

## مقایسه عملکرد تخمین گرهای تصادفی با رؤیت گر حفظ تقارن برای تعیین وضعیت نانوماهواره با تک حسگر مغناطیس سنج

ساناز سبزواری<sup>۱</sup>، احمدرضا ولی<sup>۲</sup>، محمدرضا عاروان<sup>۳</sup>، سیدمحمد مهدی دهقان<sup>۴</sup>، محمدحسین فردوسی<sup>۵</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل دکتری مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، s\_sabzevari@mut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، vali@mut.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، arvan@mut.ac.ir

<sup>۴</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، smmd@mut.ac.ir

<sup>۵</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، ferdowsi@mut.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۲۲

ویرایش: ۱۳۹۸/۰۹/۰۵

دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۹

**چکیده:** طراحی تخمین گر وضعیت نانوماهواره‌ها با تک حسگر مغناطیس سنج، به دلیل محدودیت در وزن و حجم، محدود بودن طول عمر ژيروسکوپ‌های مکانیکی در بلند مدت و پدیده کسوف، امری ضروری است. رویکرد این مقاله برای جبران این کمبود داده، فیلتر دو مرحله‌ای است. بدین صورت که وضعیت در فیلتر مرحله‌ی دوم با استفاده از داده‌ی حسگر و مشتق میدان مغناطیسی ناشی از تخمین فیلتر مرحله‌ی اول با فیلتر کالمن توسعه یافته، تعیین می‌گردد. به منظور دسترسی به دقت مناسب برای تعیین وضعیت نانوماهواره با تک حسگر سه محوره، دو الگوریتم تصادفی فیلتر کالمن توسعه یافته ضربی و تخمین گر جذر مربعی چهارگان بی‌رد با رؤیت گر غیرخطی حفظ تقارن پیشنهادی مقایسه شده است. رؤیت گر ارائه شده، بر مبنای رؤیت گرهای غیرمتغیر تحت عملکرد گروه لی است. برای این منظور، در روند طراحی از رویکرد چارچوب متحرک استفاده شده است تا با استفاده از معادلات دینامیک خطای غیرمتغیر بتوان پارامترهای رؤیت گر را تنظیم کرد. نتایج شبیه‌سازی در هر دو حوزه زمان و پاسخ فرکانسی، دقت قابل قبول را در هر سه الگوریتم تأیید می‌کند. اما در صورتی که خطای تخمین اولیه‌ی وضعیت بزرگتر شود، خطای میانگین جذر مربعی رؤیت گر غیرخطی، بسیار کمتر از دو الگوریتم تصادفی است. همچنین در این روش به دلیل تنظیم پارامترها با معادلات ریکاتی دیفرانسیلی متناوب، از طریق پایداری لیاپانوف همگرایی را نیز تضمین می‌کند.

**کلمات کلیدی:** تعیین وضعیت نانوماهواره، تک حسگر مغناطیس سنج، تخمین گرهای چهارگان تصادفی، رؤیت گر غیرخطی حفظ تقارن.

### Comparison Performance of Stochastic Estimators and Symmetry-Preserving Observer to Determine Nanosatellite Attitude with a Single-Sensor Magnetometer

Sanaz Sabzevari, Ahmad Reza Vali, Mohammad Reza Arvan, Seyyed Mohammad Mehdi Dehghan, Mohammad Hossein Ferdowsi

**Abstract:** Designing the estimator that can determine the attitude with a single sensor is vital due to the limited weight and volume in the nano-satellite, the problems caused by the limited lifetime of

the mechanical gyroscope in the long term and the eclipse phenomenon. To compensate for data deficiency, a two-nested filter has been utilized in this paper. To this end, the attitude in the second filter is estimated using the sensor data and the magnetic field derivative estimation from the first filter by the extended Kalman filter. Two stochastic algorithms named as multiplicative extended Kalman filter and square-root unscented quaternion estimator are compared with the proposed symmetry-preserving nonlinear observer in order to obtain an appropriate accuracy for determining the attitude of the nano-satellite, which has only a three-axis magnetometer. The proposed method is based on invariant observers under the action of the Lie group. The moving frame approach has been used so that the observer's parameters can be adjusted through the invariant error dynamic equations. Simulation results confirm an acceptable accuracy in all three algorithms for both time and frequency response analyses. However, the root mean square error of the attitude error with a nonlinear observer is much less than the stochastic algorithm in case of a larger initial estimation error. Furthermore, this approach guarantees convergence by the Lyapunov stability proof owing to setting the parameters with periodic differential Riccati equations.

