مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۹، صفحه ۸۷-۷۹

پایدارسازی زمان محدود سیستم‌های غیرخطی تأخیردار به همراه نامعینی و تأخیر متغیر با زمان

الهه مرادی[*۱]

[*۱] استادیار، گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، تهران، ایران،
ee.moradi@gmail.com, e.moradi@iausr.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۹ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۶ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۰

چکیده: در این مقاله، مسأله پایداری زمان محدود و پایدارسازی زمان محدود برای کلاس خاصی از سیستم‌های دینامیکی با توابع غیرخطی در حضور تأخیر متغیر با زمان و ترم‌های نامعینی نرم-محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. توابع غیرخطی به صورت شرایط لیپ-شیتز در نظر گرفته شده است. ابتدا، شرایط کافی جهت تضمین پایداری زمان محدود برای سیستم غیرخطی تأخیردار به همراه نامعینی‌ها و بر اساس روش تابع لیاپانوف ارائه شده است. در ادامه شرایط کافی جهت تضمین پایدارسازی زمان محدود سیستم مورد نظر با فیدبک حالت ارائه شده است. در اثبات قضایای ارئه شده ، از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و فرمول نیوتن-لایبنیز استفاده شده است که سبب کاهش میزان محافظه‌کاری می‌گردند. همچنین تمامی شرایط بدست آمده در این مقاله، وابسته به تأخیر می‌باشند و به صورت نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شده است. سرانجام مثال‌های عددی و شبیه‌سازی‌ها کارآیی روش‌های پیشنهادی را نشان خواهند داد.

کلمات کلیدی: پایدارسازی زمان محدود، تأخیر متغیر با زمان، نامعادلات ماتریسی خطی، توابع غیرخطی

Finite time stabilization of time-delay nonlinear systems with uncertainty and time-varying delay

Elahe Moradi

Abstract: In this paper, the problem of finite-time stability and finite-time stabilization for a specific class of dynamical systems with nonlinear functions in the presence time-varying delay and norm-bounded uncertainty terms is investigated. Nonlinear functions are considered to satisfy the Lipchitz conditions. At first, sufficient conditions to guarantee the finite-time stability for time-delay nonlinear system with uncertainties and based on the Lyapunov approach is presented. In the following, sufficient conditions to ensure finite time stabilization the considered system with state feedback are presented. In the proofs of proposed theorems are used from the appropriate Lyapunov-Krasovskii function and newton-Libniz-formula that can reduce the conservative. Also, all of the obtained conditions in this paper are delay-dependent and presented as linear matrix inequalities .Finally, the numerical examples and simulations exhibit the effectiveness of the proposed methods.

Keywords: Finite-time stabilization, Time-varying delay, Linear matrix inequalities, Nonlinear function

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مسأله‌ی پایداری و کنترل سیستم‌های تأخیردار توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. به دلیل اهمیت آن در سیستم‌های عملی و صنعتی نظیر سیستم‌های حرارتی، راکتورهای شیمیایی، سیستم‌های بیولوژیکی و ... مطالعات و تحقیقات زیادی در حوزه سیستم‌های تأخیردار انجام شده است [۱-۳]. اکثر تحقیقات موجود در رابطه با پایداری و پایدارسازی سیستم‌های تأخیردار بر مسأله پایداری

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

مجانبی لیاپانوف متمرکز شده‌اند که بر روی بازه زمانی نامحدود تعریف شده‌اند [۴-۷].

با این وجود در بعضی از کاربردهای عملی مسأله اصلی بررسی رفتار سیستم بر روی یک بازه زمانی محدود می‌باشد و پایداری مجانبی سیستم برای برخی از سیستم‌های کاربردی نامناسب است زیرا ممکن است به علت مقادیر بزرگ حالت‌ها، اثر گذرای نامطلوبی داشته باشد. در این موارد پایداری زمان محدود که متمرکز بر رفتار گذرای سیستم در یک بازه زمانی مشخص و ثابت است، استفاده می‌شود [۸، ۹]. اخیراً مسأله پایداری و پایدارسازی زمان محدود برای سیستم‌های تأخیردار مورد توجه برخی از محققان واقع شده است[۱۰، ۱۱].

از طرفی وجود ترم‌های نامعینی در یک سیستم عملی و کاربردی امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشند. در حقیقت، ترم‌های نامعینی در مدل‌سازی سیستم‌ها می‌تواند تأثیر زیادی بر روی دقت کنترل‌کننده داشته باشند و لحاظ نکردن آن‌ها در مدل‌سازی، منجر به طراحی کنترل‌کننده‌ای می‌گردد که از عملکرد مناسبی برخوردار نیست [۱۲]. پایداری و کنترل زمان محدود سیستم‌های تأخیردار به همراه نامعینی در برخی از تحقیقات مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۱-۱۷]. در [۱۱]، پایدارسازی زمان محدود برای سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده به همراه نامعینی نرم-محدود و تأخیر متغیر با زمان با روش زمان اقامت متوسط بررسی شده است. مسأله کنترل زمان محدود مقاوم H_∞ برای سیستم‌های خطی تأخیردار با استفاده از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی و معادلات ریکاتی در [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان مقاله [۱۳]، موضوع کراندار زمان محدود تصادفی برای کلاس خاصی از شبکه‌های عصبی تأخیردار با نامعینی را بررسی کرده‌اند. در [۱۴]، مسأله پایداری زمان محدود برای سیستم‌های گسسته تأخیردار به همراه نامعینی پارامتری چندوجهی با استفاده از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و معیار نامعادلات ماتریسی خطی مطالعه شده است. موضوع پایدارسازی مقاوم زمان محدود برای سیستم‌های خطی دارای نامعینی ساختاری و تأخیر ثابت با زمان به کمک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی و روش خطی‌سازی در [۱۵] بررسی شده است. نویسندگان مقاله [۱۶]، مسأله کراندار زمان محدود برای شبکه‌های عصبی گسسته نامعین با تأخیر زمانی و پرش مارکوف در قالب نامعادلات ماتریسی خطی را بررسی کردند. در [۱۷]، موضوع کنترل زمان محدود برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو با استفاده از کنترل‌کننده فیدبک حالت حافظه‌دار و روش نامعادلات ماتریسی خطی مطالعه شده است. نکته قابل ذکر آن است که در مقالات [۱۱-۱۷] موضوع پایداری و کنترل زمان محدود برای سیستم‌های تأخیردار خطی به همراه نامعینی بررسی شده است اما ترم غیرخطی در آن لحاظ نشده است.

