

# آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و کاربرد آن در مدار چوآ

علی کاظمی

استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تفرش، kazemy@tafreshu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۱/۲۷

ویرایش: ۱۳۹۷/۱۲/۱۵

دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۲

**چکیده:** شبکه‌های دینامیکی پیچیده بدلیل کاربردهای فراوان در مدل‌سازی و تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی، مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. این شبکه‌ها از بهم پیوستن گره‌ها بوجود می‌آیند و رفتارهای پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهند که حاصل از تعامل بین این گره‌هاست. هم‌گام‌سازی که به مفهوم رفتار هماهنگ بین گره‌ها است، یکی از رفتارهای مورد توجه در این شبکه‌ها است. این مقاله به مساله آنالیز هم‌گام‌سازی شبکه‌های دینامیکی پیچیده با تاخیر-زمانی متفاوت در حالت‌های گره‌ها و اتصالات کوپلینگ بین آنها می‌پردازد. بدین منظور، جهت بررسی هم‌گام‌سازی در کلاس وسیع‌تری از این شبکه‌ها، کوپلینگ بین گره‌های شبکه بصورت ترکیبی در نظر گرفته شده است. کوپلینگ ترکیبی شامل کوپلینگ ثابت، کوپلینگ تاخیری-گسسته، و کوپلینگ تاخیر-توزیع شده است. پس از تعریف مساله هم‌گام‌سازی و فرمول‌بندی آن، با معرفی یک تابع لیاپانوف مناسب و استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسوسکی، شرایط تضمین‌کننده هم‌گام‌شدن حالت‌های بین گره‌های شبکه، استخراج و بصورت قضایایی بیان شده‌اند. این شرایط در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارایه شده‌اند که بسادگی با استفاده از روش‌های استاندارد قابل حل می‌باشند. در انتها، به منظور بررسی کارایی قضایای استخراج شده، یک شبکه دینامیکی پیچیده که از بهم پیوستن مدارهای چوآ تشکیل شده و در مخابرات امن کاربرد دارد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** شبکه‌های دینامیکی پیچیده، هم‌گام‌سازی، قضیه لیاپانوف-کراسوسکی، سیستم‌های زمان-تأخیری، مدار چوآ.

## Synchronization analysis of complex dynamical networks with hybrid coupling with application to Chua's circuit

Ali Kazemy

**Abstract:** Complex dynamic networks have been considered by researchers for their applications in modeling and analyzing many engineering issues. These networks are composed of interconnected nodes and exhibit complex behaviors that are resulted from interactions between these nodes. Synchronization, which is the concept of coordinated behavior between nodes, is the most interested behavior in these networks. This paper deals with the synchronization of complex dynamical networks with time-delays both in the states of the nodes and coupling connections between them. Moreover, constant coupling, discrete-delay coupling, and distributed-delay coupling are considered to form a hybrid coupling. Therefore, larger class and more complicated complex dynamical networks can be considered for the synchronization problem. After defining the synchronization definition, some criteria are obtained and presented in the form of linear matrix inequalities with help of the Lyapunov-Krasovskii theorem to ascertain the synchronization between each node of the network. Finally, the method is utilized for synchronization analysis of coupled Chua's circuits which has been simulated numerically.

**Keywords:** Synchronization, Complex dynamical network, Lyapunov-Krasovskii, Time-delayed systems, Chua's circuit.

## ۱- مقدمه

شبکه های دینامیکی پیچیده بدلیل کاربردهای فراوانی که در شبکه های عصبی [۱، ۲]، شبکه های اجتماعی، شبکه توزیع نیرو [۳]، شبکه های فرودگاهی [۴]، و شبکه های ارتباطی دارند [۵]، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته اند [۶]. این شبکه ها رفتارهای پیچیده ای از خود نشان می دهند که حاصل از تعامل بین مجموعه ای از گره ها، اتصالات، و توان کوپلینگ بین آنهاست [۷].

در میان تمامی رفتارها و پدیده های مهم در این شبکه ها، هم گام سازی بین گره های شبکه بسیار مورد توجه است [۸-۱۲]. در ابتدا مساله کنترل هم گامی بین دو سیستم آشوبناک توسط پکورا و کارول مطرح شد [۱۳] و پس از آن این مساله به شبکه های پیچیده مختلفی اعمال شد [۱۴-۱۹]. به عنوان نمونه مرجع [۱۴] به مساله هم گام سازی در شبکه های دینامیکی پیچیده ای می پردازد که معادلات دینامیکی گره های آن سیستم لور ۱ هستند. همچنین مرجع [۱۵] به مساله هم گام سازی شبکه ای می پردازد که کوپلینگ بین گره ها دارای تاخیر بوده و رفتار گره های آن رفتار آشوبناک است. هم گام سازی، کاربردهای فراوانی در دنیای واقعی دارد که از آن جمله می توان به مخابرات امن، تولید نوسانات منظم در قلب انسان، و هم-گام سازی کارمندان یک شرکت بمنتظر بهبود کارایی شان اشاره کرد [۲۰-۲۴].

در عمل بدلیل محدودیت در پهنای باند ارتباطی در کوپلینگ شبکه های پیچیده، تاخیر-زمانی در ارتباط بین گره ها بوجود خواهد آمد. حضور تاخیر-زمانی باعث کاهش کارایی، کاهش حاشیه پایداری، و افزایش پیچیدگی تحلیل خواهد شد [۲۵]. بنابراین، بررسی هم گام بودن شبکه های پیچیده با تاخیر-زمانی در کوپلینگ، از اهمیت ویژه ای برخوردار است [۱۲، ۳۱-۲۶]. به عنوان نمونه، مرجع [۱۱] به آنالیز هم گام سازی شبکه های دینامیکی پیچیده به همراه تاخیر در کانال ارتباطی و در دینامیک گره ها می پردازد. در این مرجع از کوپلینگ تاخیر-گسسته استفاده شده و مساله کوپلینگ تاخیر-توزیع شده در ساختار شبکه در نظر گرفته نشده است. در مرجع [۱۲] ساختار کوپلینگ گره ها بصورت تاخیر-گسسته در نظر گرفته شده و به مساله طراحی هم گام ساز با مکانیزم نمونه برداری گسسته از داده ها پرداخته شده است. با توجه به اطلاعات نویسنده، مساله آنالیز هم گام سازی شبکه های دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و با تاخیر متفاوت در کوپلینگ و دینامیک گره ها هنوز مورد مطالعه قرار نگرفته است. با توجه به نکات ارایه شده، نوآوری این مقاله در موارد زیر خلاصه می گردد:

- ارایه شبکه دینامیکی پیچیده با کوپلینگ ترکیبی و آنالیز هم گام سازی آن با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسوسکی،
- در نظر گرفتن تاخیر متفاوت در دینامیک گره های شبکه و کوپلینگ بین آنها.

