می‌توانند نامشابه باشند ولی گراف ارتباطی بین آنها از نوع پیوسته فرض می‌شود. بعلاوه نیازی به مخابره‌ی بردارهای سرعت زاویه‌ای بین ماهواره‌ها نیست. طبق پایداری لیاپانوف، کنترل‌کننده پیشنهادی ارزیابی و تحلیل شده و تضمین می‌شود که خطای دنباله‌روی هر ماهواره و خطای همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌ها، کران‌دار نهایی یکنواخت خواهند بود. شبیه‌سازی الگوریتم ارائه‌شده، عملکرد مطلوب آن را ضمن مقایسه با روش‌های موجود، روشن می‌نماید.

کلمات کلیدی: آرایش پرواز ماهواره، همزمان‌سازی وضعیت، کران‌دار نهایی یکنواخت، خطای اندازه‌گیری حسگر.

Attitude Synchronization Control in Satellite Formation Flying in the Presence of States Measurement Errors

Seiied Saeed Nasrolahi, Farzaneh Abdollahi

Abstract: This paper presents a novel attitude synchronization framework for tracking control of multiple identical/heterogeneous satellites in formation flying with connected communication graph. The main contribution of the paper is considering sensors' measurement error to derive control gains. Moreover, the proposed strategy need no angular velocity communication. Nevertheless, the tracking synchronization among the satellites' attitudes with individual set-points is guaranteed. Accordingly, based on the Lyapunov criterion, uniformly ultimately boundedness of the synchronization/tracking errors are investigated. The simulation results are presented to illustrate the performance of the developed algorithm.

Keywords: Satellite formation flying, Attitude synchronization, Uniformly ultimately boundedness, Sensor measurement error.

۱- مقدمه

رویکرد آرایش پرواز در حوزه‌ی فضایی از دهه ۱۹۶۰ میلادی و هنگامی که میعاد فضاپیماها با یکدیگر (Rendezvous) ضرورت پیدا کرد، مورد توجه جدی قرار گرفت [۱]. این رویکرد می‌تواند بوسیله افزونگی و فراهم نمودن امکان بازپیکربندی، قابلیت اطمینان عملکرد مجموعه سامانه و در نتیجه اجرای ماموریت را به‌طور چشمگیری بهبود بخشد [۲-۳]. ماموریت‌های آرایش پرواز ماهواره (Satellite Formation Flying) یا به اختصار SFF از دهه ۹۰ میلادی تاکنون به عنوان یک فناوری پیشرو

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

در حوزه فضایی مورد توجه قرار گرفته است [۵-۴]. بهبود ماموریت‌های پایش، اکتشاف منابع و مشاهده زمین از مزایای عمده‌ی این فناوری به شمار می‌رود. بعلاوه، SFF می‌تواند زمینه راحت‌تر استقرار یک محموله بزرگ را با جایگزینی آن با محموله‌های کوچک‌تر و در ماهواره‌های سبک‌تر در مدار به دور زمین فراهم آورد [۶] که می‌توان در این راستا به‌طور مشخص از محموله‌های راداری دیافراگم مصنوعی (Synthetic Aperture Radar) یا به اختصار SAR نام برد [۷]. البته تفکیک محموله‌های فضایی برای اجرای یک ماموریت واحد، الزامات فنی خاص خود را به مجموعه آرایش پرواز تحمیل می‌کند. به‌طور مثال برای انجام یک ماموریت SAR با محموله‌های مجزاشده، الزام همزمان‌سازی پرتو (Beam)، زمان و فرکانس نقش عمده‌ای دارد که معمولاً همزمان‌سازی پرتو را با همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌ها و بر اساس پایداری سه‌محوره برآورده می‌نمایند [۸]. بطور کلی، همزمان‌سازی وضعیت یکی از موضوعات مورد علاقه محققان در مبحث کنترل چندعامله بویژه در SFF است که با توجه به وجود ذاتی خطا در اندازه‌گیری و یا تخمین، رسیدن به همزمان‌سازی ایده‌آل در یک ماموریت کاربردی SFF میسر نیست. لذا با توجه به اهمیت ذکر شده، در این مقاله طراحی یک کنترل‌کننده وضعیت چندعامله با هدف همزمان‌سازی وضعیت و در حضور خطای اندازه‌گیری حسگرها مد نظر قرار گرفته است که ضمن ارائه‌ی تحلیل پایداری سیستم حلقه‌بسته، شرایط لازم برای ضرایب کنترلی در اجرای یک عملیات همزمان‌سازی وضعیت استخراج شده است.

در برخی از کارهای انجام شده با هدف همزمان‌سازی وضعیت، همزمان‌سازی موقعیت نیز مد نظر طراحان قرار گرفته است [۱۳-۹]. در ادامه، با ارائه دینامیک‌های بهم پیوسته وضعیت و موقعیت، کنترل‌کننده واحدی ارائه شده است تا بتواند همزمانی در موقعیت و وضعیت را فراهم آورد [۱۷-۱۴].

از مهمترین منابع جدیدی که به آرایش پرواز ماهواره پرداخته است می‌توان به کتاب [۱۸] اشاره نمود که علاوه بر کنترل وضعیت مشارکتی، به مباحث کنترل موقعیت ماهواره‌ها در شکل دادن به یک آرایش نیز پرداخته است. مهمترین تمرکز کتاب در مبحث کنترل وضعیت بر تاثیر نوع پروتکل ارتباطی بین ماهواره‌ها در استخراج کنترل‌کننده است.

در برخی دیگر از روش‌های همزمان‌ساز وضعیت و با هدف کاستن از بار سخت‌افزاری، کنترل‌کننده‌هایی بدون نیاز به اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای ارائه شده‌اند [۲۱-۱۹]. تمامی روش‌های مذکور مانند روش ارائه‌شده در [۲۲]، از رویکردهای مبتنی بر مشاهده‌گر استفاده می‌کنند تا سرعت زاویه‌ای را با استفاده از داده‌های وضعیتی تخمین زده و به یکدیگر مخابره کنند. [۲۳] یک روش همزمان‌ساز وضعیت بدون نیاز به آگاهی از سرعت زاویه‌ای ارائه داده است که مهمترین تاثیر آن، کاهش بار مخابراتی بین ماهواره‌ای خواهد بود ولی با توجه به اینکه مبتنی بر بردارهای جهت می‌باشد، با وجود خطای اندازه‌گیری در خروجی حسگرهای جهت، از کاربردی بودن، کیفیت و اطمینان از عملکرد روش به شدت کاسته خواهد شد. [۲۴] نیز بر استخراج روش کنترلی مستقل از بردار سرعت زاویه‌ای و با لحاظ اشباع عملگرها متمرکز شده است که در آن نیز با توجه به داده‌های حسگرهای جهت، متغیر بردار سرعت زاویه‌ای تخمین زده می‌شود. اگرچه مشاهده‌گرهایی نظیر فیلتر کالمن به منظور همگرایی بیشتر در استخراج بردارهای وضعیت و کاهش پراکندگی داده‌های حسگرها قابل استفاده هستند، لیکن خروجی آنها نیز خطاآلود بوده و مقادیر دقیق و واقعی را در اختیار قرار نمی‌دهند.

توپولوژی گراف ارتباطی بین ماهواره‌ها نیز یکی از مباحث اساسی در کنترل همزمان‌سازی وضعیت در آرایش پرواز است. ساختارهای رهبر-پیرو [۹،۲۰،۲۱،۲۵،۲۶]. رویکردهای مبتنی بر رفتار (Behavior-based scheme)[۲۸-۲۷]، رویکردهای مبتنی بر همسایگی (Neighborhood-based architecture) [۱۲ و ۲۹] و روش‌های ساختار مجازی (Virtual structure)[۳۱-۳۰] از جمله ملاک‌های تقسیم‌بندی روش‌های ارائه‌شده-اند. برخی از الگوریتم‌های ارائه‌شده نیز چندین رویکرد در گراف ارتباطی اتخاذ کرده‌اند. برای نمونه [۳۲] از دو ساختار رهبر-پیرو و مبتنی بر رفتار در یک گراف ارتباطی حلقه‌ای استفاده می‌کند. در ادامه، [۳۳] از سه رویکرد رهبر-پیرو، ساختار مجازی و مبتنی بر رفتار بهره برده است.

به‌طور کلی، در هر روش کنترلی با هدف همزمان‌سازی وضعیت در SFF، آگاهی از متغیرهای حالت وضعیت ضروری است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این متغیرهای وضعیت شامل جهت و سرعت زاویه‌ای هستند. آگاهی نیز از دو مسیر تخمین و یا اندازه‌گیری مستقیم بوسیله حسگرهای وضعیتی حاصل می‌شود که به دلیل عملکرد غیرایده‌آل مشاهده‌گرها و همچنین حسگرها، در هر دو روش، متغیرهای وضعیت به خطای تخمین و یا خطای اندازه‌گیری دچار خواهند بود. به دلیل تاثیر مستقیم متغیرهای وضعیت در تولید سیگنال کنترلی، میزان دقت آنها نسبت به مقدار صحیح و واقعی متغیر، تاثیر اساسی در عملکرد سیستم کنترل حلقه‌بسته خواهد داشت. این مساله زمانی نمود بیشتری خواهد یافت که دینامیک سیستم مورد بحث، غیرخطی نیز باشد. بر اساس دانش نویسندگان، تاکنون هیچ‌گونه روش کنترل همزمان‌ساز وضعیت بر دقت مذکور با رویکرد تحلیلی متمرکز نشده است. به بیان دیگر، هدف کنترلی در مقالات مرتبط با همزمان‌ساز وضعیت، رسیدن به خطای نسبی صفر بین عامل‌ها بوده است در حالی که عملاً، آگاهی دقیق از متغیرهای وضعیت در دسترس نیست. در این مقاله، ما بر طراحی کنترل‌کننده و تحلیل پایداری خطای همزمان-سازی در بین ماهواره‌های نامشابه در حضور خطای اندازه‌گیری حسگرها خواهیم پرداخت. بر اساس پایداری مبتنی بر روش مستقیم لیاپانوف، قانون بهره‌های کنترلی در قالب کنترل فیدبک حالت و با لحاظ غیرخطی بودن دینامیک سیستم و با رویکرد غیرمتمرکز (Decentralized approach) استخراج خواهند شد. مهمترین نوآوری‌های مقاله حاضر را می‌توان در موارد زیر خلاصه نمود:

- اساس تحلیل‌های پایداری ارائه‌شده در مقالات مبتنی بر دانش دقیق از متغیرهای حالت وضعیت است [۹،۱۲،۲۰،۳۴،۳۵] . از آنجایی که در

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

عمل مقادیر دقیق متغیرهای وضعیتی در دسترس نیستند، نتایج بدست‌آمده نمی‌توانند همزمان‌سازی وضعیت را عملاً تضمین نمایند. مهمترین نوآوری مقاله حاضر، بررسی تحلیلی تاثیر خطای اندازه‌گیری یا تخمین وضعیت در طراحی یک کنترل‌کننده با هدف همزمان‌سازی وضعیت برای سیستم کنترل وضعیت SFF با دینامیک غیر خطی است. اساس روش تحلیلی مذکور نیز مبتنی بر معرفی یک تابع لیاپانوف مناسب و استخراج ضرایب کنترلی طبق شرایط لازم برای پایداری سیستم حلقه‌بسته و با لحاظ باند خطای اندازه‌گیری وضعیت است.

- به منظور کاهش بار مخابراتی بین ماهواره‌ها، کنترل‌کننده هر ماهواره فقط به متغیر جهت ماهواره‌های همسایه‌ی خود نیازمند است. لازم به ذکر است برای همزمان‌سازی وضعیت در [۱۲،۱۵،۲۷،۲۹] نیاز به اشتراک‌گذاری بردار سرعت زاویه‌ای است و حتی در برخی، اشتراک‌گذاری بردار شتاب زاویه‌ای نیز ضروری است [۳۰،۳۶] که طبعاً بار مخابراتی بین ماهواره‌ها را افزایش خواهد داد. هرچند روش‌های همزمان‌ساز بدون نیاز به اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای نیز وجود دارند [۱۹،۲۳،۳۷] ولی در تحلیل آنها خطای اندازه‌گیری و یا تخمین لحاظ نشده‌اند.