هم‌چنین اغلب سیستم‌های واقعی و علوم فیزیکی به صورت سیستم‌های غیرخطی در نظر گرفته می‌شوند و کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌هایی می‌باشند که توابع غیرخطی آن‌ها دارای شرایط لیپ‌شیتز می‌باشند. تحلیل پایداری و کنترل زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار نیز موردتوجه برخی از پژوهشگران واقع شده است [۱۸-۲۱]. در [۱۸]، مسأله کنترل غیرفعال زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار به همراه نامعینی پارامتری با استفاده از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی و بهره‌گیری از روش نامعادلات ماتریسی خطی بررسی شده است. نویسندگان در [۱۹]، شرایط کافی برای سیستم‌های غیرخطی لیپ شیتز با تأخیر زمانی و نامعینی پارامتری نرم-محدود را با استفاده از کنترل‌کننده غیرفعال زمان محدود بر اساس روئیتگر بدست آورده‌اند. در [۲۰]، موضوع پایداری و کنترل زمان محدود سیستم‌های سوئیچ‌شونده تصادفی با تأخیر ثابت با زمان به کمک کنترل‌کننده فیدبک و با روش زمان اقامت متوسط مورد مطالعه قرار گرفته است. مسأله کراندار و کنترل زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی با لیپ شیتز یک‌طرفه در حضور نامعینی‌های نرم-محدود و تأخیر ثابت با زمان بر اساس رویکرد لیاپانوفی و روش نامعادلات ماتریسی خطی در [۲۱] بررسی شده است. نکته حائز اهمیت آن است که مقالات [۱۸-۲۱]، مسأله پایداری، کراندار و کنترل زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار را بررسی کرده‌اند که تأخیر در آن‌ها به صورت ثابت با زمان در نظر گرفته شده است. بر اساس مطالعات نویسنده، مسأله پایداری و کنترل زمان محدود بر روی سیستم‌های غیرخطی با تأخیر متغیر با زمان و نامعینی‌ها مورد بررسی قرار نگرفته است.

در این مقاله، پایداری و پایدارسازی زمان محدود برای دسته خاصی از سیستم‌های تأخیردار غیرخطی با شرایط لیپ‌شیتز و در حضور نامعینی نرم-محدود بررسی خواهد شد. تأخیر موجود در حالت‌های سیستم به صورت متغیر با زمان در نظر گرفته شده است که در سیستم‌های عملی، کاربردی‌تر می‌باشد. برای اثبات قضایای پایداری و کنترل زمان محدود از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و فرمول نیوتن-لایبنیز استفاده شده است. شرایط بدست آمده در قضایای این مقاله، شرایط کافی و وابسته به تأخیر می‌باشند و در ترم‌هایی از نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شده‌اند که سبب کاهش محافظه‌کاری در نتایج پایداری و کنترل زمان محدود می‌گردند [۲۲].

مقاله بدین صورت سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲ توصیف سیستم، برخی از تعاریف و لم‌های لازم ارائه می‌شود. در بخش ۳، قضایا، شرایط پایداری زمان محدود و پایدارسازی زمان محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴، مثال‌های عددی و شبیه‌سازی‌ها برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی ارائه شده است. در انتها، نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۵ آورده شده است.

۲- توصیف سیستم

سیستم تأخیردار غیرخطی با حضور تأخیر متغیر با زمان و نامعینی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + \hat{A}_d x\big(t-d(t)\big) + Bu(t) \\ &\quad + f(x(t),t) \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-d, 0]\end{aligned} \qquad (۱)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ورودی کنترلی و $\varphi(t)$ بردار شرایط اولیه می‌باشد.

B ماتریس ثابت معلوم است و $\hat{A}, \hat{A}_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌های همراه با نامعینی متغیر با زمان هستند که به صورت

$$[\hat{A} \quad \hat{A}_d] = [A \quad A_d] + MF(t)[N \quad N_d] \qquad (۲)$$

می‌باشند و در آن A, A_d, M, N, N_d ماتریس‌های معلوم و ثابت با ابعاد مناسب هستند و $F(t)$ ماتریس نامعلوم و نرم-محدود که شرط

$$F^T(t)F(t) \le I \qquad (۳)$$

را برآورده می‌کند.

فرض ۱: تأخیر زمانی $d(t)$ یک تابع پیوسته و متغیر با زمان است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$0 < d(t) \le d, \dot{d}(t) \le \tau < 1 \qquad (۴)$$

که d کران بالای تأخیر زمانی و τ حد بالای نرخ تغییرات تأخیر زمانی می‌باشد.

فرض ۲: $f(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع غیرخطی نامعلوم است که به فرم لیپ‌شیتز است به نحوی که

$$\|f(x(t),t) - f(\hat{x}(t),t)\| \le \|H(x(t) - \hat{x}(t)\| \qquad (۵)$$

که $x(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ و H یک ماتریس ثابت معلوم می‌باشد و عامل غیرخطی از رابطه‌ی $f(0) \neq 0$ تبعیت می‌کند.

کنترل‌کننده‌ی دینامیکی با فیدبک حالت اصلاح‌شده جهت پایدارسازی زمان محدود سیستم غیرخطی تأخیردار به صورت

$$u(t) = Kx(t) - B^T(BB^T)^{-1}f(0), t \in [0, T_f] \qquad (۶)$$

در نظر گرفته شده است که K بهره فیدبک حالت می‌باشد.

نکته ۱. در اکثر تحقیقات موجود، کنترل کننده فیدبک حالت دارای فرم $u(t) = Kx(t)$ می‌باشد [۱۹، ۲۰]. اما در این مقاله، ما از کنترل‌کننده فیدبک حالت اصلاح‌شده به صورت رابطه‌ی (۶) استفاده می‌نماییم که در ارتباط با سیستم‌هایی است که مشخصه $f(0) = 0$ در آن‌ها صدق نمی‌کند. در حقیقت، قانون کنترلی با رابطه‌ی (۶) دارای عبارت اضافی $B^T(BB^T)^{-1}f(0)$ است که برای سیستم‌هایی که دارای $f(0) \neq 0$ می‌باشند، لازم می‌باشد.

