

# طراحی روینگر مرتبه کاهش یافته غیر متمرکز برای سیستم‌های مقیاس بزرگ در حضور ورودی نامعین

بیژن معاونی<sup>۱</sup>، مینا غلامی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، [b\\_moaveni@iust.ac.ir](mailto:b_moaveni@iust.ac.ir)

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد کنترل، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، [minagholamii@gmail.com](mailto:minagholamii@gmail.com)

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۳/۱۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۶/۳۱)

**چکیده:** در این مقاله روشی نوین برای طراحی روینگر مرتبه کاهش یافته غیر متمرکز برای سیستم‌های دینامیکی مقیاس بزرگ با ورودی نامعین مطرح می‌گردد. در روش پیشنهادی، سیستم مقیاس بزرگ با استفاده از تبدیل‌های مناسب به تعدادی زیر سیستم شامل ترم‌های تداخلی تجزیه گشته و در معادلات دینامیکی حاصل هر زیر سیستم حذف خواهد گردید، لذا در تخمین متغیرهای حالت به تبادل اطلاعات مابین زیر سیستم‌ها نیازی نخواهد بود. در این مقاله، با برقراری شرط وجودی یک روینگر پایدار با ورودی نامعین برای هر زیر-سیستم و با استفاده از تحلیل دینامیک خطای تخمین، همگرایی خطای تخمین به سمت صفر تضمین گشته و روینگرهای غیرمتمرکز مرتبه کاهش یافته پایداری طراحی می‌شود. در انتها با ارائه مثال عددی و انجام شبیه سازی، عملکرد مطلوب روینگر پیشنهادی تحلیل و بررسی خواهد گشت.

**کلمات کلیدی:** سیستم مقیاس بزرگ، روینگر غیرمتمرکز، روینگر مرتبه کاهش یافته، روینگر با ورودی نامعین.

## Decentralized Reduced Order Observer Design for Large-Scale Plants with Unknown Inputs

Bijan Moaveni, Mina Gholami

**Abstract:** In this paper, we propose a new method to design a decentralized reduced order observer for large scale plants with unknown inputs. In this approach, large scale plant is decomposed into several subsystems with interconnected terms, then interconnected terms will be eliminated by using the appropriate transformations in new form of dynamical equation of each subsystem. Based on this method, states estimation doesn't require exchanging information between the subsystems. Here, if plant satisfies the existence condition for designing stable observer with unknown input (UIO), we use estimation error dynamic and negative definite to provide the observer convergence. Finally, effectiveness of the method is shown by using a numerical example and corresponding simulation.

**Key words:** Large Scale Plant, Decentralized Observer, Reduce Order Observer, Unknown Input Observer.

### ۱- مقدمه

پیچیده، بسیار حائز اهمیت است که دلایل آن بر مهندسين و محققين حوزه مهندسي کنترل پوشيده نيست [۲]. براي کنترل يك سيستم ابعاد وسيع در روش‌هاي مبتني بر فيدبک متغیرهای حالت، به اطلاعات تمامی متغیرهای حالت نیاز است [۳-۴]، این در حالی است که در سیستم‌های

سیستم‌های مقیاس بزرگ را در سیستم‌های مختلفی از قبیل سیستم‌های الکتریکی، فرآیندهای صنعتی و سیستم‌های حمل و نقل و ارتباطی می-توان یافت [۱]. مفهوم کنترل غیر متمرکز در سیستم‌های ابعاد وسیع و

معادله فضای حالت یک سیستم دینامیکی مقیاس بزرگ با ورودی نامعین به صورت (۱) است.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}v(t) \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $\bar{y} \in R^P$  و  $v \in R^q$ ،  $u \in R^m$ ،  $\bar{x} \in R^n$  حالت، ورودی معین، ورودی نامعین و خروجی می‌باشند. همچنین ماتریس‌های  $\bar{A}$ ،  $\bar{B}$ ،  $\bar{C}$ ،  $\bar{D}$  ثابت و دارای ابعاد مناسب هستند. سیستم (۱) شامل  $N$  زیر سیستم می‌باشد که به منظور سادگی از تجزیه سیستم مقیاس بزرگ در حضور ورودی‌های معین و نامعین با ساختارهای زیر استفاده می‌شود که شرایط و/یا تجزیه محدود کننده‌ای نیست و با بکارگیری تبدیل همانندی مناسب می‌توان به آن دست یافت [۱۶].

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \dots & \bar{A}_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}_{M1} & \dots & \bar{A}_{MN} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{B}_N \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \vdots \\ \bar{C}_N \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{D}_N \end{bmatrix}$$

در واقع سیستم مذکور در دسته سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی با تعداد زیاد متغیرهای حالت، قرار می‌گیرد. برای سادگی محاسبات طراحی رویتگر و کنترل کننده در چنین سیستم‌هایی، بطور معمول از تجزیه سیستم‌های ابعاد وسیع استفاده می‌شود. بنابراین سیستم ابعاد وسیع به تعدادی زیر سیستم با ترم‌های تداخلی (اثر زیر سیستم‌های دیگر در هر زیر سیستم) تجزیه می‌شود، سپس با استفاده از برقراری شرایط لازم که در قسمت‌های بعدی مطرح می‌گردد، برای هر زیر سیستم در حضور ورودی نامعین، رویتگری مرتبه کاهش یافته با ساختار مشخص طراحی خواهد شد. فرض بر آن است که سیستم چند متغیره مذکور رویت پذیر و پایدار بوده و  $\bar{D}$  دارای رتبه کامل ستونی است. برای تجزیه سیستم ابعاد وسیع، متغیرهای حالت را می‌توان به دو بخش کلی تقسیم نمود،  $\bar{x}_i(t)$  بردار متغیر حالت زیر سیستم  $i$ ام و  $\bar{x}_i^R(t)$  بردار متغیر حالت  $N-1$  زیر سیستم باقیمانده در نظر گرفته می‌شوند، از این رو در معادله فضای حالت زیر سیستم  $i$ ام، بردار متغیر حالت زیر سیستم‌های باقیمانده معرف ترم‌های تداخل می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_i(t) \\ \dot{\bar{x}}_i^R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{ii} & \bar{A}_{iR} \\ \bar{A}_{Ri} & \bar{A}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i(t) \\ \bar{x}_i^R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_i & 0 \\ 0 & \bar{B}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t) \\ u_i^R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_i & 0 \\ 0 & \bar{D}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(t) \\ v_i^R(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{C}_i \\ \bar{C}_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i(t) \\ \bar{x}_i^R(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

