مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۶، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۱، صفحه ۸۵-۷۷

طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته غیر متمرکز برای سیستم‌های مقیاس بزرگ در حضور ورودی نامعین

بیژن معاونی[۱]، مینا غلامی[۲]

[۱] استادیار دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، b_moaveni@iust.ac.ir

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد کنترل، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، minagholamii@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۱۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۶/۳۱)

چکیده: در این مقاله روشی نوین برای طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته غیر متمرکز برای سسیستم های دینامیکی مقیاس بزرگ با ورودی نامعین مطرح می‌گردد. در روش پیشنهادی، سیستم مقیاس بزرگ با استفاده از تبدیل های مناسب به تعدادی زیر سیستم شامل ترم های تداخلی تجزیه گشته و در معادلات دینامیکی حاصل هر زیر سیستم حذف خواهد گردید، لذا در تخمین متغیرهای حالت به تبادل اطلاعات مابین زیر سیستم ها نیازی نخواهد بود. در این مقاله، با برقراری شرط وجودی یک رویتگر پایدار با ورودی نامعین برای هر زیر-سیستم و با استفاده از تحلیل دینامیک خطای تخمین، همگرایی خطای تخمین به سمت صفر تضمین گشته و رویتگرهای غیرمتمرکز مرتبه کاهش یافته پایداری طراحی می‌شود. در انتها با ارائه مثال عددی و انجام شبیه سازی، عملکرد مطلوب رویتگر پیشنهادی تحلیل و بررسی خواهد گشت.

کلمات کلیدی: سیستم مقیاس بزرگ، رویتگر غیرمتمرکز، رویتگر مرتبه کاهش یافته، رویتگر با ورودی نامعین.

Decentralized Reduced Order Observer Design for Large-Scale Plants with Unknown Inputs

Bijan Moaveni, Mina Gholami

Abstract: In this paper, we propose a new method to design a decentralized reduced order observer for large scale plants with unknown inputs. In this approach, large scale plant is decomposed into several subsystems with interconnected terms, then interconnected terms will be eliminated by using the appropriate transformations in new form of dynamical equation of each subsystem. Based on this method, states estimation doesn't require exchanging information between the subsystems. Here, if plant satisfies the existence condition for designing stable observer with unknown input (UIO), we use estimation error dynamic and negative definite to provide the observer convergence. Finally, effectiveness of the method is shown by using a numerical example and corresponding simulation.

Key words: Large Scale Plant, Decentralized Observer, Reduce Order Observer, Unknown Input Observer.

۱- مقدمه

سیستم‌های مقیاس بزرگ را در سیستم‌های مختلفی از قبیل سیستم‌های الکتریکی، فرآیندهای صنعتی و سیستم‌های حمل و نقل و ارتباطی می-توان یافت [۱]. مفهوم کنترل غیر متمرکز در سیستم‌های ابعاد وسیع و پیچیده، بسیار حائز اهمیت است که دلایل آن بر مهندسین و محققین حوزه مهندسی کنترل پوشیده نیست [۲]. برای کنترل یک سیستم ابعاد وسیع در روش‌های مبتنی بر فیدبک متغیرهای حالت، به اطلاعات تمامی متغیر های حالت نیاز است [۴-۳]، این در حالی است که در سیستم‌های

نویسنده عهده دار مکاتبات: بیژن معاونی

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]

واقعی، اندازه گیری تمام متغیرهای حالت امکان پذیر و اقتصادی نیست. بنابراین طراحی رویتگرها در این دسته از سیستم‌ها از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردار می‌باشند. این امر از آن رو بسیار مهم می نماید که مساله طراحی و اجرای رویتگرهای متمرکز در این دسته ازسیستم‌ها با چالش های مختلفی مواجه است [۵]. لذا محققین و مهندسین حوزه کنترل به دنبال طراحی رویتگرهای غیرمتمرکز برای تخمین متغیرهای حالت زیر سیستم‌ها در کنترل سیستم‌های مقیاس بزرگ می‌باشند [۶] [۱]. از مزایای دیگر رویتگرهای غیر متمرکز این است که در تجزیه سیستم‌های ابعاد وسیع، به گونه‌ای اثرتداخلی زیر سیستم ها حذف می گردند که این امر خود موجب سادگی در محاسبات و عدم نیاز به مبادله اطلاعات مابین زیر سیستم‌ها می باشد [۸-۷] [۱].

نکته قابل توجه که در طراحی و بکارگیری رویتگرها در عمل حائز اهمیت است، حضور ورودی‌های نامعین از جمله نویز و اغتشاش در سیستم‌های واقعی است. این امر اجتناب ناپذیر، بکارگیری رویتگرهای متداول (که از اطلاعات تمامی ورودی‌ها جهت تخمین متغیرهای حالت استفاده می‌کنند) را با مشکل جدی مواجه خواهد نمود. لذا استفاده از رویتگرهای با ورودی نامعین در موارد کاربردی بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است [۱۱-۹]. از سوی دیگر لازم به ذکر است که ازکاربردهای عمده رویتگرهای با ورودی نامعین، استفاده از ایده این دسته از رویتگرها درطراحی رویتگر های غیر متمرکز است [۱۵-۱۲].

در [۲] روشی ساده برای طراحی رویتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین با توجه به ساختار ویژه سیستم دینامیکی و تجزیه ماتریس ورودی نامعین، در صورت برقرای شرایط وجودی، پیشنهاد شده است. در این روش ترم-های تداخلی به گونه‌ایی تجزیه شده که به صورت ورودی نامعین در نظر گرفته می‌شوند، سپس با استفاده از تبدیل های همانندی اثر ورودی نامعین را در تعدادی از متغیر های حالت از بین برده و در نتیجه رویتگر مرتبه کاهش یافته‌ایی برای این دسته از حالت‌ها طراحی می شود. در [۱۶] با توجه به ساختار دینامیکی سیستم مقیاس بزرگ و برقراری شرایط ضروری با استفاده از قطری سازی و تبدیل‌های بکار برده شده، رویتگر غیر متمرکز طراحی شده است. در [۹] نیز طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته غیرمتمرکز با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) پیشنهاد شده است. در [۱۹-۱۷] نیز طراحی رویتگر با استفاده از LMI در جهت کنترل غیر متمرکز صورت گرفته است.