با جایگزینی رابطه (۶) در رابطه(۱)، سیستم حلقه بسته متناظر به صورت رابطه‌ی (۷) به دست می‌آید.

$$\dot{x}(t) = (\hat{A} + BK)x(t) + \hat{A}_d x(t - d(t)) + f(x(t),t) - f(0)$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in [-d, 0] \qquad (۷)$$

تعریف ۱ [۲۳]. سیستم تأخیردار (۱)، با توجه به پارامترهای (c_1, c_2, T_f, R) که $0 \le c_1 < c_2$ و R ماتریس معین مثبت، پایدار زمان محدود است اگر رابطه (۸) برقرار باشد.

$$sup_{-d\le\theta\le 0}\{x^T(\theta)Rx(\theta)\} \le c_1 \Rightarrow x^T(\theta)Rx(\theta) < c_2, \forall t \in [0, T_f]) \qquad (۸)$$

نکته ۲. پلیداری زمان محدود و پلیداری مجانبی لیاپانوف دو مفهوم مستقل از هم می‌باشند و پلیداری زمان محدود به معنای پلیدار مجانبی نمی‌باشد. اگر در طول زمان گذرا، حالت سیستم از محدوده تعیین شده تجاوز کند، پلیداری مجانبی لیاپانوف نیز نمی‌تواند به معنای پایداری زمان محدود باشد.

لم ۱ [۲۴]. فرض کنید $V(t)$ و U, W ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب باشند و $V(t)$ یک ماتریس تابعی باشد، آنگاه برای هر اسکالر $\delta > 0$ و $V^T(t)V(t) \le I$ رابطه‌ی $UVW + W^TV^TU^T \le \delta^{-1}UU^T + \delta W^TW < 0$ برقرار است.

۳- نتایج اصلی

۳-۱- پایداری زمان محدود

در این قسمت، مسأله‌ی پایداری زمان محدود برای سیستم غیرخطی به صورت حلقه باز و بدون در نظرگرفتن نامعینی‌ها به صورت سیستم (۹) در قضیه ۱ بررسی خواهد شد.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d(t)) + f(x(t),t) - f(0)$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in [-d, 0] \qquad (۹)$$

قضیه ۱. سیستم غیرخطی (۹) را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن ماتریس‌های مثبت معین و متقارن SP, Q , و ماتریس‌های L_1, L_2, L_3 با ابعاد مناسب و اسکالرهای مثبت $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ، اگر رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & P + L_3^T & dA^TS & dL_1 & H^T \\ * & \Pi_{22} & -L_3^T & dA_d^TS & dL_2 & 0 \\ * & * & -I & dS & dL_3 & 0 \\ * & * & * & -dS & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -dS & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۱۰)$$

$$\left(\lambda_2 + d_2 e^{\alpha d}\lambda_3 + \frac{d^2}{2}e^{\alpha d}\lambda_4\right)c_1 < \lambda_1 e^{-\alpha T_f}c_2 \qquad (۱۱)$$

آنگاه سیستم تأخیردار با توجه به (c_1, c_2, T_f, R) پایدار زمان محدود است که

$$\Pi_{11} = A^TP + PA + Q - \alpha P + L_1^T + L_1$$
$$\Pi_{12} = PA_d + L_2^T - L_1$$
$$\Pi_{22} = -(1-\tau)Q - L_2^T - L_2$$
$$\lambda_1 = \lambda_{min}(\tilde{P}) = \lambda_{min}(R^{-\frac{1}{2}}PR^{-\frac{1}{2}})$$
$$\lambda_2 = \lambda_{max}(\tilde{P}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}PR^{-\frac{1}{2}})$$
$$\lambda_3 = \lambda_{max}(\tilde{S}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}SR^{-\frac{1}{2}})$$
$$\lambda_4 = \lambda_{max}(\tilde{Q}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}QR^{-\frac{1}{2}}) \qquad (۱۲)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

می‌باشند.

اثبات. جهت اثبات قضیه‌ی ارائه شده تابع کاندید لیاپانوف-کراسوفسکی به صورت

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (۱۳)$$

تعریف می‌شود که در آن

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t)$$
$$V_2(t) = \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)e^{\alpha(t-s)}Qx(s)ds$$
$$V_3(t) = \int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)\, e^{\alpha(t-s)}S\dot{x}(s)dsd\theta$$

می‌باشند و ماتریس‌های $P > 0$، $Q > 0$ و $S > 0$ (مثبت معین) هستند.

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف (۱۳) نسبت به زمان t در طول مسیر (۹) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t)\\ &= x^T(t)(A^TP + PA)x(t)\\ &\quad + x^T(t)PA_dx\big(t-d(t)\big)\\ &\quad + x^T\big(t-d(t)\big)A_d^TPx(t)\\ &\quad +x^T(t)P[(f(x(t),t)-f(0)] +\\ &\quad [(f(x(t),t)-f(0)]^TPx(t)\end{aligned} \quad (۱۴)$$

نامعادله (۵) را می‌توان به صورت رابطه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&[(f(x(t),t)-f(0)]^T[(f(x(t),t)-f(0)]\\ &\le x^T(t)H^THx(t)\end{aligned} \quad (۱۵)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &\le x^T(t)(A^TP + PA + H^TH)x(t)\\ &+x^T(t)PA_dx\big(t-d(t)\big)\\ &+x^T\big(t-d(t)\big)A_d^TPx(t)\\ &\quad +x^T(t)P[(f(x(t),t)-f(0)] +\\ &\quad [(f(x(t),t)-f(0)]^TPx(t) -\\ &\quad [(f(x(t),t)-f(0)]^T[(f(x(t),t)\\ &\quad -f(0)]\end{aligned} \quad (۱۶)$$

مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف $V_2(t)$ و $V_3(t)$ نسبت به زمان t در طول مسیر (۹) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= x^T(t)Qx(t) - (1-\tau)x^T\big(t\\ &\quad -d(t)\big)Qx(t-d(t))\\ \dot{V}_3 &= d\dot{x}^T(t)S\dot{x}(t) - \int_{t-d}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)\,ds\\ &\le d\dot{x}^T(t)S\dot{x}(t) - \int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)\,ds\end{aligned} \quad (۱۷)$$

با استفاده از روابط (۱۳)، (۱۶)، (۱۷) و کم کردن عامل $\alpha V(t)$ از طرفین رابطه $\dot{V}(t)$، رابطه

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t) - \alpha V(t) \le -\alpha x^T(t)Px(t)\\ &+x^T(t)(A^TP + PA + Q + H^TH)x(t)\\ &+x^T(t)PA_dx\big(t-d(t)\big) + x^T\big(t-d(t)\big)A_d^TPx(t)\\ &-(1-\tau)x^T\big(t-d(t)\big)Qx\big(t-d(t)\big)\\ &+x^T(t)P[(f(x(t),t)-f(0)]\\ &+[(f(x(t),t)-f(0)]^TPx(t)\\ &\quad -[(f(x(t),t)-f(0)]^T[(f(x(t),t)\\ &\quad -f(0)] + d\dot{x}^T(t)S\dot{x}(t)\\ &\quad -\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)\,ds\end{aligned} \quad (۱۸)$$

بنابرلین با استفاده از فرمول‌نیوتن-لایبنیز برای ماتریس‌های $\Psi = [L_1\ L_2\ L_3]$ با ابعاد مناسب، رابطه‌ی

$$\begin{aligned}&2\eta(t)\Psi[x(t) - x(t-d(t)\\ &\quad -\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)ds] = 0\end{aligned} \quad (۱۹)$$

حاصل خواهد شد که در رابطه‌ی (۱۹)، $\eta(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \quad [(f(x(t),t)-f(0)]^T]^T$ می‌باشد.