از این رو، در این مقاله مساله آنالیز هم گام سازی شبکه های دینامیکی پیچیده به همراه تاخیر-زمانی در دینامیک گره ها و در کانال ارتباطی بین آنها بررسی می شود که این دو تاخیر لزوماً برابر نیستند. علاوه بر این، جهت بررسی کلاس وسیع تری از این شبکه ها، ترکیبی از کوپلینگ های ثابت، تاخیر-گسسته ۲، و تاخیر-توزیع شده ۳ در نظر گرفته شده است. بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوسکی، شرایطی بدست آمده و در قالب قضایایی جهت بررسی مساله هم گامی مذکور ارائه شده اند. این شرایط به فرم نامساوی های ماتریسی خطی نوشته شده اند که بسادگی قابل حل می باشند. در پایان، از روش بدست آمده برای آنالیز هم گامی مدارات چوآی متصل بهم استفاده شده است.

سازماندهی این مقاله بدین صورت است: فرمول بندی مساله هم گام بودن شبکه های دینامیکی پیچیده مورد نظر با تاخیر-زمانی در حالت های گره ها و کوپلینگ در بخش بعد آمده است. سپس بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوسکی، شرایط بررسی هم گامی شبکه دینامیکی پیچیده در بخش نتایج اصلی ارائه شده اند. در بخش شبیه سازی، نتایج روش مذکور روی یک مساله نمونه بررسی شده است. بخش نتیجه گیری نیز در انتهای مقاله آمده است.

علائم و نشانه ها: در این مقاله،  $\mathbb{R}^n$  نشان دهنده فضای اقلیدسی  $n$  بعدی و  $\mathbb{R}^{n \times m}$  مجموعه ماتریس های حقیقی  $n \times m$  است.  $\mathbf{P} > 0$  بیان کننده این است که  $\mathbf{P}$  ماتریس حقیقی مثبت معین و متقارن است.  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب و  $\text{diag}\{\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m\}$  ماتریس حقیقی قطری با المان های  $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m$  است.  $\mathbf{A}^T$  ترانزپوز ماتریس حقیقی  $\mathbf{A}$  است. عناصر متقارن در ماتریس های متقارن با علامت \* نشان داده شده و  $\otimes$  ضرب کرونگر است

## ۲- بیان مساله و مقدمات

شبکه دینامیکی پیچیده زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = & -\mathbf{C}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t - \tau) + \mathbf{B}_i\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) \\ & + \mathbf{B}_2\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) + \sum_{j=1}^N G_{ij}^{(1)}\Gamma_1\mathbf{x}_j(t) \\ & + \sum_{j=1}^N G_{ij}^{(2)}\Gamma_2\mathbf{x}_j(t - \tau_c) \\ & + \sum_{j=1}^N G_{ij}^{(3)}\Gamma_3 \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_j(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\mathbf{x}_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت گره  $i$  ام،  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  تابع غیرخطی برداری،  $\mathbf{C}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n \times k}$  و  $\mathbf{M}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس های ثابت معلوم،  $\tau > 0$  تاخیر حالت و  $\tau_c > 0$  تاخیر کوپلینگ است.  $\mathbf{G}^{(q)} = (G_{ij}^{(q)})_{N \times N}$ ،  $(q = 1, 2, 3)$  نشان دهنده اتصالات کوپلینگ و  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس های کوپلینگ داخلی هستند.

<sup>3</sup> Distributed-delay

<sup>1</sup> Lur'e

<sup>2</sup> Discrete-delay

لم ۱ (نامساوی جن سن [۱۸]): فرض کنید که تابع برداری  $\omega: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$  برای انتگرال گیری های زیر خوش تعریف باشد. برای هر ماتریس متقارن  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و اسکالر  $r > 0$ ، خواهیم داشت

$$r \int_0^r \omega^T(s) \mathbf{R} \omega(s) ds \geq \left( \int_0^r \omega(s) ds \right)^T \mathbf{R} \left( \int_0^r \omega(s) ds \right).$$

لم ۲: مطابق با مرجع [۳۲] و فرض ۲، برای هر ماتریس قطری  $\mathbf{J} > 0$ ،  $\mathbf{L} > 0$ ، و ماتریس ثابت  $\mathbf{M}$  با ابعاد مناسب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \theta^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \mathbf{J} \Delta_1 \mathbf{M} & \mathbf{M}^T \mathbf{J} \Delta_2 \\ * & -\mathbf{J} \end{bmatrix} \theta(t) \\ & + \theta^T(t - \tau) \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \mathbf{L} \Delta_1 \mathbf{M} & \mathbf{M}^T \mathbf{L} \Delta_2 \\ * & -\mathbf{L} \end{bmatrix} \theta(t - \tau) \geq 0, \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{M} \mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M} \mathbf{x}_j(t)) \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 = \text{diag} [\sigma_1^+ \sigma_1^-, \dots, \sigma_k^+ \sigma_k^-],$$

$$\Delta_2 = \text{diag} \left[ \frac{\sigma_1^+ + \sigma_1^-}{2}, \dots, \frac{\sigma_k^+ + \sigma_k^-}{2} \right],$$

بوده و  $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^n$ ،  $(l = 1, 2, \dots, N)$ ، و همچنین  $\mathbf{f}(\cdot)$  در رابطه (۱) و  $\sigma_r^+$ ،  $\sigma_r^-$ ،  $r = 1, 2, \dots, k$ ، در فرض ۲ تعریف شده اند.

