مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۹، صفحه۹۹ -۸۹

طراحی یک روش کنترلی برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی نامعین با کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم و مد لغزشی مرتبه کسری

پوریا جعفری[۱]، محمدتشنه‌لب [۲]، مهسان توکلی کاخکی[۳]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، pjafari@ece.usb.ac.ir

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، teshnehlab@eetd.kntu.ac.ir

[۲] استادیار،دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، matavakoli@eetd.kntu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۰۷ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۹/۳۰ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۰۲

چکیده: امروزه رشد قابل توجه حسابان مرتبه‌کسری در علوم مهندسی سبب تبدیل این شاخه به یکی از زمینه‌های پرطرفدار به ویژه مهندسین کنترل شده است. بر همین اساس روش‌های کنترلی مرتبه‌کسری متعددی طراحی شده است. همچنین، در صورت تامین شرایط لازم برای کنترل‌کننده‌های فازی تطبیقی، نشان داده شده است که این نوع کنترل‌کننده‌ها قابلیت کنترل سیستم‌های نامعین با وجود اغتشاش را دارند. به همین دلیل، در این مقاله یک کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیر مستقیم از نوع سوگنوی مرتبه ۱ به همراه مد لغزشی مرتبه‌کسری برای کنترل یک کلاس خاص از سیستم‌های مرتبه‌کسری ارائه می‌شود. پایداری سیستم حلقه بسته بررسی شده و با استفاده از تابع لیاپانوف مرتبه‌کسری قوانین تطبیق استخراج می‌شوند. یک قانون تطبیق مرتبه‌کسری برای تنظیم پارامترهای آزاد بخش تالی سیستم فازی استفاده شده و قانون تطبیق مقاوم دیگری نیز برای حذف خطای تقریب بین تابع غیرخطی سیستم و خروجی سیستم فازی به کار می‌رود. بنابراین با استفاده از قضیه لیاپانوف مرتبه‌کسری پایداری میتگ-لفلر سیستم حلقه بسته تضمین خواهد شد. در انتها، کارآیی و عملکرد روش پیشنهادی در کنترل سیستم مرتبه‌کسری غیرخطی نامعین ژیروسکوپ به همراه اغتشاش نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی: کنترل‌کننده فازی تطبیقی سوگنو، مد لغزشی مرتبه کسری و سیستم‌های مرتبه کسری نامعین.

Designing of a Control Approach for Uncertain Fractional Order Systems with Indirect Adaptive Fuzzy Controller and Frational Order Sliding Mode

Pouria Jafari, Mohammad Teshnehlab, Mahsan Tavakoli-Kakhki

Abstract: Todays according to the noticeable growth of the fractional order calculus in engineering sciences, this field has converted to a beloved context for researchers especially Control engineers. There have been designed various fractional order control methods accordingly. Also, it has been proved that adaptive fuzzy controllers are capable of controlling uncertain systems with disturbance if necessary, conditions have been provided. For this reason, in this paper, an indirect adaptive TSK fuzzy controller with fractional order sliding mode control is introduced to control a certain class of nonlinear fractional order systems. The fractional order stability of the closed-loop system is studied and based on a fractional order Lyapunov function candidate; fractional order adaptation laws are obtained. The fractional order adaptation law is proposed to adjust the free parameters in the consequence part of the adaptive TSK system. In addition, a robust adaptive law is proposed to reduce the influence of approximation error between true system functions and TSK fuzzy controller. Hence, using the fractional order Lyapunov

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

theorem, the Mittag-Leffler stability of the closed-loop system is guaranteed. The numerical simulation shows validity and effectiveness of the introduced control strategy for fractional order nonlinear models that perturbed by disturbance and uncertainty.

Keywords: Adaptive TSK Fuzzy controller, Fractional order sliding mode, and Uncertain Fractional order systems.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر حسابان مرتبه کسری با وجود سابقه‌ای بالغ بر ۳۰۰ سال در مباحث ریاضی، به عنوان موضوعی تازه در مهندسی و علوم پایه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. حسابان مرتبه کسری که با تعمیم مرتبه مشتق و انتگرال به اعداد حقیقی درجه آزادی بیشتری نسبت به حسابان مرتبه صحیح دارد، کاربردهای متنوعی در الکترونیک، مخابرات، کنترل، مکانیک، فیزیک و حتی پزشکی به خود اختصاص داده است [۱, ۲]. به عنوان مثال در مدل‌سازی فرآیند انتقال حرارت [۳]، فرآیندهای الکتروشیمیایی [۴]، سیستم‌های بیولوژیکی [۵]، فرآیند انتشار[1] در باتری‌ها [۶]، قطبش دی الکتریک[2]، امواج الکترومغناطیس و سیستم‌های ویسکوالاستیک [۷] نشان داده شده است که حسابان مرتبه کسری برتری محسوسی نسبت به حسابان مرتبه صحیح دارد. به علاوه در مهندسی کنترل نیز کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری در موارد متعددی عملکرد چشم‌گیرتری نسبت به کنترل‌کننده‌های مرتبه صحیح از خود نشان داده‌اند و به خوبی توانسته‌اند جایگاه ویژه‌ای به خود اختصاص دهند [۸]. اولین بار استالوپ[3] با مطرح کردن کنترل‌کننده مرتبه کسری مقاوم بنام CRONE[4]، مسیر تازه‌ای برای ورود محاسبات مرتبه کسری به کنترل فراهم کرد [۹]. پس از آن، مقاله و پژوهش‌های فراوانی به منظور کنترل سیستم‌های مرتبه کسری و یا معرفی کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری ارائه شدند. از جمله می‌توان به کنترل‌کننده‌های PID مرتبه کسری [۸, ۱۰]، کنترل‌کننده مدل مرجع مرتبه کسری [۱۱, ۱۲] و همزمان‌سازی سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری آشوب [۱۳-۱۶] اشاره نمود. همچنین به دلیل وجود تفاوت‌هایی در مفهوم انرژی در سیستم‌های مرتبه کسری و مرتبه صحیح، مفاهیم جدیدی از پایداری سیستم‌های مرتبه کسری و تئوری لیاپانوف مرتبه کسری معرفی و مورد توجه قرار گرفته است [۱۷-۲۰].

از طرف دیگر سیستم‌های فازی برای به خدمت گرفتن دانش فرد خبره بسیار مفید بوده و در دو دهه اخیر در زمینه کنترل بسیار مورد توجه واقع شده‌اند. اهمیت کنترل‌کننده‌های فازی در کنترل سیستم‌هایی با مدل ریاضی ضعیف و با عدم قطعیت است [۲۱, ۲۲]. همچنین به دلیل آنکه ثابت شده است که در صورت برآورده شدن شرایط لازم، سیستم‌های فازی تقریب‌گر جامع[5] هستند و توانایی تخمین هر تابع غیرخطی پیوسته با هر درجه دلخواهی را دارند، از آنها به عنوان روش کنترلی مستقل از مدل نیز یاد می‌شود. در ضمن منطق فازی به خوبی توانسته جای خود را در کنترل تطبیقی باز کرده و با داشتن ساختارهای مختلف، کنترل فازی تطبیقی عملکرد خوبی را از خود نشان دهد [۲۲-۲۵].