با در نظر گرفتن روابط (۱۸) و (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t) - \alpha V(t) \le \eta^T(t)(\Omega + d\Psi S^{-1}\Psi^T)\eta(t)\\ &-\int_{t-d(t)}^{t}[\Psi^T\eta(t) + S\dot{x}(s)]^TS^{-1}[\Psi^T\eta(t) + S\dot{x}(s)]ds\end{aligned} \quad (۲۰)$$

که در این رابطه

$$\Omega = \begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12} & P + dA^TS + L_3^T\\ * & \Pi_{22} & dA_d^TSL_3^T\\ * & * & -I + dS\end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

می‌باشد و در آن

$$\Pi_{11} = A^TP + PA + Q + H^TH - \alpha P + L_1^T + L_1$$
$$\Pi_{12} = PA_d + L_2^T - L_1$$
$$\Pi_{22} = -(1-\tau)Q - L_2^T - L_2$$

می‌باشد. نکته قابل توجه این است که

$$\begin{aligned}&\int_{t-d(t)}^{t}[\Psi^T\eta(t) + S\dot{x}(s)]^TS^{-1}\big[\Psi^T\eta(t)\\ &\quad + S\dot{x}(s)\big]ds > 0\end{aligned} \quad (۲۲)$$

است. با استفاده از لم مکمل شر، رابطه (۱۰) را به صورت

$$\Omega + d\Psi S^{-1}\Psi^T < 0 \quad (۲۳)$$

می‌توان نوشت. بنابراین با استفاده از روابط (۲۰) تا (۲۳) رابطه

$$\dot{V}(t) - \alpha V(t) < 0 \quad (۲۴)$$

بدست می‌آید.

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۲۴) از زمان 0 تا T_f

$$V(t) < e^{\alpha T_f}V(0)) \quad (۲۵)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

بدست می‌آید. از طرفی دیگر،

$$V(t) \geq x^T(t)Px(t) \geq \lambda_{min}(\tilde{P})x^T(t)Rx(t)) = \lambda_1 x^T(t)Rx(t) \quad (۲۶)$$

سپس

$$\begin{aligned} V(0) &\leq \lambda_{max}(\tilde{P}_i)x^T(0)Rx(0) \\ &+de^{\alpha d}\lambda_{max}(\tilde{Q}_i)\sup_{-d\leq\theta\leq o}\{x(\theta)^TRx(\theta)\} \\ &+\lambda_{max}(\tilde{S}_i)\int_{-d}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^T(s)e^{-\alpha s}S\dot{x}(s)dsd\theta \leq \\ &\lambda_{max}(\tilde{P}_i)\sup_{-d_2\leq\theta\leq o}\{x(\theta)^TRx(\theta)\} \\ &+de^{\alpha d}\lambda_{max}(\tilde{Q}_i)\sup_{-d\leq\theta\leq o}\{x(\theta)^TRx(\theta)\} \\ &+\frac{d^2}{2}e^{\alpha d}\lambda_{max}(\tilde{S}_i)\sup_{-d\leq\theta\leq o}\{\dot{x}(\theta)^TR\dot{x}(\theta)\} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

می‌باشد. با استفاده از روابط (۱۲) و (۲۶)، رابطه‌ی

$$\begin{aligned} V(0) &\leq \left(\lambda_2 + de^{\alpha d}\lambda_3 + \frac{d^2}{2}e^{\alpha d^2}\lambda_4\right)x(\bar{t_0})^TRx(\bar{t_0}) \\ &\leq \left(\lambda_2 + de^{\alpha d}\lambda_3 + \frac{d^2}{2}e^{\alpha d}\lambda_4\right)c_1 \end{aligned} \quad (۲۳)$$

بدست می‌آید. با در نظر گرفتن روابط (۲۶) تا (۲۸)، رابطه‌ی

$$\begin{aligned} x^T(t)Rx(t) &\leq \frac{V(t)}{\lambda_1} < \frac{e^{\alpha T_f}\mu^{\frac{T_f}{\tau_a}}\ [V(0)]}{\lambda_1} \\ &\leq \frac{\left(\lambda_2 + de^{\alpha d}\lambda_3 + \frac{d^2}{2}e^{\alpha d^2}\lambda_4\right)}{\lambda_1}e^{\alpha T_f} \end{aligned} \quad (۲۴)$$

بدست می‌آید. با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۱۱) و (۲۹)، رابطه‌ی

$$x^T(t)Rx(t) < \frac{\lambda_1 c_2 e^{-\alpha T_f}}{\lambda_1}e^{\alpha T_f} = c_2 \quad (۲۵)$$

بدست می‌آید. این بدین معنی است که سیستم تأخیردار (۹) با توجه به (c_1, c_2, T_f, R) و بر طبق تعریف ۱ پایدار زمان محدود است و در نتیجه اثبات قضیه ۱ در این قسمت کامل می‌گردد.

۲-۳- پایدارسازی زمان محدود

در این قسمت، شرایط وجود کنترل‌کننده پایدارساز زمان محدود وابسته به تأخیر برای سیستم حلقه بسته (۷) براساس روش لیاپانوف و در قالب LMI طی قضیه ۲ ارائه می‌شود.