لم ۳ (۲۳): فرض کنید  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ،  $\mathbf{E}_N = \mathbf{1} \mathbf{1}^T$  و

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{M} \mathbf{I}_N - \mathbf{E}_N$$

و  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T]^T$  با  $\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^n$ ،  $l = 1, 2, \dots, N$  و  $N$  عدد صحیح مثبت است، آنگاه

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{U} \otimes \mathbf{P}) \mathbf{y} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{P} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j).$$

لم ۴ (۲۴): فرض کنید  $\mathbf{H}$ ،  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{P}$  ماتریس حقیقی  $n \times n$ ،

$$\mathbf{U} = \mathbf{M} \mathbf{I}_N - \mathbf{E}_N, \quad \mathbf{E}_N = \mathbf{1} \mathbf{1}^T, \quad \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$$

و  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$ ،  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_N^T]^T$  با  $\mathbf{x}_l, \mathbf{y}_l \in \mathbb{R}^n$ ،

$l = 1, 2, \dots, N$ ، عدد صحیح مثبت بوده و  $\mathbf{f}(\cdot)$  و  $\mathbf{F}(\cdot)$  توابعی

تعریف شده در (۲) هستند. آنگاه برای بردارهای  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  با ابعاد مناسب،

نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T (\mathbf{U} \otimes \mathbf{P}) \mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S}) \mathbf{y}) \\ & = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{H} (\mathbf{f}(\mathbf{S} \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{S} \mathbf{y}_j)). \end{aligned}$$

لم ۵ (۳۳): با فرض اینکه  $\alpha \in \mathbb{R}$  بوده و ماتریس های  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{C}$ ، و

$\mathbf{D}$  معلوم و با ابعاد مناسب باشند، خواص زیر قابل اثبات است:

$$(\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T,$$

**توجه ۱:** این مدل نسبت به مقالات قبلی منتشر شده در این زمینه کلی تر است. در مدل در نظر گرفته شده هر گره دارای تاخیر زمانی ( $\tau$ ) در بردار حالت های خود می باشد که با تاخیر زمانی موجود در کوپلینگ ( $\tau_c$ ) بین گره ها متفاوت است. در این صورت، کلاس وسیع تری از شبکه های دینامیکی پیچیده قابل بررسی هستند.

**فرض ۱:** ماتریس های اتصالات کوپلینگ باید شرایط زیر را برآورده سازند [۱۲]:

$$\begin{cases} G_{ij}^{(q)} = G_{ji}^{(q)} \geq 0, & i \neq j, q = 1, 2, 3, \\ G_{ii}^{(q)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij}^{(q)}, & i, j = 1, \dots, N, q = 1, 2, 3. \end{cases}$$

فرض زیر روی تابع غیرخطی  $\mathbf{f}(\cdot)$  لحاظ می شود.

**فرض ۲:** برای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ، ثوابتی مانند  $\sigma_r^+$  و  $\sigma_r^-$  وجود دارد که تابع غیرخطی، شرایط زیر را برآورده سازد:

$$\sigma_r^- \leq \frac{f_r(x_1) - f_r(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \sigma_r^+, \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

**توجه ۲:** شرط در نظر گرفته شده برای تابع غیرخطی، کلی تر از شرط معمول لیب شیتز (Lipschitz) است و آن را به عنوان یک حالت خاص شامل می شود. به بیان دیگر اگر  $\sigma_r^+ = \sigma_r^-$ ،  $r = 1, 2, \dots, k$  باشد آنگاه شرط بیان شده در فرض ۲ معادل با شرط لیب شیتز است که بسیاری از سیستم های آشوبناک شناخته شده از جمله سیستم های لورنز (Lorenz)، راسلر (Rossler)، چن (Chen)، لو (Lu) و مدار چوآ این شرط را برآورده می سازند.

**تعریف ۱:** سیستم (۱) را هم گام شده کلی برای هر شرایط اولیه  $\Pi_{i0}(s)$ ،  $i = 1, 2, \dots, N$ ، گویند اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N$$

که  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است. برای سادگی در نمایش فرض کنید که

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \quad \mathbf{x}_2^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_N^T(t)]^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = [\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1(t)) \quad \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2(t)) \quad \dots \quad \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_N(t))]^T.$$

با استفاده از ضرب ماتریسی کرونکر می توان شبکه (۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = & -(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \mathbf{x}(t - \tau) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1) \mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}) \mathbf{x}(t)) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2) \mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}) \mathbf{x}(t - \tau)) \\ & + (\mathbf{G}^{(1)} \otimes \Gamma_1) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{G}^{(2)} \otimes \Gamma_2) \mathbf{x}(t - \tau_c) \\ & + (\mathbf{G}^{(3)} \otimes \Gamma_3) \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (۲)$$

از لم های زیر در اثبات قضایای اصلی استفاده خواهد شد.