با توجه به جدید بودن بحث حسابان مرتبه کسری در سیستم‌های کنترلی، ترکیب کنترل‌کننده‌های فازی تطبیقی و سیستم‌های مرتبه کسری به نوعی زمینه تازه‌ای در مهندسی کنترل هوشمند به حساب آمده و تحقیق‌ها و مقاله‌های این شاخه قدمت چندانی ندارند. اولین مقاله کنترل‌کننده فازی تطبیقی مرتبه کسری توسط اوندر اف[6] در سال ۲۰۰۸ برای هدایت بازوی ربات با مدل دینامیکی صحیح ارائه شد [۲۶]. با توجه به آنکه این مقاله قبل از معرفی قضایای پایداری لیاپانوف مرتبه کسری به چاپ رسیده، از قضایای پایداری لیاپانوف مرتبه صحیح در بدست آوردن قانون تطبیق مرتبه کسری پارامترهای آزاد استفاده شده است. در ضمن این کنترل کننده بر روی یک سیستم مرتبه صحیح اعمال گردیده است. در [۲۷] کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم مرتبه کسری و مد لغزشی برای هم‌زمان‌سازی سیستم غیرخطی مرتبه کسری آشوب معرفی شده است. همچنین در [۲۸] نیز کنترل‌کننده فازی تطبیقی مرتبه کسری H^{∞} برای هم‌زمان‌سازی سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری و در [۲۹] کنترل‌کننده فازی تطبیقی و مد لغزشی را برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری تاخیردار به کار گرفته شده است. اما نقطه ضعف سه مرجع [۲۷] تا [۲۹] در عدم دقت کافی در محاسبات ریاضی مرتبه کسری است که سبب می‌شود نتایج بدست آمده چندان قابل استفاده نباشند [۳۰, ۳۱]. در [۳۲] کنترل‌کننده فازی تطبیقی ترکیبی برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری نامعین پیشنهاد شده است که علاوه بر استفاده نامناسب از روابط حسابان مرتبه کسری، به اشتباه از قضایای معتبر در حوزه سیستم‌های مرتبه صحیح در اثبات پایداری لیاپانوف مرتبه کسری نیز استفاده شده است. در ادامه، یولاه[7] و همکارانش کنترل‌کننده فازی تطبیقی مرتبه کسری با مد لغزشی برای کنترل سیستم دینامیکی مرتبه صحیح نامعین ارائه کرده‌اند [۳۳, ۳۴]. نکته مثبت این دو مرجع استفاده درست از روابط مرتبه کسری و بکار بردن به‌جای قضایای لیاپانوف مرتبه کسری در پایداری سیستم حلقه بسته است، ولی هر دو روش پیشنهادی بر روی سیستم‌های دینامیکی مرتبه صحیح قابل اعمال هستند. سپس، ختاب[8] و همکارانش در سه مقاله متوالی به استفاده از کنترل‌کننده فازی تطبیقی بر روی سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی نامعین پرداخته‌اند [۳۵-۳۷]. ولی باز هم به عنوان یک نقطه ضعف قابل توجه در

[1] Diffusion process
[2] Dielectric polarization
[3] Oustaloup
[4] Command Robuste d'Ordre Non Entier (in French)
[5] General approximator
[6] Onder Efe
[7] Ullah
[8] Khettab

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

هر سه مقاله، مشتق‌های متوالی مرتبه کسری بدون در نظر گرفتن شرط لازم استفاده شده‌اند [۳۰, ۳۱]. در نتیجه نمی‌توان به صحت اثبات پایداری مقاله‌های مذکور اطمینان کامل داشت و نتایج سؤال برانگیز خواهند بود. همچنین مراجع [۳۸-۴۱] که در سال ۲۰۱۶ و ۲۰۱۷ به چاپ رسیده‌اند، چند تحقیق در زمینه کاربرد کنترل‌کننده فازی تطبیقی در سیستم‌های مرتبه کسری بوده که در آنها هم‌زمان سازی سیستم‌های آشوب مرتبه کسری نامعین با کنترل‌کننده فازی انجام شده است. در این سری مقالات [۳۸-۴۱] تمام روابط حسابان مرتبه کسری و قضایای مربوطه به درستی و با دقت کافی به کار گرفته شده و نتایج بدست آمده کاملا منطقی و قابل استناد است. تنها عامل منفی یا محدود کننده که در آنها مشاهده می‌شود اختصاص یک سیگنال به هر متغیر حالت سیستم است. لذا به نوعی سیستم چند ورودی و تک خروجی درنظر گرفته می‌شود که این امر باعث بالا رفتن هزینه و افزایش تلاش سیگنال کنترلی خواهد شد. در [۴۲] کنترل‌کننده فازی تطبیقی مستقیم نوع دوی بازه‌ای و در [۴۳] کنترل‌کننده فازی تطبیقی با فرض وجود ضعف در دانش فرد خبره معرفی شده‌اند. هر دو مرجع [۴۲] و [۴۳] برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی نامعین پیشنهاد شده‌اند و در آنها از روابط حسابان مرتبه کسری در اثبات پایداری سیستم حلقه بسته استفاده شده است. اما به علت استفاده از کنترل‌کننده فازی تطبیقی مستقیم به ناچار مقدار مرتبه در مشتق کسری محدود شده و این دو روش قابل اعمال به هر سیستم با مرتبه مشتق کسری دلخواه در بازه ۰ تا ۱ نخواهند بود.

این توضیحات نشان می‌دهد که بیشتر پژوهش‌های انجام شده در زمینه کنترل فازی تطبیقی مرتبه کسری با یکی از معایب و یا محدودیت‌های همراه هستند.

۱- ایراد محاسباتی در حوزه حسابان مرتبه کسری و یا اعمال نابه‌جای قضایای مرتبه صحیح در حوزه مرتبه کسری.

۲- محدودیت صرفاً قابل استفاده بودن روش پیشنهادی بر روی سیستم‌های مرتبه صحیح.

۳- استفاده از چندین سیگنال کنترلی (به تعداد متغیرهای حالت سیستم) برای کنترل سیستم مرتبه کسری غیرخطی.

۴- محدود شدن مقدار مرتبه مشتق کسری سیستم.

با این مرور مختصر بر تحقیق‌های گذشته و با انگیزه طراحی یک روش کنترلی جهت برطرف کردن نقاط ضعف مراجع قبل در این مقاله به معرفی کنترل‌کننده فازی تطبیقی مرتبه کسری به همراه مدلغزشی برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی نامعین به همراه اغتشاش پرداخته می‌شود. مزیت روش پیشنهادی این مقاله استفاده از یک سیگنال کنترلی است که با طراحی مناسب کنترل‌کننده فازی تطبیقی غیرمستقیم می‌تواند سیستم مرتبه کسری غیرخطی نامعین را به خوبی کنترل نماید. علاوه بر نامعین بودن مدل سیستم مرتبه کسری، اغتشاش نیز می‌تواند در سیستم لحاظ گردد. برای مقاوم شدن روش کنترلی پیشنهادی، مد لغزشی مرتبه کسری نیز بکار گرفته شده است تا قید محدود ماندن مقدار مرتبه مشتق کسری (مورد ۴) را نیز برطرف نماید. سیستم فازی تاکاگی-سوگنو-کانگ[1] مرتبه اول برای کنترل‌کننده فازی تطبیقی انتخاب شده به‌طوری‌که پارامترهای بخش مقدم آن بدون تغییر مانده و پارامترهای بخش تالی با قانون تطبیق مرتبه کسری به روز رسانی می‌شوند. قانون تطبیق مرتبه کسری از قضایای پایداری لیاپانوف مرتبه کسری استخراج شده است. پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته اثبات شده و با شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی مرتبه کسری نامعین و مقایسه با روش‌های دیگر عملکرد قابل‌قبول روش پیشنهادی نشان داده می‌شود. به این ترتیب برای اولین بار در این حوزه تمام ایرادهای شمرده شده از مقاله‌های مشابه برطرف می‌گردد.

در ادامه نحوه چیدمان مطالب مقاله به این گونه است که در بخش ۲ تعاریف اولیه و کاربردی حسابان مرتبه کسری بیان شده و در بخش ۳ مدل فازی TSK به صورت خلاصه توصیف می‌شود. بخش ۴ به معرفی سیستم غیرخطی مرتبه کسری و روابط آن اختصاص دارد. در بخش ۵، طراحی روش کنترلی پیشنهادی بیان شده و در نهایت شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری به ترتیب در بخش‌های ۶ و ۷ ارائه شده‌اند.

۲- تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری

در این بخش به بیان مقدمات و تعاریف پایه حسابان مرتبه کسری مورد نیاز مقاله پرداخته می‌شود.

تعریف ۱: انتگرال مرتبه کسری ${}_{t_0}I_t^q$ با مرتبه $q\in\mathbb{R}^+$ از تابع $f(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$ {}_{t_0}I_t^q f(t)=\frac{\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{q-1}f(\tau)d\tau}{\Gamma(q)} \quad t>t_0 \qquad (۱)$$

که t_0 و $\Gamma(\cdot)$ به ترتیب زمان شروع و تابع گاما است.