واقعی، اندازه گیری تمام متغیرهای حالت امکان پذیر و اقتصادی نیست. بنابراین طراحی رویتگرها در این دسته از سیستم‌ها از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردار می‌باشند. این امر از آن رو بسیار مهم می‌نماید که مساله طراحی و اجرای رویتگرهای متمرکز در این دسته از سیستم‌ها با چالش‌های مختلفی مواجه است [۵]. لذا محققین و مهندسين حوزه کنترل به دنبال طراحی رویتگرهای غیرمتمرکز برای تخمین متغیرهای حالت زیر سیستم‌ها در کنترل سیستم‌های مقیاس بزرگ می‌باشند [۶] [۱]. از مزایای دیگر رویتگرهای غیر متمرکز این است که در تجزیه سیستم‌های ابعاد وسیع، به گونه‌ای اثر تداخلی زیر سیستم‌ها حذف می‌گردند که این امر خود موجب سادگی در محاسبات و عدم نیاز به مبادله اطلاعات مابین زیر سیستم‌ها می‌باشد [۷-۸] [۱].

نکته قابل توجه که در طراحی و بکارگیری رویتگرها در عمل حائز اهمیت است، حضور ورودی‌های نامعین از جمله نویز و اغتشاش در سیستم‌های واقعی است. این امر اجتناب ناپذیر، بکارگیری رویتگرهای متداول (که از اطلاعات تمامی ورودی‌ها جهت تخمین متغیرهای حالت استفاده می‌کنند) را با مشکل جدی مواجه خواهد نمود. لذا استفاده از رویتگرهای با ورودی نامعین در موارد کاربردی بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است [۹-۱۱]. از سوی دیگر لازم به ذکر است که از کاربردهای عمده رویتگرهای با ورودی نامعین، استفاده از ایده این دسته از رویتگرها در طراحی رویتگرهای غیر متمرکز است [۱۲-۱۵].

در [۲] روشی ساده برای طراحی رویتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین با توجه به ساختار ویژه سیستم دینامیکی و تجزیه ماتریس ورودی نامعین، در صورت برقراری شرایط وجودی، پیشنهاد شده است. در این روش ترم-های تداخلی به گونه‌ای تجزیه شده که به صورت ورودی نامعین در نظر گرفته می‌شوند، سپس با استفاده از تبدیل‌های همانندی اثر ورودی نامعین را در تعدادی از متغیرهای حالت از بین برده و در نتیجه رویتگر مرتبه کاهش یافته‌ای برای این دسته از حالت‌ها طراحی می‌شود. در [۱۶] با توجه به ساختار دینامیکی سیستم مقیاس بزرگ و برقراری شرایط ضروری با استفاده از فظری سازی و تبدیل‌های بکار برده شده، رویتگر غیر متمرکز طراحی شده است. در [۹] نیز طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته غیرمتمرکز با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) پیشنهاد شده است. در [۱۷-۱۹] نیز طراحی رویتگر با استفاده از LMI در جهت کنترل غیر متمرکز صورت گرفته است.

در این مقاله به طراحی یک رویتگر غیرمتمرکز مرتبه کاهش یافته خواهیم پرداخت که مزیت آن نسبت به روش‌های پیشین در ایجاد معادلات و روابط ماتریسی ساده در طراحی رویتگر است. در روند طراحی رویتگر پیشنهادی، از معیار پایداری لیاپانوف و LMI به منظور اثبات پایداری دینامیک خطای تخمین در طراحی رویتگر استفاده شده است.

## ۲- آماده سازی مسأله

باتوجه به ابعاد  $T_{iR}$ ، اگر و فقط اگر  $p > n - n_i$  باشد،  $T_{iR}$  وجود خواهد داشت. بنابراین شرط لازم برای وجود رویتگرهای محلی این است که تعداد خروجی‌های اندازه‌گیری شده بیشتر از تعداد متغیرهای حالت تداخلی در هر زیر سیستم باشد.

در [۲۱] نیز برای ساده شدن محاسبات در طراحی رویتگر، تبدیل زیر پیشنهاد شده است.

$$S_i = [\text{null}(\tilde{C}_i) \quad \tilde{C}_i^+] \quad (13)$$

که  $\tilde{C}_i^+$  معکوس تعمیم یافته ماتریس  $\tilde{C}_i$  می‌باشد. با توجه به این تبدیل همانندی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_{ii}x_i(t) + B_iu_i(t) + D_iv_i(t) + G_iy \\ y_i &= C_ix_i(t) \end{aligned} \quad (14)$$

ماتریس‌های بکاربرده شده در (۱۴) عبارتند از:

$$\begin{aligned} A_i &= S_i^{-1} \tilde{A}_i S_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix} \\ B_i &= S_i^{-1} \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix} \\ C_i &= \tilde{C}_i \times S_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_i} \end{bmatrix} \\ D_i &= S_i^{-1} \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} D_{i1} \\ D_{i2} \end{bmatrix} \\ G_i &= S_i^{-1} \tilde{G}_i \end{aligned} \quad (15)$$

که  $A_{i12} \in R^{(n_i-p_i) \times p_i}$ ،  $A_{i21} \in R^{p_i \times (n_i-p_i)}$ ،  $A_{i11} \in R^{(n_i-p_i) \times (n_i-p_i)}$ ،  
 $D_{i2} \in R^{p_i \times q_i}$ ،  $B_{i2} \in R^{p_i \times m_i}$ ،  $B_{i1} \in R^{(n_i-p_i) \times m_i}$ ،  $A_{i22} \in R^{p_i \times p_i}$ ،  
 $C_i \in R^{p_i \times n_i}$  می‌باشند و  $G_i \in R^{n_i \times p_i}$  و  $D_{i1} \in R^{(n_i-p_i) \times q_i}$ .