$$\begin{aligned} \Pi_{17} &= \mathbf{P}\mathbf{B}_2 + \mathbf{W}_{11}\mathbf{B}_2 + \tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{B}_2 + \tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{B}_2 \\ &\quad - \tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{B}_2 - \tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{B}_2 - NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2, \\ \Pi_{19} &= -\mathbf{C}^T\mathbf{W}_{13} - NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{13} - NG_{ij}^{(3)}(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_3 + \mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_3) \\ &\quad + \mathbf{W}_{23} + \mathbf{W}_{33} - \frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{12}^T - NG_{ij}^{(3)}(\tau\mathbf{Z}_{12} + \tau_c\mathbf{O}_{12})\mathbf{\Gamma}_3 \\ &\quad + NG_{ij}^{(3)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3 - NG_{ij}^{(13)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \\ \Pi_{23} &= -NG_{ij}^{(2)}\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2, \\ \Pi_{22} &= -\mathbf{Q}_{11} - \frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22} + \tau\mathbf{A}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{A} + \tau_c\mathbf{A}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{A} \\ &\quad - \mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Delta}_1\mathbf{M} - \mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\mathbf{\Delta}_2\mathbf{D}, \\ \Pi_{25} &= -\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{M}^T\mathbf{L}_1\mathbf{\Delta}_2, \quad \Pi_{24} = \mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1, \\ \Pi_{27} &= -\mathbf{Q}_{13} + \mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}^T\mathbf{L}_2\mathbf{\Delta}_2, \\ \Pi_{28} &= \mathbf{A}^T\mathbf{W}_{12} - \mathbf{W}_{22} + \frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{12}^T, \\ \Pi_{29} &= \mathbf{A}^T\mathbf{W}_{13} - \mathbf{W}_{23} - NG_{ij}^{(3)}\mathbf{A}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \\ \Pi_{33} &= -\mathbf{R} - \frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22} - NG_{ij}^{(22)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2, \\ \Pi_{37} &= -NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2, \quad \Pi_{34} = -NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1, \\ \Pi_{38} &= -NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{W}_{12} - \mathbf{W}_{23}^T, \\ \Pi_{39} &= -NG_{ij}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{W}_{13} - \mathbf{W}_{33} + \frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{12}^T - NG_{ij}^{(23)}\mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \\ \Pi_{46} &= \mathbf{Q}_{23}, \quad \Pi_{44} = \mathbf{Q}_{22} + \mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1 - \mathbf{J}_1, \\ \Pi_{48} &= \mathbf{B}_1^T\mathbf{W}_{12}, \quad \Pi_{47} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2, \\ \Pi_{49} &= \mathbf{B}_1^T\mathbf{W}_{13} - NG_{ij}^{(3)}\mathbf{B}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \quad \Pi_{55} = -\mathbf{Q}_{22} - \mathbf{L}_1, \\ \Pi_{66} &= \mathbf{Q}_{33} - \mathbf{J}_2, \quad \Pi_{57} = -\mathbf{Q}_{23}, \\ \Pi_{78} &= \mathbf{B}_2^T\mathbf{W}_{12}, \quad \Pi_{77} = -\mathbf{Q}_{33} + \mathbf{B}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}_2, \\ \Pi_{88} &= -\frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{11}, \quad \Pi_{79} = \mathbf{B}_2^T\mathbf{W}_{13} - NG_{ij}^{(3)}\mathbf{B}_2^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \\ \Pi_{89} &= -NG_{ij}^{(3)}\mathbf{W}_{12}^T\mathbf{\Gamma}_3, \\ \Pi_{99} &= -\frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{11} - NG_{ij}^{(3)}(\mathbf{W}_{13}^T\mathbf{\Gamma}_3 + \mathbf{\Gamma}_3^T\mathbf{W}_{13}) - NG_{ij}^{(33)}\mathbf{\Gamma}_3^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_3, \end{aligned}$$

پارامترها در  $\Pi_{ij}$  که در بالا به آنها اشاره نشده، ماتریس های صفر با ابعاد مناسبند.

**اثبات:** تابع لیاپانوف-کراسوسوسکی زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t), \quad (5)$$

که در آن

$$V_1(t) = \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U} \otimes \mathbf{P})\mathbf{x}(t),$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}),$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}).$$

خواننده محترم می تواند برای اطلاع بیشتر در مورد جزئیات ضرب کرونگر به مرجع [۳۳] مراجعه کند.

### ۳- نتایج اصلی

در این بخش، شرایطی بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوسوسکی جهت تضمین هم گام بودن گره های شبکه دینامیکی پیچیده (۲) ارائه می شود.

**قضیه ۱:** برای  $\tau > 0$  و  $\tau_c > 0$  داده شده، شبکه دینامیکی پیچیده (۱) بطور کلی هم گام خواهد بود اگر وجود داشته باشد ماتریس های مثبت معین  $\mathbf{P} > 0$ ،  $\mathbf{Q} > 0$ ،  $\mathbf{R} > 0$ ،  $\mathbf{W} > 0$ ،  $\mathbf{Z} > 0$ ،  $\mathbf{O} > 0$ ، و ماتریس های قطری مثبت  $\mathbf{J}_1 > 0$ ،  $\mathbf{J}_2 > 0$ ،  $\mathbf{L}_1 > 0$ ،  $\mathbf{L}_2 > 0$  و بنحوی که نامساوی های ماتریسی خطی زیر برای تمام  $1 \leq i < j \leq N$  برقرار باشند:

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \dots & \Pi_{19} \\ * & \Pi_{22} & \dots & \Pi_{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \Pi_{99} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ * & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ * & * & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{13} \\ * & \mathbf{W}_{22} & \mathbf{W}_{23} \\ * & * & \mathbf{W}_{33} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{11} & \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -\mathbf{P}\mathbf{C} - \mathbf{C}^T\mathbf{P} - NG_{ij}^{(1)}(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{P}) + \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{R} \\ &\quad - \mathbf{W}_{11}\mathbf{C} - \mathbf{C}^T\mathbf{W}_{11} - NG_{ij}^{(1)}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{11}) \\ &\quad + \mathbf{W}_{12} + \mathbf{W}_{12}^T + \mathbf{W}_{13} + \mathbf{W}_{13}^T + \tau\mathbf{Z}_{11} + \tau_c\mathbf{O}_{11} \\ &\quad - \tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{C} - \tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{12}^T - \tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{C} - \tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{12}^T \\ &\quad - \tau NG_{ij}^{(1)}(\mathbf{Z}_{12}\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{Z}_{12}^T) - \tau_c NG_{ij}^{(1)}(\mathbf{O}_{12}\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{O}_{12}^T) \\ &\quad - \frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22} - \frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22} + \tau\mathbf{C}^T\mathbf{Z}_{22}\mathbf{C} + \tau_c\mathbf{C}^T\mathbf{O}_{22}\mathbf{C} \\ &\quad + NG_{ij}^{(1)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_1 + NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{C} - NG_{ij}^{(11)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_1 \\ &\quad - \mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Delta}_1\mathbf{M} - \mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\mathbf{\Delta}_2\mathbf{D}, \\ \Pi_{12} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{W}_{11}\mathbf{A} - \mathbf{W}_{12} + \tau\mathbf{Z}_{12}\mathbf{A} + \tau_c\mathbf{O}_{12}\mathbf{A} \\ &\quad + \frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{A} - NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{A}, \\ \Pi_{13} &= -NG_{ij}^{(2)}(\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{W}_{11}\mathbf{\Gamma}_2) - \mathbf{W}_{13} + NG_{ij}^{(2)}\mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2 \\ &\quad - NG_{ij}^{(2)}(\tau\mathbf{Z}_{12} + \tau_c\mathbf{O}_{12})\mathbf{\Gamma}_2 + \frac{1}{\tau_c}\mathbf{O}_{22} - NG_{ij}^{(12)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{\Gamma}_2, \\ \Pi_{14} &= (\mathbf{P} + \mathbf{W}_{11} + \tau\mathbf{Z}_{12} + \tau_c\mathbf{O}_{12})\mathbf{B}_1 + \mathbf{Q}_{12} \\ &\quad - \mathbf{C}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1 - NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{\Omega}\mathbf{B}_1 + \mathbf{M}^T\mathbf{J}_1\mathbf{\Delta}_2, \\ \Pi_{16} &= \mathbf{Q}_{13} + \mathbf{D}^T\mathbf{J}_2\mathbf{\Delta}_2, \\ \Pi_{18} &= -\mathbf{C}^T\mathbf{W}_{12} - NG_{ij}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_1^T\mathbf{W}_{12} + \mathbf{W}_{22} + \mathbf{W}_{23}^T - \frac{1}{\tau}\mathbf{Z}_{12}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[ 2(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \left[ -\mathbf{P}\mathbf{C}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right. \right. \\ & + \mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t - \tau)) \\ & + \mathbf{P}\mathbf{B}_1(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t))) \\ & + \mathbf{P}\mathbf{B}_2(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \\ & - \mathbf{N}G_{ij}^{(1)}\mathbf{P}\Gamma_1(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \\ & - \mathbf{N}G_{ij}^{(2)}\mathbf{P}\Gamma_2(\mathbf{x}_i(t - \tau_c) - \mathbf{x}_j(t - \tau_c)) \\ & \left. \left. - \mathbf{N}G_{ij}^{(3)}\mathbf{P}\Gamma_3\left(\int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_i(s)ds - \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_j(s)ds\right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