تعریف ۲: مشتق مرتبه کسری کپوتو[2] از تابع $f(t)$ با مرتبه $q\in\mathbb{R}^+$ نسبت به زمان عبارت است از

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^q f(t)=\frac{\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{m-q-1}f^{(m)}(\tau)d\tau}{\Gamma(m-q)} \qquad (۲)$$

به‌طوری‌که $m-1<q\le m$ و $m\in\mathbb{N}$ است [۲].

رابطه بین انتگرال مرتبه کسری و مشتق مرتبه کسری کپوتو نیز برای $0<q<1$ به صورت زیر قابل بیان است [۲]. به‌طوری‌که در آن $f(t)$ پیوسته است.

$$ I^qD^qf=f(t)-f(0) \qquad (۳)$$

در ضمن مشتق کپوتو معکوس چپ از انتگرال کسری با مرتبه یکسان است [۴۴].

$$ D^q\left(I^qf(t)\right)=f(t) \qquad q\in\mathbb{R}^+-\mathbb{N} \qquad (۴)$$

قضیه ۱: سیستم خطی مرتبه کسری خودگردان $D^q\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ با شرایط اولیه $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x_0}$ را در نظر بگیرید. بطوریکه در آن $0<q<1$

[1] Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

[2] Caputo (C)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

، $x\in\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ فرض شده‌اند. این سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگربرای تمامی مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نامساوی $\left|\arg\left(eig\left(\mathbf{A}\right)\right)\right|>q\pi/2$ برقرار باشد. در اینجا $eig\left(\mathbf{A}\right)$ به مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ اشاره دارد [۲].

قضیه ۲- (پایداری یکنواخت و پایداری لیاپانوف) [۱۸] $x=0$ نقطه تعادل سیستم ناخودگردان ${}_0^C D_t^q x\left(t\right)=f\left(t,x\right)$ فرض شود. در صورتی که بتوان تابع لیاپانوف پیوسته $V\left(x\left(t\right),t\right)$ و تابع اسکالر $\gamma_1\left(\cdot\right)$ کلاس k یافت که به ازای $\forall x\left(t\right)\neq 0$

$$\gamma_1\left(\left\|x\right\|\right)\le V\left(t,x\left(t\right)\right) \qquad (۵)$$

و

$${}_{t_0}^C D_t^p V\left(t,x\left(t\right)\right)\le 0 \qquad p\in\left(0,1\right] \qquad (۶)$$

برقرار باشند، آنگاه مبدا سیستم مرتبه کسری پایدار لیاپانوف[1] است. اما اگر علاوه بر رابطه (۵) تابع اسکالر $\gamma_2\left(\cdot\right)$ کلاس k دیگری وجود داشته باشد که

$${}_0^C D_t^p V\left(t,x\left(t\right)\right)\le -\gamma_2\left(\left\|x\right\|\right),\quad p\in\left(0,1\right) \qquad (۷)$$

آنگاه نقطه تعادل پایدار یکنواخت لیاپانوف[2] است.

قضیه ۳- اگر $\mathbf{x}\left(t\right)\in\mathbb{R}^n$ یک تابعی برداری مشتق‌پذیر باشد آنگاه به ازای $q\in\left(0,1\right]$ و $t\ge t_0$ می‌توان نشان داد که رابطه زیر برقرار است [۱۸].

$$\frac{1}{2}D^q\left(\mathbf{x}^T\left(t\right)\mathbf{P}\mathbf{x}\left(t\right)\right)\le\mathbf{x}^T\left(t\right)\mathbf{P}D^q\mathbf{x}\left(t\right) \qquad (۸)$$

که در آن $\mathbf{P}$ ماتریس مثبت معین است.

قضیه ٤- (لم باربالات مرتبه کسری) [٤٥] فرض شود که $V\left(t\right)$ یک تابع پیوسته یکنواخت و محدود با مشتق اول پیوسته باشد به‌طوری‌که $\lim_{t\to\infty} I^q V\left(t\right)\to L$ (L یک ثابت محدود است) برقرار باشد. در این صورت اگر $V\left(t\right)$ یک تابع مثبت فرض شود، آنگاه $V\left(t\right)$ با گذشت زمان به صفر میل خواهد کرد.

در ادامه به منظور سادگی نماد $I^q f\left(t\right)$ به جای انتگرال مرتبه کسری ${}_0 I_t^q f\left(t\right)$ و نماد $D^q f\left(t\right)$ یا $f^{(q)}\left(t\right)$ به جای مشتق مرتبه کسری کپوتوی ${}_0^C D_t^q\ f\left(t\right)$ استفاده می‌شود. در ضمن تحلیل عددی معادله دیفرانسیل مرتبه کسری به سادگی حل عددی حالت مرتبه صحیح نبوده و روش‌های متفاوتی برای آن معرفی شده است. در این پژوهش از الگوریتمی که در مرجع [۴۲] ارائه شده است، استفاده می‌شود.

۳- توصیف سیستم فازی TSK

روش استنتاج فازی TSK برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ معرفی شد. این روش در بخش‌های فازی‌سازی و عملگرهای فازی، مشابه با روش ممدانی بوده و اختلاف مهم این دو نوع سیستم فازی در بخش محاسبه خروجی سیستم فازی است. خروجی یک سیستم فازی TSK به تابعی از ورودی‌های سیستم فازی وابسته است. در بیشتر مقالات از تابع خطی نسبت به ورودی‌ها استفاده می‌شود که به آن سیستم فازی سوگنوی مرتبه یک گفته می‌شود. رابطه (۹) نحوه محاسبه خروجی در این نوع سیستم را با فازی ساز منفرد و موتور استنتاج ضرب نشان می‌دهد. که در آن y^ℓ تابع خطی بخش تالی سیستم فازی (در قانون ℓ -ام) با رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$Y_{TSK}\left(\mathbf{x}\right)=\frac{\sum_{\ell=1}^{M} y^\ell\left(\mathbf{x}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^\ell}\left(x_i\right)\right)}{\sum_{\ell=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^\ell}\left(x_i\right)\right)} \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned} y^\ell\left(\mathbf{x}\right)&=\alpha_0^\ell+\alpha_1^\ell x_1+\cdots+\alpha_n^\ell x_n\\ &=\left(\boldsymbol{\alpha}^\ell\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_b\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

ضریب α_i^ℓ، پارامتر قابل تنظیم بخش تالی است که در ورودی i -ام و برای قانون ℓ -ام اعمال می‌شود. α_0^ℓ بایاس تابع، $\mathbf{x}_b=\left[1,x_1,\cdots,x_n\right]^{\mathrm{T}}$ و $\boldsymbol{\alpha}^\ell=\left[\alpha_0^\ell,\alpha_1^\ell,\cdots,\alpha_n^\ell\right]^{\mathrm{T}}$ است [۴۲]. اگر پارامترهای α_i^ℓ به عنوان پارامترهای قابل تنظیم و توابع تعلق ورودی ثابت (ثابت به معنی بدون اعمال الگوریتم آموزشی است) فرض شوند، آنگاه می‌توان خروجی سیستم فازی تاکاگی-سوگنو را به فرم رابطه (۱۱) در نظر گرفت.

$$Y_{\mathrm{TSK}}\left(\mathbf{x}\right)=\Theta^{\mathrm{T}}\zeta\left(\mathbf{x}\right) \qquad (۱۱)$$

$$\Theta=\left[a_0^1\ a_1^1\ \ldots\ a_n^1\cdots a_0^M\ a_1^M\ \ldots\ a_n^M\right]^{\mathrm{T}} \qquad (۱۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\zeta}\left(\mathbf{x}\right)$ بردار رگرسور نام دارد. به‌طوری‌که

$$\boldsymbol{\zeta}\left(\mathbf{x}\right)=\left[\xi^1\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}_b^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \xi^M\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{x}_b^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, \qquad (۱۳)$$

$$\xi^\ell\left(\mathbf{x}\right)=y^\ell\left(\mathbf{x}\right)\Big/\sum_{\ell=1}^{M} y^\ell\left(\mathbf{x}\right)\quad \ell=1,2,\cdots,M. \qquad (۱۴)$$

در حالت کلی پارامترهای بخش مقدم و تالی سیستم فازی باید توسط فرد خبره و آگاه به ویژگی‌های سیستم تنظیم شوند. فرد خبره با توجه به تجربه و داده‌های سیستم مقادیر مناسب را برای متغیرها انتخاب می‌نماید. اگر فرد خبره در دسترس نبود و یا آگاهی فرد خبره کامل نبود، قسمتی از پارامترها و و یا تمام پارامترهای سیستم فازی با روش‌های مختلف آموزشی تنظیم می‌شوند. در این صورت سیستم فازی به سیستم فازی با پارامترهای قابل آموزش تبدیل شده که در ابتدا تمام و یا بخشی از پارامترها تصادفی انتخاب می‌شوند و سپس برای رسیدن به مقدار مطلوب آموزش می‌بینند. به علت شباهت زیاد این‌گونه سیستم‌ها با شبکه‌های عصبی، به این نوع سیستم‌های، سیستم‌های فازی-عصبی[3] گفته می‌شود [۲۶, ۴۶, ۴۷].