در این مقاله به طراحی یک رویتگر غیرمتمرکز مرتبه کاهش یافته خواهیم پرداخت که مزیت آن نسبت به روش‌های پیشین در ایجاد معادلات و روابط ماتریسی ساده در طراحی رویتگر است. در روند طراحی رویتگر پیشنهادی، از معیار پایداری لیاپانوف و LMI به منظور اثبات پایداری دینامیک خطای تخمین در طراحی رویتگر استفاده شده است.

۲- آماده سازی مسأله

معادله فضای حالت یک سیستم دینامیکی مقیاس بزرگ با ورودی نامعین به صورت (۱) است.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}v(t)\\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x}(t)\end{aligned} \qquad (۱)$$

که $\bar{x} \in R^n$ ، $u \in R^m$ ، $v \in R^q$ و $\bar{y} \in R^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی معین، ورودی نامعین و خروجی می‌باشند. همچنین ماتریس‌های $\bar{C}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{A}$ ثابت و دارای ابعاد مناسب هستند. سیستم (۱) شامل N زیر سیستم می‌باشد که به منظور سادگی از تجزیه سیستم مقیاس بزرگ در حضور ورودی‌های معین و نامعین با ساختار های زیر استفاده می شود که شرایط و/یا تجزیه محدود کننده‌ای نیست و با بکارگیری تبدیل همانندی مناسب می‌توان به آن دست یافت [۱۶].

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{A}_{N1} & \cdots & \bar{A}_{NN} \end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{B}_N \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=\begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \vdots \\ \bar{C}_N \end{bmatrix} \bar{D}=\begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{D}_N \end{bmatrix}$$

در واقع سیستم مذکور در دسته سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی با تعداد زیاد متغیر های حالت، قرار می‌گیرد. برای سادگی محاسبات طراحی رویتگر و کنترل کننده در چنین سیستم‌هایی، بطور معمول از تجزیه سیستم‌های ابعاد وسیع استفاده می‌شود. بنابراین سیستم ابعاد وسیع به تعدادی زیر سیستم با ترم‌های تداخلی(اثر زیر سیستم‌های دیگر در هر زیر سیستم) تجزیه می شود، سپس با استفاده از برقراری شرایط لازم که در قسمت‌های بعدی مطرح می‌گردد، برای هر زیر سیستم در حضور ورودی نامعین، رویتگری مرتبه کاهش یافته با ساختار مشخص طراحی خواهد شد. فرض بر آن است که سیستم چند متغیره مذکور رویت پذیر و پایدار بوده و $\bar{D}$ دارای رتبه کامل ستونی است. برای تجزیه سیستم ابعاد وسیع، متغیرهای حالت را می توان به دو بخش کلی تقسیم نمود، $\bar{x}_i(t)$ بردار متغیر حالت زیر سیستم i ام و $\bar{x}_i^R(t)$ بردار متغیر حالت $N-1$ زیر سیستم باقیمانده در نظر گرفته می شوند، از این رو در معادله فضای حالت زیر سیستم iام، بردار متغیر حالت زیر سیستم‌های باقیمانده معرف ترم‌های تداخل می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_i(t) \\ \dot{\bar{x}}_i^R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{ii} & \bar{A}_{iR} \\ \bar{A}_{Ri} & \bar{A}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i(t) \\ \bar{x}_i^R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_i & 0 \\ 0 & \bar{B}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t) \\ u_i^R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_i & 0 \\ 0 & \bar{D}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(t) \\ v_i^R(t) \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_i & \bar{C}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i(t) \\ \bar{x}_i^R(t) \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]

لذا معادله فضای حالت زیر سیستم iام را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{A}_{ii}\bar{x}_i(t) + \bar{A}_{iR}\bar{x}_i^R(t) + \bar{B}_i u_i(t) + \bar{D}_i v_i(t) \quad (۴)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}_i\bar{x}_i(t) + \bar{C}_{iR}\bar{x}_i^R(t) \quad (۵)$$

که $\bar{x}_i \in R^{n_i}$ و $\bar{y} \in R^p$ می‌باشند. دراینجا هدف حذف ترم‌های تداخلی ما بین زیر سیستم ها با استفاده از تبدیلی مناسب است. برای دست یابی به فرم مناسب هر زیرسیستم به روش زیر می توان عمل کرد.

با توجه به (۴)، برای حذف اثر تداخلی زیر سیستم‌های دیگر در زیر سیستم مذکور، باید در $\bar{x}_i^R(t)$ تغییراتی اعمال گردد، در [۱۶] از ماتریس زیر برای از بین بردن اثر تداخل زیر سیستم‌ها در (۴) استفاده شده است.

$$T_i = [\bar{C}_i^R \quad Q_i] \quad (۶)$$

که $Q_i \in R^{p\times(p-(n-n_i))}$ می باشد، در صورتی که $\bar{C}_i^R$ دارای رتبه کامل ستونی باشد با انتخاب $Q_i = null((\bar{C}_i^R)^T)$ می توان ناویژه بودن T_i را تضمین نمود، بنابراین T_i^{-1} را می توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$T_i^{-1} = \begin{bmatrix} T_{ii} \\ T_{iR} \end{bmatrix} \quad (۷)$$