مشتق عبارت دوم رابطه (5) برابر است با

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \mathcal{G}^T(t) \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{13} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{23} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \mathcal{G}(t) \\ & - \mathcal{G}^T(t - \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{13} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{23} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \mathcal{G}(t - \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن  $\mathcal{G}(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{F}^T(\mathbf{M}\mathbf{x}(t)), \mathbf{F}^T(\mathbf{D}\mathbf{x}(t))]^T$  است.

مطابق با لم 3 و 4 می توان رابطه (8) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[ (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{Q}_{11}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right. \\ & + 2(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{Q}_{12}(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t))) \\ & + 2(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{Q}_{13}(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t))) \\ & + (\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)))^T \mathbf{Q}_{22}(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t))) \\ & + 2(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)))^T \mathbf{Q}_{23}(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t))) \\ & + (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)))^T \mathbf{Q}_{33}(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t))) \\ & - (\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t - \tau))^T \mathbf{Q}_{11}(\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t - \tau)) \\ & - 2(\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t - \tau))^T \mathbf{Q}_{12}(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \\ & - 2(\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t - \tau))^T \mathbf{Q}_{13}(\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \\ & - (\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t - \tau)))^T \mathbf{Q}_{22} \times \\ & \quad (\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \\ & - 2(\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t - \tau)))^T \mathbf{Q}_{23} \times \\ & \quad (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \\ & - (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t - \tau)))^T \mathbf{Q}_{33} \times \\ & \quad (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t - \tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t - \tau))) \left. \right]. \end{aligned}$$

مشتق عبارت سوم رابطه (5) برابر است با

$$\begin{aligned} V_2(t) = & \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{x}(s)) \\ \mathbf{F}(\mathbf{D}\mathbf{x}(s)) \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{13} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{23} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{x}(s)) \\ \mathbf{F}(\mathbf{D}\mathbf{x}(s)) \end{bmatrix} ds, \end{aligned}$$

$$V_3(t) = \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}^T(s)(\mathbf{U} \otimes \mathbf{R})\mathbf{x}(s)ds,$$

$$\begin{aligned} V_4(t) = & \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s)ds \\ \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}(s)ds \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{12} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{13} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{22} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{23} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s)ds \\ \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}(s)ds \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_5(t) = & \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} dsd\theta \\ & + \int_{t-\tau_c}^t \int_{\theta}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} dsd\theta, \end{aligned}$$

و  $\mathbf{U}$  در لم 3 تعریف شده است.

**توجه 3:** اگر تابع لیاپانوف پیشنهادی بر اساس بردار حالت  $\mathbf{x}(t)$  نوشته شود، آنگاه همگرایی حالت های گره های شبکه به مقدار صفر تضمین می گردد که در این صورت تضمینی بر هم گام بودن رفتار گره های شبکه وجود ندارد. تابع لیاپانوف (5) ظاهراً بر اساس  $\mathbf{x}(t)$  نوشته شده است اما بر اساس ویژگی ماتریس  $\mathbf{U}$  که در لم 3 تعریف شده است می توان بسادگی نشان داد که تابع لیاپانوف پیشنهادی بر اساس اختلاف بین بردار حالت گره های شبکه (خطای بین بردار حالت ها) نوشته شده است. با گرفتن مشتق از  $V_1(t)$  نسبت به  $t$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & 2\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U} \otimes \mathbf{P})\dot{\mathbf{x}}(t) \\ = & 2\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{U} \otimes \mathbf{P})[-(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C})\mathbf{x}(t) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{x}(t - \tau) + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_1)\mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M})\mathbf{x}(t)) \\ & + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2)\mathbf{F}((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D})\mathbf{x}(t - \tau)) + (\mathbf{G}^{(1)} \otimes \Gamma_1)\mathbf{x}(t) \\ & + (\mathbf{G}^{(2)} \otimes \Gamma_2)\mathbf{x}(t - \tau_c) + (\mathbf{G}^{(3)} \otimes \Gamma_3) \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}(s)ds \left. \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

مطابق با لم 3 و 4، رابطه (6) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) = & \tau \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds \\ & + \tau_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \int_{t-\tau_c}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds. \end{aligned} \quad (13)$$

مطابق با لم ۳ می توان رابطه (۱۳) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) \leq & \tau \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\tau} \left( \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \times \\ & \quad \left( \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds \right) \\ & + \tau_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\tau_c} \left( \int_{t-\tau_c}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \times \\ & \quad \left( \int_{t-\tau_c}^t \begin{bmatrix} \mathbf{x}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) \end{bmatrix} ds \right), \end{aligned} \quad (14)$$