٤- تعریف مسئله و بیان ویژگی‌های سیستم

مدل کلی سیستم مرتبه کسری غیرخطی همسان و ناخودگردان[4] از مرتبه n را مطابق با رابطه زیر در نظر بگیرید.

[1] Lyapunov Stable
[2] Lyapunov Uniformly Stable
[3] Neuro-fuzzy systems
[4] Non autonomous

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

$$\begin{cases} x_i^{(q)}(t) = x_{i+1}(t) \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \\ x_n^{(q)}(t) = f(\mathbf{x},t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

$q \in (0,1)$ مرتبه مشتق کسری کپوتو است. $u \in \mathbb{R}$ سیگنال کنترلی ورودی، $y \in \mathbb{R}$ خروجی و $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری سیستم خواهند بود. تابع غیرخطی و نامعلوم $f(\mathbf{x},t)$ علاوه بر معادلات درونی سیستم، شامل نامعینی‌ها و اغتشاش نیز بوده و فرض می‌شود که پیوسته و کران‌دار است. هدف کنترل رساندن متغیرهای حالت به سیگنال کنترلی مطلوب $\mathbf{x}_d(t) = [x_{d1}(t), \cdots, x_{dn}(t)]^{\mathrm{T}}$ در حضور نامعینی و اغتشاش است. بر این اساس بردار خطای ردیابی طبق رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x_d}(t) - \mathbf{x}(t) = [e_1(t), \cdots, e_n(t)]^{\mathrm{T}} \qquad (۱۶)$$

که در آن $e_i(t) = x_{di}(t) - x_i(t)$ برای $i = 1, \cdots, n$ است. همچنین برای استفاده از روش کنترلی مد لغزشی، سطح لغزش مانند رابطه (۱۷) در نظر گرفته می‌شود.

$$s(t) = e_n(t) + I^q \sum_{i=1}^{n} k_i e_i(t) \qquad (۱۷)$$

که در آن $\mathbf{k} = [k_1, \cdots, k_n]^{\mathrm{T}}$ بردار پارامترهای سطح کلیدزنی[1] است. هنگامی که سیستم در سطح لغزش قرار بگیرد، $s(t) = 0$ شده و $e_n^{(q)}(t)$ عبارت است از

$$e_n^{(q)}(t) = -\sum_{i=1}^{n} k_i e_i(t). \qquad (۱۸)$$

بنابراین در سطح لغزش $s(t) = 0$ با توجه به معادلات دینامیکی سیستم، دینامیک‌های مد لغزشی عبارت‌اند از

$$\begin{cases} e_i^{(q)}(t) = e_{i+1}(t), & 1 \le i \le n-1 \\ e_n^{(q)}(t) = -\sum_{i=1}^{n} k_i e_i(t). \end{cases} \qquad (۱۹)$$

توصیف ماتریسی رابطه (۱۹) مطابق با رابطه قابل بیان است.

$$\mathbf{e}^{(q)}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}(t) \qquad (۲۰)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

k_i با $i = 1, \cdots, n$ باید به گونه‌ای در نظر گرفته شود که تمام مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{\Lambda}$ (λ_i ها) نامساوی $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$ را ارضا نمایند. در نتیجه تمام ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۲۲)، طبق قضیه ۱ در ناحیه پایدار صفحه مختلط قرار خواهند گرفت.

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + k_n \lambda^{n-1} + \cdots + k_2 \lambda + k_1 \qquad (۲۲)$$

به این ترتیب دینامیک‌های مد لغزشی رابطه (۲۰) روی سطح لغزش تعریف شده $s(t) = 0$ ، پایدار مجانبی بوده و در صورتی که خطای سیستم حلقه بسته به این سطح دست یابد، به مبدا همگرا می‌شود.

برای دست‌یابی به سطح لغزش، می‌توان تابع لیاپانوفی برابر با $V_s(t) = \frac{1}{2} s(t)^2$ تعریف کرد. درصورتی‌که سیگنال کنترلی به خوبی طراحی شود که مشتق مرتبه کسری از مرتبه q -ام $V_s(t)$ در نامساوی (۲۳) صدق کند، در نتیجه طبق قضیه ۲ سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی خواهد ماند.

$$D^{(q)} V_s(t) \le s(t) s^{(q)}(t) \le -\tau s^2(t), \quad \tau \ge 0 \qquad (۲۳)$$

به این ترتیب باید سیگنال کنترلی را به گونه‌ای انتخاب کرد که رسیدن به سطح لغزش و باقی ماندن روی آن را تضمین نماید. اگر فرض شود که تابع غیرخطی $f(\mathbf{x},t)$ کاملا معلوم باشد، سیگنال کنترلی ایده‌آل $u^*(t)$ را می‌توان برای رسیدن به هدف کنترلی طبق رابطه زیر تعریف کرد.

$$u^*(t) = -f(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{n} k_i e_i(t) + x_{dn}^{(q)}(t) + \tau_1 s(t) + \tau_2 \operatorname{sgn}(s(t)) \qquad (۲۴)$$

در نتیجه با قرار دادن سیگنال کنترلی ایده‌آل در مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف $V_s(t)$، نامساوی (۲۵) حاصل می‌شود.

$$V_s^{(q)}(t) \le -\tau_1 s^2(t) - \tau_2 |s(t)| \le \tau_1 s^2(t) \qquad (۲۵)$$

پس پایداری سیستم حلقه بسته تضمین شده و خطا به صفر همگرایی مجانبی دارد. اما در واقعیت به علت معلوم نبودن مقدار تابع غیرخطی سیستم ($f(\mathbf{x},t)$)، سیگنال کنترلی ایده‌آل مشخص نمی‌باشد. به منظور حل این مشکل در این مقاله از یک سیستم فازی تطبیقی برای تخمین تابع غیرخطی سیستم استفاده می‌شود.

۵- طراحی کنترل‌کننده فازی TSK تطبیقی غیرمستقیم با مد لغزشی مرتبه کسری

در این وضعیت تابع غیرخطی سیستم ($f(\mathbf{x},t)$) نامعلوم فرض شده و با استفاده از یک سیستم فازی تطبیقی ($\hat{f}(\mathbf{x} \mid \Theta_f)$) تقریب زده می‌شود. به دلیل آنکه وظیفه سیستم فازی تقریب تابع غیرخطی سیستم است، کنترل‌کننده فازی به صورت تطبیقی غیرمستقیم عمل خواهد کرد. روش کنترل‌کننده فازی TSK تطبیقی غیرمستقیم به همراه مد لغزشی را می‌توان با قضیه زیر مطرح نمود.