**Keywords:** Nano-satellite attitude determination, only magnetometer data, stochastic quaternion estimators, symmetry preserving nonlinear observe

## ۱- مقدمه

مسئله تعیین وضعیت ماهواره در مدار نزدیک به زمین برای کاربردهای مختلفی نظیر آنتن‌های مخابراتی، برای ارسال و دریافت داده از دیرباز مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته و روش‌های گوناگون نیز برای این منظور ابداع شده است. روش تخمین وضعیت نانوماهواره‌های کم هزینه به طور عمده بر مبنای وجود دو حسگر خورشیدی و مغناطیس سنج است که در مقالاتی مانند [۱] بررسی شده است. در زمان این ارسال و دریافت داده، ممکن است بعضی از حسگرها در شرایط خاصی قادر به اندازه‌گیری نباشند. برای نمونه اگر در شرایط کسوف باشیم، در چنین حالتی داده‌ی حسگر خورشیدی موجود نیست. همچنین از حسگرهای متداول دیگری که در تعیین وضعیت استفاده می‌شود ژيروسکوپ است. ژيروسکوپ‌های مرسوم به دلایل صرفه‌ی اقتصادی، اندازه و وزن بیشتر از نوع میکرو الکترو مکانیکی هستند. اما این نوع از ژيروسکوپ‌ها دقت پایینی دارند که به‌طور معمول بایاس آن را در مقالات تخمین می‌زنند. به‌علاوه، ژيروسکوپ‌هایی با دقت بالاتر نیز گران هستند [۲-۳]. حسگر ستاره‌یاب نیز یکی از حسگرهای تعیین وضعیت است. این حسگر، در واقع یک دوربین با قدرت تفکیک بسیار زیاد است که از آسمان تصویربرداری می‌کند و با پردازش این تصاویر، ستاره‌های خاصی (مانند ستاره‌ی قطبی) را آشکارسازی کرده و وضعیت ماهواره را نسبت به این ستاره‌ها اندازه‌گیری می‌کند. حسگر ستاره‌یاب محدوده قیمتی و توان مصرفی بالایی دارد که در کاربردهای عملی، بخصوص در نانوماهواره، مقرون به‌صرفه نخواهد بود. به لحاظ وزن و ابعاد حسگر ستاره، استفاده از آن برای نانوماهواره‌ای که بیشینه کل وزن آن در حدود ۱۵ کیلو است و حسگرهای دیگری هم وجود دارد، منطقی نیست [۴]. در [۴] به طور مختصر، مروری بر روش‌های بدون ژيروسکوپ در تعیین وضعیت

نانوماهواره پرداخته است که با تفکیک کلی میان روش‌های استفاده و عدم استفاده از معادلات دینامیکی و سینماتیکی ماهواره بیان شده‌اند. در روشی که از معادلات دینامیکی استفاده می‌کند، شامل روش‌های تخمین خطی و غیرخطی فیلترهای کالمن است. در صورت عدم استفاده از معادلات ماهواره، نیازمند حداقل دو بردار مشاهده و یا حسگرهای قوی تعیین وضعیت همچون حسگر ستاره‌یاب و یا سامانه موقعیت‌یاب جهانی (GPS<sup>1</sup>) است. در این مقاله بدنبال آن هستیم که در شرایط کسوف و عدم دسترسی به داده‌ی حسگر خورشیدی و سایر حسگرهای وضعیت، با تک داده‌ی حسگر سه محوره‌ی مغناطیس سنج که حسگر متداول در نانوماهواره بوده و با دقتی مطلوب است، بتوان وضعیت ماهواره را تخمین زد. در مقالاتی که تنها از داده‌ی حسگر مغناطیس سنج به‌تنهایی برای تعیین وضعیت استفاده کرده‌اند، ذکر شده است که این داده‌ها به‌تنهایی برای تعیین وضعیت در سه محور کافی نیستند و احتیاج به یک پیش فیلتر برای تخمین یک سری اطلاعات از روی اندازه‌گیری‌های مغناطیس سنج وجود دارد. از این اطلاعات به‌عنوان اندازه‌گیری دوم، علاوه بر اندازه‌گیری‌های مغناطیس سنج در فیلتر اصلی برای تخمین وضعیت و سرعت زاویه‌ای می‌توان استفاده کرد. یکی از اولین راهکارها در این حوزه برای تعیین وضعیت با تنها داده‌ی مغناطیس سنج به‌وسیله‌ی سیاهی<sup>۲</sup> ارائه شده است [۵]. اندازه‌ی خطا به‌وسیله‌ی روش فیلتر کالمن سیاهی بدست آمده است. این روش نشان داده است که خطاهایی در حدود دو تا سه درجه بعد از حدود ۲۰۰۰ ثانیه با خطای اولیه پایین فیلتر دارد. البته شرایط رؤیت‌پذیری در این سامانه بررسی نشده و نتایج نیز زمان همگرایی به نسبت بالایی دارد. همچنین یکی از اولین مطالعات کاربردی تعیین وضعیت که تنها از حسگر مغناطیس سنج استفاده کرده است، با مأموریت فضایی آزمایش اعتبار ارتعاش زمین راستی آزمایی شد که قربانی عدم تعیین وضعیت به‌طور

<sup>2</sup> Psiaki

<sup>1</sup> Global Positioning System

دارد. به دلیل مقاوم بودن رؤیت گرهای غیرخطی در برابر خطای تخمین اولیه، می تواند به عنوان روشی در برابر روش های تصادفی ارائه شوند [۱۲]. یکی از کاندید رؤیت گرها، رؤیت گرهای حفظ تقارن هستند که به دلیل خاصیت غیر متغیر بودن و دینامیک خطای غیر متغیر مورد توجه قرار می گیرند [۱۳].