### ۳- طراحی رویتگر مرتبه کاهش یافته برای هر زیر سیستم

برای زیر سیستم رویت پذیر (۱۴)، دینامیک رویتگر مرتبه کاهش یافته با ورودی نامعین از مرتبه  $n_i - p_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{z}_i(t) = N_i z_i(t) + J_i u_i(t) + L_{i1} y_i(t) + L_{i2} y(t) \quad (1-16)$$

$$\hat{x}_i(t) = F_i z_i(t) - E_i y_i(t) \quad (2-16)$$

همچنین خطای تخمین در زیر سیستم  $\hat{e}_i$  به صورت (۱۷) است.

$$\hat{e}_i(t) = z_i(t) - R_i x_i(t) \quad (17)$$

که  $J_i \in R^{(n_i-p_i) \times m_i}$ ،  $N_i \in R^{(n_i-p_i) \times (n_i-p_i)}$ ،  
 $R_i \in R^{(n_i-p_i) \times n_i}$ ،  $L_{i2} \in R^{(n_i-p_i) \times p}$ ،  $L_{i1} \in R^{(n_i-p_i) \times p_i}$

لذا معادله فضای حالت زیر سیستم  $\hat{e}_i$  را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{\hat{x}}_i = \bar{A}_{ii} \hat{x}_i(t) + \bar{A}_{iR} \bar{x}_i^R(t) + \bar{B}_i u_i(t) + \bar{D}_i v_i(t) \quad (4)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}_i \hat{x}_i(t) + \bar{C}_{iR} \bar{x}_i^R(t) \quad (5)$$

که  $\bar{y} \in R^p$  و  $v_i \in R^{q_i}$ ،  $u_i \in R^{m_i}$ ،  $\bar{x}_i^R \in R^{n-n_i}$ ،  $\hat{x}_i \in R^{n_i}$  باشند. در اینجا هدف حذف ترم‌های تداخلی ما بین زیر سیستم‌ها با استفاده از تبدیلی مناسب است. برای دست‌یابی به فرم مناسب هر زیرسیستم به روش زیر می‌توان عمل کرد.

با توجه به (۴)، برای حذف اثر تداخلی زیر سیستم‌های دیگر در زیر سیستم مذکور، باید در  $\bar{x}_i^R(t)$  تغییراتی اعمال گردد، در [۱۶] از ماتریس زیر برای از بین بردن اثر تداخل زیر سیستم‌ها در (۴) استفاده شده است.

$$T_i = [\bar{C}_i^R \quad Q_i] \quad (6)$$

که  $Q_i \in R^{p \times (p - (n - n_i))}$  می‌باشد، در صورتی که  $\bar{C}_i^R$  دارای رتبه کامل ستونی باشد با انتخاب  $Q_i = \text{null}((\bar{C}_i^R)^T)$  می‌توان ناویژه بودن  $T_i$  را تضمین نمود، بنابراین  $T_i^{-1}$  را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$T_i^{-1} = \begin{bmatrix} T_{ii} \\ T_{iR} \end{bmatrix} \quad (7)$$

که  $T_{iR} \in R^{(p - (n - n_i)) \times p}$  و  $T_{ii} \in R^{(n - n_i) \times p}$  می‌باشند. از طرفی می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} T_i^{-1} T_i &= I \Rightarrow \begin{bmatrix} T_{ii} \\ T_{iR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_i^R & Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ii} \bar{C}_i^R & T_{ii} Q_i \\ T_{iR} \bar{C}_i^R & T_{iR} Q_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به (۸) و (۵) رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$T_{ii} \bar{y}(t) = T_{ii} \bar{C}_i \hat{x}_i(t) + \bar{x}_i^R(t) \Rightarrow \quad (9)$$

$$\bar{x}_i^R(t) = T_{ii} \bar{y}(t) - T_{ii} \bar{C}_i \hat{x}_i(t)$$

$$T_{iR} \bar{y}(t) = T_{iR} \bar{C}_i \hat{x}_i(t) \quad (10)$$

با استفاده از (۹) در (۴) به معادله فضای حالت زیر برای زیر سیستم  $\hat{e}_i$  می‌توان دست یافت:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= \tilde{A}_{ii} \hat{x}_i(t) + \tilde{B}_i u_i(t) + \tilde{D}_i v_i(t) + \tilde{G}_i y \\ \tilde{y}_i &= \tilde{C}_i \hat{x}_i(t) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ii} &= \bar{A}_{ii} - \bar{A}_{iR} T_{ii}^{-1} \bar{C}_i \\ \tilde{G}_i &= \bar{A}_{iR} T_{ii}^{-1} \\ \tilde{C}_i &= T_{iR} \bar{C}_i \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین ماتریس  $R_i$  لازم است در رابطه (۲۰-۱) صدق نماید، به این منظور ابتدا ماتریس  $R_i$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$R_i = [R_{i1} \quad R_{i2}] \quad (25)$$