قضیه ۵ – سطح لغزش رابطه (۱۸) را در نظر بگیرید. در این صورت اگر سیستم رابطه (۱۵) با ورودی سیگنال کنترلی (۲۶) کنترل شود، خطای ردیابی خروجی به صفر همگرای مجانبی خواهد بود.

$$u(t) = -\hat{f}(\mathbf{x} \mid \Theta_f) + \rho(t) \operatorname{sgn}(s(t)) + x_{dn}^{(q)}(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i e_i(t) + \tau_1 s(t) + \tau_2 \operatorname{sgn}(s(t)) \qquad (۲۶)$$

[1] Switching surface parameters

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

τ_1 ، τ_2 ، γ_1 و γ_2 ثابت‌های مثبت در نظر گرفته می‌شوند. بطوری‌که $\hat{f}\left(\mathbf{x}\,|\,\Theta_f\right)$ تخمینی از تابع غیرخطی نامعلوم سیستم ($f\left(\mathbf{x},t\right)$) است که با سیستم فازی TSK تطبیقی با رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود. Θ_f بردار پارامتر آزاد بخش تالی سیستم فازی تطبیقی و ρ پارامتر تطبیقی جهت جبران خطای تقریب سیستم فازی است. Θ_f و ρ به ترتیب با قوانین تطبیق مرتبه کسری (۲۷) و (۲۸) تنظیم می‌شوند.

$$\Theta_f^{(q)}\left(t\right)=-\gamma_1\xi\left(\mathbf{x}\right)s\left(t\right) \qquad (۲۷)$$

$$\rho^{(q)}\left(t\right)=\gamma_2\left|s\left(t\right)\right| \qquad (۲۸)$$

اثبات– برای اثبات قضیه فوق ابتدا بردار پارامترهای مطلوب (Θ_f^*) و کمترین مقدار خطای تقریب (ω_f) طبق قضیه تقریبگر جامع بودن سیستم فازی TSK ([۴۸, ۴۹]) روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\Theta_f^*\triangleq\arg\min_{\Theta_f\in S_\Theta}\left[\sup_{\mathbf{x}\in S_x}\left|\,f\left(\mathbf{x},t\right)-\hat{f}\left(\mathbf{x}\,|\,\Theta_f\right)\right|\right] \qquad (۲۹)$$

$$\omega_f\left(t\right)\triangleq\,f\left(\mathbf{x},t\right)-\hat{f}\left(\mathbf{x}\,|\,\Theta_f^*\right) \qquad (۳۰)$$

که در آن S_x و S_Θ مجموعه بسته‌ای برای $\mathbf{x}$ و Θ_f درنظر گرفته شده‌اند. تابع لیاپانوفی مانند رابطه زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$V\left(t\right)=\frac{1}{2}s\left(t\right)^2+\frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\Theta}_f\left(t\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_f\left(t\right)+\frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\rho}^2\left(t\right) \qquad (۳۱)$$

بطوری‌که $\tilde{\Theta}_f\left(t\right)=\Theta_f^*-\Theta_f\left(t\right)$ خطای پارامتر آزاد بخش تالی سیستم فازی تطبیقی و $\tilde{\rho}\left(t\right)=\rho^*-\rho\left(t\right)$ خطای پارامتر تطبیقی است. $\rho^*=\left|\omega_f\left(t\right)\right|_{\max}$ حداکثر مقدار کمترین خطای تقریب سیستم فازی است که نامعلوم بوده و توسط پارامتر تطبیقی تقریب زده می‌شود. به منظور سادگی در محاسبات هر دو پارامتر $\rho^*=\left|\omega_f\right|_{\max}$ و Θ_f^* ثابت در نظر گرفته شده و در نتیجه مشتق مرتبه کسری کپوتوی آن‌ها صفر می‌باشد. به این ترتیب با در نظر گرفتن قضیه ۳ مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف $V\left(t\right)$ عبارت است از

$$V^{(q)}\left(t\right)\le s\left(t\right)s^{(q)}\left(t\right)+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\Theta}_f^{\mathrm{T}}\left(t\right)\tilde{\Theta}_f^{(q)}\left(t\right)+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\rho}\left(t\right)\tilde{\rho}^{(q)}\left(t\right). \qquad (۳۲)$$

با محاسبه مشتق مرتبه کسری از رابطه (۲۱) خواهیم داشت

$$V^{(q)}\left(t\right)\le s\left(t\right)\left(x_{dn}^{(q)}\left(t\right)-x_n^{(q)}\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}k_ie_i\left(t\right)\right)+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\Theta}_f^{\mathrm{T}}\left(t\right)\tilde{\Theta}_f^{(q)}\left(t\right)+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\rho}\left(t\right)\tilde{\rho}^{(q)}\left(t\right). \qquad (۳۳)$$

اگر سیگنال کنترلی طبق رابطه (۲۶) انتخاب شود و با توجه به معادلات سیستم در رابطه (۱۹)، می‌توان نامساوی مشتق مرتبه کسری لیاپانوف را به صورت زیر نوشت.

$$V^{(q)}\left(t\right)\le\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\Theta}_f^{\mathrm{T}}\left(t\right)\tilde{\Theta}_f^{(q)}\left(t\right)+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\rho}\left(t\right)\tilde{\rho}^{(q)}\left(t\right)+s\left(t\right)\left(x_{dn}^{(q)}\left(t\right)-f\left(\mathbf{x},t\right)+\hat{f}\left(\mathbf{x}\,|\,\Theta_f\right)-x_{dn}^{(q)}\left(t\right)-\rho\left(t\right)\mathrm{sgn}\left(s\left(t\right)\right)-\tau_1s\left(t\right)-\tau_2\,\mathrm{sgn}\left(s\left(t\right)\right)\right) \qquad (۳۴)$$

با اضافه و کم کردن $s\left(t\right)\hat{f}\left(\mathbf{x}\,|\,\Theta_f^*\right)$ و پس از کمی ساده‌سازی و در نظر گرفتن روابط (۱۱) و (۳۰) داریم

$$V^{(q)}\left(t\right)\le\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\Theta}_f^{\mathrm{T}}\left(t\right)\tilde{\Theta}_f^{(q)}\left(t\right)+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\rho}\left(t\right)\tilde{\rho}^{(q)}\left(t\right)-s\left(t\right)\omega_f\left(t\right)-s\left(t\right)\left(\Theta_f^{*\,\mathrm{T}}\zeta\left(\mathbf{x}\right)-\Theta_f^{\mathrm{T}}\zeta\left(\mathbf{x}\right)\right)-\rho\left(t\right)\left|s\left(t\right)\right|-\tau_1s^2\left(t\right)-\tau_2\left|s\left(t\right)\right|. \qquad (۳۵)$$

بر اساس تعریف خطای پارامتر تطبیقی ($\tilde{\rho}$) و خطای پارامتر آزاد سیستم فازی ($\tilde{\theta}$)، $V^{(q)}\left(t\right)$ طبق رابطه (۳۶) ساده می‌شود.

$$V^{(q)}\left(t\right)\le-s\left(t\right)\omega_f\left(t\right)-\rho^*\left|s\left(t\right)\right|-\tau_1s^2\left(t\right)-\tau_2\left|s\left(t\right)\right|+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\rho}\left(t\right)\left(\gamma_2\left|s\left(t\right)\right|+\tilde{\rho}^{(q)}\left(t\right)\right)+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\Theta}_f^{\mathrm{T}}\left(t\right)\left(-\gamma_1\zeta\left(\mathbf{x}\right)s\left(t\right)+\tilde{\Theta}_f^{(q)}\left(t\right)\right) \qquad (۳۶)$$

با در نظر گرفتن $\rho^*=\left|\omega_f\right|_{\max}$ ، منفی بودن عبارت $-s\left(t\right)\omega_f\left(t\right)-\rho^*\left|s\left(t\right)\right|$ بدیهی بوده و از طرف دیگر با در نظر گرفتن $\Theta_f^{(q)}\left(t\right)=-\gamma_1\zeta\left(\mathbf{x}\right)s\left(t\right)$ و $\rho^{(q)}\left(t\right)=\gamma_2\left|s\left(t\right)\right|$ به عنوان قانون تطبیق (طبق روابط (۲۷) و (۲۸) در قضیه ۵) نامساوی مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف برابر است با

$$V^{(q)}\left(t\right)\le-\tau_1s^2\left(t\right)-\tau_2\left|s\left(t\right)\right|\le-\tau_1s^2\left(t\right). \qquad (۳۷)$$

در نتیجه با استناد به قضیه ۲ سیستم حلقه بسته پایدار لیاپانوف است. پارامتر τ_1 زمان رسیدن به سطح لغزش و میزان انرژی کنترلی را تنظیم می‌کند. اگر τ_1 بزرگ انتخاب شود، زمان دست‌یابی به سطح لغزش کوتاه ولی در عوض تلاش کنترلی افزایش می‌یابد. از طرف دیگر اگر τ_1 کوچک انتخاب شود، انرژی کنترلی کاهش یافته و سیستم دیرتر به سطح لغزش خواهد رسید. τ_2 ، بهره کلیدزنی، میزان نوسانات و ناپیوستگی سیگنال کنترلی را تنظیم می‌نماید. مقدار کم τ_2 برای تلاش کنترلی کمتر با نوسانات پایین‌تر توصیه می‌شود.