قضیه۲. سیستم غیرخطی (۷) را در نظر بگیرید. با فرض تأخیر متغیر با زمان (۴) و در نظر گرفتن ماتریس‌های مثبت معین و متقارن P,Q,S و ماتریس‌های L_1, L_2, L_3, X, Y با ابعاد مناسب و اسکالرهای مثبت، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha$ اگر رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & P+L_3^T & dA^TS+dL_4^T & dL_1 & H^T & PM & PM \\ * & \Theta_{22} & -L_3^T & dA_d^TS & dL_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & dS & dL_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -dS & 0 & 0 & dSM & dSM \\ * & * & * & * & -dS & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۶)$$

$$\left(\lambda_2 + de^{\alpha d}\lambda_3 + \frac{d^2}{2}e^{\alpha d}\lambda_4\right)c_1 < \lambda_1 e^{-\alpha T_f}c_2 \quad (۲۷)$$

آنگاه سیستم حلقه-بسته متناظر با رابطه‌ی (۷) تحت کنترل‌کننده (۶) و با توجه به (c_1, c_2, T_f, R) پایدار زمان محدود است که

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= A^TP + PA + Q - \alpha P + L_1^T + L_1 \\ &\quad + \varepsilon_1 N^TN + Y + Y^T \\ \Theta_{12} &= PA_d + L_2^T - L_1 \\ \Theta_{22} &= -(1-\tau)Q - L_2^T - L_2 + \varepsilon_2 N_d^T N_d \\ \lambda_1 &= \lambda_{min}(\tilde{P}) = \lambda_{min}(R^{-\frac{1}{2}}PR^{-\frac{1}{2}}) \\ \lambda_2 &= \lambda_{max}(\tilde{P}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}PR^{-\frac{1}{2}}) \\ \lambda_3 &= \lambda_{max}(\tilde{S}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}SR^{-\frac{1}{2}}) \\ \lambda_4 &= \lambda_{max}(\tilde{Q}) = \lambda_{max}(R^{-\frac{1}{2}}QR^{-\frac{1}{2}}) \\ K &= (PB)^{-1}Y \end{aligned} \quad (۲۸)$$

می‌باشند.

اثبات. جهت اثبات قضیه‌ی ارائه شده از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی (۱۳) استفاده می‌شود. با جایگزینی A و A_d در رابطه‌ی (۱۰)، با $\hat{A} + BK$ و $\hat{A}_d$ به ترتیب و با استفاده از قضیه ۱، سیستم حلقه-بسته‌ی (۷) پایدار زمان محدود است اگر نامعادله ماتریسی رابطه‌ی (۳۴) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & P+L_3^T & d(\hat{A}+BK)^TS & dL_1 & H^T \\ * & \Gamma_{22} & -L_3^T & d\hat{A}_d^TS & dL_2 & 0 \\ * & * & -I & dS & dL_3 & 0 \\ * & * & * & -dS & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -dS & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۳۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \hat{A}P + P\hat{A} + Q - \alpha P + L_1^T + L_1 + K^TB^TP + PBK \\ \Gamma_{12} &= P\hat{A}_d + +L_2^T - L_1 \\ \Gamma_{22} &= -(1-\tau)Q - L_2^T - L_2 \end{aligned}$$

می‌باشد. با تعریف $PBK = \mathrm{Y}, SBK = X$ و در نظر گرفتن Ψ برای ترم چپ معادله (۳۴)، داریم $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ که

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & P+L_3^T & dA^TS+dX & dL_1 & H^T \\ * & \Theta_{22} & -L_3^T & dA_d^TS & dL_2 & 0 \\ * & * & -I & dS & dL_3 & 0 \\ * & * & * & -dS & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -dS & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} N^TF^T(t)M^TP + PMF(t)N & PMF(t)N_d & 0 & dN^TF^T(t)M^TS & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & dN_d^TF^T(t)M^TS & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

می‌باشد. با استفاده از لم۱، رابطه‌ی (۳۴) معادل با نامعادله ماتریسی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

$$\psi_1+\varepsilon_1\begin{bmatrix}N^T\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N^T\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T+\varepsilon_1^{-1}\begin{bmatrix}PM\\0\\0\\dSM\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM\\0\\0\\dSM\\0\\0\end{bmatrix}^T+\varepsilon_2\begin{bmatrix}0\\N_d^T\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\N_d^T\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T+\varepsilon_2^{-1}\begin{bmatrix}PM\\0\\0\\dSM\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM\\0\\0\\dSM\\0\\0\end{bmatrix}^T<0 \quad (۳۶)$$

می‌باشد. با استفاده از لم مکمل شر، به سادگی مشاهده می‌شود که رابطه‌ی (۳۶) معادل با رابطه‌ی (۳۱) است و در نتیجه اثبات قضیه ۲ در این قسمت تکمیل می‌شود.

نکته ۳. شرایط بدست آمده در قضایای ۱ و ۲ به صورت استاندارد LMI نمی‌باشند و حل آن‌ها دشوار است. اگر برخی از پارامترها مانند α ثابت و معین در نظر گرفته شوند، نامعادلات ماتریسی (۱۰) و (۳۱) در قضایای مربوطه به فرم استاندارد LMI تبدیل می‌گردند و با استفاده از جعبه‌ابزار کنترلی LMI در Matlab به آسانی قابل حل است. به علاوه، شرایط (۱۱) و (۳۲) نیز با ثابت در نظر گرفتن پارامترهای مثبت α و λ_i ها به فرم استاندارد LMI و به صورت زیر تبدیل می‌گردند:

$$\eta_1 I<\tilde{P}<\eta_2 I \quad (۳۷)$$

$$0<\tilde{S}<\eta_3 I \quad (۳۸)$$

$$0<\tilde{Q}<\eta_4 I \quad (۳۹)$$

$$\left(\eta_2+de^{\alpha d}\eta_3+\frac{d^2}{2}e^{\alpha d}\eta_4\right)c_1<\eta_1 e^{-\alpha T_f}c_2 \quad (۴۰)$$

که در آن $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ ثابت‌های مثبت هستند.

نکته ٤. در اثبات قضایای ارائه شده در مقالات [۱۲-۱۴] از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی بدون ترم انتگرال دوگانه استفاده شده است که منجر به شرایط مستقل از تأخیر شده است. در اثبات قضایای ۱ و ۲ این مقاله، از تابع لیاپانوف-کراسوفسکی با رابطه (۱۳) که دارای ترم انتگرال دوگانه می‌باشد، استفاده شده است. شرایط بدست آمده در این مقاله وابسته به تأخیر و مشتق تأخیر می‌باشند که نسبت به شرایط مستقل از تأخیر دارای محافظه‌کاری کمتری‌اند. از طرفی برای اثبات قضایا در این مقاله از فرمول نیوتن-لایبنیز نیز استفاده شده است که سبب کاهش میزان محافظه‌کاری می‌گردد.

٤- شبیه‌سازی

در این بخش برای نشان دادن قابلیت و ویژگی‌های روش‌های پیشنهادی، دو مثال عددی در ادامه ارئه می‌شود.