که $T_{ii} \in R^{(n-n_i)\times p}$ و $T_{iR} \in R^{(p-(n-n_i)\times p}$ می‌باشند. از طرفی می‌دانیم که:

$$T_i^{-1}T_i = I \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{ii} \\ T_{iR} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{C}_i^R & Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ii}\bar{C}_i^R & T_{ii}Q_i \\ T_{iR}\bar{C}_i^R & T_{iR}Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (۸)$$

با توجه به (۸) و (۵) رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$T_{ii}\bar{y}(t) = T_{ii}\bar{C}_i\bar{x}_i(t) + \bar{x}_i^R(t) \Rightarrow \bar{x}_i^R(t) = T_{ii}\bar{y}(t) - T_{ii}\bar{C}_i\bar{x}_i(t) \quad (۹)$$

$$T_{iR}\bar{y}(t) = T_{iR}\bar{C}_i\bar{x}_i(t) \quad (۱۰)$$

با استفاده از (۹) در (۴) به معادله فضای حالت زیر برای زیر سیستم iام می‌توان دست یافت :

$$\dot{\bar{x}}_i = \tilde{A}_{ii}\bar{x}_i(t) + \bar{B}_i u_i(t) + \bar{D}_i v_i(t) + \bar{G}_i y \quad (۱۱)$$
$$\tilde{y}_i = \tilde{C}_i\bar{x}_i(t)$$

که در آن

$$\tilde{A}_{ii} = \bar{A}_{ii} - \bar{A}_{iR}T_{ii}\bar{C}_i \quad (۱۲)$$
$$\bar{G}_i = \bar{A}_{iR}T_{ii}$$
$$\tilde{C}_i = T_{iR}\bar{C}_i$$

باتوجه به ابعاد T_{iR}، اگر و فقط اگر $p > n - n_i$ باشد، T_{iR}وجود خواهد داشت. بنابراین شرط لازم برای وجود رویتگرهای محلی این است که تعداد خروجی‌های اندازه‌گیری شده بیشتر از تعداد متغیرهای حالت تداخلی در هر زیر سیستم باشد.

در [۲۱] نیز برای ساده شدن محاسبات در طراحی رویتگر، تبدیل زیر پیشنهاد شده است.

$$S_i = [null(\tilde{C}_i) \quad \tilde{C}_i^+] \quad (۱۳)$$

که $\tilde{C}_i^+$ معکوس تعمیم یافته ماتریس $\tilde{C}_i$ می‌باشد. با توجه به این تبدیل همانندی خواهیم داشت:

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i v_i(t) + G_i y$$
$$y_i = C_i x_i(t) \quad (۱۴)$$

ماتریس‌های بکاربرده شده در (۱۴) عبارتند از:

$$A_i = S_i^{-1}\tilde{A}_i S_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}$$
$$B_i = S_i^{-1}\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix}$$
$$C_i = \tilde{C}_i \times S_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_i} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$
$$D_i = S_i^{-1}\bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_{i1} \\ D_{i2} \end{bmatrix}$$
$$G_i = S_i^{-1}\bar{G}_i$$

که $A_{i11} \in R^{(n_i-p_i)\times(n_i-p_i)}$ ، $A_{i12} \in R^{(n_i-p_i)\times p_i}$ ، $A_{i21} \in R^{p_i\times(n_i-p_i)}$ ، $A_{i22} \in R^{p_i\times p_i}$ ، $B_{i1} \in R^{(n_i-p_i)\times m_i}$ ، $B_{i2} \in R^{p_i\times m_i}$ ، $D_{i1} \in R^{(n_i-p_i)\times q_i}$ و $D_{i2} \in R^{p_i\times q_i}$ ، $G_i \in R^{n_i\times p_i}$ و $C_i \in R^{p_i\times n_i}$ می‌باشند.

۳- طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته برای هر زیر سیستم

برای زیر سیستم رویت پذیر (۱۴)، دینامیک رویتگر مرتبه کاهش یافته با ورودی نامعین از مرتبه $n_i - p_i$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_i(t) = N_i z_i(t) + J_i u_i(t) + L_{i1}y_i(t) + L_{i2}y(t) \quad (۱-۱۶)$$

$$\hat{x}_i(t) = F_i z_i(t) - E_i y_i(t) \quad (۲-۱۶)$$

همچنین خطای تخمین در زیر سیستم iام به صورت (۱۷) است.

$$e_i(t) = z_i(t) - R_i x_i(t) \quad (۱۷)$$

که $N_i \in R^{(n_i-p_i)\times(n_i-p_i)}$ ، $J_i \in R^{(n_i-p_i)\times m_i}$ ، $L_{i1} \in R^{(n_i-p_i)\times p_i}$ ، $L_{i2} \in R^{(n_i-p_i)\times p}$ ، $R_i \in R^{(n_i-p_i)\times n_i}$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]

$E_i \in R^{n_i \times p_i}$, $F_i \in R^{n_i \times (n_i - p_i)}$, $B_{i2} \in R^{p_i \times m_i}$ و $G_i \in R^{n_i \times p_i}$ می باشند. لذا دینامیک خطا با استفاده از روابط (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= \dot{z}_i(t) - R_i\dot{x}_i(t) = N_i z_i(t) + J_i u_i(t) + L_{i1} y_i(t) \\ &+ L_{i2} y(t) - R_i A_{ii} x_i(t) \\ &- R_i B_i u_i(t) - R_i D_i v_i(t) - R_i G_i y = 0\end{aligned} \quad (۱۸)$$

که آنرا می‌توان به صورت زیر مرتب و بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) &= N_i e_i(t) + (N_i R_i - R_i A_i + L_{i1} C_i) x_i(t) \\ &+ (J_i - R_i B_i) u_i(t) + (L_{i2} - R_i G_i) y - R_i D_i v_i(t) = 0\end{aligned} \quad (۱۹)$$