یا بطور مشابه

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) \leq & \tau \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\tau} \Phi_1^T(t) \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} & -\mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} & -\mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \Phi_1(t) \\ & + \tau_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\tau_c} \Phi_2^T(t) \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} & -\mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{12} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} & -\mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{O}_{22} \end{bmatrix} \Phi_2(t), \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن  $\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) ds & \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{x}^T(t-\tau) \end{bmatrix}^T$  و  $\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}^T(s) ds & \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{x}^T(t-\tau_c) \end{bmatrix}^T$  است. بر طبق لم ۲ و فرض ۲، برای هر ماتریس قطری مثبت  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \mathbf{J}_1 \Delta_1 \mathbf{M} & \mathbf{M}^T \mathbf{J}_1 \Delta_2 \\ * & -\mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \theta(t) \\ + \theta^T(t-\tau) \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \mathbf{L}_1 \Delta_1 \mathbf{M} & \mathbf{M}^T \mathbf{L}_1 \Delta_2 \\ * & -\mathbf{L}_1 \end{bmatrix} \theta(t-\tau) \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{R}) \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-\tau_c) (\mathbf{U} \otimes \mathbf{R}) \mathbf{x}(t-\tau_c) \\ = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[ (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{R} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right. \\ & \left. - (\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c))^T \mathbf{R} (\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c)) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

با مشتق گیری از عبارت چهارم رابطه (۵) نسبت به  $t$  داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & 2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s) ds \\ \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}(s) ds \end{bmatrix}^T \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{11} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{12} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{13} \\ * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{22} & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{23} \\ * & * & \mathbf{U} \otimes \mathbf{W}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-\tau) \\ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-\tau_c) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

مطابق با لم ۳، رابطه (۱۱) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[ 2(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{W}_{11}(\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \right. \\ & + (\mathbf{W}_{12} + \mathbf{W}_{13})(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))) \\ & - 2(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{W}_{12}(\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{x}_j(t-\tau)) \\ & + \mathbf{W}_{13}(\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c))) \\ & + 2 \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T (\mathbf{W}_{12}^T(\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \\ & + (\mathbf{W}_{22} + \mathbf{W}_{23})(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))) \\ & - 2 \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T \times \\ & \quad \mathbf{W}_{22}(\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{x}_j(t-\tau)) \\ & - 2 \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T \times \\ & \quad \mathbf{W}_{23}(\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c)) \\ & + 2 \left( \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T (\mathbf{W}_{13}^T(\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \\ & + (\mathbf{W}_{23}^T + \mathbf{W}_{33})(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))) \\ & - 2 \left( \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T \times \\ & \quad \mathbf{W}_{23}^T(\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{x}_j(t-\tau)) \\ & - 2 \left( \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_i(s) ds - \int_{t-\tau_c}^t \mathbf{x}_j(s) ds \right)^T \times \\ & \quad \mathbf{W}_{33}(\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c)). \end{aligned}$$

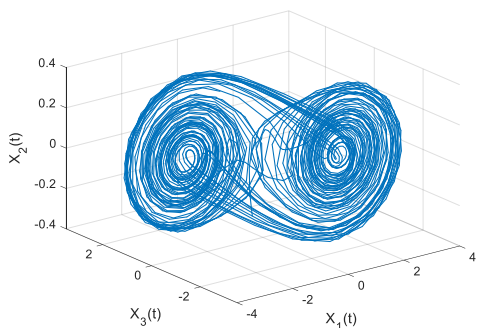
با مشتق گیری از عبارت پنجم رابطه (۵) نسبت به  $t$  داریم:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{G}^{(2)} = \mathbf{G}^{(3)} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

با فرض  $\tau = 0.25$ ، قضیه ۱ را به این مثال اعمال کرده و بیشینه زمان-تاخیر کوپلینگ که هم گام بودن کلی را تضمین می کند برابر  $\tau_c = 0.1844$  بدست می آید. توجه شود که برای مقادیر تاخیر ذکر شده، نامساوی های ماتریسی خطی ارایه شده در قضیه ۱ دارای پاسخ هستند اما با توجه به محدودیت فضا از ذکر مقادیر آنها اجتناب شده است.

توجه ۴: با مشخص بودن مقدار یکی از تاخیرها ( $\tau$  در این مثال) می توان بیشینه مقدار تاخیر دیگر را با استفاده از روش سعی و خطا یافت. بدین منظور مقدار کوچکی را برای تاخیر در نظر گرفته و شرایط قضیه ۱ را بررسی می کنیم. در صورتی که نامساوی های ماتریسی خطی ارایه شده در قضیه ۱ دارای پاسخ بودند، مقدار تاخیر را افزایش می دهیم تا زمانی که بیشینه مقدار تاخیری که شرایط قضیه ۱ برای آن برقرار شود را بیابیم.

با در نظر گرفتن  $f(x) = 0.5(|x+1|-|x-1|)$ ،  $\tau = 0.25$ ،  $\tau_c = 0.18$ ، و شرایط اولیه متفاوت برای گره ها، رفتار آشوبناک مدار چوآی اول (گره ۱) در شکل ۱ نشان داده شده است. مقدار حالت های تمام گره های شبکه مذکور در شکل ۲ رسم شده است. همانطور که از شکل ۲ مشخص است، حالت های تمامی گره های شبکه پس از حدود یک ثانیه به یکدیگر همگرا شده اند. شکل ۳ خطای هم گام سازی بین حالت های گره های شبکه را نشان می دهد که در آن بردار خطای هم گام سازی بصورت  $\mathbf{e}_k(t) = [x_{2k}(t) - x_{1k}(t), \dots, x_{6k}(t) - x_{1k}(t)]^T$ ،  $k = 1, 2, 3$ ، تعریف شده است. همانطور که مشخص است، حالت های تمامی گره ها با یکدیگر هم گام شده اند.