به بیان دیگر، مساله اصلی که مقاله بر آن تمرکز کرده است، لحاظ خطای اندازه‌گیری حسگرهای وضعیت در استخراج یک روش کنترلی غیرمتمرکز با هدف همزمان‌سازی وضعیت در آرایش پرواز ماهواره‌هاست. روش کنترلی مبتنی بر فیدبک حالت است که با استفاده از روش لیاپانوف و تضمین پایداری سیستم حلقه‌بسته، به استخراج قانون بهره‌های کنترلی منتج می‌شود. فرضیه‌های اصلی که برای حل مساله در این مقاله در نظر گرفته شده‌اند را می‌توان در موارد زیر خلاصه نمود:

- گراف ارتباطی بین ماهواره‌ها از نوع متصل (Connected) است.
- کران بالای اندازه خطای اندازه‌گیری حسگرها معلوم است.
- هر ماهواره فقط داده‌ی مربوط به حسگر جهت خود را با همسایگانش به اشتراک می‌گذارد و از داده حسگر سرعت زاویه‌ای خود در تولید سیگنال کنترلی خودش استفاده می‌کند.

در ادامه مقاله، پس از توضیح مباحث مقدماتی، مساله اصلی و چگونگی طراحی کنترل‌کننده بیان خواهند شد. در بخش پایانی نیز با استفاده از نتایج شبیه‌سازی، عملکرد الگوریتم ارائه‌شده مورد صحت‌سنجی قرار می‌گیرد. در این مقاله، از این نشانه‌گذاری‌ها استفاده می‌شود: بردارها به فرم پررنگ و زیر یک خط ($\bar{\mathbf{1}}$)، ماتریس‌ها به صورت پررنگ ($\mathbf{M}$) و اسکالرها به‌طور معمولی نمایش داده می‌شوند. $\bar{\mathbf{1}}_n$ بیانگر بردار n ستونی یکانی، $\mathbf{I}_n$ بیانگر ماتریس یکه nxn، $\mathbf{0}_n$ ماتریس صفر nxn، $\mathrm{diag}(M_1,\ldots,M_n)$ یک ماتریس بلوکی قطری تشکیل‌شده از ماتریس‌های M_1 تا M_n، $\odot$ نمایانگر ضرب دو بردار در فضای پارامترهای رودریگز اصلاح‌شده (Modified Rodriguez Parameters) یا به اختصار MRP، $\otimes$ نمایانگر ضرب کرونکر (Kronecker)، $\lambda_{min}(.)$ و $\lambda_{max}(.)$ به ترتیب بیانگر کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ویژه هستند.

۲- اصول اولیه

در این بخش، برخی از مقدمات لازم در تبیین مساله و ابزارهای استفاده‌شده در تحلیل روش پیشنهادی ارائه می‌شوند.

۵-۱ بیان وضعیت MRP

برای بیان وضعیت یک دستگاه مختصات نظیر دستگاه بدنه ماهواره نسبت به یک دستگاه مختصات مرجع نظیر دستگاه مداری از بیان‌های مختلفی نظیر ماتریس کسینوس هادی (Cosine Matrix)، زوایای اویلر (Euler angles)، بردار کواترنیون (Quaternion) و بردار رودریگز اصلاح‌شده (MRP) می‌توان بهره برد. پارامترهای متعدد در ماتریس کسینوس هادی، وجود تکینگی (Singularity) در زوایای اویلر، مسائل ابهام (Ambiguity) و پیچک (Unwinding) در بردار کواترنیون، انتخاب MRP برای بیان وضعیت را قابل توجیه می‌کند [۳۸]. در صورتی که بردار واحد $\bar{\boldsymbol{n}}$ را به عنوان محور اصلی دوران و θ را زاویه دوران بین دو دستگاه مختصات فرض کنیم، آنگاه بردار دوران $\bar{\boldsymbol{q}}$ در بیان MRP برابر خواهد بود با [۳۹]

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\bar{\boldsymbol{n}} \qquad (۱)$$

توجه شود که MRP نیز دارای تکینگی است ولی با استفاده از بردار سایه (MRP shadow parameters)، این مساله به راحتی قابل مرتفع شدن است [۴۰].

۵-۲ دینامیک خطای دنباله‌روی وضعیت بیان وضعیت

سینماتیک وضعیت یک ماهواره مبتنی بر بیان بردار $\bar{\boldsymbol{q}}$ بر اساس پارامترهای رودریگز اصلاح‌شده (MRP) طبق رابطه زیر است [۴۱]؛

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})\bar{\boldsymbol{\omega}} \qquad (۲)$$

که $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ بردار سرعت زاویه‌ای است و

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{4}\left((1-\bar{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{q}})\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}) + 2\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^T\right)\bar{\boldsymbol{\omega}} \qquad (۳)$$

با ویژگی‌های

$$\bar{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{1+\bar{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{q}}}{4}\bar{\mathbf{q}}^T \qquad (۴)$$

و

$$\|\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})\| \le \frac{1}{4}\left(3+2\|\bar{\mathbf{q}}\|+3\|\bar{\mathbf{q}}\|^2\right) \qquad (۵)$$

و اپراتور S نمایانگر عملیات پادمتقارن‌گیری مثلاً از بردار سه‌مولفه‌ای $\bar{\mathbf{q}}$ طبق رابطه زیر است؛

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}})=\begin{bmatrix}0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & 0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & 0\end{bmatrix} \quad (۶)$$

دینامیک وضعیت ماهواره نمایانگر رابطه بین حرکت وضعی ماهواره و گشتاورهای اعمالی بر آن است:

$$\mathbf{J}\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}=\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{J}\bar{\boldsymbol{\omega}}+\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{c}}+\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}} \quad (۷)$$

که $\mathbf{J}$ ماتریس لختی دورانی (Moment of Inertia Matrix) ماهواره و منظور از $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{c}}$ گشتاور کنترلی و $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}$ گشتاور اغتشاشی محیط است. با فرض پارامترهای $\bar{\mathbf{q}}_d$ و $\bar{\boldsymbol{\omega}}_d$ به عنوان مقادیر مطلوب جهت و سرعت زاویه‌ای، خطای دنباله‌روی را می‌توان بدست آورد:

$$\begin{cases}\bar{\mathbf{e}}_q=\bar{\mathbf{q}}\odot\bar{\mathbf{q}}_d\\ \bar{\mathbf{e}}_\omega=\bar{\boldsymbol{\omega}}-\bar{\boldsymbol{\omega}}_d\end{cases} \quad (۸)$$

که منظور از $\odot$ ضرب تعریف‌شده در فضای MRP است:

$$\bar{\mathbf{q}}\odot\bar{\mathbf{q}}_d=\frac{\bar{\mathbf{q}}_d\left(\bar{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{q}}-1\right)-\bar{\mathbf{q}}\left(\bar{\mathbf{q}}_d^T\bar{\mathbf{q}}_d-1\right)-2\left(\bar{\mathbf{q}}\times\bar{\mathbf{q}}_d\right)}{1+\left\|\bar{\mathbf{q}}_d\right\|^2\left\|\bar{\mathbf{q}}\right\|^2+2\bar{\mathbf{q}}.\bar{\mathbf{q}}_d} \quad (۹)$$

در صورتی که ماهواره به نقطه مشخصی نشانه‌روی کند (مثلاً برای انجام ماموریت مشاهده زمین)، آنگاه می‌توان فرض کرد $\bar{\boldsymbol{\omega}}_d\approx 0$ و $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_d\approx 0$. در این‌صورت، دینامیک خطای دنباله‌روی ماهواره را می‌توان بر اساس سینماتیک (۲) و دینامیک (۷) بدست آورد:

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{e}}}_q=\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_q)\bar{\mathbf{e}}_\omega\\ \mathbf{J}\dot{\bar{\mathbf{e}}}_\omega=\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_\omega)\mathbf{J}\bar{\mathbf{e}}_\omega+\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{c}}+\bar{\mathbf{u}}_d\end{cases} \quad (۱۰)$$

۵-۳ بیان همزمان‌سازی در گراف

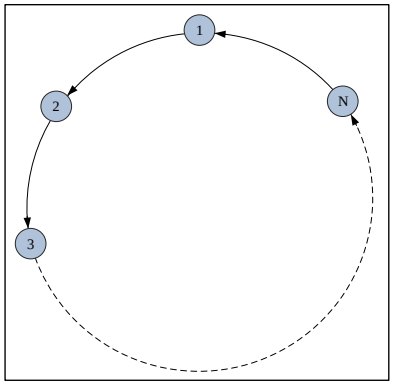
توضیحات مقدماتی مربوط به معرفی گراف و پارامترهای مربوط به آن در ضمیمه ۳ آورده شده است. در صورتی که فرض کنیم در یک سیستم N-عامله، هر عامل یک دینامیک غیرخطی به فرم زیر داشته باشد

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_i=\mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)+\mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)\bar{\mathbf{u}}_i\\ \bar{\mathbf{y}}_i=\mathbf{h}_i(\bar{\mathbf{x}}_i)\end{cases}\qquad for\ i=1,...,N. \quad (۱۱)$$

و همچنین اگر هر یک از عامل‌ها، حالت مطلوب متناظر خود را داشته باشد ($\bar{\mathbf{x}}_i^d(t)$)، آنگاه هر یک نیز، خطای دنباله‌روی خود را طبق رابطه زیر خواهند داشت [۴۲]؛

$$\bar{\mathbf{e}}_i(t)=\bar{\mathbf{x}}_i^d(t)-\bar{\mathbf{x}}_i(t) \quad (۱۲)$$

در یک طراحی کنترل همزمان در یک ساختار چندعامله، برآورده‌سازی توأمان دو هدف از دید انفرادی و تداخل (Coupling) مد نظر طراح است که در ادامه توضیح داده می‌شوند [۴۴]:



شکل ۱: نمونه یک گراف ارتباطی

- از دیدگاه انفرادی هر یک از عامل‌ها؛ هر عاملی بتواند سیگنال مطلوب خود را به خوبی دنبال نماید، یا به عبارت ریاضی خطای دنباله‌روی تک‌تک عامل‌ها بصورت نمایی به سمت صفر میل نماید.
- از دیدگاه تداخل بین عامل‌ها؛ تمامی عامل‌ها همزمان با یکدیگر به حالت مطلوب خود برسند، یا به عبارت دیگر، خطای نسبی بین خطاهای دنباله‌روی عامل‌ها نیز به سمت صفر میل نمایند ($\lim_{t\to\infty}\bar{\mathbf{e}}_1(t)=\lim_{t\to\infty}\bar{\mathbf{e}}_2(t)=...=\lim_{t\to\infty}\bar{\mathbf{e}}_N(t)=0$).