حال به منظور همگرایی مجانبی خطا به سمت صفر، لازم است معادلات (۲۰) برقرار بوده و همچنین ماتریس مربعی N_i دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی باشد.

$$N_i R_i - R_i A_i = -L_{i1} C_i \quad (۱-۲۰)$$

$$R_i B_i = J_i \quad (۲-۲۰)$$

$$R_i G_i = L_{i2} \quad (۳-۲۰)$$

$$R_i D_i = 0 \quad (۴-۲۰)$$

از سوی دیگر برای تخمین متغیرهای حالت x_i که هدف اصلی این مقاله است می‌توان خطای تخمین متغیرهای حالت را به فرم زیر بازنویسی نموده و مساوی صفر قرار داد.

$$\begin{aligned}&\hat{x}_i(t) - x_i(t) = F_i z_i(t) - E_i y_i(t) - x_i(t) = \\ &F_i z_i(t) - E_i C_i x_i(t) - x_i(t) + F_i R_i x_i(t) - F_i R_i x_i(t) = \\ &F_i (z_i(t) - R_i x_i(t)) + (F_i R_i - F_i R_i - I_{n_i}) x_i(t) = 0\end{aligned} \quad (۲۱)$$

با توجه به $e_i(t) = z_i(t) - R_i x_i(t)$ ، به منظور صفر شدن مجانبی رابطه بالا باید ضریب بردار متغیر حالت را صفر نموده که به همین منظور:

$$\begin{aligned}&F_i e_i(t) + (F_i R_i - E_i C_i - I_{n_i}) x_i(t) = 0 \\ &\rightarrow F_i R_i - E_i C_i - I_{n_i} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} F_i & E_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix} = I_{n_i}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

با توجه به (۲۲) می توان ماتریس‌های بکار برده شده در تخمین x_i (۱۶-۲) را به سادگی و با محاسبات ساده‌تر ولی به شرط مشخص بودن ماتریس R_i بدست آورد. به عبارت دیگر لازم است:

$$\begin{bmatrix} F_i & E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix}^{-1} \quad (۲۳)$$

بدیهی است شرط برقراری رابطه (۲۳) کامل بودن رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix}$ می باشد. از سوی دیگر برای محاسبه R_i ، با توجه به رابطه (۲۰-۴) داریم:

$$R_i D_i = 0 \Rightarrow R_i = null(D_i) \quad (۲۴)$$

همچنین ماتریس R_i لازم است در رابطه (۲۰-۱) صدق نماید، به این منظور ابتدا ماتریس R_i به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$R_i = [R_{i1} \quad R_{i2}] \quad (۲۵)$$

که $R_{i1} \in R^{(n_i - p_i) \times (n_i - p_i)}$, $R_{i2} \in R^{(n_i - p_i) \times p_i}$ است. لذا رابطه (۲۰-۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}&N_i R_i - R_i A_i = -L_{i1} C_i \rightarrow \\ &N_i [R_{i1} \quad R_{i2}] - [R_{i1} \quad R_{i2}] \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix} = -L_{i1} \begin{pmatrix} 0 & I_{p_i} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow [N_i R_{i1} \quad N_i R_{i2}] \\ &- [R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21} \quad R_{i1} A_{i12} + R_{i2} A_{i22}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -L_{i1} \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (۲۶)$$

با توجه به (۲۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&N_i R_{i1} - R_{i1} A_{i11} - R_{i2} A_{i21} = 0 \rightarrow \\ &N_i = (R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1}\end{aligned} \quad (۲۷)$$

$$L_{i1} = R_{i1} A_{i12} + R_{i2} A_{i22} - N_i R_{i2} \quad (۲۸)$$

از سوی دیگر شرط لازم و کافی برای همگرایی خطای تخمین متغیرهای حالت، منفی معین بودن ماتریس N_i می‌باشد. به منظور استفاده از آن در فرآیند طراحی معادله لیاپانوفی به صورت (۲۹) برای آن تشکیل داده شده است.

$$N_i^T P_i + P_i N_i < 0 \quad \Rightarrow \quad if \quad N_i < 0 \quad (۲۹)$$

اگر $N_i < 0$ باشد آنگاه می توان $P_i > 0$ را یافت تا شرایط پایداری لیاپانوف برقرار باشد. P_i ماتریس معین مثبت می‌باشد، از اینرو باید معین منفی یا نیمه معین منفی بودن N_i را بررسی نمود. از رابطه (۲۹) داریم :

$$\begin{aligned}&((R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1})^T P_i \\ &\quad + P_i ((R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1}) < 0 \\ &(R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) \\ &+ (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1}) < 0\end{aligned} \quad (۳۰)$$

با تعریف دو متغیر زیر :

$$\begin{aligned}&(R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) = n_1 \\ &(R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1}) = n_2\end{aligned} \quad (۳۱)$$

برای برقراری شرط پایداری لیاپانوف در (۳۰) می توان حالت‌های زیر را بررسی نمود. به فرض پایداری هر زیر سیستم (A_{i11}) صرفنظر از علامت R_{i1} ، همواره n_1 معین منفی می باشد. در نتیجه $P_i > 0$ را می‌توان از معادله لیاپانوف زیر بدست آورد.

$$(R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) = n_1 < 0 \quad (۳۲)$$

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]

از آنجا که علامت R_{i1} نامعین می باشد به منظور برقراری تابع لیاپانوف مذکور علامت ماتریس n_2 را بررسی می نماییم، با توجه به (۲۴) می-توان رابطه زیر را در نظر گرفت [۲۱].