شکل ۱: رفتار آشوبناک مدار چوآ

$$\begin{aligned} & \beta^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{D}^T \mathbf{J}_2 \Delta_1 \mathbf{D} & \mathbf{D}^T \mathbf{J}_2 \Delta_2 \\ * & -\mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \beta(t) \\ & + \beta^T(t-\tau) \begin{bmatrix} -\mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \Delta_1 \mathbf{D} & \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \Delta_2 \\ * & -\mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \beta(t-\tau) \geq 0, \end{aligned} \tag{17}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)) \end{bmatrix}, \\ \beta(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن (۶) الی (۱۷) و جایگذاری  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  از (۲) در آنها بسادگی می توان نشان داد که

$$V(t) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N [\xi_{ij}^T(t) \Psi_{ij} \xi_{ij}(t)], \tag{18}$$

که  $\Psi_{ij}$  در (۴) تعریف شده و

$$\begin{aligned} \xi_{ij}(t) &= \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T, (\mathbf{x}_i(t-\tau) - \mathbf{x}_j(t-\tau))^T, \\ (\mathbf{x}_i(t-\tau_c) - \mathbf{x}_j(t-\tau_c))^T, (\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t)))^T, \\ (\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_i(t-\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}_j(t-\tau)))^T, \\ (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t)))^T, \\ (\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_i(t-\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{x}_j(t-\tau)))^T, \\ \int_{t-\tau}^t (\mathbf{x}_i(s) - \mathbf{x}_j(s))^T ds, \int_{t-\tau_c}^t (\mathbf{x}_i(s) - \mathbf{x}_j(s))^T ds \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

اگر برای  $\forall 1 \leq i < j \leq N$  داشته باشیم  $\Psi_{ij} < 0$ ، آنگاه  $V(t) < 0$  خواهد بود. با توجه به تعریف ۱ نتیجه می گیریم که سیستم (۱) بطور کلی هم گام است. □

### ۴- شبیه سازی یک سیستم نمونه

مدار چوآی تاخیردار با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید [۳۴، ۳۵]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3.1429 & -11 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 14.2860 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 4.7143 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = 1, \Delta_1 = 0, \Gamma_2 = \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### ۸- نتیجه گیری

در این مقاله مساله تحلیل هم گام بودن شبکه های دینامیکی پیچیده به همراه تاخیر در حالت های گره ها و کوپلینگ ارتباطی انجام گرفت. علاوه بر این، جهت بررسی کلاس وسیعتری از این شبکه ها، ترکیبی از کوپلینگ ثابت، کوپلینگ با تاخیر گسسته، و کوپلینگ با تاخیر توزیع شده در نظر گرفته شد. سپس بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوسکی، شرایطی در قالب نامساوی های ماتریسی خطی به منظور تضمین هم گام بودن رفتار گره های شبکه استخراج و ارائه شدند. در انتها نیز روش معرفی شده روی یک مثال از مدارات چوآی به هم کوپل شده اعمال و کارآیی آن بررسی شد.

### مراجع

[1]F. Bellamine, A. Almansoori, and A. Elkamel, "Modeling of complex dynamic systems using differential neural networks with the incorporation of a priori knowledge," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 266, pp. 515-526, 2015.

[2]A. Kazemy, "Global synchronization of neural networks with hybrid coupling: a delay interval segmentation approach," *Neural Computing and Applications*, vol. 30, no. 2, pp. 627-637, 2018.

[3]G. A. Pagani and M. Aiello, "The power grid as a complex network: a survey," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 392, no. 11, pp. 2688-2700, 2013.

[4]H.-T. Zhang, T. Yu, J.-P. Sang, and X.-W. Zou, "Dynamic fluctuation model of complex networks with weight scaling behavior and its application to airport networks," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 393, pp. 590-599, 2014.

[5]K. Liu and E. Fridman, "Networked-based stabilization via discontinuous Lyapunov functionals," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 4, pp. 420-436, 2012.

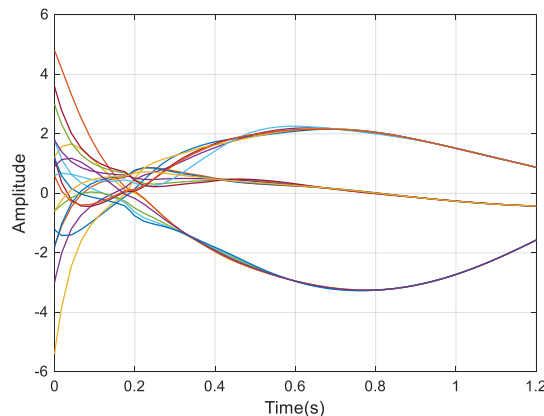
[6]Y. Tang, F. Qian, H. Gao, and J. Kurths, "Synchronization in complex networks and its application—a survey of recent advances and challenges," *Annual Reviews in Control*, vol. 38, no. 2, pp. 184-198, 2014.

[7]S. H. Strogatz, "Exploring complex networks," *Nature*, vol. 410, no. 6825, pp. 268-276, 2001.

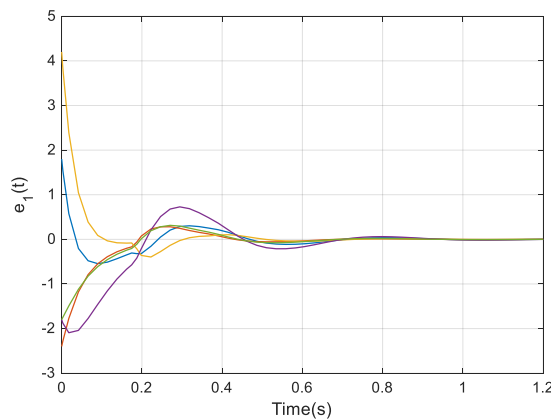
[8]Y. Zhang, D.-W. Gu, and S. Xu, "Global exponential adaptive synchronization of complex dynamical networks with neutral-type neural network nodes and stochastic disturbances," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 10, pp. 2709-2718, 2013.

[9]L. Zhang, Y. Wang, Y. Huang, and X. Chen, "Delay-dependent synchronization for non-diffusively coupled time-varying complex dynamical networks," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 259, pp. 510-522, 2015.