تعریف خطای همزمان‌سازی در آرایش پرواز معطوف به هدف دوم کنترل‌کننده چندعامله است که با توجه به نوع گراف ارتباطی بین عامل‌ها، می‌توان بیان ریاضی آن را ارائه نمود. بطور مثال در صورتی که فرض شود، گراف ارتباطی شبیه گراف ارائه‌شده در شکل ۱ باشد آنگاه خطای همزمان‌سازی هر عامل طبق رابطه زیر قابل تعریف خواهد بود؛

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t)=\bar{\mathbf{e}}_1(t)-\bar{\mathbf{e}}_2(t)\\ &\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2(t)=\bar{\mathbf{e}}_2(t)-\bar{\mathbf{e}}_3(t)\\ &\quad\vdots\\ &\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_N(t)=\bar{\mathbf{e}}_N(t)-\bar{\mathbf{e}}_1(t)\end{aligned} \quad (۱۳)$$

در این‌صورت بدیهی است که هدف از همزمان‌سازی آن است که

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t)\xrightarrow{t\to\infty}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2(t)\xrightarrow{t\to\infty}...\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_N(t)\xrightarrow{t\to\infty}0 \quad (۱۴)$$

با این تعریف، می‌توان خطای همزمان‌سازی $\bar{\boldsymbol{\Xi}}(t)=\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^T(t)\ \ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^T(t)\ \ \cdots\ \ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_N^T(t)\right]^T$ را با استفاده از ماتریس لاپلاسین به خطای دنباله‌روی $\bar{\mathbf{E}}(t)=\left[\bar{\mathbf{e}}_1^T(t)\ \ \bar{\mathbf{e}}_2^T(t)\ \ \cdots\ \ \bar{\mathbf{e}}_N^T(t)\right]^T$ مرتبط کرد:

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}(t)=\mathbf{L}\bar{\mathbf{E}}(\mathrm{t}) \quad (۱۵)$$

۵-۴ دینامیک خطای همزمان‌سازی وضعیت در آرایش پرواز

طبق تعریف کلی همزمان‌سازی در بخش قبل، هدف از همزمان‌سازی وضعیت در آرایش پرواز، نشانه‌روی ماهواره‌ها به نقاط هدف منحصربفرد خود به‌طور همزمان با سایر ماهواره‌های شرکت‌کننده در آرایش پرواز است. بنابراین، خطای دنباله‌روی هر ماهواره تاثیر بسزایی در ساخت

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

سیگنال کنترل اعمالی به سایر ماهواره‌ها دارد. لذا برای یک ساختار آرایش پرواز با هدف اجرای ماموریت SAR می‌توان دینامیک خطای دنباله‌روی در مجموعه سیستم را این‌گونه تعریف کرد:

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{E}}}_q = \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\bar{\mathbf{E}}_\omega \\ \mathbf{J}_M\dot{\bar{\mathbf{E}}}_\omega = \mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}})\mathbf{J}_M\bar{\mathbf{E}}_\omega + \bar{\mathbf{U}}\end{cases} \quad (۱۶)$$

که

$$\bar{\mathbf{E}}_q = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{e}}_{q_1}\\ \vdots \\ \bar{\mathbf{e}}_{q_N}\end{bmatrix}_{3N\times 1}, \bar{\mathbf{E}}_\omega = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_1}\\ \vdots \\ \bar{\mathbf{e}}_{\omega_N}\end{bmatrix}_{3N\times 1}, \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{u}}_1\\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_N\end{bmatrix}_{3N\times 1},$$
$$\mathbf{J}_M = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & & \varnothing\\ & \ddots & \\ \varnothing & & \mathbf{J}_N\end{bmatrix}_{3N\times 3N},$$
$$\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega) = \begin{bmatrix}\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_1}) & & \varnothing\\ & \ddots & \\ \varnothing & & \mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_N})\end{bmatrix}_{3N\times 3N}, \quad (۱۷)$$
$$\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q) = \begin{bmatrix}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_1}) & & \varnothing\\ & \ddots & \\ \varnothing & & \mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_N})\end{bmatrix}_{3N\times 3N}$$

۵-۵ مدل‌سازی خطای اندازه‌گیری حسگرها

از حسگرهای مختلفی برای بدست آوردن وضیت ماهواره استفاده می‌شود نظیر حسگر خورشید، ژیروسکوپ، حسگر مغناطیسی وحسگر ستاره. به‌طور کلی خطاهای اندازه‌گیری حسگرها از جنس متغیرهای تصادفی است که منطبق بر تابع توزیع‌های احتمال هستند. معمولاً توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_2 برای مدل کردن خطای اندازه‌گیری حسگرها بکار می‌روند مگر اینکه اطلاعاتی خلاف این موضوع راجع به حسگر خاصی در دسترس باشد [۴۴]. بنابراین، با احتمال 99.7% می‌توان بازه‌ی قابل تصور برای مقدار واقعی یک پارامتر z را این‌گونه لحاظ کرد:

$$z^m - 3\sigma \le z \le z^m + 3\sigma \quad (۱۸)$$

که منظور از z و z^m به ترتیب مقادیر واقعی و اندازه‌گیری‌شده است.

۳- بیان مساله و طراحی کنترل‌کننده

با فرض اینکه هر ماهواره بایستی بتواند سیگنال مطلوب وضعیت منحصربفرد خود را هم در جهت ($\bar{\mathbf{q}}_i^d$) و هم در سرعت زاویه‌ای ($\bar{\boldsymbol{\omega}}_i^d = 0$) دنبال کند و در عین حال بتواند خطای دنباله‌روی خود را با سایر ماهواره‌های آرایش پرواز همزمان کند، سیگنال کنترلی زیر برای هر عامل i قابل پیشنهاد است:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^{track} + \bar{\mathbf{u}}_i^{synch} \quad (۱۹)$$

که $\bar{\mathbf{u}}_i^{track}$ طبق رابطه زیر با هدف دنباله‌روی هر ماهواره i نسبت به مطلوب خود است:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{track} = -k_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i} \quad (۲۰)$$

که منظور از k_{qi} و $k_{\omega i}$ ضرایب کنترلی است و $\bar{\mathbf{u}}_i^{synch}$ طبق رابطه زیر با هدف برقراری همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌هاست:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{synch} = -k_{q_i}\sum_{j=1}^{N_i}\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}\right) \quad (۲۱)$$

همان‌طور که قابل مشاهده است، در سیگنال کنترلی، نیازی به دانستن سرعت زاویه‌ای نسبی یا به عبارت دیگر، مخابره بردارهای سرعت زاویه‌ای بین ماهواره‌ها نیست. ولی در سیگنال کنترلی (۲۰)، از یک نکته غفلت شده است و آن وابستگی سیگنال کنترل به مقادیر دقیق $\bar{\mathbf{e}}_q$ و $\bar{\mathbf{e}}_\omega$ است. به عبارت دیگر، در عمل مقادیر واقعی، نامعلوم‌اند ولی بر اساس (۱۸) در یک بازه‌ی معلوم مبتنی بر مقادیر اندازه‌گیری ($\bar{\mathbf{e}}_q^{meas}$ و $\bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas}$) قرار دارند:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_q^{meas} - 3\sigma_q\bar{\mathbf{1}}_n \le \bar{\mathbf{e}}_q \le \bar{\mathbf{e}}_q^{meas} + 3\sigma_q\bar{\mathbf{1}}_n \\ \bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas} - 3\sigma_\omega\bar{\mathbf{1}}_n \le \bar{\mathbf{e}}_\omega \le \bar{\mathbf{e}}_\omega^{meas} + 3\sigma_\omega\bar{\mathbf{1}}_n\end{aligned} \quad (۲۲)$$

که منظور از σ_q و σ_ω انحراف استاندارد (Standard deviation) اندازه‌گیری به ترتیب مربوط به جهت و سرعت زاویه‌ای است. بنابراین، سیگنال کنترلی که در عمل و با لحاظ کران بالای خطای اندازه‌گیری $m=\max\{\sigma_q, \sigma_\omega\}$ تولید می‌شود عبارت است از:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{u}}_i^{track} + \bar{\mathbf{u}}_i^{synch} + \bar{\mathbf{d}}_i \quad (۲۳)$$

که جمله ناخواسته‌ی $\bar{\mathbf{d}}_i$ نمایانگر مجموع جمله‌های وابسته به خطای اندازه‌گیری بردارهای وضعیت ماهواره i و همسایه‌های آن بوده و می‌توان کران آن را طبق رابطه زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\left\|\bar{\mathbf{d}}_i\right\| \le mk_{\omega_i} + mk_{q_i} + k_{q_i}\sum_{j=1}^{N_i}2m \\ \left\|\bar{\mathbf{d}}_i\right\| \le m\left(k_{\omega_i} + (2N_i+1)k_{q_i}\right)\end{aligned} \quad (۲۴)$$

در نامساوی فوق و در زیر علامت Σ، لازم به توضیح است که 2m، نشانگر بیشترین انحراف ممکن در تفاضل بین متغیرهای وضعیت عامل i و همسایه‌های آن است. حال با توجه به روابط قبلی و در صورتی که ماتریس لاپلاسین را با L نمایش دهیم (ضمیمه ۳)، می‌توان سیگنال کنترلی سیستم چندعامله را طبق رابطه زیر نوشت؛

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}} &= -\underbrace{\left(\mathbf{K}_\omega\otimes\mathbf{I}_3\right)}_{\mathbf{K}_{\omega l}}\bar{\mathbf{E}}_\omega - \underbrace{\left(\mathbf{K}_q\otimes\mathbf{I}_3\right)}_{\mathbf{K}_{ql}}\bar{\mathbf{E}}_q - \left(\mathbf{K}_q\otimes\mathbf{I}_3\right)\left(\mathbf{L}\otimes\mathbf{I}_3\right)\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} \\ &= -\mathbf{K}_{\omega l}\bar{\mathbf{E}}_\omega - \mathbf{K}_{ql}\underline{\mathbf{L}}_l\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} = -\mathbf{K}_{\omega l}\bar{\mathbf{E}}_\omega - \mathbf{K}_{ql}\bar{\mathbf{L}}_l\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}}\end{aligned} \quad (۲۵)$$

که $\underline{\mathbf{L}}_l = \underbrace{(\mathbf{I}_N + \mathbf{L})}_{\underline{\mathbf{L}}}\otimes\mathbf{I}_3$ و

$$\mathbf{K}_\omega = \begin{bmatrix}k_{\omega_1} & & \varnothing\\ & \ddots & \\ \varnothing & & k_{\omega_N}\end{bmatrix}_{N\times N}, \mathbf{K}_q = \begin{bmatrix}k_{q_1} & & \varnothing\\ & \ddots & \\ \varnothing & & k_{q_N}\end{bmatrix}_{N\times N}, \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{d}}_1\\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_N\end{bmatrix}_{3N\times 1} \quad (۲۶)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

با استفاده از قضیه‌ای که در ادامه بیان خواهد شد، تاثیر خطای اندازه‌گیری در استخراج بهره‌های کنترلی لحاظ شده و در مسیر تحلیل اثبات آن، پایداری سیستم حلقه‌بسته تضمین می‌شود.

قضیه ۱: یک آرایش پرواز ماهواره‌ای به تعداد N با ساختار گراف ارتباطی متصل در نظر بگیرید. همچنین بیشینه مقدار ویژه بین ماتریس‌های لختی دورانی ماهواره‌ها را برابر $\Delta = \max_{i=1}^{N}\{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\}$ فرض کنید. آنگاه بردار خطای دنباله‌روی $\bar{\mathbf{E}} = \left[\bar{\mathbf{E}}_q^T \quad \bar{\mathbf{E}}_\omega^T\right]^T$ در سیستم حلقه‌بسته ناشی از دینامیک (۱۶) و سیگنال ورودی (۲۵)

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_q = \mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\bar{\mathbf{E}}_\omega \\ \mathbf{J}_M\dot{\bar{\mathbf{E}}}_\omega = \mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)\mathbf{J}_M\bar{\mathbf{E}}_\omega + \bar{\mathbf{U}} \end{cases}, \bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{K}_{\omega I}\bar{\mathbf{E}}_\omega - \mathbf{K}_{qI}\bar{\mathbf{L}}_I\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{D}} \qquad (۲۷)$$

در حضور خطای اندازه‌گیری حسگرهای وضعیت، کران‌دار یکنواخت نهایی یا به عبارتی UUB (Uniformly Ultimately Boundedness) است اگر ضرایب کنترلی طبق روابط زیر انتخاب شوند:

$$\begin{aligned} & k_{q_i} > \frac{2+\varepsilon_i^2}{2\varepsilon_i} \\ & \dot{k}_{\omega_i} = \\ & \begin{cases} -\frac{1}{16\varepsilon}\left(\frac{r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) + k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2\left(k_{\omega_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)} + r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) + \frac{k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4\left(k_{\omega_i} - h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)^2}\right), & k_{\omega_i} > h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) \\ 0 & Otherwise \end{cases} \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

که $\varepsilon_i < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}}$ و

$r(\bar{\mathbf{E}}_{q_i}) = r(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}, \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) = \left(\varepsilon\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\| + \left(3 + 2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\| + 3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2\right)\right)^2$ و

$h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}) = 1.5 + \frac{\varepsilon_i\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}{4}\left(3 + 4\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\| + 3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2\right)$.