هدف این مقاله، تحلیل فیلتر طراحی شده جامع و تا حد کافی مقاوم است تا وضعیت دقیقی را در سناریوی مدار نزدیک زمین با تنها داده ی سه محوره ی مغناطیس سنج در شرایط کسوف و عدم دسترسی به داده ی حسگر خورشیدی تعیین نماید. برای این منظور لازم است تا مقایسه ای میان روش های تخمین مطرح شده، با در نظر گرفتن معیارهای خطای میانگین، زمان همگرایی و پاسخ فرکانسی انجام گردد. همچنین، یکی از شرایط لازم برای همگرایی تخمین، شرط رؤیت پذیری است. در سناریوی که فضاپیما نسبت به بردار میدان مغناطیسی ثابت است (اندازه گیری بردار میدان مغناطیسی تغییر نمی کند)، مسئله به طور کامل رؤیت ناپذیر است. لذا، به لحاظ شرایط فیزیکی در مدار استوایی نیز سامانه رؤیت ناپذیر است. بنابراین، در زمان کسوف که حدود یک سوم دوره ی مداری است، مسئله حائز ارزیابی است. همچنین، محوره های حسگر مغناطیس سنج در راستای محوره های دستگاه بدنه ماهواره بوده و خطای نصب آن روی ماهواره قابل صرف نظر کردن است.

در ادامه، به تبیین سامانه ی مورد نظر در بخش دوم پرداخته و رؤیت پذیری آن به طور مختصر مورد ارزیابی قرار داده می شود. سپس در بخش سوم به معرفی روش های مقایسه ای که دو نوع آن تصادفی و یک نوع آن قطعی است پرداخته می شود. به منزله ی حفظ نرم واحد چهارگان، الگوریتم های تصادفی نظیر فیلتر کالمن توسعه یافته ضربی و جذر مربعی چهارگان بی رد در نظر گرفته شده اند. در سامانه ی تک حسگر مغناطیس سنج، به دلیل بارز بودن تفاوت روش جذر مربعی چهارگان بی رد با مرجع اصلی، این روش به همراه رؤیت گر غیرخطی حفظ تقارن توضیح داده شده است. در بخش چهارم نیز نتایج شبیه سازی که در آن فیلتر مرحله ی اول با فیلتر کالمن توسعه یافته انجام شده و فیلتر مرحله ی دوم از الگوریتم های فوق استفاده شده است، نیز مورد ارزیابی و مقایسه قرار می گیرد.

## ۲- مدل سازی و بیان مسئله

تعیین وضعیت، فرایند تعیین جهت فضاپیما در دستگاه بدنه  $\{B\}$  نسبت به چارچوب مرجع  $\{R\}$  است. عمده ترین بردارهای مرجع مورد استفاده بردارهای یک جهت خورشید، مرکز زمین، یک ستاره شناخته شده و یا میدان مغناطیسی زمین است. وضعیت فضاپیما نسبت به بردارهای مرجع، پس از این که این بردارها نسبت به چارچوب فضاپیما تعیین شدند، قابل محاسبه است [۱۴]. در فرایند تعیین وضعیت فضاپیما به کمک