مثال ۱. سیستم غیرخطی حلقه بسته (۷) با تأخیر متغیر با زمان و تک ورودی را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0.2\\ -0.3 & -1.2\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0.2\\ -0.3 & -1.2\end{bmatrix} \quad (۴۱)$$
$$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, M=[0.1 \quad 0.2]^T, N=[1.4 \quad 0.8]$$
$$N_d=[0.4 \quad 1.1], F(t)=\cos(0.1t)$$

تأخیر متغیر با زمان به صورت

$$d(t)=0.8-0.2\sin(t) \quad (۴۲)$$

می‌باشد. با استفاده از محاسبات ساده، $d=1,\tau=0.2$ بدست می‌آید. هم‌چنین پارامترهای دیگر سیستم تأخیردار به صورت

$$c_1=1,\ c_2=35, T_f=10, R=I$$
$$f(x(t))=\begin{bmatrix}0.1\cos(0.01x(1))\\ 0.1\cos(0.01x(2))\end{bmatrix} \quad (۴۳)$$

تعریف می‌شوند که $f(0)=[01 \quad 0.1]^T\neq 0$ می‌باشد. با توجه به مقادیر در نظر گرفته شده در مثال ۱ برای سیستم غیرخطی تأخیردار حلقه-بسته و با استفاده از روابط (۳۱) تا (۳۳) در قضیه۲ برای $\alpha=0.1$، ماتریس‌های P,Q,S,L_1,L_2,L_3,X,Y به صورت

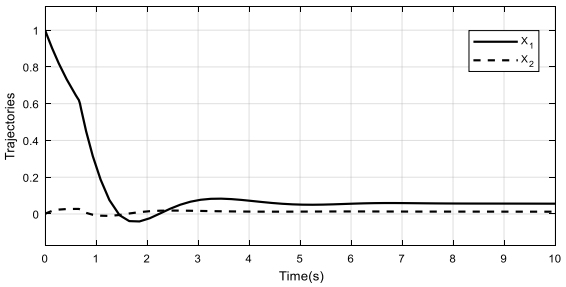
$$P=\begin{bmatrix}1.5890 & -0.0104\\ -0.0104 & 1.4900\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2.6512 & 0.3270\\ 0.3270 & 3.4083\end{bmatrix}$$
$$S=\begin{bmatrix}0.5972 & -0.0263\\ -0.0263 & 0.4196\end{bmatrix}, L_1=\begin{bmatrix}0.1728 & 0.0680\\ 0.0680 & 0.2818\end{bmatrix}$$
$$L_2=\begin{bmatrix}0.1439 & 0.0595\\ 0.0595 & 0.2058\end{bmatrix}, L_3=\begin{bmatrix}-0.2125 & -0.0084\\ -0.0084 & -0.1652\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}-6.0902 & -0.1920\\ -0.1920 & -6.7137\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}-0.5325 & -0.0065\\ -0.0065 & -0.6608\end{bmatrix} \quad (۴۴)$$

بدست می‌آیند. ضرایب کنترل‌کننده‌ی فیدبک حالت با استفاده از رابطه‌ی $K=(PB)^{-1}Y$ به صورت

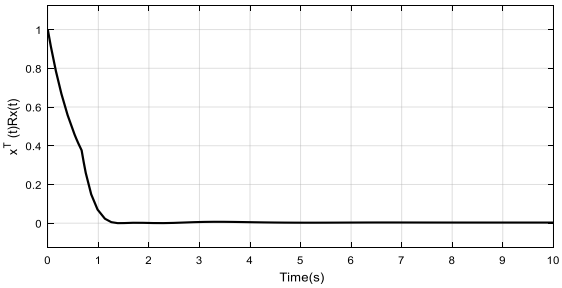
$$K=[-0.1003 \quad -4.5048] \quad (۴۵)$$

تعیین خواهد شد. لذا سیستم تأخیردار حلقه-بسته با توجه به تعریف ۱، در نظر گرفتن (c_1,c_2,T_f,R) و شرط $x^T(\theta)Rx(\theta)<35$ پایدار زمان محدود می‌باشد. مسیرهای حالت سیستم و نرم بردار حالت برای سیستم تأخیردارحلقه بسته برای بازه زمانی $t\in[0,10]$ و در نظر گرفتن $\phi(t)=[1 \quad 0]^T$ به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

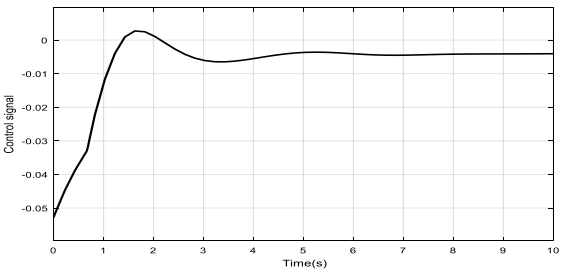


شکل ۱ : مسیرهای حالت سیستم حلقه-بسته با تک ورودی



شکل ۲ : $x^T(t)Rx(t)$ سیستم حلقه- بسته با تک ورودی

با توجه به شکل ۲، مشاهده می‌شود که $x^T(t)Rx(t) < 35$ است و بنابراین سیستم حلقه-بسته تأخیردار، پایدار زمان محدود می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی برای سیگنال کنترلی در شکل ۳ آورده شده است. همان‌طور که از تصویر بر می‌آید سیگنال کنترلی هموار هست و کنترل‌کننده فیدبک حالت نتیجه قابل قبولی را برای سیستم تأخیردار غیرخطی به همراه نامعینی نرم-محدود ایجاد کرده است.



شکل۳: سیگنال کنترلی با تک ورودی

مثال ۲. سیستم حلقه-بسته تأخیردار غیرخطی (۷) به همراه نامعینی، تأخیر متغیر با زمان و چند ورودی را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix}-1.2 & 0.3\\ 0.2 & -1.7\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.1\\ 0 & -0.2\end{bmatrix}$$
$$, M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} B=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ -0.1 & 0.2\end{bmatrix}$$
$$N=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}$$
$$F(t)=\begin{bmatrix}cost & 0\\ 0 & cost\end{bmatrix} \quad (۴۶)$$

پارامترهای دیگر سیستم تأخیردار به صورت

$$c_1=0.3,\ c_2=5, T_f=10, R=I$$
$$f\big(x(t)\big)=\begin{bmatrix}0.2\ cos\ (0.01x(1))\\ 0.2\ cos\ (0.01x(1))\end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

تعریف می‌شوند که $f(0)=[0.2 \quad 0.2]^T \neq 0$ می‌باشد.