اثبات: فرایند اثبات با معرفی یک تابع لیاپانوف آغاز می‌شود که برای برقراری پایداری آن، شروط لازم برای بهره‌های کنترلی استخراج می‌شوند. تابع زیر به عنوان تابع کاندید لیاپانوف در نظر گرفته می‌شود؛

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{E}}) &= V(\bar{\mathbf{E}}_q, \bar{\mathbf{E}}_\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 2k_{q_i}\ln\left(1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right) + 2\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_i k_{\omega_i}\ln\left(1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که با توجه به متمم شور (ضمیمه ۴) بایستی $\varepsilon_i < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)}}$. همچنین تعریف می‌کنیم $\boldsymbol{\Xi}_I = \boldsymbol{\Xi}\otimes\mathbf{I}_3$ که $\boldsymbol{\Xi} = diag(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$. حال با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) &= \sum_{i=1}^{N}\left[\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{\omega_i} + \frac{4k_{q_i}}{1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{q_i} + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{q_i} + \varepsilon_i\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right. \\ &\quad + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{J}_i\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{\omega_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{J}_i\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{\omega_i} + \frac{4k_{\omega_i}\varepsilon_i}{1+\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\dot{\bar{\mathbf{e}}}_{q_i} \\ &\quad \left. + 2\left(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i\dot{k}_{\omega_i}\right)\ln\left(1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\left(\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - k_{q_i}\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{d}}_i\right)\right. \\ &\quad + \frac{4k_{q_i}}{1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} \\ &\quad + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\left(S(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - k_{q_i}\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{d}}_i\right) \\ &\quad \left. + \frac{4k_{\omega_i}\varepsilon_i}{1+\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + 2\left(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i\dot{k}_{\omega_i}\right)\ln\left(1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

که با توجه به اینکه $\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}) = 0$ و حذف جملات قرینه با یکدیگر داریم؛

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) &= \sum_{i=1}^{N}\left[-k_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{d}_i\right. \\ &\quad + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - \varepsilon_i k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i} \\ &\quad \left. - \varepsilon_i k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{d}_i + 2\left(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i\dot{k}_{\omega_i}\right)\ln\left(1+\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right] \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

با توجه به این نکته که

$$\forall x > 0;\ \ln(1+x) < x \qquad (۳۲)$$

لذا

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \le \sum_{i=1}^{N}\left[-k_{\omega_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\bar{\mathbf{d}}_i + 4\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\right. \\ + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^T\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})\mathbf{J}_i\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i} - \varepsilon_i k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i} \\ \left. - \varepsilon_i k_{q_i}\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\sum_{j=1}^{N_i}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i} - \bar{\mathbf{e}}_{q_j}) + \varepsilon_i\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{d}}_i + 2\left(\dot{k}_{q_i} + \varepsilon_i\dot{k}_{\omega_i}\right)\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^T\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right] \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

حال با استفاده از تعاریف قبلی در (۱۷) و (۲۶) و $\underline{\mathbf{L}}_I = \underline{\mathbf{L}}\otimes\mathbf{I}_3$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \le & -\bar{\mathbf{E}}_\omega^T\mathbf{K}_{\omega I}\bar{\mathbf{E}}_\omega - \bar{\mathbf{E}}_\omega^T\mathbf{K}_{q_I}\mathbf{L}_I\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{E}}_\omega^T\bar{\mathbf{D}} + 4\bar{\mathbf{E}}_q^T\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\bar{\mathbf{E}}_\omega \\ & + \bar{\mathbf{E}}_\omega^T\boldsymbol{\Xi}_I\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\bar{\mathbf{E}}_\omega + \bar{\mathbf{E}}_q^T\boldsymbol{\Xi}_I\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)\mathbf{J}_M\bar{\mathbf{E}}_\omega \\ & - \bar{\mathbf{E}}_q^T\boldsymbol{\Xi}_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I\bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{E}}_q^T\boldsymbol{\Xi}_I\bar{\mathbf{D}} + 2\bar{\mathbf{E}}_q^T\left(\dot{K}_{q_I} + \boldsymbol{\Xi}_I\dot{K}_{\omega I}\right)\bar{\mathbf{E}}_q \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که می‌توان آن را به فرم خلاصه زیر نوشت:

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}}) \le -\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_e\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_d\bar{\mathbf{D}} \qquad (۳۵)$$

که ماتریس‌های $\mathbf{T_e}$ و $\mathbf{T_d}$ برابرند با:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_e(1,1) = \mathbf{K}_{\omega I} - \boldsymbol{\Xi}_I\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q) \\ & \mathbf{T}_e(1,2) = \mathbf{T}_e^T(1,2) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)\boldsymbol{\Xi}_I - 4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}) + \mathbf{K}_{q_I}\mathbf{L}_I\right) \\ & \mathbf{T}_e(2,2) = \boldsymbol{\Xi}_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I - 2\left(\dot{\mathbf{K}}_{q_I} + \boldsymbol{\Xi}_I\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}\right) \\ & \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3N} & \mathbf{0}_{3N} \\ \mathbf{0}_{3N} & \boldsymbol{\Xi}_I \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

برای جمله $\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_d\bar{\mathbf{D}}$ در سمت راست نامساوی (۳۵)، طبق ویژگی ماتریسی (ض۱-۳) و با لحاظ $\bar{\mathbf{X}}_1=\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_d$ و $\bar{\mathbf{X}}_2=\bar{\mathbf{D}}$، می‌توان گفت

$$\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_d\bar{\mathbf{D}}\le\frac{1}{2}\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_d^2\bar{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}} \tag{۳۷}$$

در نتیجه نامساوی (۳۵) را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\dot{V}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)\le-\bar{\mathbf{E}}^T\left(\mathbf{T}_e-\frac{1}{2}\mathbf{T}_d^2\right)\bar{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}} \tag{۳۸}$$

که با تعریف $\mathbf{T}_{ed}=\mathbf{T}_e-\frac{1}{2}\mathbf{T}_d^2$ خواهیم داشت:

$$\dot{V}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)\le-\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{T}_{ed}\bar{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}} \tag{۳۹}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{T_{ed}}$ مانند هر ماتریس دیگری از دو بخش متقارن و پادمتقارن (Skew-symmetric) تشکیل شده است:

$$\mathbf{T}_{ed}=\left(\frac{\mathbf{T}_{ed}+\mathbf{T}_{ed}^T}{2}\right)+\left(\frac{\mathbf{T}_{ed}-\mathbf{T}_{ed}^T}{2}\right) \tag{۴۰}$$

لذا نامساوی (۳۹) با توجه به ویژگی ماتریسی (ض۱-۲) به فرم زیر در می‌آید:

$$\dot{V}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)\le-\bar{\mathbf{E}}^T\left(\frac{\mathbf{T}_{ed}+\mathbf{T}_{ed}^T}{2}\right)\bar{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}} \tag{۴۱}$$

که با تعریف $\mathbf{T}=\frac{\mathbf{T}_{ed}+\mathbf{T}_{ed}^T}{2}$ به نتیجه زیر می‌انجامد؛

$$\dot{V}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)\le-\left\|\bar{\mathbf{E}}\right\|^2\lambda_{\min}\left(\mathbf{T}\right)+\frac{1}{2}\left\|\bar{\mathbf{D}}\right\|^2 \tag{۴۲}$$

که مولفه‌های ماتریس $\mathbf{T}$ برابرند با

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(1,1)&=\frac{1}{2}\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\left(\Xi_I\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\Xi_I\right)-\mathbf{I}_{3N}\right)\\\mathbf{T}(1,2)&=\frac{1}{2}\left(\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)\Xi_I-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{K}_{q_I}\mathbf{L}_I\right)=\mathbf{T}(2,1)^T\\\mathbf{T}(2,2)&=\frac{1}{2}\left(\left(\Xi_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I+\underline{\mathbf{L}}_I^T\mathbf{K}_{q_I}\Xi_I\right)-\Xi_I^2\mathbf{I}_{3N}-4\left(\dot{\mathbf{K}}_{q_I}+\Xi_I\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}\right)\right)\end{aligned} \tag{۴۳}$$

اکنون بایستی ضرایب k_{ω_i} و k_{q_i} را طوری بدست آورد که شرط $\mathbf{0<T}$ برآورده گردد. همچنین می‌توان ضرایب کنترلی را طوری طراحی کرد که $\mathbf{I_{6N}<T}$ یا به عبارت دیگر

$$\mathbf{T}-\mathbf{I}_{6N}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}(1,1)-\mathbf{I}_{3N} & \mathbf{T}(1,2)\\ \mathbf{T}(2,1) & \mathbf{T}(2,2)-\mathbf{I}_{3N}\end{bmatrix}>\mathbf{0} \tag{۴۴}$$

تا بتوان به نتیجه $\lambda_{\min}(\mathbf{T})>1$ دست یافت. این نتیجه در بخش پایانی اثبات و هنگامی که باند همگرایی $\bar{\mathbf{E}}$ تعیین می‌شود، اثر مفید خود را نشان خواهد داد. حال برای استخراج ضرایب کنترل و با استفاده از قضیه شور (ضمیمه ۴) بایستی اولاً

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}(1,1)-\mathbf{I}_{3N}>0\\&2\mathbf{K}_{\omega I}-\left(\Xi_I\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\Xi_I\right)-3\mathbf{I}_{3N}>0\\&k_{\omega_i}>\frac{\varepsilon_i}{2}\left\|\mathbf{J}_i\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)+\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\mathbf{J}_i\right\|+1.5\\&k_{\omega_i}>\frac{\varepsilon_i\lambda_{\max}\left(\mathbf{J}_i\right)}{2}\left(\left\|\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right\|+\left\|\mathbf{G}^T\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right\|\right)+1.5\end{aligned} \tag{۴۵}$$

که با توجه به تعریف تابع $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})$ در (۳)، تابع $\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{q}})$ برابر است با:

$$\mathbf{G}^T\left(\bar{\mathbf{e}}_q\right)=\frac{1}{4}\left((1-\bar{\mathbf{e}}_q^T\bar{\mathbf{e}}_q)\mathbf{I}_3-2\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q)+2\bar{\mathbf{e}}_q\bar{\mathbf{e}}_q^T\right)=\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_q\right)-\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q) \tag{۴۶}$$

و بنابراین کران اندازه‌ی آن قابل محاسبه خواهد بود:

$$\left\|\mathbf{G}^T\left(\bar{\mathbf{e}}_q\right)\right\|=\left\|\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_q\right)-\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q)\right\|<\left\|\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_q\right)\right\|+\left\|\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_q)\right\| \tag{۴۷}$$

پس می‌توان آخرین نامساوی در (۴۵) را طبق رابطه زیر به‌روز کرد:

$$k_{\omega_i}>\frac{\varepsilon_i\lambda_{\max}\left(\mathbf{J}_i\right)}{2}\left(2\left\|\mathbf{G}\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)\right\|+\left\|\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right\|\right)+1.5 \tag{۴۸}$$

که با توجه به ویژگی (۵) مربوط به تابع $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}})$، می‌توان نوشت:

$$k_{\omega_i}>h\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right) \tag{۴۹}$$

که تابع $h\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)>0$ برابر است با

$$h\left(\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right)=1.5+\frac{\varepsilon_i\lambda_{\max}\left(\mathbf{J}_i\right)}{4}\left(3+4\left\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right\|+3\left\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\right\|^2\right) \tag{۵۰}$$

ثانیاً

$$\begin{aligned}&\left(\Xi_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I+\underline{\mathbf{L}}_I^T\mathbf{K}_{q_I}\Xi_I\right)-\Xi_I^2-4\left(\dot{\mathbf{K}}_{q_I}+\Xi_I\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}\right)\\&-2\mathbf{I}_{3N}-\mathbf{T}_I(2,1)\mathbf{T}_I^{-1}(1,1)\mathbf{T}_I(1,2)>0\end{aligned} \tag{۵۱}$$