که  $R_{i1} \in R^{(n_i-p_i) \times (n_i-p_i)}$ ،  $R_{i2} \in R^{(n_i-p_i) \times p_i}$  است. لذا رابطه (۲۰-۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} N_i R_i - R_i A_i &= -L_{i1} C_i \rightarrow \\ N_i [R_{i1} \quad R_{i2}] - [R_{i1} \quad R_{i2}] \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix} &= -L_{i1} \begin{bmatrix} 0 & I_{p_i} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [N_i R_{i1} \quad N_i R_{i2}] & \\ -[R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21} \quad R_{i1} A_{i12} + R_{i2} A_{i22}] & \\ = (0 \quad -L_{i1}) & \end{aligned} \quad (26)$$

با توجه به (۲۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N_i R_{i1} - R_{i1} A_{i11} - R_{i2} A_{i21} &= 0 \rightarrow \\ N_i &= (R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

$$L_{i1} = R_{i1} A_{i12} + R_{i2} A_{i22} - N_i R_{i2} \quad (28)$$

از سوی دیگر شرط لازم و کافی برای همگرایی خطای تخمین متغیرهای حالت، منفی معین بودن ماتریس  $N_i$  می‌باشد. به منظور استفاده از آن در فرآیند طراحی معادله لیاپانوفی به صورت (۲۹) برای آن تشکیل داده شده است.

$$N_i^T P_i + P_i N_i < 0 \Rightarrow \text{if } N_i < 0 \quad (29)$$

اگر  $N_i < 0$  باشد آنگاه می‌توان  $P_i > 0$  را یافت تا شرایط پایداری لیاپانوف برقرار باشد.  $P_i$  ماتریس معین مثبت می‌باشد، از اینرو باید معین منفی یا نیمه معین منفی بودن  $N_i$  را بررسی نمود. از رابطه (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} ((R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1})^T P_i & \\ + P_i ((R_{i1} A_{i11} + R_{i2} A_{i21}) R_{i1}^{-1}) & < 0 \\ (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) & \\ + (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1}) & < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

با تعریف دو متغیر زیر:

$$\begin{aligned} (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) &= n_1 \\ (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i2} A_{i21} R_{i1}^{-1}) &= n_2 \end{aligned} \quad (31)$$

برای برقراری شرط پایداری لیاپانوف در (۳۰) می‌توان حالت‌های زیر را بررسی نمود. به فرض پایداری هر زیر سیستم ( $A_{i11}$ ) صرفنظر از علامت  $R_{i1}$ ، همواره  $n_1$  معین منفی می‌باشد. در نتیجه  $P_i > 0$  را می‌توان از معادله لیاپانوف زیر بدست آورد.

$$(R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i (R_{i1} A_{i11} R_{i1}^{-1}) = n_1 < 0 \quad (32)$$

$E_i \in R^{n_i \times p_i}$ ،  $F_i \in R^{n_i \times (n_i-p_i)}$ ،  $B_{i2} \in R^{p_i \times m_i}$ ،  $G_i \in R^{n_i \times p_i}$  می‌باشند. لذا دینامیک خطا با استفاده از روابط (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= \dot{z}_i(t) - R_i \dot{x}_i(t) = N_i z_i(t) + J_i u_i(t) + L_{i1} y_i(t) \\ &+ L_{i2} y(t) - R_i A_{ii} x_i(t) \\ &- R_i B_{ii} u_i(t) - R_i D_{ii} v_i(t) - R_i G_i y = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

که آنرا می‌توان به صورت زیر مرتب و بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= N_i e_i(t) + (N_i R_i - R_i A_i + L_{i1} C_i) x_i(t) \\ &+ (J_i - R_i B_i) u_i(t) + (L_{i2} - R_i G_i) y - R_i D_i v_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

حال به منظور همگرایی مجانبی خطا به سمت صفر، لازم است معادلات (۲۰) برقرار بوده و همچنین ماتریس مربعی  $N_i$  دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی باشد.

$$N_i R_i - R_i A_i = -L_{i1} C_i \quad (1-20)$$

$$R_i B_i = J_i \quad (2-20)$$

$$R_i G_i = L_{i2} \quad (3-20)$$

$$R_i D_i = 0 \quad (4-20)$$

از سوی دیگر برای تخمین متغیرهای حالت  $x_i$  که هدف اصلی این مقاله است می‌توان خطای تخمین متغیرهای حالت را به فرم زیر بازنویسی نمود و مساوی صفر قرار داد.

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(t) - x_i(t) &= F_i z_i(t) - E_i y_i(t) - x_i(t) = \\ F_i z_i(t) - E_i C_i x_i(t) - x_i(t) + F_i R_i x_i(t) - F_i R_i x_i(t) &= \\ F_i (z_i(t) - R_i x_i(t)) + (F_i R_i - F_i R_i - I_{n_i}) x_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به  $e_i(t) = z_i(t) - R_i x_i(t)$ ، به منظور صفر شدن مجانبی رابطه بالا باید ضریب بردار متغیر حالت را صفر نموده که به همین منظور:

$$\begin{aligned} F_i e_i(t) + (F_i R_i - E_i C_i - I_{n_i}) x_i(t) &= 0 \\ \rightarrow F_i R_i - E_i C_i - I_{n_i} = 0 \rightarrow [F_i \quad E_i] \begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix} &= I_{n_i} \end{aligned} \quad (22)$$

با توجه به (۲۲) می‌توان ماتریس‌های بکار برده شده در تخمین  $x_i$  (۲-۱۶) را به سادگی و با محاسبات ساده‌تر ولی به شرط مشخص بودن ماتریس  $R_i$  بدست آورد. به عبارت دیگر لازم است:

$$[F_i \quad E_i] \begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix}^{-1} \quad (23)$$