حال در این قسمت تأخیر متغیر با زمان با رابطه‌ی (۴) به صورت

$$d(t)=0.5-0.5sin\ (t) \quad (۴۸)$$

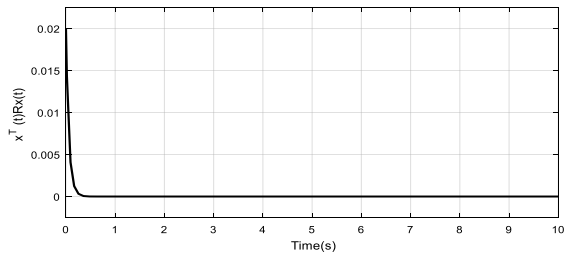
می‌باشد. با استفاده از محاسبات ساده، $d=1\ , \tau=0.5$ بدست می‌آید. با توجه به مقادیر در نظر گرفته شده برای سیستم غیرخطی تأخیردار حلقه-بسته و با استفاده از روابط (۳۱) تا (۳۳) در قضیه۲ برای $\alpha=0.01$، ماتریس‌های $P,Q,S,L_1,L_2,L_3\ ,X,Y$ به صورت

$$P=\begin{bmatrix}1.2815 & -0.0008\\ -0.0008 & 1.2849\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}2.2521 & -0.0249\\ -0.0249 & 2.2170\end{bmatrix},$$
$$S=\begin{bmatrix}0.4623 & 0.0029\\ 0.0029 & 0.4717\end{bmatrix}, L_1=\begin{bmatrix}0.0923 & -0.0075\\ -0.0075 & 0.0810\end{bmatrix}$$
$$L_2=\begin{bmatrix}0.2557 & -0.0005\\ -0.0005 & 0.2575\end{bmatrix}, L_3=\begin{bmatrix}-0.0911 & 0.0113\\ 0.0113 & -0.0690\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}-2.5651 & -0.3150\\ -0.3150 & -1.9113\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}-0.4164 & -0.1200\\ -0.1200 & -0.1857\end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

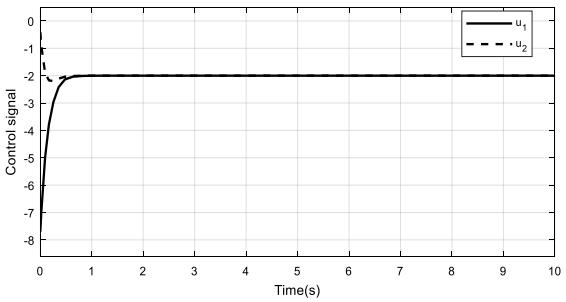
بدست می‌آیند. ضرایب کنترل‌کننده‌ی فیدبک حالت با استفاده از رابطه‌ی $K=(PB)^{-1}Y$ به صورت

$$K=\begin{bmatrix}-20.0178 & -2.4674\\ -11.2410 & -8.6721\end{bmatrix} \quad (۵۰)$$

تعیین خواهد شد. لذا سیستم تأخیردار حلقه-بسته با توجه به تعریف ۱ و در نظر گرفتن (c_1,c_2,T_f,R) کنترل زمان محدود می‌باشد. مسیرهای حالت سیستم، نرم بردار حالت و سیگنال‌های کنترلی برای سیستم تأخیردارحلقه بسته برای بازه زمانی $t\in[0,10]$ و در نظر گرفتن $\varphi(t)=[0.1 \quad -0.1]^T$ به ترتیب در شکل‌های ۴ تا ۶ نشان داده شده است.



شکل ۵ : $x^T(t)Rx(t)$ سیستم حلقه- بسته با تأخیر متغیر با زمان و چند ورودی



شکل ۶ : سیگنال کنترلی با تأخیر متغیر با زمان و چند ورودی

همانطور که از تصاویر برمی‌آید سیستم تأخیردار غیرخطی با توجه به تعریف ۱ و در نظر گرفتن پارامترهای (c_1,c_2,T_f,R) پلیدار زمان محدود

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

می‌باشد. با توجه به شکل ۵، مشاهده می‌شود که $x^T(t)Rx(t) < 5$ است و بنابراین سیستم حلقه-بسته غیرخطی با تأخیر متغیر با زمان و نامعینی، کنترل زمان محدود می‌باشد.

مثال۳. سیستم غیرخطی حلقه-باز (۹) با تأخیر متغیر با زمان را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1.46 & -0.45 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 \\ 0.54 & 0.45 \end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

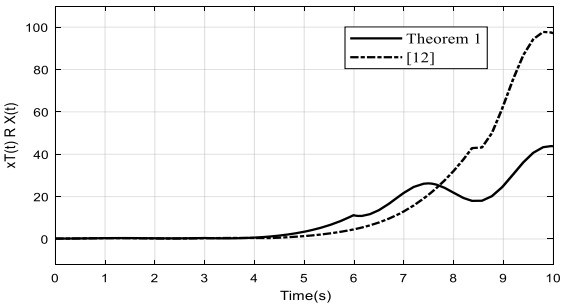
پارامترهای دیگر سیستم تأخیردار به صورت

$$c_1 = 0.2,\ c_2 = 100, T_f = 10, R = I$$

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} 0.3cos\ (0.01x(1)) \\ 0.3cos\ (0.01x(2)) \end{bmatrix} \quad (۵۲)$$

تعریف می‌شوند که $f(0) = [03 \quad 0.3]^T \neq 0$ می‌باشد.

مقدار مجاز کران بالای تأخیر برای پایداری زمان محدود با $\tau = 0.4$، در مقاله [۱۲] معادل $d = 0.65$ و در این مقاله با استفاده از قضیه ۱ معادل $d = 0.71$ می‌باشد که مبین بازه عملکردی وسیع‌تر و میزان محافظه‌کاری کمتر این مقاله نسبت به روش ارائه شده در مقاله [۱۲] می‌باشد. نرم بردار حالت برای سیستم تأخیردار حلقه-باز در قضیه ۱ و مقاله [۱۲] برای بازه زمانی $t \in [0,10]$ در شکل ۷ مشاهده می‌شود که نشان از برتری روش ارائه شده در این مقاله دارد. همان‌طور که از شکل ۷ برمی‌آید برای هر دو روش ارائه شده در این مقاله و مرجع [۱۲]، با توجه به تعریف ۱ و در نظر گرفتن پارامترهای (c_1, c_2, T_f, R)، $x^T(t)Rx(t) < 100$ است و لذا سیستم حلقه-باز تأخیردار، پایدار زمان محدود می‌باشد.