$$R_{i1}D_{i1}+R_{i2}D_{i2}=0\rightarrow \\ R_{i2}=(-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^{+})+k_i(I_{p_i}-D_{i2}D_{i2}^{+}) \quad (۳۳)$$

$$n_2=((-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}R_{i1}^{-1})^T P_i \\ +P_i((-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}R_{i1}^{-1})<0 \quad (۳۴)$$

برای برقراری (۳۴) باید علامت $\beta_1=(-D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}$ را بررسی نمود، اگر ماتریس $(-D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}$، معین منفی یا نیمه معین منفی باشد، رابطه (۳۰) برقرار بوده به عبارتی مجموع دو ماتریس معین منفی بطور حتم معین منفی می باشد [۲۲]. اگر ماتریس $(-D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}$، معین مثبت یا نیمه معین مثبت (شامل مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت یا صفر) باشد و در صورت برقراری رابطه (۳۵)، n_2 به طور حتم معین منفی بوده و معادله لیاپانوف ذکر شده برقرار می‌باشد. σ بردار شامل مقادیر ویژه هر ماتریس است.

$$\left|\sigma_{\beta_i}\right|<\left|\sigma_{A_{i11}}\right| \quad (۳۵)$$

۳-۱- الگوریتم طراحی

بر اساس مطالب و معادلات ارائه شده در بخش پیشین، امکان جمع بندی روند طراحی رویتگر بر اساس الگوریتم زیر ممکن خواهد بود:

۱- بررسی پایداری و رویت پذیری سیستم ابعاد وسیع با ساختار مطرح شده در (۱)، همچنین $\overline{D}$ باید دارای رتبه ستونی کامل باشند.
۲- دسته بندی متغیر های حالت سیستم (۱) و رسیدن به رابطه های (۴) و (۵) برای زیر سیستم iام.
۳- در صورتی که تعداد خروجی‌های اندازه گیری شده بیشتر از تعداد متغیرهای حالت تداخلی باشد، با استفاده از ماتریس (۶) و معکوس آن به معادله (۱۱) برای هر زیر سیستم خواهیم رسید.
۴- به منظور ساده نمودن محاسبات با استفاده از تبدیل (۱۳)، رابطه (۱۴) برای هر زیر سیستم حاصل می گردد.
۵- رویتگر مرتبه کاهش یافته (۱۶) با توجه به پایداری و رویت پذیری (۱۴) در نظر گرفته می شود.
۶- با توجه به تعریف خطای تخمین در (۱۷) و حل معادلات مربوط به صفر شدن آن که در روابط (۲۰-۱) تا (۲۰-۴) مشخص شده است، با در نظر گرفتن (۲۰-۴)، R_i طبق (۲۴) محاسبه می شود.
۷- سپس ماتریس N_i طبق (۲۷) محاسبه می شود.
۸- برای تضمین پایداری خطا، معادله لیاپانوف (۲۹) در نظر گرفته شده است، در صورتی که $(-D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}<0$، آنگاه N_i ماتریسی منفی معین بوده و زمانی که $(-D_{i1})(D_{i2}^{+})A_{i21}\geq 0$، در صورت برقراری (۳۵)، N_i منفی معین بدست خواهد آمد.
۹- در صورت پایداری N_i با استفاده از R_i، ماتریس‌های J_i در (۲۰-۲) و L_{i2} در (۲۰-۳) و L_{i1} در (۲۸) محاسبه می شوند.
۱۰- با استفاده از (۲۳) می توان تخمین متغیر حالت زیر سیستم iام در (۱۶-۲) را محاسبه نمود.

۴- نتایج شبیه سازی

سیستم ابعاد وسیع زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1.61 & 0 & 0 & -0.96 & -0.58 & -0.6\\ 0 & -1.30 & 0 & -0.96 & -0.58 & -1.01\\ 0 & 0 & -2.42 & -2.82 & 0.88 & 1.65\\ 2.05 & -0.91 & 2.18 & 1.40 & 0 & 0\\ 0.17 & 0.24 & -1.14 & 0 & -1.9 & 0\\ 0.1 & -0.24 & 0.08 & 0 & 0 & -2.20\end{bmatrix}\bar{x}(t) \\ +\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}v(t)$$

$$\bar{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\bar{x}(t)$$

با توجه به پایداری و رویت پذیری سیستم و کامل بودن رتبه ستونی ماتریس $\overline{D}$ امکان طراحی رویتگر با ورودی نامعین مورد نظر مطابق با الگوریتم پیشنهادی در بخش ۳-۱ وجود دارد. در گام اول سیستم اصلی را به دو زیر سیستم تقسیم نموده، که هر زیر سیستم شامل سه متغیر حالت می‌باشد. با توجه به رویت پذیری هر زیر سیستم و رتبه ماتریس C_i برای هر زیر سیستم یک رویتگر مرتبه کاهش یافته از مرتبه ۲ با استفاده الگوریتم ارائه شده در بالا طراحی می‌شود. حالت‌های تخمین زده شده و خطای تخمین برای هر زیر سیستم با در نظر گرفتن ورودی نامعین به صورت پله واحد در شکل‌های۱ و ۲ نشان داده شده است. همچنین شکل‌های ۳ و ۴ نشان دهنده مقایسه روش پیشنهادی و روش طراحی رویتگر لیونبرگر [۲۳] می‌باشد، با توجه به شبیه سازی‌های انجام شده رویتگر لیونبرگر در این گونه از سیستم‌ها کارایی لازم را ندارد.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]

تبدیل‌های ماتریسی قابل استفاده برای دست یابی به معادله فضای حالت مطلوب زیر سیستم اول عبارتند از:

$$T_1 = [\bar{C}_1^R \quad Q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5774 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5774 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

$$, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0.8165 & -0.4082 & 0.2887 \\ -0.1266 & 0.5633 & 0.5774 \\ 0.5633 & 0.7184 & -0.2887 \end{bmatrix}$$