بدیهی است شرط برقراری رابطه (۲۳) کامل بودن رتبه ماتریس  $\begin{bmatrix} R_i \\ -C_i \end{bmatrix}$  می‌باشد. از سوی دیگر برای محاسبه  $R_i$ ، با توجه به رابطه (۴-۲۰) داریم:

$$R_i D_i = 0 \Rightarrow R_i = \text{null}(D_i) \quad (24)$$

- ۸- برای تضمین پایداری خطا، معادله لیاپانوف (۲۹) در نظر گرفته شده است، در صورتی که  $(-D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21} < 0$ ، آنگاه  $N_i$  ماتریسی منفی معین بوده و زمانی که  $N_i(D_{i2}^+)A_{i21} \geq 0$ ، در صورت برقراری (۳۵)،  $N_i$  منفی معین بدست خواهد آمد.
- ۹- در صورت پایداری  $N_i$  با استفاده از  $R_i$ ، ماتریس‌های  $J_i$  در (۲۰-۲) و  $L_{i2}$  در (۲۰-۳) و  $L_{i1}$  در (۲۸) محاسبه می‌شوند.
- ۱۰- با استفاده از (۲۳) می‌توان تخمین متغیر حالت زیر سیستم نام در (۱۶-۲) را محاسبه نمود.

#### ۴- نتایج شبیه سازی

سیستم ابعاد وسیع زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1.61 & 0 & 0 & -0.96 & -0.58 & -0.6 \\ 0 & -1.30 & 0 & -0.96 & -0.58 & -1.01 \\ 0 & 0 & -2.42 & -2.82 & 0.88 & 1.65 \\ 2.05 & -0.91 & 2.18 & 1.40 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0.24 & -1.14 & 0 & -1.9 & 0 \\ 0.1 & -0.24 & 0.08 & 0 & 0 & -2.20 \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(t)$$

با توجه به پایداری و رویت پذیری سیستم و کامل بودن رتبه ستونی ماتریس  $\bar{D}$  امکان طراحی روتنگر با ورودی نامعین مورد نظر مطابق با الگوریتم پیشنهادی در بخش ۳-۱ وجود دارد. در گام اول سیستم اصلی را به دو زیر سیستم تقسیم نموده، که هر زیر سیستم شامل سه متغیر حالت می‌باشد. با توجه به رویت پذیری هر زیر سیستم و رتبه ماتریس  $C_i$  برای هر زیر سیستم یک روتنگر مرتبه کاهش یافته از مرتبه ۲ استفاده الگوریتم ارائه شده در بالا طراحی می‌شود. حالت‌های تخمین زده شده و خطای تخمین برای هر زیر سیستم با در نظر گرفتن ورودی نامعین به صورت پله واحد در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. همچنین شکل‌های ۳ و ۴ نشان دهنده مقایسه روش پیشنهادی و روش طراحی روتنگر لیونبرگر [۲۳] می‌باشد، با توجه به شبیه سازی‌های انجام شده روتنگر لیونبرگر در این گونه از سیستم‌ها کارایی لازم را ندارد.

از آنجا که علامت  $R_{i1}$  نامعین می‌باشد به منظور برقراری تابع لیاپانوف مذکور علامت ماتریس  $n_2$  را بررسی می‌نماییم، با توجه به (۲۴) می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت [۲۱].

$$R_{i1}D_{i1} + R_{i2}D_{i2} = 0 \rightarrow \quad (33)$$

$$R_{i2} = (-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^+) + k_i(I_{p_i} - D_{i2}D_{i2}^+)$$

$$n_2 = ((-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21}R_{i1}^{-1})^T P_i + P_i((-R_{i1}D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21}R_{i1}^{-1}) < 0 \quad (34)$$

برای برقراری (۳۴) باید علامت  $\beta_i = (-D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21}$  را بررسی نمود، اگر ماتریس  $(-D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21}$  معین منفی یا نیمه معین منفی باشد، رابطه (۳۰) برقرار بوده به عبارتی مجموع دو ماتریس معین منفی بطور حتم معین منفی می‌باشد [۲۲]. اگر ماتریس  $(-D_{i1})(D_{i2}^+)A_{i21}$  معین مثبت یا نیمه معین مثبت (شامل مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت یا صفر) باشد و در صورت برقراری رابطه (۳۵)،  $n_2$  به طور حتم معین منفی بوده و معادله لیاپانوف ذکر شده برقرار می‌باشد.  $\sigma$  بردار شامل مقادیر ویژه هر ماتریس است.

$$\left| \sigma \beta_i \right| < \left| \sigma A_{i11} \right| \quad (35)$$

#### ۳-۱- الگوریتم طراحی

بر اساس مطالب و معادلات ارائه شده در بخش پیشین، امکان جمع بندی روند طراحی روتنگر بر اساس الگوریتم زیر ممکن خواهد بود:

- ۱- بررسی پایداری و رویت پذیری سیستم ابعاد وسیع با ساختار مطرح شده در (۱)، همچنین  $\bar{D}$  باید دارای رتبه ستونی کامل باشند.
- ۲- دسته بندی متغیرهای حالت سیستم (۱) و رسیدن به رابطه‌های (۴) و (۵) برای زیر سیستم نام.
- ۳- در صورتی که تعداد خروجی‌های اندازه گیری شده بیشتر از تعداد متغیرهای حالت تداخلی باشد، با استفاده از ماتریس (۶) و معکوس آن به معادله (۱۱) برای هر زیر سیستم خواهیم رسید.
- ۴- به منظور ساده نمودن محاسبات با استفاده از تبدیل (۱۳)، رابطه (۱۴) برای هر زیر سیستم حاصل می‌گردد.
- ۵- روتنگر مرتبه کاهش یافته (۱۶) با توجه به پایداری و رویت پذیری (۱۴) در نظر گرفته می‌شود.
- ۶- با توجه به تعریف خطای تخمین در (۱۷) و حل معادلات مربوط به صفر شدن آن که در روابط (۲۰-۱) تا (۲۰-۴) مشخص شده است، با در نظر گرفتن (۲۰-۴)،  $R_i$  طبق (۲۴) محاسبه می‌شود.
- ۷- سپس ماتریس  $N_i$  طبق (۲۷) محاسبه می‌شود.