صحیح شد و ناپدید گردید. همچنین با بکارگیری حسگر مغناطیس سنج، روشی به نام  $DADMOD^1$  (تعیین وضعیت قطعی با استفاده از تنها داده ی مغناطیس سنج) توسعه داده شده است [۶]. این روش، وضعیت و سرعت زاویه ای را از روی داده ی مغناطیس سنج با به کارگیری تفاضل محدود از اندازه گیری، و با دانستن شتاب زاویه ای فضاپیما برای یافتن مشتق میدان مغناطیسی تخمین زده است. معادلات از درجه دوم هستند، به طوری که چندین راه حل وجود دارد، ولی  $DADMOD$  یکی از دو راه حل که به احتمال قوی وضعیت صحیح را ارائه می دهند، انتخاب کرد. این روش برای پیاده سازی زمان حقیقی، که اندازه گیری ها نویزی هستند، باعث جلوگیری حل صحیح می شود. در [۷]، فیلتر کالمن دوگانه را با سناریوی مشترکی که فضاپیما در دستگاه لخت ثابت بوده و دوران نمی کند، توسعه داده است. مفهوم این سناریو بدین صورت است که جسمی که حول محور کوچک یا بزرگش می چرخد، جهت محور چرخشش را نسبت به فضای لخت ثابت نگه می دارد. در این مقاله به محدودیت چهارگان در تخمین فیلتر مرحله ی دوم توجه نشده است و لذا نتوانسته تخمین وضعیت را به درستی انجام دهد. همچنین نتایج را بر روی زوایای اولر نمایش نداده است. روشی که در [۶] مطرح شده است، استفاده از تفاضل محدود برای یافتن مشتق بردار میدان مغناطیسی است تا بتوان بردار دوم اندازه گیری را فراهم آورد. در زمان حقیقی به دلیل غیرخطی بودن میدان مغناطیسی، این ایده عملی نیست. نوسانات کوچکی با زمان نمونه برداری یک ثانیه باعث ایجاد خطاهایی شدید در محاسبات مشتق خواهد شد. زمانی که بردار نویزی میدان مغناطیسی و بردار مشتق آن در الگوریتم  $DADMOD$  استفاده می شوند، تخمین های وضعیت در حدود ۶۰ تا ۷۰ درجه خطا دارند. اما زمانی که از مدل بدون نویز استفاده شده، وضعیت با موفقیت تعیین شده است. لذا این الگوریتم به نویز حساس بوده و در پیاده سازی زمان حقیقی غیردقیق است. در طراحی فیلتر کالمن توسعه یافته ی مرحله دوم، روش رساله ی [۸] با بهره گیری از داده های مشتق میدان مغناطیسی در فیلتر مرحله ی اول، از فیلتر کالمن توسعه یافته اصلی استفاده کرده است. اما محدودیت قید نرم واحد بودن چهارگان (با توجه به رساله های [۹] و [۱۰] در برورسانی چهارگان) در نظر گرفته نشده است که خود موجب واگرایی فیلتر و خطای برداری می شود. لذا فیلتر یا رؤیت گر می بایست نرم واحد بودن را در چهارگان برای خاصیت متعامد بودن دوران حفظ کند. راهکار دیگری نیز در زمان عدم دسترسی به داده ی حسگر خورشیدی و با وجود تنها حسگر مغناطیس سنج در [۱۱] مطرح شده است. با توجه به مقاله ی [۱۱]، در زمان دسترسی به داده ی حسگر خورشیدی، از ترکیب روش تجزیه مقادیر منفرد با فیلتر کالمن توسعه یافته برای تخمین زوایای اولر استفاده کرده است. اما در زمانی که کسوف رخ می دهد تنها از فیلتر کالمن توسعه یافته با داده ی حسگر مغناطیس سنج بهره گرفته است. این روش مشکلاتی نظیر واگرایی، عدم مقاومت در برابر خطای تخمین اولیه، تکینگی و برهم زدن خاصیت یکا متعامد ماتریس دوران ناشی از تخمین مستقیم زوایای اولر را به همراه

<sup>1</sup> Deterministic Attitude Determination using Magnetometer Only Data

(۴)  $S \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \end{matrix} \right]$  همان  $\left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right]$ ، تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{B} \vec{B} \Big|_B &= {}^B (D_B \vec{B}) \triangleq ({}^I \dot{C})^T {}^I \vec{B} = - \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] ({}^I \dot{C})^T {}^I \vec{B} = \\ & {}^B \vec{B} \times {}^B \vec{\omega}_{B/I} = - \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] {}^B \vec{B} \end{aligned} \quad (۳)$$

$$S \left( \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \end{matrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

با توجه به روابط بالا، برای معادلات دینامیکی سامانه‌ی نانوماهواره با اندازه‌گیری تنها مغناطیس سنخ در فیلتر مرحله‌ی اول، رابطه‌ی (۵) برقرار است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^B \vec{B} \\ {}^B (D_B \vec{B}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^B (D_B \vec{B}) \\ - \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] {}^B \vec{B} + \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] \left( \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] {}^B \vec{B} \right) \\ {}^B \vec{F} \left( {}^B \vec{B}, {}^B (D_B \vec{B}), {}^B \vec{\omega}_{B/I} \right) \end{bmatrix} = \\ {}^B \vec{y} &= \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۵)$$

در رابطه‌ی مذکور،  ${}^B (D_B \vec{B})$  متغیر حالت مشتق میدان مغناطیسی از دید چارچوب بدنه بیان شده در دستگاه بدنه که برابر  $\dot{B} \vec{B} \Big|_B = \frac{d}{dt} ({}^B \vec{B})$  است و  ${}^B \vec{y}$  بردار اندازه‌گیری حسگر مغناطیس سنخ بیان شده در دستگاه بدنه جسم صلب است. همچنین مشتق بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنه و معادلات دینامیکی آن طبق (۶) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^M \vec{\omega}_{B/I} &= ({}^M \mathbf{J}^{-1}) ({}^M \mathbf{J} ({}^M \vec{\omega}_{B/I}) \times {}^M \vec{\omega}_{B/I} + {}^M \vec{\tau}) \\ & \equiv H ({}^M \vec{\omega}_{B/I}) + {}^M \mathbf{J}^{-1} ({}^M \vec{\tau}) \end{aligned} \quad (۶)$$