پایدار بودن تابع لیاپانوف محدود بودن تابع لیاپانوف $V\left(t\right)$ را درپی خواهد داشت. یعنی همواره می‌توان M_V -ی (کران بالای تابع لیاپانوف) یافت که $V\left(t\right)\le M_V$ برقرار باشد. پس با توجه به رابطه (۳۱)، از محدود بودن $V\left(t\right)$ محدود بودن $s\left(t\right)$ نیز قابل نتیجه‌گیری است. اگر از رابطه (۳۷)، انتگرال مرتبه کسری گرفته شود، طبق رابطه (۳) و $0<q\le1$ داریم

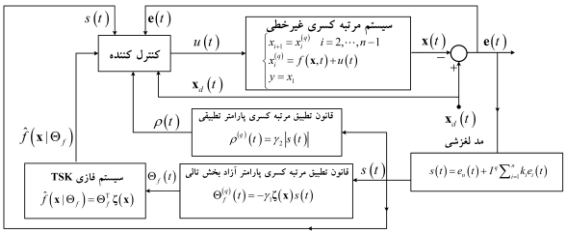
[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

$$V(t)-V(0)\le -\tau_1 I^{(q)}s^2(t). \qquad (۳۸)$$

$\sup(V(t))$ (کران بالای تابع لیاپانوف) محدود بوده در نتیجه طبق رابطه (۳۹)، $I^{(q)}s^2(t)$ نیز محدود خواهد بود.

$$I^{(q)}s^2(t)\le \frac{1}{\tau_1}\left(V(0)-\sup(V(t))\right)= \frac{1}{\tau_1}\left(V(0)-M_V\right)\triangleq M_s \qquad (۳۹)$$

که در آن M_s کران بالای $I^{(q)}s^2(t)$ است. حال با توجه به تابع لیاپانوف $V_s(t)=s^2(t)$، اگر $s(t)$ و $\dot{s}(t)$ پیوسته فرض شوند، آنگاه با توجه به محدود بودن $s(t)$، محدود بودن $I^{(q)}s^2(t)$ و طبق لم باربالات مرتبه کسری در قضیه ۴ تابع لیاپانوف $V_s(t)$ با گذشت زمان به صفر میل خواهد کرده یعنی $s(t)$ صفر شده و سیستم به سطح لغزش میل می‌کند. با توجه به انتخاب مناسب ضرایب $\mathbf{k}$، سیستم حلقه بسته بر روی سطح لغزش نیز پایدار مجانبی خواهد بود. به این ترتیب در کل خطای خروجی سیستم حلقه بسته به طور مجانبی به صفر همگرا خواهد شد. شکل ۱ برای نمایش این روش پیشنهادی رسم شده است. ■



شکل ۱- ساختار کلی کنترل‌کننده فازی TSK تطبیقی غیرمستقیم مرتبه کسری به همراه مد لغزشی

٦- شبیه‌سازی

در شبیه‌سازی روش پیشنهادی پایدارسازی یک سیستم غیرخطی مرتبه کسری آشوبناک با کمک روش پیشنهادی و دو روش کنترلی مرتبه کسری غیرهوشمند انجام شده تا عملکرد روش کنترل‌کننده فازی TSK تطبیقی غیرمستقیم به همراه مد لغزشی مرتبه کسری به خوبی سنجیده شود.

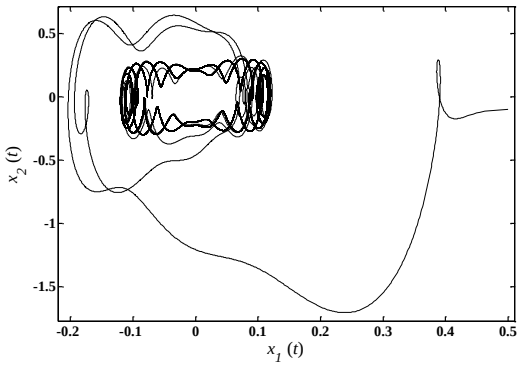
در تمام مراحل این شبیه‌سازی عددی، گام نمونه‌برداری برابر با 10^{-3} ثانیه انتخاب می‌شود. توابع تعلق بخش مقدم به شکل گوسی با انحراف معیار $\sigma=\frac{0.45Len(\mathrm{St})}{n_{mf}}$ و پارامترهای آزاد بخش تالی کنترل‌کننده فازی TSK در ابتدا ($\Theta_f(0)$) به صورت تصادفی در بازه $[-1,1]$ انتخاب می‌شوند. $Len(\mathrm{St})$ طول مجموعه تکیه‌گاه توابع تعلق فازی و $n_{mf}=3$ تعداد توابع تعلق بخش مقدم را نشان می‌دهند. پارامترهای کنترلی دیگری که درنظر گرفته شده‌اند عبارت‌اند $q=0.95$، $\gamma_1=10$، $\gamma_2=10$، $\tau_1=1$، $\tau_2=0.05$ و $\rho(0)=5$ و $Len(\mathrm{St})=6$ در بازه $[-3,3]$ برای هر متغیر حالت انتخاب شده‌اند.

۶-۱- پایدارسازی سیستم ژیرسکوپ مرتبه کسری

از آنجایی‌که ژیروسکوپ به‌صورت بسیار گسترده در مهندسی هوا و فضا، ناوبری و هواپیمایی کاربرد دارد، هم‌زمان‌سازی و پایدارسازی آن می‌تواند بااهمیت باشد. معادلات ریاضی ژیروسکوپ مرتبه کسری با ورودی کنترلی در رابطه زیر بیان شده است [۵۰, ۵۱].

$$\begin{cases} x_1^{(q)}(t)=x_2(t) \\ x_2^{(q)}(t)=-100\dfrac{\left(1-\cos(x_1(t))\right)^2}{\sin^3(x_1(t))}-0.5x_2(t) \\ \quad -0.05x_2^3(t)+35.5\sin(25t)\sin(x_1(t)) \\ \quad +\sin(x_1(t))+\Delta f(\mathbf{x},t)+d(t)+u(t) \end{cases} \qquad (۴۰)$$

به‌طوری‌که $q=0.95$ مرتبه مشتق کسری کپوتو، x_1 زاویه چرخش، x_2 سرعت زاویه‌ای چرخش، $\Delta f(\mathbf{x},t)=4\sin(x_1(t))\cos(x_2(t))$ نامعینی مدل و $d(t)=2\cos(2t)$ اغتشاش درونی را نشان می‌دهند. شرایط اولیه $\mathbf{x}(0)=[0.5,-0.1]^{\mathrm{T}}$ در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل ۲ بدون اعمال کنترل‌کننده، ژیروسکوپ دارای رفتار آشوب‌گونه با بزرگ‌ترین نمایه لیاپانوف $\lambda_{\max}=0.2409$ است.