$$\bar{x}_2(0) = [0 \ 1 \ 3]^T$$

$$x_2(0) = \text{inv}(S_2) \times \bar{x}_2(0) = [2.5774 \ 1.4226 \ -1.1547]^T$$

با استفاده از روش مطرح شده، معادله رویکر مرتبه کاهش یافته برای زیر سیستم‌های اول و دوم عبارت است از:

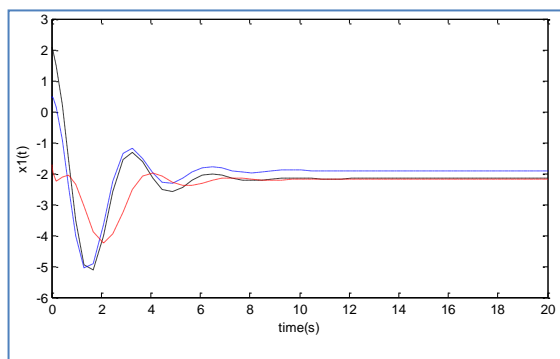
$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) = & \begin{bmatrix} -1.6463 & -3.1833 \\ 0.4892 & -1.6678 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} 0.8584 \\ 1.1239 \end{bmatrix} u_1(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0.2980 \\ 0.3349 \end{bmatrix} y_1(t) \\ & + \begin{bmatrix} 1.0275 & 2.0792 & -2.4233 & -0.3441 \\ -0.5178 & 0.4763 & -0.863 & 0.3867 \end{bmatrix} y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & \begin{bmatrix} 0.2010 & 1.2798 \\ -1.5168 & -2.8460 \end{bmatrix} z_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0.1279 \\ -0.1024 \end{bmatrix} y_2(t) \\ & + \begin{bmatrix} -0.9466 & -0.1735 & 0.7732 & -2.0241 \\ 0.6818 & 0.0412 & -0.6405 & 1.1919 \end{bmatrix} y(t) \end{aligned}$$

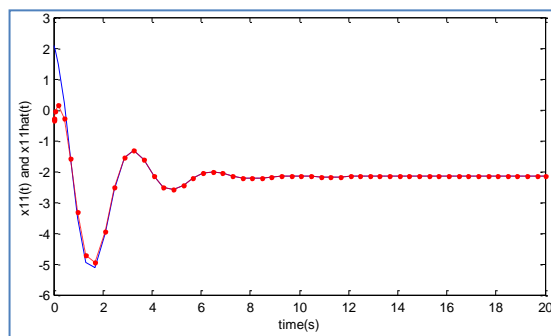
شرایط اولیه رویکرهای مرتبه کاهش یافته زیر سیستم‌های مورد نظر به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$z_1(0) = [1 \ -1]^T$$

$$z_2(0) = [0 \ 1]^T$$



الف- نمایش متغیرهای حالت زیر سیستم اول از مرتبه ۳



ب- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم اول به همراه تخمین آن توسط رویکر از مرتبه ۲ با ورودی نامعین

تبدیل‌های ماتریسی قابل استفاده برای دست یابی به معادله فضای حالت مطلوب زیر سیستم اول عبارتند از:

$$T_1 = [\bar{C}_1^R \ Q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5774 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5774 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.8165 & -0.4082 & 0.2887 \\ -0.1266 & 0.5633 & 0.5774 \\ 0.5633 & 0.7184 & -0.2887 \end{bmatrix}$$

با استفاده از  $T_1^{-1}$  و  $S_1^{-1}$  به معادله زیر برای زیر سیستم اول دست خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \begin{bmatrix} -2.9207 & 0.8 & -0.2096 \\ -1.51 & -0.5828 & -0.0727 \\ 2.9345 & 0.2735 & -0.48 \end{bmatrix} x_1(t) + \\ & \begin{bmatrix} 1.3798 \\ 0.3101 \\ 0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} -0.1266 \\ 0.5633 \\ 1.1547 \end{bmatrix} v_1(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0.0956 & 1.4225 & -1.8366 & -0.4142 \\ 0.5422 & 1.1521 & -1.6633 & -0.5113 \\ -1.5127 & -1.4241 & 0.6947 & -0.7294 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

$$v_1 = [0 \ 0 \ 1] x_1(t)$$

شرایط اولیه زیر سیستم اول به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\bar{x}_1(0) = [1 \ -1 \ 2]^T$$

$$x_1(0) = \text{inv}(S_1) \times \bar{x}_1(0) = [2.0696 \ 0.4652 \ -1.7321]^T$$

تبدیل‌های ماتریسی قابل محاسبه برای زیر سیستم دوم عبارتند از:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5774 \\ 1 & 1 & 0 & -0.5774 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5774 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

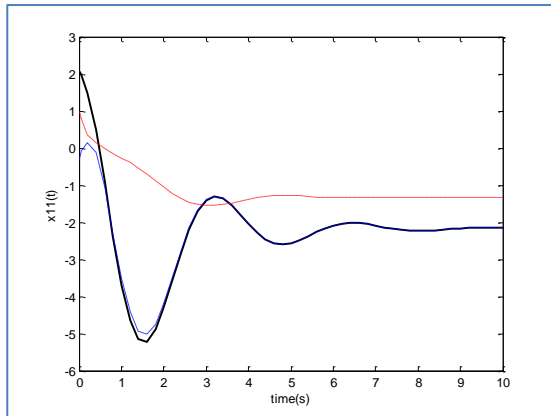
$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.5774 & 0.5774 \\ 0.2113 & 0.7887 & 0.5774 \\ 0.7887 & 0.2113 & -0.5774 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