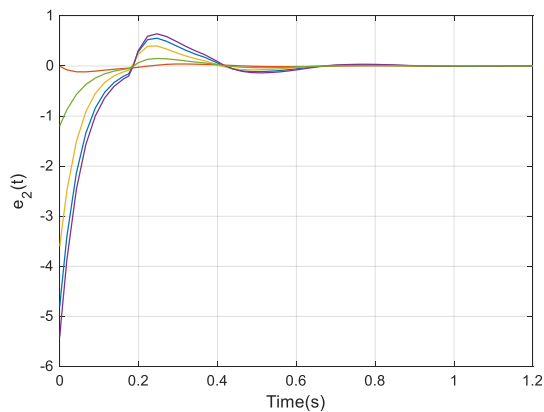
[10]L. Zhang, Y. Wang, Q. Wang, and S. Zhang, "Synchronization for Time-Delayed Coupling Complex Dynamic Networks with Different Dimensional Nodes Via Decentralized Dynamic Compensation Controllers," *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 2, pp. 664-674, 2015.



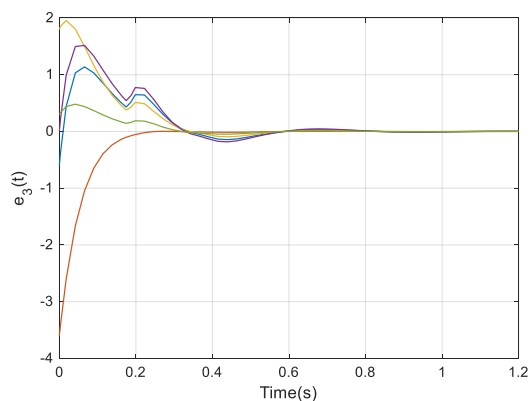
شکل ۲: رفتار حالت های مدارات چوآی به هم کوپل شده



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳: خطای هم گام بودن  $e_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .



- [25] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [26] W.-H. Chen, Z. Jiang, X. Lu, and S. Luo, "H $\infty$  synchronization for complex dynamical networks with coupling delays using distributed impulsive control," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 17, pp. 111-127, 2015.
- [27] Z. Tang, J. Feng, and Y. Zhao, "Global synchronization of nonlinear coupled complex dynamical networks with information exchanges at discrete-time," *Neurocomputing*, vol. 151, pp. 1486-1494, 2015.
- [28] Y. Xu, W. Zhou, J. a. Fang, C. Xie, and D. Tong, "Finite-time synchronization of the complex dynamical network with non-derivative and derivative coupling," *Neurocomputing*, vol. 173, pp. 1356-1361, 2016.
- [29] A. Kazemy and J. Cao, "Consecutive synchronization of a delayed complex dynamical network via distributed adaptive control approach," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 16, no. 6, pp. 2656-2664, 2018.
- [30] A. Kazemy and É. Gyurkovics, "Sliding mode synchronization of a delayed complex dynamical network in the presence of uncertainties and external disturbances," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, p. 0142331218805533, 2018.
- [31] A. Kazemy and K. Shojaei, "Synchronization of Complex Dynamical Networks with Dynamical Behavior Links," *Asian Journal of Control*, 2020.
- [32] Y. Liu, Z. Wang, J. Liang, and X. Liu, "Synchronization and state estimation for discrete-time complex networks with distributed delays," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 38, no. 5, pp. 1314-1325, 2008.
- [33] R. A. Horn, R. A. Horn, and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [34] W.-H. Chen, D. Wei, and X. Lu, "Global exponential synchronization of nonlinear time-delay Lur'e systems via delayed impulsive control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 3298-3312, 2014.
- [35] A. Kazemy and M. Farrokhi, "Synchronization of chaotic Lur'e systems with state and transmission line time delay: a linear matrix inequality approach," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 39, no. 11, pp. 1703-1709, 2017.
- [11] A. Kazemy, "Synchronization criteria for complex dynamical networks with state and coupling time-delays," *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 1, pp. 131-138, 2017.
- [12] E. Gyurkovics, K. Kiss, and A. Kazemy, "Non-fragile exponential synchronization of delayed complex dynamical networks with transmission delay via sampled-data control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 17, pp. 8934-8956, 2018.
- [13] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical review letters*, vol. 64, no. 8, p. 821, 1990.
- [14] D. Ji, J. H. Park, W. Yoo, S. Won, and S. Lee, "Synchronization criterion for Lur'e type complex dynamical networks with time-varying delay," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 10, pp. 1218-1227, 2010.
- [15] B. Wang and Z.-H. Guan, "Chaos synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 11, no. 3, pp. 1925-1932, 2010.
- [16] W. Yu, G. Chen, and M. Cao, "Consensus in directed networks of agents with nonlinear dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 6, pp. 1436-1441, 2011.
- [17] T. H. Lee, D. Ji, J. H. Park, and H. Y. Jung, "Decentralized guaranteed cost dynamic control for synchronization of a complex dynamical network with randomly switching topology," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 3, pp. 996-1010, 2012.
- [18] M. Fang, "Synchronization for complex dynamical networks with time delay and discrete-time information," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 258, pp. 1-11, 2015.
- [19] L. Yi-ping and Z. Bi-feng, "Guaranteed Cost Synchronization of Complex Network Systems with Delay," *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 4, pp. 1274-1284, 2015.
- [20] X. Yang, J. Cao, and J. Lu, "Synchronization of randomly coupled neural networks with Markovian jumping and time-delay," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 2, pp. 363-376, 2013.
- [21] H. Zhang, D. Gong, B. Chen, and Z. Liu, "Synchronization for coupled neural networks with interval delay: a novel augmented Lyapunov-Krasovskii functional method," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 58-70, 2013.
- [22] C. Zheng and J. Cao, "Robust synchronization of coupled neural networks with mixed delays and uncertain parameters by intermittent pinning control," *Neurocomputing*, vol. 141, pp. 153-159, 2014.
- [23] B. Huang, H. Zhang, D. Gong, and J. Wang, "Synchronization analysis for static neural networks with hybrid couplings and time delays," *Neurocomputing*, vol. 148, pp. 288-293, 2015.
- [24] M. Kalpana, P. Balasubramaniam, and K. Ratnavelu, "Direct delay decomposition approach to synchronization of chaotic fuzzy cellular neural networks with discrete, unbounded distributed delays and Markovian jumping parameters," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 254, pp. 291-304, 2015.