در رابطه‌ی بالا،  ${}^M \vec{\omega}_{B/I}$  و  ${}^M \vec{\tau}$  به ترتیب، بردارهای سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به لخت و گشتاور اغتشاشی بیان شده در چارچوب اصلی  $\{M\}$  هستند. همچنین،  ${}^M \mathbf{J}$  ماتریس ممان اینرسی قطری در چارچوب اصلی است [۱۸]. در واقع این چارچوب طبق رابطه‌ی (۷)، ماتریس ممان اینرسی غیر قطری  $({}^B \mathbf{J})$  را تحت ماتریس دوران  ${}^M C$ ، به ماتریس قطری در چارچوب اصلی تبدیل می‌کند.  $eig(\cdot)$  تابعی است که مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه می‌کند.

$$\begin{aligned} {}^B \vec{\omega}_{B/I} &= {}^B C ({}^M \vec{\omega}_{B/I}), {}^B \dot{\vec{\omega}}_{B/I} = {}^B C ({}^M \dot{\vec{\omega}}_{B/I}) \\ \left[ \begin{matrix} B \\ C, {}^M \mathbf{J} \end{matrix} \right] &= eig ({}^B \mathbf{J}) \end{aligned} \quad (۷)$$

## ۲-۱-۲ مدل ریاضی مرحله‌ی دوم

حسگرهای مرجع، از بردارهای یکه نظیر خروجی‌های اندازه‌گیری شده استفاده می‌شود، چرا که وضعیت زاویه‌ای نسبت به مراجع مشاهده‌شده در این حوزه حائز اهمیت بوده و طول بردارها نقشی در این فرایند ندارند. تعیین وضعیت به لحاظ ریاضی بسیار پیچیده بوده، زیرا یک مسئله‌ی نامعین و یا بیش معین است. تعیین وضعیت نیازمند سه پارامتر مستقل از هم است، در حالی که یک بردار یکه تنها دو پارامتر مستقل دارد. لذا تعیین وضعیت نیازمند بیش از یک بردار یکه و کمتر از دو بردار یکه اندازه‌گیری است [۱۵]. با توجه به این که در این مقاله تنها یک حسگر مغناطیس سنخ وجود دارد (برای مدت زمان محدودی که ژيروسکوپ کار نمی‌کند و حسگر خورشیدی نیز به دلیل قرار گرفتن در کسوف قطع است)، لذا نیاز به جبران داده‌ی حسگر دوم وجود دارد. برای جبران حسگر دوم، مشتق میدان مغناطیسی در فیلتر مرحله‌ی اول تخمین زده می‌شود. در این صورت بررسی رُویت‌پذیری، بایستی انجام پذیرد. لذا تعیین رُویت‌پذیری فیلتر مرحله‌ی اول با در نظر گرفتن تنها اندازه‌گیری مغناطیس سنخ برای تخمین پارامترهای چهارگان ضروری می‌باشد. بنابراین، به نحوه مدل‌سازی مسئله در قسمت اول پرداخته می‌شود. در قسمت دوم نیز، معادلات حاکم در هر مرحله تبیین و شرط رتبه برای رُویت‌پذیری طبق مرجع [۱۶] ارزیابی می‌گردد.

## ۲-۱-۱ مدل‌سازی سامانه تعیین وضعیت

با توجه به مسئله‌ی تک حسگر بودن این مقاله، مدل ریاضی مرحله‌ی اول برای تخمین داده‌ی مشتق میدان مغناطیسی تبیین شده است. مدل بعدی نیز با در نظر گرفتن داده‌ی حسگر میدان مغناطیسی در کنار داده‌ی تخمین زده شده برای تخمین وضعیت می‌باشد.

## ۲-۱-۱ مدل ریاضی مرحله‌ی اول

در صورتی که بردار واحد مرجع  ${}^I \vec{B}$  بیان شده در چارچوب لخت بوده و حسگر مغناطیس سنخ که اندازه‌گیری را در چارچوب بدنه در اختیار می‌گذارد با  ${}^B \vec{B}$  نمایش دهیم آنگاه:

$${}^B \vec{B}(t) \triangleq ({}^I C)^T {}^I \vec{B} \quad (۱)$$

لذا مشتق زمانی اندازه‌گیری با توجه به (۱)، طبق رابطه‌ی (۲) است  $({}^I C)$  ماتریس دوران از دستگاه بدنه  $\{B\}$  به دستگاه لخت (اینرسی)  $\{I\}$  و مشتق زمانی ماتریس دوران از دید چارچوب بدنه است [۱۷]:

$${}^I \dot{C} = {}^I C \left[ \begin{matrix} B \\ \vec{\omega}_{B/I} \times \end{matrix} \right] \quad (۲)$$