با استفاده از T_1^{-1} و S_1^{-1} و S_1 به معادله زیر برای زیر سیستم اول دست خواهیم یافت:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -2.9207 & 0.8 & -0.2096 \\ -1.51 & -0.5828 & -0.0727 \\ 2.9345 & 0.2735 & -0.48 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1.3798 \\ 0.3101 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} -0.1266 \\ 0.5633 \\ 1.1547 \end{bmatrix} v_1(t) + \begin{bmatrix} 0.0956 & 1.4225 & -1.8366 & -0.4142 \\ 0.5422 & 1.1521 & -1.6633 & -0.5113 \\ -1.5127 & -1.4241 & 0.6947 & -0.7294 \end{bmatrix} y$$

$$y_1 = [0 \quad 0 \quad 1] x_1(t)$$

شرایط اولیه زیر سیستم اول به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\bar{x}_1(0) = [1 \quad -1 \quad 2]^T$$

$$x_1(0) = inv(S_1) \times \bar{x}_1(0) = [2.0696 \quad 0.4652 \quad -1.7321]^T$$

تبدیل‌های ماتریسی قابل محاسبه برای زیر سیستم دوم عبارتند از:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5774 \\ 1 & 1 & 0 & -0.5774 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5774 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.2113 & 0.7887 & 0.5774 \\ 0.7887 & 0.2113 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

در نتیجه :

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.3541 & -2.1617 & 1.2366 \\ 1.6084 & -0.4026 & -1.0634 \\ 0.3641 & -1.9692 & -0.9 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0.7887 \\ 0.2113 \\ 1.1547 \end{bmatrix} u_2(t) + \begin{bmatrix} 0.7887 \\ 0.2113 \\ 1.1547 \end{bmatrix} v_2(t) + \begin{bmatrix} 1.0869 & 0.2115 & -0.8754 & 1.0808 \\ -0.9069 & -0.1215 & 0.7854 & -2.1408 \\ 0.8987 & 0.3252 & -0.5735 & 0.5543 \end{bmatrix} y$$

$$y_2 = [0 \quad 0 \quad 1] x_2(t)$$

و شرایط اولیه برای زیر سیستم دوم عبارت است از:

$$\bar{x}_2(0) = [0 \quad 1 \quad 3]^T$$

$$x_2(0) = inv(S_2) \times \bar{x}_2(0) = [2.5774 \quad 1.4226 \quad -1.1547]^T$$

با استفاده از روش مطرح شده، معادله رویتگر مرتبه کاهش یافته برای زیر سیستم‌های اول و دوم عبارت است از:

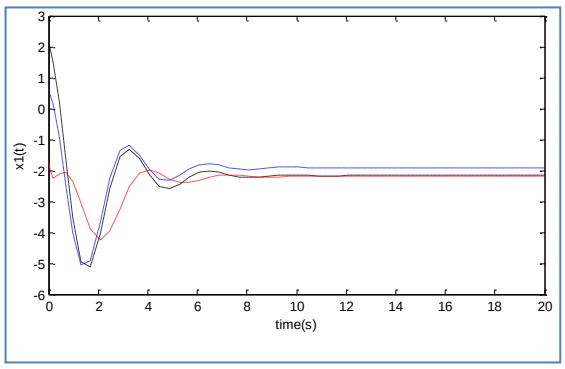
$$\dot{z}_1(t) = \begin{bmatrix} -1.6463 & -3.1833 \\ 0.4892 & -1.6678 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} 0.8584 \\ 1.1239 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0.2980 \\ 0.3349 \end{bmatrix} y_1(t) + \begin{bmatrix} 1.0275 & 2.0792 & -2.4233 & -0.3441 \\ -0.5178 & 0.4763 & -0.863 & 0.3867 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\dot{z}_2(t) = \begin{bmatrix} 0.2010 & 1.2798 \\ -1.5168 & -2.8460 \end{bmatrix} z_2(t) + + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2(t) + \begin{bmatrix} 0.1279 \\ -0.1024 \end{bmatrix} y_2(t) + \begin{bmatrix} -0.9466 & -0.1735 & 0.7732 & -2.0241 \\ 0.6818 & 0.0412 & -0.6405 & 1.1919 \end{bmatrix} y(t)$$

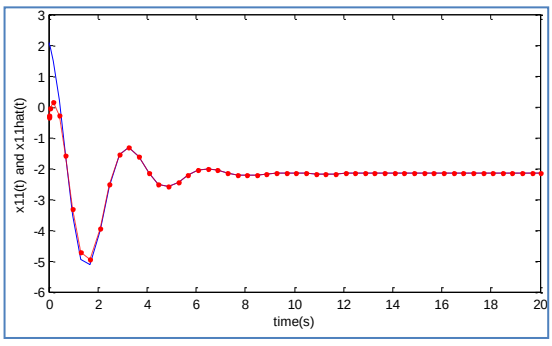
شرایط اولیه رویتگر های مرتبه کاهش یافته زیر سیستم‌های مورد نظر به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$z_1(0) = [1 \quad -1]^T$$