حال اگر هر دو قانون به‌روزرسانی ضرایب کنترلی در رابطه زیر برقرار باشد، نامساوی فوق برقرار خواهد بود.

$$\begin{aligned}&i)\ 4\dot{\mathbf{K}}_{q_I}<\left(\Xi_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I+\underline{\mathbf{L}}_I^T\mathbf{K}_{q_I}\Xi_I\right)-\Xi_I^2-2\mathbf{I}_{3N}\\&ii)\ 4\Xi_I\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}\le-\mathbf{T}_I(2,1)\mathbf{T}_I^{-1}(1,1)\mathbf{T}_I(1,2)\end{aligned} \tag{۵۲}$$

بدون آنکه به جامعیت مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که $\dot{\mathbf{K}}_{q_I}=0$. همچنین با توجه به فرض متصل بودن گراف می‌توان گفت که $\lambda_{\min}\left(\underline{\mathbf{L}}_I\right)>1$. لذا شرط (i) را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\Xi_I\mathbf{K}_{q_I}\underline{\mathbf{L}}_I+\underline{\mathbf{L}}_I^T\mathbf{K}_{q_I}\Xi_I>\Xi_I^2\mathbf{I}_{3N}+2\mathbf{I}_{3N} \tag{۵۳}$$

با فرض $k_{q_i}=k_q$ و $\forall i\in N;\ \varepsilon_i=\varepsilon<\frac{2}{\sqrt{\Delta}}$ پس

$$\begin{aligned}&\varepsilon k_q\left(\underline{\mathbf{L}}_I+\underline{\mathbf{L}}_I^T\right)>\left(\varepsilon^2+2\right)\mathbf{I}_{3N}\\&\Rightarrow k_q>\frac{2+\varepsilon^2}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{۵۴}$$

حال طبق شرط (ii) در رابطه (۵۲) سراغ بدست آوردن شروط لازم برای k_ω می‌رویم.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

$$4\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I} \le -\frac{1}{4}\left(\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)\Xi_I - 4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{K}_{q_I}\mathbf{L}_I\right)^T \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}})\Xi_I-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{K}_{q_I}\mathbf{L}_I\right) \quad (۵۵)$$

که بین هر سطر، عملگر ضرب ماتریسی برقرار است. می‌توان پس از بسط نامساوی فوق طبق روابط تفصیلی در ضمیمه ۵، نامساوی زیر را بدست آورد که

$$\dot{k}_{\omega_i} \le -\frac{1}{16\varepsilon}\left(\frac{\left(\varepsilon\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|+\left(3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2\right)\right)^2+k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2\left(k_{\omega_i}-h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)}\right. \left.+\left(\varepsilon\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|+\left(3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2\right)\right)^2+\frac{k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4\left(k_{\omega_i}-h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)^2}\right) \quad (۵۶)$$

لذا قانون به‌روزرسانی ضریب $k_{\omega i}$ با توجه به رابطه فوق و با تعریف

$$r(\bar{\mathbf{E}}_i)=r(\bar{\mathbf{e}}_{q_i},\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})=\left(\varepsilon\lambda_{\max}(\mathbf{J}_i)\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|+\left(3+2\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|+3\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|^2\right)\right)^2 \quad (۵۷)$$

طبق رابطه زیر خواهد بود:

$$\dot{k}_{\omega_i}=\begin{cases}-\frac{1}{16\varepsilon}\left(\frac{r(\bar{\mathbf{E}}_i)+k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{2\left(k_{\omega_i}-h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)}+r(\bar{\mathbf{E}}_i)+\frac{k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{4\left(k_{\omega_i}-h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right)^2}\right), & k_{\omega_i}>h(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\\ 0 & ,Otherwise\end{cases} \quad (۵۸)$$

حال با استخراج قوانین مربوط به ضرایب کنترلی k_{qi} و $k_{\omega i}$ در روابط (۵۴) و (۵۸) می‌توان تضمین نمود که $\lambda_{\min}(\mathbf{T})>1$ (یا به بیان دیگر $\mathbf{I}_{6N}<\mathbf{T}$) که با این نتیجه و با توجه به رابطه (۴۲) ناحیه همگرایی برای بردار خطاهای دنباله‌روی برابر خواهد بود با

$$\dot{V}(\bar{\mathbf{E}})<0 \Rightarrow \|\bar{\mathbf{E}}\|^2>\frac{1}{2\lambda_{\min}(\mathbf{T})}\|\bar{\mathbf{D}}\|^2 \quad (۵۹)$$

که با توجه به اندازه بردار $\bar{\mathbf{D}}$:

$$\|\bar{\mathbf{D}}\|^2=\sum_{i=1}^{N}\|\bar{\mathbf{d}}_i\|^2=m^2\sum_{i=1}^{N}\left(k_{\omega_i}+(2N_i+1)k_{q_i}\right)^2 \quad (۶۰)$$

و همچنین نتیجه‌ی $\lambda_{\min}(\mathbf{T})>1$ خواهیم داشت:

$$\|\bar{\mathbf{E}}\|>m\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(k_{\omega_i}+(2N_i+1)k_{q_i}\right)^2} \quad (۶۱)$$

نتیجه فوق بیان می‌دارد که بر اساس تحلیل لیاپانوف، مادامی که خطای دنباله‌روی از کران بدست‌آمده در رابطه فوق فراتر رود، کنترل‌کننده آن را در نهایت ($t\to\infty$) زیر کران مذکور قرار خواهد داد.

■

نکته۱: با توجه به اینکه مقادیر واقعی $\bar{\mathbf{e}}_q$ و $\bar{\mathbf{e}}_\omega$ در دسترس نیستند، لذا برای محاسبه $k_{\omega i}$ طبق (۵۸) می‌توان از جایگزینی $\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}\|\to\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^m\|+m$ و $\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}\|\to\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^m\|+m$ استفاده نمود که منظور از $\|\bar{\mathbf{e}}_{q_i}^m\|$ و $\|\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i}^m\|$ مقادیر اندازه‌گیری‌شده متغیرهای حالت جهت و سرعت زاویه‌ای حاصل از حسگرهاست.

نکته۲: کنترل‌کننده پیشنهادی تضمین می‌نماید که خطاهای دنباله‌روی تمامی ماهواره‌ها ($\bar{\mathbf{E}}(t)$) در آرایش پرواز در یک باند همگرایی طبق رابطه (۶۱) قرار می‌گیرد و در نتیجه طبق رابطه (۱۵)، خطای همزمان‌سازی ($\bar{\Xi}(t)$) نیز در یک باند کران‌دار قرار خواهد گرفت:

$$\|\bar{\Xi}(t)\|\le\|\mathbf{L}\|\|\bar{\mathbf{E}}(t)\| \quad (۶۲)$$

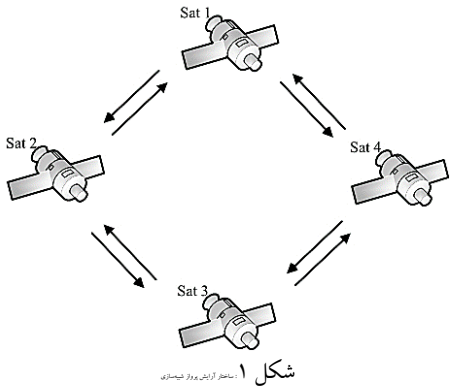
که با توجه به (۶۱) و متقارن بودن ماتریس لاپلاسین $\mathbf{L}$، می‌توان باند همگرایی خطای همزمان‌سازی را نیز بدست آورد:

$$\lim_{t\to\infty}\|\bar{\Xi}(t)\|\le m\lambda_{\max}(\mathbf{L})\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(k_{\omega_i}+(2N_i+1)k_{q_i}\right)^2} \quad (۶۳)$$

لذا می‌توان گفت که کنترل‌کننده پیشنهادی، تضمین می‌کند که بردار خطای همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌ها نیز UUB باشد.

٤- شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد روش کنترلی ارائه‌شده با استفاده از شبیه‌سازی برای یک SFF متشکل از چهار ماهواره در یک مدار دایروی با ارتفاع 400 km ارتفاع پایین یا LEO (Low Erath Orbit) ارزیابی می‌شود.



شکل ۱ : ساختار آرایش پرواز شبیه‌سازی

شکل ۲: ساختار آرایش پرواز شبیه‌سازی

ماتریس‌های لختی دورانی ماهواره‌ها عبارتند

$$\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix}60&0&-8\\0&60&0\\-8&0&120\end{bmatrix}kg.m^2\quad \mathbf{J}_2=\begin{bmatrix}90&10&0\\10&80&0\\0&0&70\end{bmatrix}kg.m^2$$
$$\mathbf{J}_3=\begin{bmatrix}80&0&0\\0&110&-15\\0&-15&120\end{bmatrix}kg.m^2\quad \mathbf{J}_4=\begin{bmatrix}70&0&10\\0&60&0\\10&0&90\end{bmatrix}kg.m^2 \quad (۶۴)$$

که ماتریس لاپلاسین آن به فرم زیر خواهد بود:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{bmatrix} \quad (۶۵)$$

با توجه به اینکه زوایای اویلر فهم بهتری از بیان وضعیت و دقت نشانه‌روی برای اکثر ماموریت‌های ماهواره‌ای فراهم می‌کند، واریانس خطای اندازه‌گیری در بیان زوایای اویلر را به بیان MRP تبدیل می‌کنیم تا بتوان اثر آن را در کنترل‌کننده پیشنهادی مشاهده کرد. برای این منظور، در ابتدا

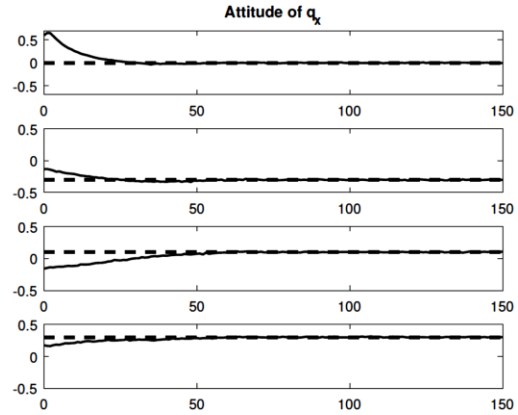
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

یک بردار دلخواه سه‌مولفه‌ای (غلتش یا Roll، خمش یا Pitch، گردش یا Yaw) که هر مولفه‌ی آن یک سیگنال متغیر با زمان است تولید می‌شود. سپس، یک بردار تصادفی سه‌مولفه‌ای که هر مولفه‌ی آن با توزیع نرمال و میانگین صفر و واریانس خطای اندازه‌گیری ساخته شده است، به بردار اول اضافه می‌شود تا یک بردار آمیخته با خطا بدست آید. سپس، بردار اول و بردار خطاآلود را از فضای زوایای اویلر به فضای MRP تبدیل می‌کنیم. از تفاضل دو بردار حاصل در MRP نسبت به یکدیگر، برداری تصادفی حاصل می‌شود که میانگین توزیع آن صفر و واریانس آن، خطای اندازه‌گیری در بیان MRP است. برای نمونه، برخی از حسگرهای مغناطیسی دقت وضعیتی در حدود یک درجه به عنوان 1-σ را در اختیار قرار می‌دهند [۴۱]. با استفاده از روش مذکور، خطا در بیان MRP در حدود 0.005 بدست می‌آید. خطای اندازه‌گیری حسگر سرعت زاویه‌ای نیز برابر 0.1 درجه بر ثانیه لحاظ می‌شود. تمامی چهار ماهواره خطای اندازه‌گیری مشابهی در حسگرهای خود را دارند.