به‌علاوه، سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به دستگاه لخت و بیان شده در چارچوب بدنه  ${}^B \vec{\omega}_{B/I} := (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  است. همچنین

$${}^B g = \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$L_F^0(g_1) = g_1 = [b_x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$L_F^0(g_2) = g_2 = [0 \ b_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$L_F^0(g_3) = g_3 = [0 \ 0 \ b_z \ 0 \ 0 \ 0].$$

که مشتقات لی طبق رابطه (۱۲) بدست آورده می شود:

$$L_f^i(h) = \begin{cases} h & ; \text{for } i=0 \\ \frac{\partial}{\partial x} [L_f^{i-1}(h)] f & ; \text{for } i=1,2,3,\dots,n \end{cases} \quad (12)$$

و در این سامانه در ادامه؛

$$L_F^1({}^B g) = \left( \frac{\partial}{\partial x} L_F^0({}^B g) \right) \cdot {}^B \bar{F} \\ \vdots \quad (13)$$

$$L_F^5({}^B g) = \left( \frac{\partial}{\partial x} L_F^4({}^B g) \right) \cdot {}^B \bar{F}$$

$$L_f(g_1) = \begin{bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \\ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \\ \dot{\omega}_x - \dot{\omega}_y b_z - (\omega_x^2 + \omega_y^2) b_x + \omega_x \omega_y b_y + \omega_x \omega_z b_z \\ -\dot{\omega}_y b_x - \dot{\omega}_z b_z - (\omega_x^2 + \omega_z^2) b_y + \omega_x \omega_z b_x + \omega_y \omega_z b_z \\ \dot{\omega}_y b_x - \dot{\omega}_z b_y - (\omega_x^2 + \omega_z^2) b_z + \omega_x \omega_z b_y + \omega_y \omega_z b_x \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$L_f(g_2) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot {}^B \bar{F};$$

$$L_f(g_3) = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot {}^B \bar{F}.$$

در رابطه (۱۴)،  $\dot{\omega}_x$ ،  $\dot{\omega}_y$  و  $\dot{\omega}_z$  مؤلفه های بردار  ${}^B \dot{\bar{\omega}}_{B/I}$  می باشد. همچنین در ادامه؛

$$\zeta = \begin{bmatrix} L_F^0(g_1) & \dots & L_F^0(g_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_F^{m-1}(g_1) & \dots & L_F^{m-1}(g_n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

گام نهایی محاسبه گرادینان  $\zeta$  برای ماتریس رؤیت پذیری است:

$$d\zeta = \begin{bmatrix} dL_F^0(g_1) & \dots & dL_F^0(g_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ dL_F^{m-1}(g_1) & \dots & dL_F^{m-1}(g_n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

با جایگذاری مقادیر حالت در ماتریس فوق برای  $n=3$  و  $m=6$ ، با محاسبه رتبه ماتریس  $d\zeta$  در نقاط مختلف می توان رؤیت پذیری محلی را بحث نمود. با اعمال شرایط اولیه به همراه پارامترهای سامانه ای بکاربرده شده، رتبه ماتریس برابر شش یعنی تعداد متغیر حالت شد. همچنین در چند نقطه محلی دیگر نیز رتبه ماتریس شش شد. این مسئله

چنانچه سینماتیک وضعی ماهواره به صورت رابطه (۸) در نظر گرفته شد، به طوری که؛

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{2} \bar{q}_{B/I} \otimes [{}^B \bar{\omega}_{B/I}; 0] \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 \omega_x + q_2 \omega_z - q_3 \omega_y \\ q_4 \omega_y + q_3 \omega_x - q_1 \omega_z \\ q_4 \omega_z + q_1 \omega_y - q_2 \omega_x \\ -q_1 \omega_x - q_2 \omega_y - q_3 \omega_z \end{bmatrix} = {}^B \bar{H}(\bar{q}_{B/I}, {}^B \bar{\omega}_{B/I})$$

$$\{\bar{q}_{B/I}\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}^T \\ = \{\sin(\rho/2) \hat{e} \ \cos(\rho/2)\}^T \quad (9)$$

در روابط فوق،  $\bar{q}_{B/I}$  آرایه چهارگان بدنه نسبت به لخت،  $\hat{e}$  بردار یکه دوران و  $\rho$  زاویه دوران می باشد.

در رابطه (۸)، علامت  $\otimes$  نماد ضرب چهارگانی بین دو بردار  $\bar{Q}_y = (\bar{q}_y; q_{4y})$  و  $\bar{Q}_x = (\bar{q}_x; q_{4x})$  بوده که به صورت زیر تعریف می شود (این نوع ضرب چهارگانی تعویض پذیر نبوده، یعنی  $\bar{Q}_1 \otimes \bar{Q}_2 \neq \bar{Q}_2 \otimes \bar{Q}_1$ ):

$$\bar{Q}_z = \bar{Q}_x \otimes \bar{Q}_y = \begin{pmatrix} q_{4x} \bar{q}_y + q_{4y} \bar{q}_x + \bar{q}_x \times \bar{q}_y \\ q_{4x} q_{4y} - \bar{q}_x^T \bar{q}_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

در معادله (۱۰)، علامت ضرب خارجی است. معکوس چهارگان نیز که با علامت  $\bar{Q}^{-1}$  نشان داده می شود، در صورتی که  $\bar{Q} = (\bar{q}; q_4)$  باشد،  $\bar{Q}^{-1} = (-\bar{q}; q_4)$  خواهد شد ( $q_4 \in \mathbb{R}$  قسمت حقیقی و  $\bar{Q} = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$  قسمت برداری  $\bar{Q}$  می باشد).