$$z_2(0) = [0 \quad 1]^T$$

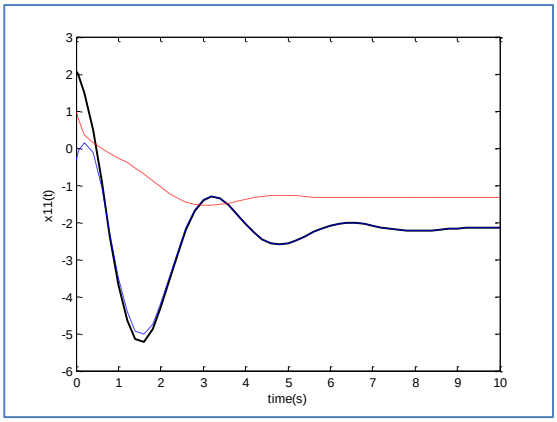


الف- نمایش متغییر های حالت زیر سیستم اول از مرتبه ۳

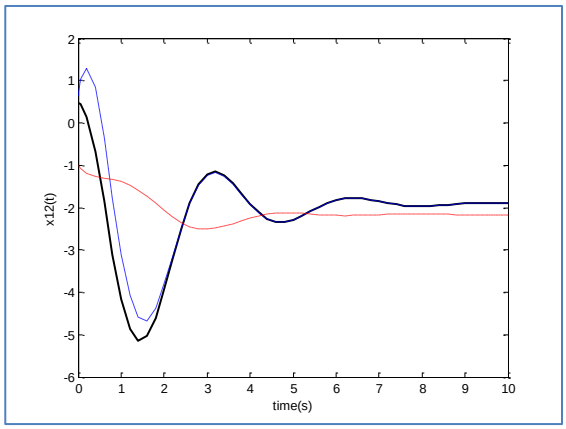


ب- نمایش اولین متغیرحالت زیر سیستم اول به همراه تخمین آن توسط رویتگر از مرتبه ۲ با ورودی نا معین

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]



الف- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم اول با استفاده از روش پیشنهادی و رویتگر لیونبرگر



ب- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم اول با استفاده از روش پیشنهادی و رویتگر لیونبرگر

شکل۳- مقایسه رویتگر پیشنهادی با رویتگر لیونبرگر برای زیر سیستم اول. (خط توپر و خط چین و خط-نقطه به ترتیب نشان دهنده حالت اصلی، حالت تخمین زده شده توسط رویتگر پیشنهادی و حالت تخمین زده شده توسط رویتگر لیونبرگر می باشد)

مراجع :

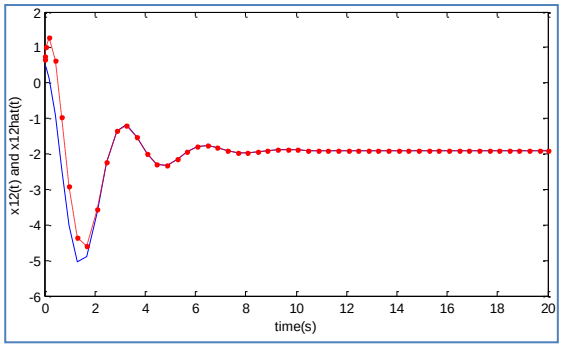
[1] Y. Zhu and P. R. Pagilla, “decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems,” IMA. Journal of Mathematical Control and Information, vol. 24, pp. 57-69, 2007.

[2] M. Saif and Y. Guan, “Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems,” IEEE Automatica, Vol. 28, No. 1, pp. 215-219, 1992.

[3] J. T. Spooner and K. M. Passino, “Decentralized adaptive control of nonlinear systems using radial basis neural networks,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. 44, No. 11, pp. 2050-2057, 1999.

[4] S. N. Huang, K. K. Tan and T. H. Lee, “A decentralized control of interconnected systems using neural networks,” IEEE Trans. Neural Netw, Vol. 13, No. 6, pp. 1554-1557, 2002.

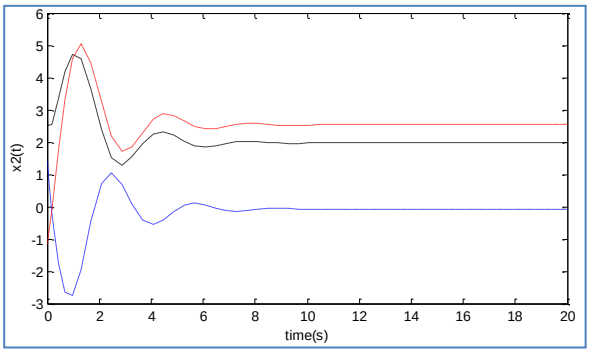
[5] K. Kalsi and J. Lian and S. H. Zak, “Decentralized control using reduced-order unknown input observers,” IEEE Conference on Decision and Control, 2008.



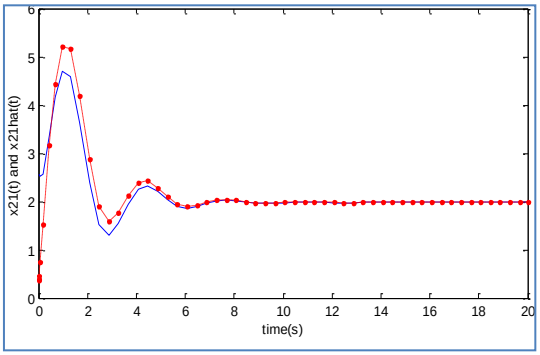
ج- نمایش دومین متغیرحالت زیر سیستم اول به همراه تخمین آن

شکل ۱ – رویتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین برای زیرسیستم اول

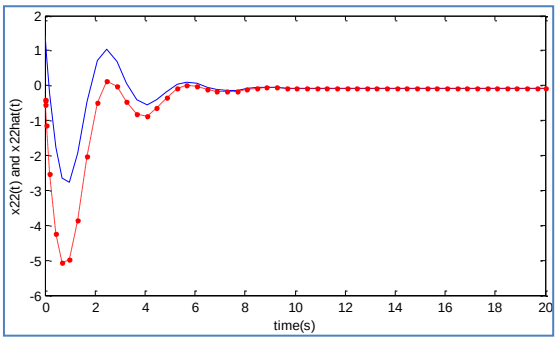
(خط توپر: متغیر حالت و خط-نقطه: تخمین متغیرحالت)