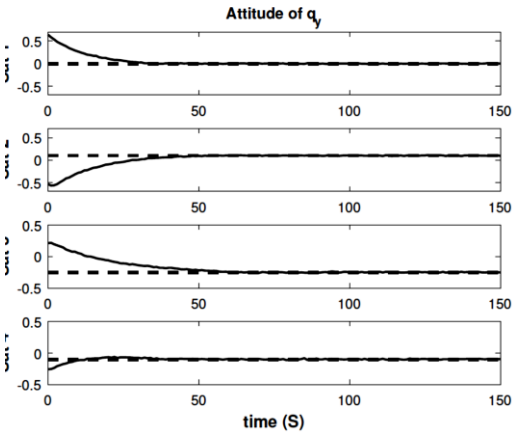
شرایط اولیه بردارهای جهت ($\bar{q}_0$) به ترتیب عبارتند از $[-0.6\ \ 0.63\ \ 0.6]^T$، $[-0.02\ \ -0.54\ \ -0.13]^T$، $[-0.02\ \ 0.21\ \ 0.16]^T$ و $[-0.07\ \ -0.27\ \ 0.17]^T$. بعلاوه تاثیر اغتشاش محیطی در شبیه‌سازی لحاظ خواهد شد. مهمترین اغتشاشات محیطی عبارتند از آیرودینامیک، مغناطیسی، گرانشی و تشعشعی که با توجه به فرض مدار LEO، مجموعاً در حدود 0.0001 نیوتن متر بزرگی خواهند داشت [۴۱]. همچنین برای واقعی‌تر کردن شبیه‌سازی، اشباع عملگرها نیز لحاظ می‌شوند به این ترتیب که برای هر محور، بیشینه پنج نیوتن متر گشتاور قابل اعمال است. حال می‌توان ضرایب کنترلی را طبق زیر محاسبه نمود:

- K_{qi}: با توجه به ماتریس‌های لختی دورانی، بزرگ‌ترین مقدار ویژه متعلق است به $\mathbf{J_1}$ که می‌توان بهره k_q را طبق رابطه (۵۴) برابر ۵۰ برای تمامی ماهواره‌ها در نظر گرفت.
- $K_{\omega i}$: این ضرایب با استفاده از رابطه (۵۸) به‌روز می‌شوند. با توجه به وابستگی ضرایب مذکور به خطای دنباله‌روی، انتظار می‌رود در صورت عملکرد مناسب کنترل‌کننده، مقادیر نهایی آنها کمتر از مقادیر اولیه باشد.

همان‌طور که در شکل ۳ قابل مشاهده است مولفه‌های بردار MRP به مقادیر مطلوب خود که به ترتیب برای هر ماهواره برابراند با $[0\ \ 0\ \ 0]^T$، $[0.25\ \ 0.1\ \ 0.3]^T$، $[0.1\ \ -0.25\ \ -0.5]^T$ و $[0.3\ \ -0.1\ \ -0.1]^T$ میل می‌کنند. همچنین با توجه به اینکه ماموریت آرایش پرواز، مشاهده زمین است لذا بایستی بردار مطلوب برای سرعت زاویه‌ای در تمامی ماهواره‌ها برابر $[0\ \ 0\ \ 0]^T$ باشد. در **Error! Reference source not found.** مولفه‌های بردارهای خطای دنباله‌روی جهت ($\bar{e}_q$) نشان داده شده‌اند. همچنین مولفه‌های بردار خطای دنباله‌روی سرعت زاویه‌ای ($\bar{e}_\omega$) در شکل ۴ ارائه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطاهای دنباله‌روی از حالات اولیه متفاوت به یک باند حول صفر رسیده‌اند که کران باند مذکور طبق (۶۱) وابستگی کامل به کران خطای اندازه‌گیری حسگرها دارد. از دیدگاه زمان مانور، طبق شکل‌های (۴) و (۵) تقریباً در زمانی کمتر از ۷۵ ثانیه عملیات نشانه‌روی تمامی ماهواره‌ها اتفاق می‌افتد که با توجه به کند بودن ذاتی دینامیک ماهواره زمان قابل قبولی است. به‌طور کلی، با توجه به پیش‌بینی بازه‌ی زمانی مانور، می‌توان فرمان نشانه‌روی برای ماهواره‌های مستقر در مدار LEO را قبل از رسیدن به موقعیت مداری مورد نظر، ارسال کرد. همچنین بهره‌های کنترلی و سیگنال کنترلی در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود و قابل انتظار است در طی زمان و به دلیل عملکرد مناسب کنترل‌کننده، مقادیر نهایی بهره کنترلی $k_{\omega i}$ روند کاهشی دارند. در پایان، برای روشن‌تر شدن هر چه بیشتر اهمیت الگوریتم ارائه‌شده، آرایش پرواز حاضر با یک کنترل‌کننده موجود در مقالات که خطای اندازه‌گیری را لحاظ نکرده است، شبیه‌سازی می‌شود. طبق روش کنترل [۳۵] که بر اساس فیدبک حالت PD است، سیگنال کنترلی آن با لحاظ k_{qi}=50 و $k_{\omega i}$=600 به آرایش پرواز اعمال می‌شود. همان‌طور که در شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود، خطاهای دنباله‌روی جهت نه تنها واگرا شده بلکه با یکدیگر نیز همزمان نشده‌اند. اگرچه سرعت زاویه‌ای به صفر همگرا می‌شود ولی در مقایسه با روش حاضر در شکل ۵، در بازه‌ی زمانی طولانی‌تری این اتفاق روی می‌دهد.

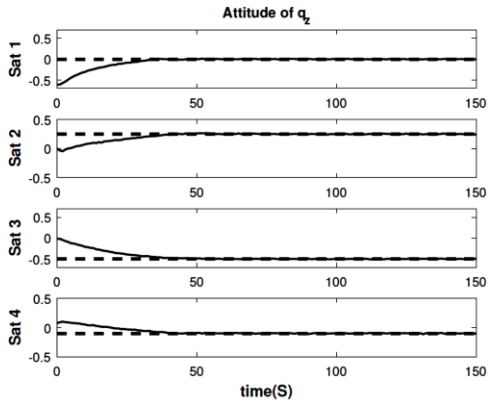


الف) مولفه x



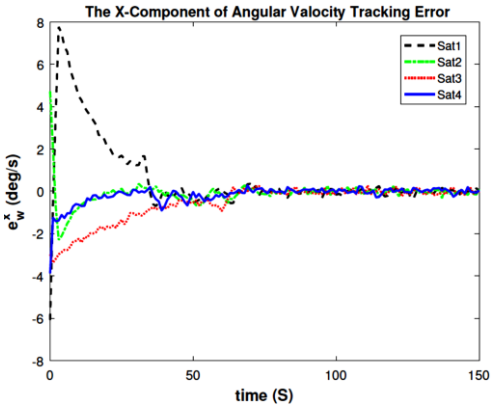
ب) مولفه y

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

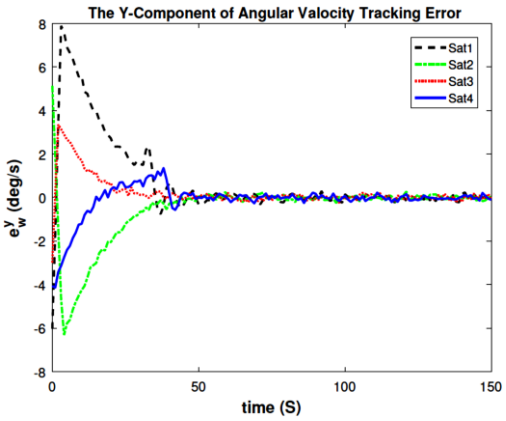


ج) مولفه z

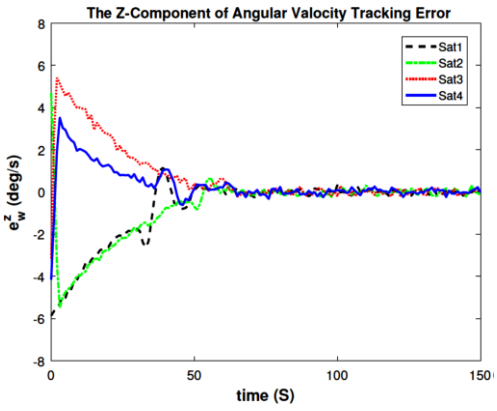
شکل ۳: بردار MRP؛ - - بردار مطلوب – بردار اندازه‌گیری‌شده



الف) مولفه x

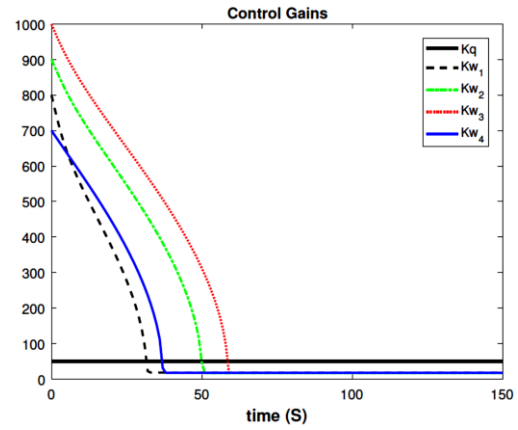


ب) مولفه y

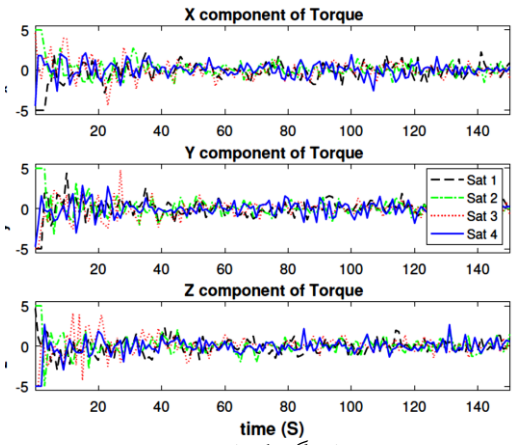


ج) مولفه z

شکل ۴: بردار خطای دنباله‌روی سرعت زاویه‌ای

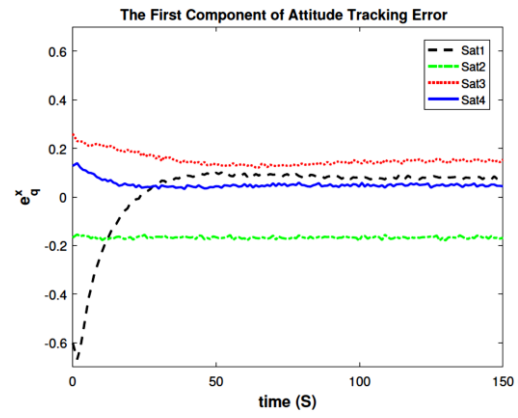


الف) بهره‌های کنترلی

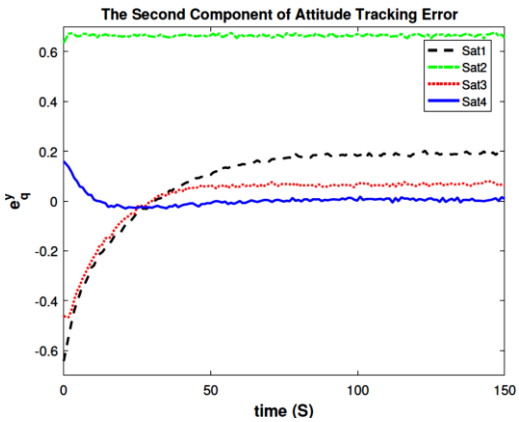


ب) سیگنال کنترلی

شکل ۵:بهره‌ها و سیگنال کنترلی



الف) مولفه x



ب) مولفه y

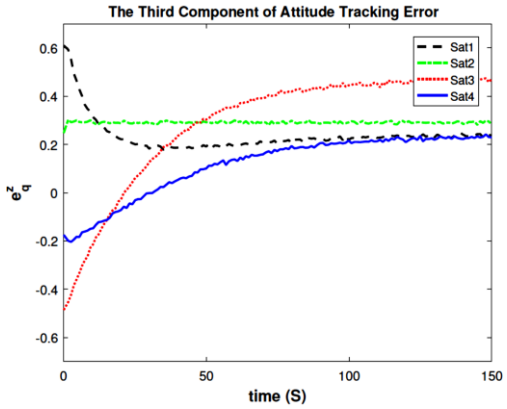
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