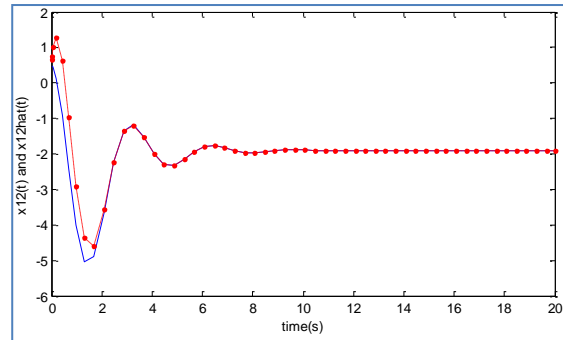
$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \begin{bmatrix} -2.3541 & -2.1617 & 1.2366 \\ 1.6084 & -0.4026 & -1.0634 \\ 0.3641 & -1.9692 & -0.9 \end{bmatrix} x_2(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0.7887 \\ 0.2113 \\ 1.1547 \end{bmatrix} u_2(t) + \begin{bmatrix} 0.7887 \\ 0.2113 \\ 1.1547 \end{bmatrix} v_2(t) + \\ & \begin{bmatrix} 1.0869 & 0.2115 & -0.8754 & 1.0808 \\ -0.9069 & -0.1215 & 0.7854 & -2.1408 \\ 0.8987 & 0.3252 & -0.5735 & 0.5543 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

$$v_2 = [0 \ 0 \ 1] x_2(t)$$

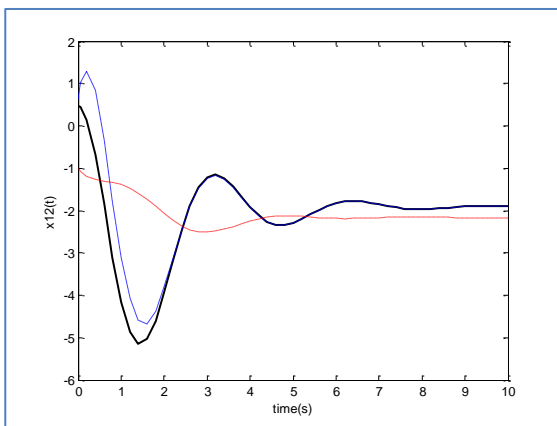
و شرایط اولیه برای زیر سیستم دوم عبارت است از:



الف- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم اول با استفاده از روش پیشنهادی و روتگر لیونبرگر

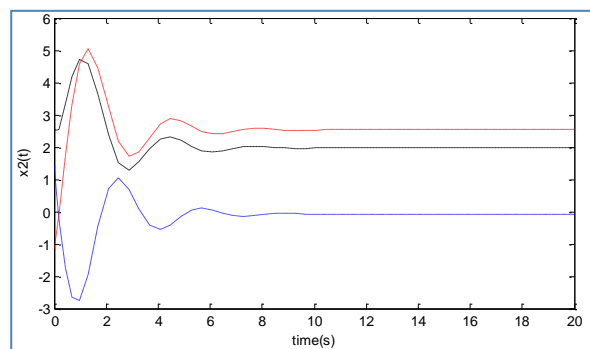


ج- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم اول به همراه تخمین آن  
شکل ۱- روتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین برای زیر سیستم اول (خط توپر: متغیر حالت و خط-نقطه: تخمین متغیر حالت)

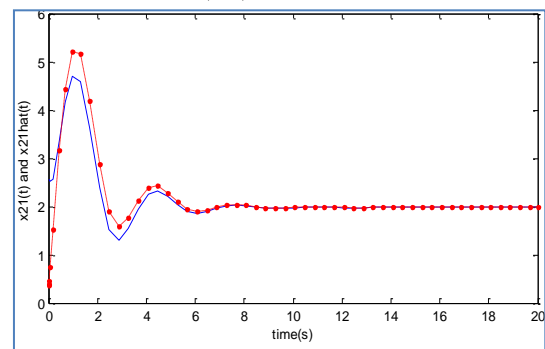


ب- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم اول با استفاده از روش پیشنهادی و روتگر لیونبرگر

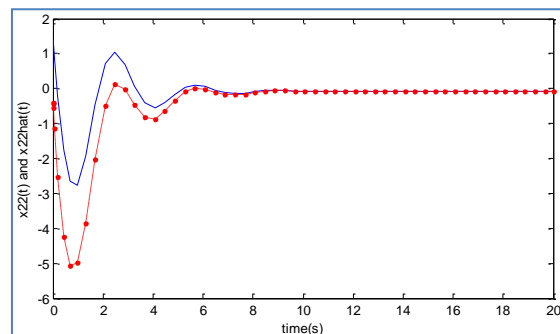
شکل ۳- مقایسه روتگر پیشنهادی با روتگر لیونبرگر برای زیر سیستم اول. (خط توپر و خط چین و خط-نقطه به ترتیب نشان دهنده حالت اصلی، حالت تخمین زده شده توسط روتگر پیشنهادی و حالت تخمین زده شده توسط روتگر لیونبرگر می باشد)



الف-نمایش متغیرهای حالت زیر سیستم دوم از مرتبه ۳



ب- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم دوم به همراه تخمین آن توسط روتگر از مرتبه ۲ با ورودی نامعین