شکل ۲- رفتار سیستم غیرخطی مرتبه کسری ژیروسکوپ

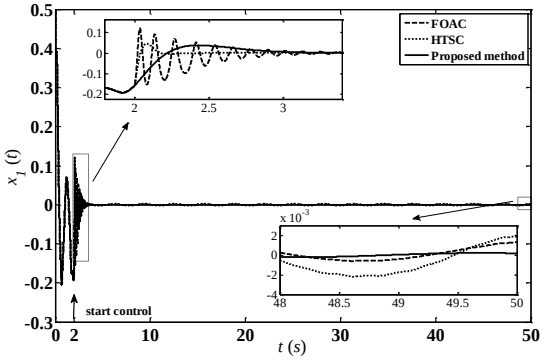
در اینجا به منظور انجام یک مقایسه قابل قبول بین روش پیشنهادی و روش‌های کنترلی غیرهوشمند مرتبه کسری، از دو روش کنترل مرتبه کسری استفاده شده است. روش اول که در مرجع [۵۲] ارائه شده، یک کنترل‌کننده تطبیقی مرتبه کسری[1] را معرفی می‌نماید که PID مرتبه کسری تطبیقی را برای کنترل سیستم غیرخطی مرتبه کسری به‌کار برده است. روش دوم نیز کنترل مد لغزشی ترمینالی سلسله مراتبی مرتبه کسری[2] در نظر گرفته شده که در [۵۰] پیشنهاد شده است. برای نمایش بهتر لحظه اعمال سیگنال کنترلی زمان شروع برابر با ۲ ثانیه در نظر گرفته شده و کل زمان شبیه‌سازی ۵۰ ثانیه فرض می‌شود. شکل ۳ و شکل ۴ نمودار رفتار متغیرهای حالت ژیروسکوپ برای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و شکل ۵ سیگنال

[1] Fractional Order Adaptive Controller (FOAC)

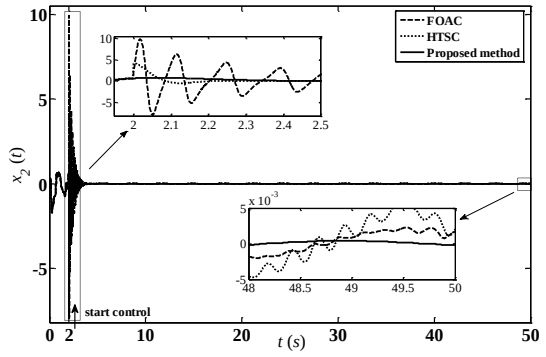
[2] Fractional order Hierarchical Terminal Sliding mode Control (HTSC)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

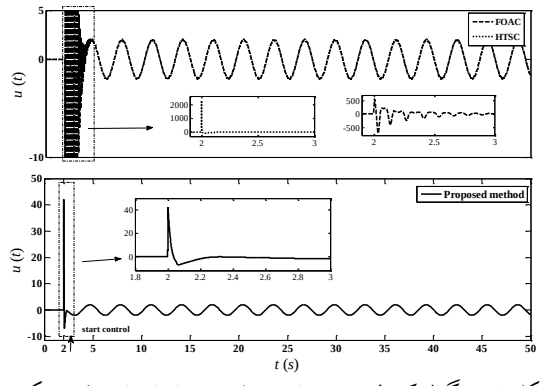
کنترلی مرتبط را به تصویر می‌کشد. در مرجع [۵۱] که سیستم مرتبه کسری غیرخطی ژیروسکوپ را معرفی نموده و دینامیک‌ها و رفتار آشوبی آن را مورد بررسی قرار داده است، حداکثر دامنه ۵۰ برای سیگنال کنترلی ($|u(t)| \le 50$) را مجاز و قابل قبول درنظر گرفته است. همانطور که شکل ۵ نیز نشان می‌دهد محدوده تغییرات سیگنال کنترلی بدست آمده از روش پیشنهادی در حدود مجاز تعیین شده در مرجع [۵۱] و حتی کمتر از آن قرار گرفته است. در ضمن نتایج عددی این مرحله نیز در جدول۱ قابل مشاهده است.



شکل ۳- نمودار متغیر حالت x_1 در پایدارسازی سیستم غیرخطی مرتبه کسری ژیروسکوپ



شکل ۴- نمودار متغیر حالت x_2 در پایدارسازی سیستم غیرخطی مرتبه کسری ژیروسکوپ



شکل ۵- سیگنال کنترلی روش‌های مختلف در پایدارسازی ژیروسکوپ

جدول۱- مقایسه عددی بین روش‌های کنترلی مختلف

معیار عددی	FOAC [۵۲]	HTSC [۵۰]	روش پیشنهادی
SIAE	۱٫۹۹	۰٫۴۳	۰٫۱۸
IACS	۱۴۷٫۵۳	۶۶٫۲۷	۶۱٫۹۴

این نتایج نشان می‌دهند که روش کنترل‌کننده فازی TSK تطبیقی مدلغزشی مرتبه کسری عملکرد قابل قبول‌تری از نظر خطای خروجی داشته و توانسته پایدارسازی بهتری نسبت به دو روش غیرهوشمند مرتبه کسری دیگر انجام دهد. در ضمن انرژی کنترلی روش پیشنهادی به مراتب دارای فراجهش کمتری بوده و به همین دلیل اعمال آن در سیستم‌های عملی امکان‌پذیر خواهد بود. ▲

۸- نتیجه گیری

به دلیل توسعه روزافزون حسابان مرتبه کسری در علوم مهندسی، سیستم‌های متنوعی با معادلات مرتبه کسری غیرخطی معرفی شده‌اند. با توجه به وجود نامعینی و اغتشاش در معادلات دینامیکی این‌گونه سیستم‌های غیرخطی، طراحی یک روش کنترلی می‌تواند به عنوان مسئله چالش برانگیز برای مهندسین کنترل به حساب آید. همچنین ثابت شده است که کنترل‌کننده‌های فازی تطبیقی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی نامعین بسیار مناسب و کارآمد هستند.

به این ترتیب در این مقاله روش نوینی برای کنترل سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی با کنترل‌کننده فازی TSKتطبیقی غیر مستقیم مرتبه کسری با مد لغزشی ارائه شده است. قانون تطبیق مرتبه کسری برای به‌روزرسانی پارامترهای آزاد بخش تالی کنترل‌کننده فازی TSK از قوانین پایداری مخصوص سیستم‌های مرتبه کسری استخراج شده است.نکته قابل توجه در روش کنترلی پیشنهادی استفاده از تنها یک سیگنال کنترلی به جای چندین سیگنال کنترلی (برخلاف مقالات به چاپ رسیده) است که این امر سبب کاهش انرژی مورد نیاز درسیگنال کنترلی خواهد شد. در کنار کنترل‌کننده فازی تطبیقی از مد لغزشی مرتبه کسری نیز استفاده شده است تا مقاومت سیستم حلقه بسته نسبت به اغتشاش و نامعینی افزایش یافته و در ضمن مقدار مشتق مرتبه کسری هیچ محدودیتی نداشته باشد و بتواند در بازه ۰ تا ۱ هر مقدار دلخواهی را به خود اختصاص دهد.با کمک الگوریتم کنترلی، سیستم حلقه بسته پایدار میتگ-لفلر بوده و خطای خروجی به صفر میل خواهد کرد.البته در روش ارائه شده مقدار بهره کنترلی معلوم فرض شده است که این فرض می‌تواند محدود کننده به حساب آید. به عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آینده می‌توان الگوریتم کنترلی را برای سیستم‌های با بهره کنترلی نامعلوم بسط داد تا سیستم‌های مرتبه‌کسری غیرخطی بیشتری را تحت پوشش خود قرار دهد.

در انتها روش ارائه شده به همراه دو روش کنترلی مرتبه کسری غیرهوشمند برای پایدارسازی سیستم مرتبه کسری غیرخطی ژیروسکوپ اعمال شده ونتایج بدست آمده مبین عملکرد بهتر روش پیشنهادی نسبت به دو روش دیگر چه از نظر پاسخ خروجی سیستم حلقه بسته و چه از نظر سیگنال کنترلی است.

مراجع

[1] R. Caponetto, *Fractional order systems: modeling and control applications* vol. 72: World Scientific, 2010.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

[2] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* vol. 198: Academic press, 1998.

[3] J.-D. Gabano and T. Poinot, "Fractional modelling and identification of thermal systems," *Signal Processing,* vol. 91, pp. 531-541, 2011.

[4] B. Vinagre and V. Feliu, "Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures," in *Proc. 41st IEEE Conf. Decision and Control*, pp. 214-239, 2002.

[5] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*: Begell House Redding, 2006.

[6] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragot, and P. Roy, "Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation," *Signal processing*, vol. 86, pp. 2645-2657, 2006.

[7] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*: World Scientific, 2000.

[8] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu-Batlle, *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*: Springer Science & Business Media, 2010.