الف-نمایش متغییر های حالت زیر سیستم دوم از مرتبه ۳



ب- نمایش اولین متغیرحالت زیر سیستم دوم به همراه تخمین آن توسط رویتگر از مرتبه ۲ با ورودی نا معین

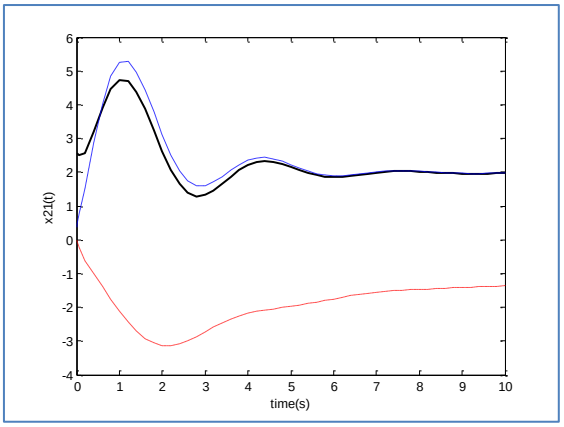


ج- نمایش دومین متغیرحالت زیر سیستم دوم به همراه تخمین آن

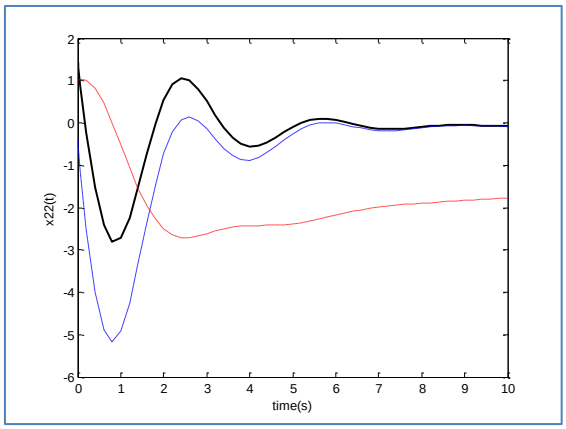
شکل ۲- رویتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین برای زیرسیستم دوم

(خط توپر: متغیر حالت و خط-نقطه: تخمین متغیرحالت)

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]



الف- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم دوم با استفاده از روش پیشنهادی و رویتگر لیونبرگر



ب- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم دوم با استفاده از روش پیشنهادی و رویتگر لیونبرگر

شکل۴- مقایسه رویتگر پیشنهادی با رویتگر لیونبرگر برای زیر سیستم دوم. (خط توپر و خط چین و خط-نقطه به ترتیب نشان دهنده حالت اصلی، حالت تخمین زده شده توسط رویتگر پیشنهادی و حالت تخمین زده شده توسط رویتگر لیونبرگر می باشد)

[6] M. Aldeen and K. H. Lau and J. F. Marsh, "A decentralized observer for interconnected systems," UKACC International Conference on control, No. 455, 1998.
[7] M. K. Sundareshan, "Decentralized observation in large scale Systems," IEEE Trans. Syst. Man Cybern, Vol. 7, pp. 863-867, 1977.
[8] A. S. Tlili and N. B. Braiek, "Decentralized observer based guaranteed cost control for nonlinear interconnected systems," International journal of Control and Automation, Vol. 2, No. 2, 2009.
[9] C. D. Johnson, "On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs," Int. J. Contr, Vol. 21, pp. 825-831, 1975.
[10] S. H. wang, E. J. Davision and P. Dorato, "Observing the states of systems with unmeasurable disturbances," IEEE Trans. Automat. Contr, Vol. 20, No. 5, pp.716-717, 1975.
[11] P. Kudva, N. Viswanagham and A. Ramakrishna, "Observers for linear time invariant systems subject to unknown inputs," Int. J. Contr. Vol. 35, pp. 183-188, 1982.
[12] D. D. Siljack and M. B. Vukcevic, "Decentralization stabilization and estimation of large- scale linear systems," IEEE Trans. Aut. Control, Vol. 21, No.3, pp. 363-366, 1976.
[13] D. D. Siljack and M. K. Vukcevic, "On decentralized estimation," Int. J. Control, Vol. 27, pp. 113-131, 1978.
[14] M. K. Sundareshan, "Decentralized observation in large scale systems," IEEE Trans. Syst. Man Cybern, Vol. 7, pp. 863-867, 1977.
[15] M. K. Sundareshan and R. M. Elbanna, "Design of decentralized observation schemes for large scale systems: some new result," Automatica, Vol. 26, No. 4, pp. 789-796, 1990.
[16] M. Aldeen and J. F. Marsh, "Decentralised observer-based control scheme for interconnected dynamical systems with unknown inputs," IEE Proc. Control Theory and Applications, Vol. 146, NO. 5, pp. 349-358, 1999.
[17] D. D. Sijak and D. M. Stipanovic, "Autonomous decentralized control," In Proc, International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Nashiville, TN, 2001.
[17] Y. Zhu and P. R. Pagilla, "Decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems," IMA J. Math. Control, Vol. 24, No. 1, pp. 57-69, 2006.
[18] J. Lian, K. Kalsi and S. H. Zak, "Reduced order observer based decentralized controller design: the lmi approach," 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, Makedonia Place, Thessaloniki, Greece, 2009.
[19] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 36, No. 5, pp. 632-635, 1991.
[20] P. Kudva, N. Viswanadham, and A. Ramakishna, "Observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 1, pp. 113-115, 1980.
[21] A. Karimi, "Robust controller design by convex optimization," Lectures in Robust Control, 2007.
[۲۳] علی، دکتر خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن ، انتشارات دانشگاه تهران ، چاپ ششم، ۱۳۸۸.

[Downloaded from joc.kntu.ac.ir on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1391.6.2.7.1]