۵- نتیجه‌گیری

یک روش کنترلی با رویکرد غیرمتمرکز مبتنی بر فیدبک حالت با هدف همزمان‌سازی وضعیت بین ماهواره‌های نامشابه در آرایش پرواز ارائه گردید. لحاظ خطای اندازه‌گیری متغیرهای وضعیت شامل جهت و سرعت زاویه‌ای مهمترین نقطه چالش‌برانگیز طراحی کنترل‌کننده بود و تضمین شد که خطاهای دنباله‌روی جهت و سرعت زاویه‌ای، کراندار نهایی یکنواخت (UUB) خواهند بود. متصل بودن گراف به عنوان مهمترین فرض در گراف ارتباطی لحاظ شد. استخراج ضرایب کنترلی مناسب، اصلی‌ترین راه‌کار تعدیل اثر خطای اندازه‌گیری وضعیت در الگوریتم کنترلی مد نظر قرار گرفت که بر اساس روش لیاپانوف و تضمین شروط پایداری آن توسعه داده شد. بعلاوه در الگوریتم ارائه‌شده، نیازی به مخابره‌ی بردارهای سرعت زاویه‌ای بین ماهواره‌ها بوجود نیامد تا به بار مخابراتی الگوریتم افزوده نگردد. با توجه به نتایج قضیه ارائه‌شده، تضمین گردید که علاوه بر خطای دنباله‌روی هر ماهواره، خطای همزمانی وضعیت بین ماهواره‌ها نیز در یک باند کران‌دار حول صفر قرار می‌گیرد. در فاز شبیه‌سازی برای واقعی‌تر شدن نتایج حاصله، اشباع عملگرها و اغتشاشات مداری ماهواره‌ها لحاظ شدند. همچنین، عملکرد الگوریتم ارائه‌شده با یک الگوریتم موجود در مقالات مقایسه شد تا مزایای روش ارائه‌شده روشن شود. در راستای کار صورت گرفته در این مقاله، پیشنهاد می‌گردد که الگوریتم فوق به گونه‌ای توسعه داده شوند که همزمان‌سازی وضعیت در حضور عیب حسگرها، عدم قطعیت ماتریس لختی دورانی و تاخیر ارتباطی محقق گردد.

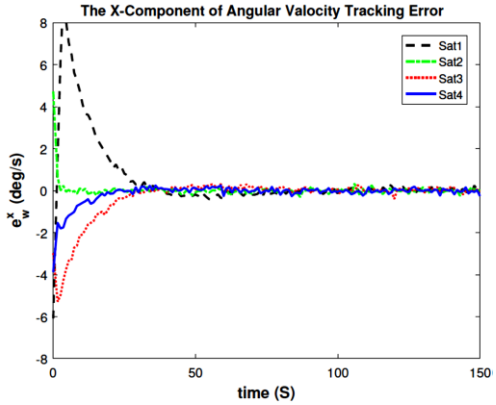
مراجع

[1] Kroes R. Precise relative positioning of formation flying spacecraft using GPS. TU Delft, Delft University of Technology; 2006.
[2] Rezaee, Hamed and Abdollahi, Farzaneh and Talebi, Heidar A. H∞ Based Motion Synchronization in Formation Flight with Delayed Communications. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2014;61(11):6175--6182.
[3] Rezaee, Hamed and Abdollahi, Farzaneh. Motion synchronization in unmanned aircrafts formation control with communication delays. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013;18(3):744 - 756.
[4] Alfriend, Kyle and Vadali, Srinivas Rao and Gurfil, Pini and How, Jonathan and Breger, Louis. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation. Butterworth-Heinemann; 2009.
[5] Hui, Liu and Li, Junfeng. Terminal sliding mode control for spacecraft formation flying. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2009;45(3):835--846.
[6] Wu, Baolin and Xu, Guangyan and Cao, Xibin. Relative dynamics and control for satellite formation: accommodating J 2 perturbation. Journal of Aerospace Engineering. 2016;29(4):401--411.
[7] Sandau, Rainer and Roeser, Hans Peter and Valenzuela, Arnoldo and others. Small Satellite Missions for Earth Observation. Springer; 2014.

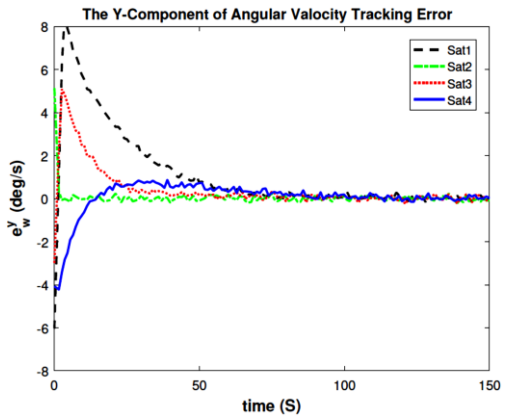


ج) مولفه z

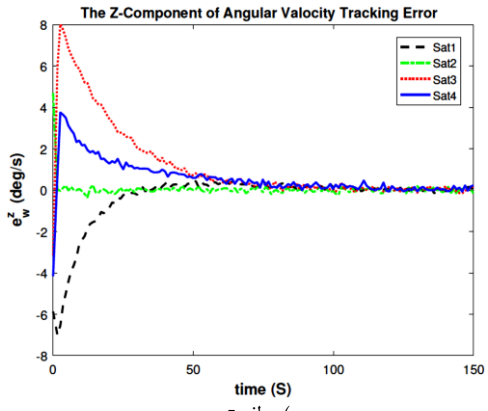
شکل ۶:بردار خطای دنباله‌روی جهت با استفاده از کنترل‌کننده در [۳۵]



الف) مولفه x



ب) مولفه y



ج) مولفه z

شکل ۷:بردار خطای دنباله‌روی سرعت زاویه‌ای با استفاده از روش [۳۵]

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

[8] Running, Zhang and Yang, Li and Shengil, Liu. System requirements and mission analysis for spacecraft SAR interferometry based on formation flying satellites. In: 21st international society of photogrammetry and remote sensing (ISPRS) congress; 2008; China.

[۹] فلاورجانی فک. کنترل همزمان مدار و وضعیت برای آرایش های پروازی دنباله روی. پژوهشگاه هوافضا; ۱۳۸۸.

[10] Wang, P K C and Hadaegh, F Y and Lau, K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1999;22(11):28--35.

[11] Kapila, Vikram and Sparks, Andrew G and Buffington, James M and Yan, Qiguo. Spacecraft formation flying: dynamics and control. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2000;23(3):561--564.

[12] Kang, Wei and Sparks, Andrew. Coordinated attitude and formation control of multisatellite systems. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit; 2002; Monterey, California.

[13] Chung, Soon Jo and Ahsun, Umair and Slotine, Jean Jacques E. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009;32(2):512--526.

[14] Lee D. Spacecraft coupled tracking maneuver using sliding mode control with input saturation. Journal of Aerospace Engineering. 2014;28(5):401--413.

[15] Shan J. Six-degree-of-freedom synchronised adaptive learning control for spacecraft formation flying. IET Control Theory & Applications. 2008;2(10):930--949.

[16] Beard, Randal W and Lawton, Jonathan and Hadaegh, Fred Y and others. A coordination architecture for spacecraft formation control. IEEE Transactions on control systems technology. 2009;9(6):777--790.

[17] Nazari, Morad and Butcher, Eric A and Yucelen, Tansel and Sanyal, Amit K. Decentralized consensus control of a rigid-body spacecraft formation with communication delay. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016;39(4):838--851.

[18] Wang, Danwei and Wu, Baolin and Chung, Eng Kee Poh. Satellite Formation Flying. Singapore: Springer; 2017.

[19] Abdessameud, Abdelkader and Tayebi, Abdelhamid. Attitude synchronization of a group of spacecrafts without velocity measurements. IEEE Transactions on Automatic Control. 2009;54(11):2642--2648.

[20] Kristiansen, Raymond and Lora, Antonio and Chaillet, Antoine and Nicklasson, Per Johan. Spacecraft relative rotation tracking without angular velocity measurements. Automatica. 2009;45(3):750--756.

[21] Bondhus, Anne Karin and Pettersen, Kristin Y and Gravdahl, J Tommy. Leader/follower synchronization of satellite attitude without angular velocity measurements. In: 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference; 2005; Seville, Spain.

[22] Hu, Qinglei and Zhang, Jian and Zhang, Youmin. Velocity-free attitude coordinated tracking control for spacecraft formation flying. ISA Transactions. 2018;73(1):54-65.

[23] Ren W. Distributed cooperative attitude synchronization and tracking for multiple rigid bodies. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2010;18(2):383--392.

[24] Guo, Yong and Guo, Jin-hua and Li Ai-jun and Wang, Chang-qing. Attitude Coordination Control for Formation Flying Spacecraft Based on the Rotation Matrix. Journal of Aerospace Engineering. 2017;30(5):04017051.

[25] Kang, Wei and Yeh, Hsi Han. Coordinated attitude control of multi-satellite systems. International Journal of robust and nonlinear control. 2002;12(2--3):185--205.

[26] Kristiansen, Raymond and Nicklasson, Per Johan and Gravdahl, Jan Tommy. Quaternion-based backstepping control of relative attitude in a spacecraft formation. In: 45th IEEE Conference on Decision and Control; 2006; San Diego, California.

[27] Lawton, Jonathan R and Beard, Randal W. Synchronized multiple spacecraft rotations. Automatica. 2002;38(8):1359--1364.

[28] VanDyke, Matthew C and Hall, Christopher D. Decentralized coordinated attitude control within a formation of spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2006;29(5):1101--1109.

[29] Bai, He and Arcak, Murat and Wen, John T. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies. Systems and Control Letters. 2009;58(6):429--465.

[30] Ren, Wei and Beard, Randal. Decentralized scheme for spacecraft formation flying via the virtual structure approach. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004;27(1):73--82.

[31] Cong, Bing Long and Liu, Xiang Dong and Chen, Zhen. Distributed attitude synchronization of formation flying via consensus-based virtual structure. Acta Astronautica. 2011;68(11):1973--1986.

[32] Lawton, Jonathan and Beard, Randal W and Hadaegh, Fred Y. Elementary attitude formation maneuvers via leader-following and behavior-based control. In: AIAA Guidance, Naviagtion, and Control Conference and Exhibit; 2000; Montreal, Canada.

[33] Beard, Randal W and Lawton, Jonathan and Hadaegh, Fred Y and others. A coordination architecture for spacecraft formation control. IEEE Transactions on control systems technology. 2001;9(6):777--790.

[34] Mehrabian, Alireza and Khorasani, Khashayar. Distributed and cooperative quaternion-based attitude synchronization and tracking control for a network of heterogeneous spacecraft formation flying mission. Journal of the Franklin Institute. 2015;352(9):3885--3913.

[35] Wang, Xinsheng and Wu, Jingxin and Wang, Xiaoli. Distributed attitude consensus of spacecraft formation flying. Journal of Systems Engineering and Electronics. 2013;24(2):296--302.