[9] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant, "The CRONE suspension," *Control Engineering Practice,* vol. 4, pp. 1101-1108, 1996.

[10] M. Zamani, M. Karimi-Ghartemani, N. Sadati, and M. Parniani, "Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization," *Control Engineering Practice,* vol. 17, pp. 1380-1387, 2009.

[11] N. Aguila-Camacho and M. A. Duarte-Mermoud, "Fractional adaptive control for an automatic voltage regulator," *ISA transactions,* vol. 52, pp. 807-815, 2013.

[12] Y. He and R. Gong, "Application of fractional-order model reference adaptive control on industry boiler burning system," in *2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, pp. 750-753, 2010.

[13] L. Jun-Guo, "Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Genesio–Tesi systems," *Chinese Physics,* vol. 14, p. 1517, 2005.

[14] C. Li and G. Chen, "Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* vol. 341, pp. 55-61, 2004.

[15] J. G. Lu, "Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization," *Physics Letters A,* vol. 354, pp. 305-311, 2006.

[16] Q. Yang and C. Zeng, "Chaos in fractional conjugate Lorenz system and its scaling attractors," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 15, pp. 4041-4051, 2010.

[17] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, and J. A. Gallegos, "Lyapunov functions for fractional order systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 19, pp. 2951-2957, 2014.

[18] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, and R. Castro-Linares, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 22, pp. 650-659, 2015.

[19] Y. Li, Y. Chen, and I. Podlubny, "Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," *Automatica,* vol. 45, pp. 1965-1969, 2009.

[20] Y. Li, Y. Chen, and I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability," *Computers & Mathematics with Applications,* vol. 59, pp. 1810-1821, 2010.

[21] K. M. Passino, S. Yurkovich, and M. Reinfrank, *Fuzzy control* vol. 42: Citeseer, 1998.

[22] L.-X. Wang, *A course in fuzzy systems*: Prentice-Hall press, USA, 1999.

[23] N. Golea, A. Golea, and K. Benmahammed, "Stable indirect fuzzy adaptive control," *Fuzzy sets and Systems,* vol. 137, pp. 353-366, 2003.

[24] S. Labiod and T. M. Guerra, "Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 158, pp. 1126-1137, 2007.

[25] C.-H. Wang, H.-L. Liu, and T.-C. Lin, "Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical systems," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on,* vol. 10, pp. 39-49, 2002.

[26] M. Ö. Efe, "Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm," *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on,* vol. 38, pp. 1561-1570, 2008.

[27] T.-C. Lin, T.-Y. Lee, and V. E. Balas, "Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems," *Chaos, Solitons & Fractals,* vol. 44, pp. 791-801, 2011.

[28] T.-C. Lin, C.-H. Kuo, T.-Y. Lee, and V. E. Balas, "Adaptive fuzzy H∞ tracking design of SISO uncertain nonlinear fractional order time-delay systems," *Nonlinear Dynamics,* vol. 69, pp. 1639-1650, 2012.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]

synchronization of incommensurate fractional-order chaotic systems," *Neurocomputing*, vol. 173, pp. 606-614, 2016.

[40] A. Bouzeriba, A. Boulkroune, T. Bouden, and S. Vaidyanathan, "Fuzzy adaptive synchronization of incommensurate fractional-order chaotic systems," in *Advances and Applications in Chaotic Systems*, ed: Springer, pp. 363-378, 2016.

[41] M. Mohadeszadeh and H. Delavari, "Synchronization of uncertain fractional-order hyper-chaotic systems via a novel adaptive interval type-2 fuzzy active sliding mode controller," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 5, pp. 135-144, 2017.

[42] P. Jafari, M. Teshnehlab, and M. Tavakoli-Kakhki, "Adaptive Type-2 Fuzzy System for Synchronization and Stabilization of Chaotic Nonlinear Fractional Order Systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, pp. 183-193, 2017.

[43] P. Jafari, M. Teshnehlab, and M. Tavakoli-Kakhki, "Synchronization and stabilization of fractional order nonlinear systems with adaptive fuzzy controller and compensation signal," *Nonlinear Dynamics*, vol. 90, pp. 1037-1052, 2017.

[۴۴] محمد صالح تواضعی و مهسان توکلی کاخکی،سیستم‌ها و کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۴.

[45] J. A. Gallegos, M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, and R. Castro-Linares, "On fractional extensions of Barbalat Lemma," *Systems & Control Letters*, vol. 84, pp. 7-12, 2015.

[46] A. Sharifi, M. Aliyari Shoorehdeli, and M. Teshnehlab, "Semi-polynomial Takagi-Sugeno-Kang Type Fuzzy System for System Identification and Pattern Classification," *Journal of Control*, vol. 4, pp. 15-28, 2010.

[47] v. Bahrami, M. Mansouri, and M. Teshnehlab, "Designing Model Reference Fuzzy Controller Based on State Feedback Integral Control for Nonlinear Systems," *Journal of Control*, vol. 9, pp. 1-18, 2015.

[48] Y. Diao and K. M. Passino, "Adaptive neural/fuzzy control for interpolated nonlinear systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, pp. 583-595, 2002.

[49] Y. Yang, G. Feng, and J. Ren, "A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, vol. 34, pp. 406-420, 2004.

[50] M. P. Aghababa, "Design of hierarchical terminal sliding mode control scheme for fractional-

[29] T.-C. Lin and T.-Y. Lee, "Chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive fuzzy sliding mode control," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 19, pp. 623-635, 2011.

[30] M. P. Aghababa, "Comments on "Adaptive fuzzy H∞ tracking design of SISO uncertain nonlinear fractional order time-delay systems"[Nonlinear Dyn. 69 (2012) 1639–1650]," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, pp. 2511-2513, 2012.

[31] S. Tong, H.-X. Li, and W. Wei, "Comments on" Direct adaptive fuzzy-neural control with state observer and supervisory controller for unknown nonlinear dynamical systems"," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 11, pp. 703-705, 2003.

[32] T.-C. Lin, C.-H. Kuo, and V. E. Balas, "Uncertain fractional order chaotic systems tracking design via adaptive hybrid fuzzy sliding mode control," *International Journal of Computers Communications & Control*, vol. 6, pp. 418-427, 2011.

[33] N. Ullah, S. Han, and M. Khattak, "Adaptive fuzzy fractional-order sliding mode controller for a class of dynamical systems with uncertainty," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 38, pp. 402-413, 2016.

[34] N. Ullah, W. Shaoping, M. I. Khattak, and M. Shafi, "Fractional order adaptive fuzzy sliding mode controller for a position servo system subjected to aerodynamic loading and nonlinearities," *Aerospace Science and Technology*, vol. 43, pp. 381-387, 2015.

[35] K. Khettab, S. Ladaci, and Y. Bensafia, "Fuzzy adaptive control of a fractional order chaotic system with unknown control gain sign using a fractional order Nussbaum gain," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016.

[36] K. Khettab, Y. Bensafia, and S. Ladaci, "Robust Adaptive Fuzzy Control for a Class of Uncertain Nonlinear Fractional Systems," in *Recent Advances in Electrical Engineering and Control Applications*, ed Cham: Springer pp. 276-294, 2017.

[37] K. Khettab, Y. Bensafia, and S. Ladaci, "Robust Adaptive Interval Type-2 Fuzzy Synchronization for a Class of Fractional Order Chaotic Systems," in *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*, ed Cham: Springer, pp. 203-224, 2017.

[38] A. Bouzeriba, A. Boulkroune, and T. Bouden, "Fuzzy adaptive synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems," *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, vol. 7, pp. 893-908, October 2016.

[39] A. Boulkroune, A. Bouzeriba, and T. Bouden, "Fuzzy generalized projective

order systems," *IET Science, Measurement and Technology*, vol. 9, pp. 122-133, 2014.

[51] M. P. Aghababa and H. P. Aghababa, "The rich dynamics of fractional-order gyros applying a fractional controller," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 227, pp. 588-601, 2013.

[52] S. H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar, J. Sadati, and S. Momani, "Synchronization of gyro systems via fractional-order adaptive controller," in *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, ed: Springer, pp. 495-502, 2010.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.7.7]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.89]