## ۲-۲ بررسی رؤیت پذیری سامانه تعیین وضعیت

با استفاده از روش هندسی یا جبری در مرجع [۱۵] که برای سامانه های گویا معادله، با بهره گیری از مشتقات لی، می توان رؤیت پذیری محلی را بررسی کرد. برای این منظور برای تشکیل ماتریس  $\zeta$ ، ابتدا مشتقات لی برای سامانه (۵) که ماتریس اندازه گیری آن به صورت (۱۱) است، بدست آورده می شود:

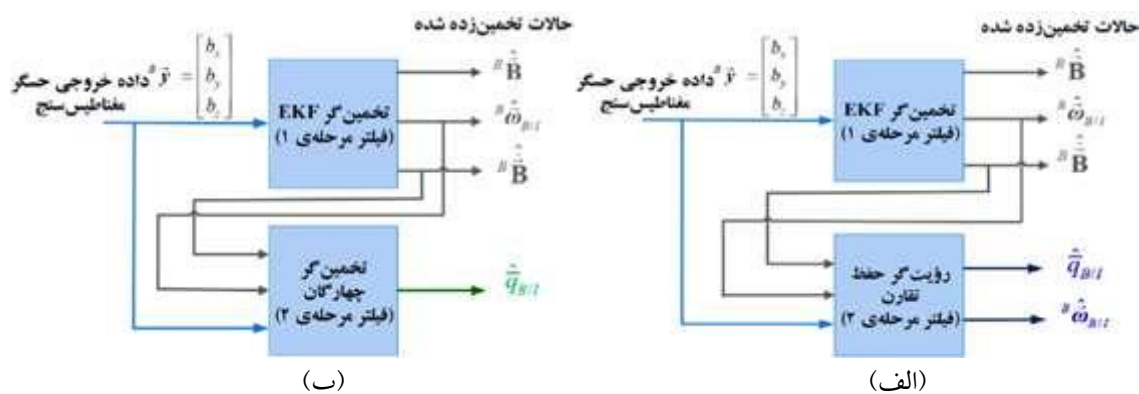
نشان می‌دهد که رؤیت‌پذیری ضعیف محلی فیلتر مرحله‌ی اول طبق قضیه رؤیت‌پذیری جبری در [۱۵] اثبات شده است.

رؤیت‌پذیری فیلتر مرحله‌ی دوم نیز به همین صورت قابل تحلیل است که جزئیات بیشتر آن در مقاله و رساله نویسنده اول در آینده بیان خواهد شد. البته وجود دو بردار مستقل و غیر صفر در این بخش برای تخمین وضعیت کافی است.

### ۳- طراحی فیلتر دو مرحله‌ای تخمین وضعیت

فیلتر مرحله‌ی اول که با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) انجام شده است، طراحی با توجه به مرجع [۱۹] انجام شده است. در این مرحله با استفاده از حسگر مغناطیس سنج، طبق رابطه‌ی (۵) مشتق میدان مغناطیسی تخمین زده می‌شود. این در حالی است که تخمین گرهای

مرحله‌ی دوم که دو نوع آن از دسته‌ی فیلترهای تصادفی و دیگری رؤیت گر غیرخطی است، با استفاده از داده‌های فیلتر مرحله‌ی اول وضعیت چهارگان نانوماهواره را طبق معادله‌ی دینامیکی (۸) تخمین می‌زنند. با توجه به این که الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته ضربی در مرجع [۹] توضیح داده شده است و تنها تابع اندازه‌گیری آن به دلیل تک حسگر بودن تغییر کرده است، بنابراین از میان این دو، تنها الگوریتم جذر مربعی چهارگان بی‌رد که تغییر در بخش انتخاب نقاط سیگما داشته است معرفی می‌شود. لذا در این بخش با معرفی مختصر این الگوریتم تصادفی و قطعی پیشنهاد شده، به مقایسه نتایج حاصل از این سه نوع تخمین گر در بخش بعد پرداخته خواهد شد. نمایش نمودار بلوکی عملکرد سامانه به طور خلاصه در شکل (۱) آورده شده است. لازم به ذکر است که بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به دستگاه لخت بیان در دستگاه بدنه، براساس مشتق میدان تخمین زده می‌شود و داده‌ی اندازه‌گیری میدان مغناطیسی در فیلتر EKF به طور همزمان، بدست می‌آید.