ج- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم دوم به همراه تخمین آن

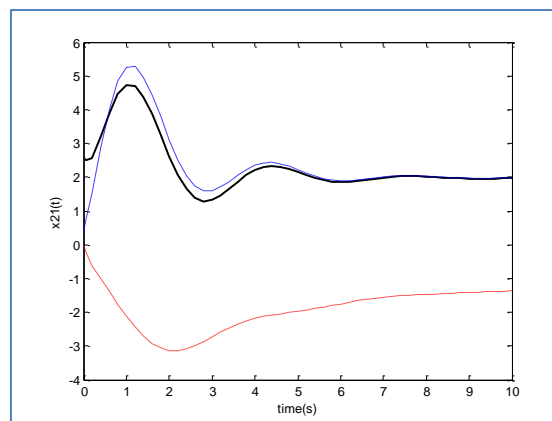
شکل ۲- روتگر غیر متمرکز با ورودی نامعین برای زیر سیستم دوم (خط توپر: متغیر حالت و خط-نقطه: تخمین متغیر حالت)

## مراجع:

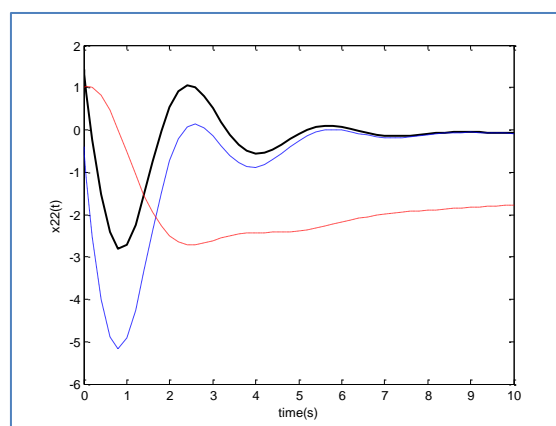
- [1] Y. Zhu and P. R. Pagilla, "decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems," IMA. Journal of Mathematical Control and Information, vol. 24, pp. 57-69, 2007.
- [2] M. Saif and Y. Guan, "Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems," IEEE Automatica, Vol. 28, No. 1, pp. 215-219, 1992.
- [3] J. T. Spooner and K. M. Passino, "Decentralized adaptive control of nonlinear systems using radial basis neural networks," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 44, No. 11, pp. 2050-2057, 1999.
- [4] S. N. Huang, K. K. Tan and T. H. Lee, "A decentralized control of interconnected systems using neural networks," IEEE Trans. Neural Netw, Vol. 13, No. 6, pp. 1554-1557, 2002.
- [5] K. Kalsi and J. Lian and S. H. Zak, "Decentralized control using reduced-order unknown input observers," IEEE Conference on Decision and Control, 2008.

- [12] D. D. Siljack and M. B. Vukcevic, "Decentralization stabilization and estimation of large-scale linear systems," IEEE Trans. Aut. Control, Vol. 21, No.3, pp. 363-366, 1976.
- [13] D. D. Siljack and M. K. Vukcevic, "On decentralized estimation," Int. J. Control, Vol. 27, pp. 113-131, 1978.
- [14] M. K. Sundareshan, "Decentralized observation in large scale systems," IEEE Trans. Syst. Man Cybern, Vol. 7, pp. 863-867, 1977.
- [15] M. K. Sundareshan and R. M. Elbanna, "Design of decentralized observation schemes for large scale systems: some new result," Automatica, Vol. 26, No. 4, pp. 789-796, 1990.
- [16] M. Aldeen and J. F. Marsh, "Decentralised observer-based control scheme for interconnected dynamical systems with unknown inputs," IEE Proc. Control Theory and Applications, Vol. 146, NO. 5, pp. 349-358, 1999.
- [17] D. D. Sijak and D. M. Stipanovic, "Autonomous decentralized control," In Proc. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Nashville, TN, 2001.
- [17] Y. Zhu and P. R. Pagilla, "Decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems," IMA J. Math. Control, Vol. 24, No. 1, pp. 57-69, 2006.
- [18] J. Lian, K. Kalsi and S. H. Zak, "Reduced order observer based decentralized controller design: the lmi approach," 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, Makedonia Place, Thessaloniki, Greece, 2009.
- [19] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 36, No. 5, pp. 632-635, 1991.
- [20] P. Kudva, N. Viswanadham, and A. Ramakishna, "Observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 1, pp. 113-115, 1980.
- [21] A. Karimi, "Robust controller design by convex optimization," Lectures in Robust Control, 2007.

[۲۳] علی، دکتر خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ ششم، ۱۳۸۸.



الف- نمایش اولین متغیر حالت زیر سیستم دوم با استفاده از روش پیشنهادی و روینگر لیونبرگر



ب- نمایش دومین متغیر حالت زیر سیستم دوم با استفاده از روش پیشنهادی و روینگر لیونبرگر

شکل ۴- مقایسه روینگر پیشنهادی با روینگر لیونبرگر برای زیر سیستم دوم. (خط توپر و خط چین و خط-نقطه به ترتیب نشان دهنده حالت اصلی، حالت تخمین زده شده توسط روینگر پیشنهادی و حالت تخمین زده شده توسط روینگر لیونبرگر می باشد)

- [6] M. Aldeen and K. H. Lau and J. F. Marsh, "A decentralized observer for interconnected systems," UKACC International Conference on control, No. 455, 1998.
- [7] M. K. Sundareshan, "Decentralized observation in large scale Systems," IEEE Trans. Syst. Man Cybern, Vol. 7, pp. 863-867, 1977.
- [8] A. S. Tlili and N. B. Braieck, "Decentralized observer based guaranteed cost control for nonlinear interconnected systems," International journal of Control and Automation, Vol. 2, No. 2, 2009.
- [9] C. D. Johnson, "On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs," Int. J. Contr, Vol. 21, pp. 825-831, 1975.
- [10] S. H. wang, E. J. Davision and P. Dorato, "Observing the states of systems with unmeasurable disturbances," IEEE Trans. Automat. Contr, Vol. 20, No. 5, pp.716-717, 1975.
- [11] P. Kudva, N. Viswanagham and A. Ramakrishna, "Observers for linear time invariant systems subject to unknown inputs," Int. J. Contr. Vol. 35, pp. 183-188, 1982.