[36] Zhao, Lin and Jia, Yingmin. Neural network-based distributed adaptive attitude synchronization control of

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

spacecraft formation under modified fast terminal sliding mode. Neurocomputing. 2016;171(1):230 - 241.
[37] Qinglei Hu and Jian Zhang. Relative position finite-time coordinated tracking control of spacecraft formation without velocity measurements. ISA Transactions. 2015;54(1):60--74.
[38] Song, Yong Duan and Cai, Wen Chuan. New intermediate quaternion-based control of spacecraft: part I—almost global attitude tracking. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2012;8(10):7307--7319.
[39] Xiao, Bing and Hu, Qinglei and Wang, Danwei. Spacecraft attitude fault tolerant control with terminal sliding-mode observer. Journal of Aerospace Engineering. 2013; 28:401--405.
[40] Schaub H., Junkins J. L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters. Journal of the Astronautical Sciences. 1996;44(1):1--19.
[41] Wertz J. R, Everett D. F, Puschell J. J. Space mission engineering: the new SMAD. Microcosm Press; 2011.
[42] N C. Output Synchronization on Strongly Connected Graphs. IEEE Transactions on Automatic Control. 2012;57(11).
[43] D S. Position synchronization of multiple motion axes with adaptive coupling control. Automatica. 2003;39(6).
[44] Castrup, Suzanne and Castrup, Howard T. Measurement uncertainty analysis principles and methods. NASA Measurement Quality Assurance Handbook -- Annex 3; 2010.
[45] Boyd, Stephen P and ElGhaoui, Laurent and Feron, Eric and Balakrishnan, Venkataramanan. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM; 1994.
[46] Wang X, Zhao K, You Z. Coordinated motion control of distributed spacecraft with relative state estimation. Journal of Aerospace Engineering. 2015;29(3).
[47] Zhang F. The Schur complement and its applications. Springer Science & Business Media; 2006.

ضمائم

ضمیمه ۱: ابزارهایی از جبر ماتریسی

با توجه به اینکه در این مقاله، از نرم ماتریسی استفاده شده است لذا به برخی از ویژگی‌های مفید آن در اینجا اشاره می‌شود. در صورتی که فرض کنیم **A** و **B** ماتریس‌های nxn بوده و λ_i نمایانگر مقادیر ویژه است، آنگاه روابط زیر برای نرم‌های آنها برقرار است [۴۵]

$$\begin{aligned} &1)\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\le\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\| \\ &2)\|\mathbf{AB}\|\le\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \\ &3)\mathbf{A}\ \textit{is symmetric};\|\mathbf{A}\|=\max_i|\lambda_i| \end{aligned} \qquad (ض۱-۱)$$

همچنین برای هر دو بردار دلخواه $\bar{\mathbf{X}}_1$ و $\bar{\mathbf{X}}_2$ داریم:

$$\mathbf{A}\ \textit{is skew symmetric};\ \bar{\mathbf{X}}_1^T\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}_1=0 \qquad (ض۱-۲)$$

و

$$\begin{aligned} &\left(\bar{\mathbf{X}}_1-\bar{\mathbf{X}}_2\right)^T\left(\bar{\mathbf{X}}_1-\bar{\mathbf{X}}_2\right)\ge 0 \\ &\Rightarrow \bar{\mathbf{X}}_1^T\bar{\mathbf{X}}_2\le\frac{1}{2}\bar{\mathbf{X}}_1^T\bar{\mathbf{X}}_1+\frac{1}{2}\bar{\mathbf{X}}_2^T\bar{\mathbf{X}}_2 \end{aligned} \qquad (ض۱-۳)$$

ضمیمه ۲: لم کاربردی

لم۱: برای هر ماتریس قطری مثبت **D** و متقارن مثبت **M** داریم $\mathbf{MDM}\le\lambda_{\max}^2(\mathbf{M})\mathbf{D}$.

اثبات: یک تبدیل همانندی متقارن **P** می‌توان یافت که

$$\mathbf{D}=\mathbf{PJP}^T \qquad (ض۲-۱)$$

که **J** فرم ماتریس قطری **D** است. **D** متقارن است لذا $\mathbf{P^{-1}=P^T}$. حال می‌توان یک ماتریس متقارن **S** را یافت به‌طوری که

$$\mathbf{S}=\mathbf{J}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\mathbf{MPJ}^{-\frac{1}{2}} \qquad (ض۲-۲)$$

از آنجا که $\mathbf{PJ}^{-\frac{1}{2}}$ می‌تواند به عنوان یک تبدیل همانندی متقارن باشد، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lambda_{\max}(\mathbf{S})=\lambda_{\max}(\mathbf{M}) \qquad (ض۲-۳)$$

که با توجه به تقارن هر دو ماتریس **S** و **M** خواهیم داشت که

$$\|\mathbf{S}\|=\|\mathbf{M}\| \qquad (ض۲-۴)$$

بنابراین

$$\lambda_{\max}\left(\mathbf{S}^T\mathbf{S}\right)=\|\mathbf{M}\|^2 \qquad (ض۲-۵)$$

یا به عبارت دیگر

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S}-\|\mathbf{M}\|^2\mathbf{I}\le 0 \qquad (ض۲-۶)$$

حال با توجه به (ض۲-۵) خواهیم داشت

$$\mathbf{J}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\mathbf{MPJ}^{\frac{1}{2}}\mathbf{J}^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\mathbf{MPJ}^{-\frac{1}{2}}-\|\mathbf{M}\|^2\mathbf{I}\le 0 \qquad (ض۲-۷)$$

با ضرب ماتریس مثبت معین $\mathbf{J}^{\frac{1}{2}}$ از چپ و راست و همچنین (ض۲-۴) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{P}^T\mathbf{MDMP}-\|\mathbf{M}\|^2\mathbf{J}\le 0 \qquad (ض۲-۸)$$

با توجه به اینکه ماتریس تبدیل همانندی، مقادیر ویژه را تغییر نمی‌دهد خواهیم داشت

$$\mathbf{MDM}-\|\mathbf{M}\|^2\mathbf{PJP}^T\le 0 \qquad (ض۲-۹)$$

به بیان دیگر

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

$$\mathbf{MDM} \le \|\mathbf{M}\|^2 \mathbf{D} \qquad \text{(ض۲-۱۰)}$$

■پایان اثبات لم

ضمیمه ۳: تئوری گراف به عنوان چارچوب یک سیستم آرایش پرواز ماهواره

با استفاده از گراف، می‌توان ارتباطات بین ماهواره‌ای در آرایش پرواز را مدل کرد. یک گراف G متشکل از N عامل با گره‌ها یا Nodes و مسیرهای یا Edges خود تبیین می‌شود. مجموعه گره‌ها را با $\nu(G)=\{v_1,v_2,...,v_N\}$ و مجموعه مسیرها را با $\xi \subseteq \nu \times \nu$ نمایش می‌دهند. ξ بیانگر مسیرهای ارتباطی بین عامل‌ها در یک رویکرد غیر جهت‌دار یا Undirected است. برای هر گراف، یک ماتریس متقارن همسایگی $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{N\times N}$ تعریف می‌شود که $a_{ij}=1$ در صورت وجود ارتباط از عامل i به j و $a_{ij}=0$ در غیر این‌صورت. بر همین اساس، ماتریس لاپلاسین $\mathbf{L}=\left[l_{ij}\right]_{N\times N}$ که یک ماتریس متقارن مثبت نیمه‌معین است تعریف می‌شود که

$$l_{ij}=\begin{cases}\sum_{j\in N_i} a_{ij} & i=j\\ -a_{ij} & i\neq j\end{cases} \qquad \text{(ض۳-۱)}$$

که منظور از N_i، همسایه‌های عامل i اُم است. واضح است که مجموع درایه‌های سطری ماتریس لاپلاسین برابر صفر است لذا همواره یکی از مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین برابر صفر خواهد بود [۴۶].

ضمیمه ٤: متمم شور (Schur Complement)

برای هر ماتریس متقارن بلوکی $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C}\end{bmatrix}$ خواهیم داشت [۴۷]:

- اگر **A** معکوس‌پذیر باشد: **M>0** اگر و فقط اگر **A>0** و **$C-B^TA^{-1}B>0$**
- اگر **C** معکوس‌پذیر باشد: **M>0** اگر و فقط اگر **C>0** و **$A-BC^{-1}B^T>0$**

ضمیمه ۵: بخش هایی از اثبات قضیه ۱

با توجه به نامساوی بدست‌آمده در رابطه (۵۵)، می‌توان سمت راست آن را این‌گونه نوشت

$$\begin{aligned}-16\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I} \ge\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+k_q\mathbf{L}_I\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+k_q\mathbf{L}_I\right)\end{aligned} \qquad \text{(ض۵-۱)}$$

با فرض $\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}\le 0$ و با توجه به قطری بودن $\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}$ سعی می‌کنیم بخش‌های قطری طرف راست نامساوی را تفکیک کنیم لذا

$$\begin{aligned}-16\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I} \ge\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)+\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}k_q\mathbf{L}_I\\ & +\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)\\ & +\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\end{aligned} \qquad \text{(ض۵-۲)}$$

جمله اول که بلوکی قطری است. برای جملات دوم و سوم با توجه به ویژگی ماتریسی (ض۱-۳) و با لحاظ $\bar{\mathbf{X}}_1=\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)$ و $\bar{\mathbf{X}}_2=\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)$ و همچنین متقارن بودن $\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}& \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}k_q\mathbf{L}_I\\ & \le\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)\\ & +\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\\ & \left(k_q\mathbf{L}_I\right)\end{aligned} \qquad \text{(ض۵-۳)}$$

لذا نامساوی (ض۵-۲) را می‌توان این‌گونه نوشت

$$\begin{aligned}& -16\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I} \ge \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)+\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\ & +\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & +\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\ & +\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\end{aligned} \qquad \text{(ض۵-۴)}$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}& -16\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I} -\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)\\ & \left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\ & \ge\\ & +\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\ & +\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\ & +\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\end{aligned} \qquad \text{(ض۵-۵)}$$

اکنون طرف چپ نامساوی یک مجموعه بلوکی قطری است که می‌توان شرط هر بلوک مربوط به هر عامل را از آن استخراج نمود. حال با استفاده از لم ۱ (ضمیمه ۲)، سمت راست نامساوی فوق قطری خواهد شد:

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\\
&+\left(k_q\mathbf{L}_I\right)^T\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\left(k_q\mathbf{L}_I\right)\qquad\text{(ض۵-۶)}\\
&\le\\
&k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\\
&+k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

حال می‌توان نامساوی (ض۵-۵) را می‌توان این گونه نوشت

$$
\begin{aligned}
&-16\varepsilon\dot{\mathbf{K}}_{\omega I}-\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\
&\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}\\
&\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\
&\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)\qquad\text{(ض۵-۷)}\\
&\left(\varepsilon\mathbf{J}_M\mathbf{S}_M(\bar{\mathbf{E}}_\omega)-4\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)\right)^T\\
&\ge\\
&k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-2}\\
&+k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})\left(2\mathbf{K}_{\omega I}-\varepsilon\left(\mathbf{J}_M\mathbf{G}_M(\bar{\mathbf{E}}_q)+\mathbf{G}_M^T(\bar{\mathbf{E}}_q)\mathbf{J}_M\right)-3\mathbf{I}_{3N}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

حال با توجه به اینکه دو طرف نامساوی فوق قطری هستند، لذا می‌توان شرط زیر را برای هر بلوک استخراج کرد

$$
\begin{aligned}
&-16\varepsilon\dot{k}_{\omega_i}\ge\frac{\left\|\varepsilon\mathbf{J}_i\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})-4\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right\|^2}{\left\|2k_{\omega_i}\mathbf{I}_3-\varepsilon\left(\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})+\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\mathbf{J}_i\right)-3\mathbf{I}_3\right\|}\\
&+\left\|\varepsilon\mathbf{J}_i\mathbf{S}(\bar{\mathbf{e}}_{\omega_i})-4\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\right\|^2\\
&+\frac{k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{\left\|2k_{\omega_i}\mathbf{I}_3-\varepsilon\left(\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})+\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\mathbf{J}_i\right)-3\mathbf{I}_3\right\|^2}\qquad\text{(ض۵-۸)}\\
&+\frac{k_q^2\lambda_{\max}^2(\mathbf{L})}{\left\|2k_{\omega_i}\mathbf{I}_3-\varepsilon\left(\mathbf{J}_i\mathbf{G}(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})+\mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{e}}_{q_i})\mathbf{J}_i\right)-3\mathbf{I}_3\right\|}
\end{aligned}
$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.4.6.3]
[DOI: 10.29252/joc.13.4.49]