شکل ۷: سیستم حلقه- باز $x^T(t)Rx(t)$

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، پایداری و پایدارسازی زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی لیپ‌شیتز با تأخیر متغیر با زمان و به همراه نامعینی‌ها بررسی شده است. ترم‌های نامعینی به صورت نرم-محدود و متغیر با زمان در نظر گرفته شده است. برای اثبات قضایا از رویکرد لیاپانوفی و تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب استفاده شده است که شرایط کافی برای پایداری و پایدارسازی زمان محدود را تضمین می‌کند. شرایط بدست آمده در این مقاله وابسته به تأخیر می‌باشند که در قالب LMI بیان شده‌اند. در انتها با استفاده از شبیه‌سازی‌ها قابلیت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفت.

تشکر و قدردانی

تحقیق فوق برگرفته از طرح پژوهشی "بررسی کنترل زمان محدود برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار به همراه نامعینی" می‌باشد که با حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری به اجرا در آمده است، بدینوسیله از آن واحد دانشگاهی، تقدیر و تشکر بعمل می‌آید.

پیوست

لم مکمل شر[1] [۲۴]. نامعادلات ماتریسی غیرخطی عبارتند از:

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) > 0 \quad (۵۳)$$

که در آن $R(x) = R^T(x), Q(x) = Q^T(x)$ و $S(x)$ به صورت آفاین به x وابسته می‌باشد. طبق لم شر، این دسته از نامعادلات ماتریسی با LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (۵۴)$$

معادل است.

فرمول نیوتن-لایبنیز[2] [۲۵]. اگر رابطه

$$x(t - d(t)) = x(t) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s)ds \quad (۵۵)$$

برقرار باشد، آنگاه برای ماتریس‌های $Z_i.Y_i$ با ابعاد مناسب خواهیم داشت:

$$2[x^T(t)Y_i + x^T(t - d(t)Z_i)[x(t) \quad (۵۶)$$

$$- \int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}(s)ds - x(t - d(t))]$$

مراجع

[۱] هادی غلامی، طاهره بینازاده، "طراحی کنترل‌کننده زمان محدود برای سیستم‌های لیپ شیتز یک طرفه تأخیری"، مجله کنترل، جلد ۱۲، شماره ۱، صفحات ۱۴-۲۵، ۱۳۹۷.

[2] D. Ivanescu & et al, Control of an interconnected power system: a time delay approach, *IFAC Proceeding Volumes*, vol. 34, no. 13, Aug. 2001, pp.449-454.

[3] M. Wu, Y. He and J-H. She, Stability analysis and robust control of time-delay systems, Springer, 2010.

[4] J. G. Milton, Time delays and the control of biological systems: an overview, *IFAC-Papers Online*, vol. 48, no. 12, 2015, pp.87-92.

[5] C. Zheng, N. Li and J. Cao, Matrix measure based stability criteria for high-order neural networks with proportional delay, Neurocomputing, Vol. 149, 2015, pp. 1149-1154.

[6] N. Zhao, X. Zhang , Y. Xue and P. Shi, Necessary conditions for exponential stability of linear neutral type

[1] Schur complement lemma

[2] Newton-Libniz Formula

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]

[20] J. Song and S. He, Observer-based finite-time passive control for a class of uncertain time-delayed Lipschitz nonlinear systems, Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 36, no. 6, 2014, pp. 797-804.

[21] Y. Chen, Q. Lin, R. Lu and A. Xue, Finite time control of switched stochastic delayed systems, Neurocomputing, vol. 191, 2016, pp. 374-379.

[22] S. Boyd, L. E. Chaoui, E.Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", Philadelphia: SIAM, Vol. 15, 1994.

[23] D. L. Debeljkovic and et al, Finite time stability of continuous time-delay systems: Jensen's inequality-based approach, Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2014 IEEE 9th Conference, June 2014, China, pp. 24-30.

[24] Y. Wang, L. Xie, C.E. Souza, Robust control of a class of uncertain nonlinear systems, Syst. Control Lett, vol. 19, 1992, pp. 139-149.

systems with multiple time delays, Journal of the Franklin Institute, vol. 355, no. 1, Jan. 2018, pp. 458-473.

[7] C. B. Cardeliquio, M. Souza and A. R. Fioravanti, Stability analysis and output-feedback control design for time-delay systems, IFAC-Papers Online, vol. 50, no. 1, Jul. 2017, pp. 1292-1297.

[8] S. Sh. Alviani, "Delay-dependent exponential stability of linear time-varying neutral delay systems", IFAC-Papers Online, vol. 48, no. 12, 2015, pp. 177-179.

[9] G. Zhao, J. Wang, Finite time stability and L_2-gain analysis for switched linear systems with state-dependent switching, Journal of the Franklin Insitute, Vol. 350, 2013, pp. 1057-1092.

[10] P. Dorato, Short time stability in linear time-varying systems, InProc. IRE International convention record, Pages 83–87, 1961.

[11] F. Tan, B. Zhou and G-R Duan, Finite-time stabilization of linear time-varying systems by piecewise constant feedback, Automatica, vol. 68, Jun. 2016, pp. 277-285.

[12] E. Moradi, M. R. Jahed-Motlagh and M. Barkhordari Yazdi, LMI-based criteria for robust finite-time stabilisation of switched systems with interval time-varying delay, IET Control Theory & applications, vol. 11, no. 16,2017, pp. 2688-2697.

[13] P. Niamsup and V. N. Phat, Robust finite-time H_∞ control of linear time-varying delay systems with bounded control via Riccati equations, International Journal of Automation and Computing, vol. 3 , 2017 , pp. 1-9.

[14] S. He and F. Liu, Finite-time boundedness of uncertain time-delay neural network with markovian jumping parameters, Neurocomputing, vol. 103, Mar. 2013, pp. 87-92.

[15] C. E. de Souza and D. Coutingo, Robust stability and control of uncertain linear discrete time periodic systems with time-delay, Automatica, vol. 50, no. 2, Feb. 2014, pp. 431-441.

[16] S. B. Stojanovic, D. L. Debeljkovic and D. S. Antic, Robust finite-time stability and stabilization of linear uncertain time-delay systems, Asian Journal of control, vol. 15, no. 5, 2013, pp. 1548-1554

[17] Y. Zhang and et all, Finite-time boundedness for uncertain discrete neural networks with time-delays and Markovian jumps, Neurocomputing, vol. 144, 2014, pp. 1-7.

[18] W. Guan and F. Liu, Finite-time H_∞ Memory state feedback control for uncertain singular TS fuzzy time-delay system under actuator saturation, Advances in Difference Equatuins, vol. 52 , 2016, pp. 1-19.

[19] J. Song, S. He, Finite-time robust passive control for a class of uncertain Lipschitz nonlinear systems with time-delays, Neurocomputing, vol. 159, 2015, pp. 275-281.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-11-06]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.8.8]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.79]