شکل ۱: نمودار بلوکی خلاصه شده‌ی عملکرد سامانه‌ی تخمین وضعیت چهارگان: (الف) روش مبنای، (ب) روش پیشنهادی

که در پیش فیلتر تخمین زده شده است، استفاده شده است. در این الگوریتم، فیلتر بردار حالت خطای وضعیت یعنی  $\delta \vec{p}_{B/I}$  که  $3 \times 1$  است، تخمین می‌زند. بردار خطای وضعیت که با بردار خطای چهارگان  $\delta \vec{q}_{B/I} = [\delta \vec{q} \quad \delta q_4]$  ارتباط دارد، با چهارگان ترکیب شده و در فیلتر انتشار می‌یابد (مرحله‌ی پیش‌بینی)، تا وضعیت فضاپیما را تخمین بزند. در صورتی که بردار حالت  $\vec{x} = [\delta \vec{p}_{B/I}]$  فرض شود، فرایند مرحله‌ای این الگوریتم در پیوست ۶-۲ برای تخمین وضعیت با الگوریتم پیشنهادی بیان می‌گردد.

### ۳-۲ رؤیت گر غیرخطی حفظ تقارن

در این الگوریتم ابتدا معادله‌ی دینامیکی سرعت زاویه‌ای طبق (۶) و معادلات حرکت تعیین وضعیت (۸)، به صورت رابطه‌ی (۱۷) بیان می‌گردد: (گام اول)

### ۳-۱ الگوریتم تصادفی جذر مربعی چهارگان بی‌رد

در فرایند تعیین وضعیت با ترکیبی از حسگرها و مدل‌های ریاضی برای جمع‌آوری مؤلفه‌های برداری در دستگاه بدنه و دستگاه مرجع لخت استفاده می‌کند. با توجه به این که الگوریتم‌های متداول فیلتر کالمن توسعه یافته و ذره‌ای نمی‌توانند برای تخمین چهارگان‌ها به دلیل محدودیت نرم واحد آن، به طور مستقیم استفاده شوند؛ لذا الگوریتم‌های فیلتر کالمن توسعه یافته ضربی و چهارگان بی‌رد با حضور ژيروسکوپ مورد استفاده قرار می‌گیرند [۹]. اما با استفاده از بردار میدان مغناطیسی و مشتق آن، الگوریتم جذر مربعی چهارگان بی‌رد در این مقاله پیشنهاد شده است تا مشکلات قبلی در الگوریتم چهارگان بی‌رد نظیر نداشتن تضمین مثبت معین ماندن ماتریس کواریانس خطای تخمین را مرتفع سازد. همچنین با حضور تک حسگر مغناطیس سنج بتواند به تخمین وضعیت بپردازد. لذا در ادامه به معرفی این نوع الگوریتم خواهیم پرداخت.

این روش برای تخمین وضعیت فضاپیما به ژيروسکوپ سه محوره و حداقل یک حسگر وضعیت نیاز دارد [۹]. در این مقاله، به دلیل محدودیت‌های موجود، جایگزین ژيروسکوپ، از مشتق میدان مغناطیسی

$$\varphi_g(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}) = \begin{pmatrix} \bar{q}_{B/I} \otimes \bar{q}_g \\ P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^M \omega_{B/I}) \otimes \bar{q}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\psi_g(\bar{\tau}) = P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^M \tau) \otimes \bar{q}_g = \bar{T}$$

که طبق تعاریف بیان شده در [۱۹]، اثبات می شود که روابط

$$\frac{d}{dt} \bar{Q} = \frac{1}{2} \bar{Q} \otimes P(\Omega)$$

$$\frac{d}{dt} {}^M \bar{\Omega} = ({}^M J^{-1}) ({}^M J ({}^M \bar{\Omega}) \times {}^M \bar{\Omega}) + {}^M J^{-1} ({}^M \bar{T})$$

برقرارند. همچنین گشتاور اغتشاشی خارجی  $\bar{\tau}$  شامل گشتاور مغناطیسی و آیرودینامیکی است.

در مورد اندازه گیری خروجی نیز طبق تعریف غیر متغیر  $G$ ، روابط

ذیل را داریم:

$$\begin{aligned} ({}^B \bar{y}_b, {}^B \bar{y}_b) &= \varphi_g(\bar{y}_b, \bar{y}_b) = (P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^B y_b) \otimes \bar{q}_g), \\ & - [P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^M \omega_{B/I}) \otimes \bar{q}_g] \times [P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^B y_b) \otimes \bar{q}_g] \\ & + P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P^B y_b) \otimes \bar{q}_g \end{aligned} \quad (20)$$

در گام سوم که روش چارچوب متحرک است، در سه دسته زیر توصیف می شود:

- ۱) نرمال سازی و خطای خروجی غیر متغیر: به منظور ایجاد خطای غیر متغیر در تبدیل  $G$ ، ابتدا نرمال سازی با استفاده از معادله ی (۲۱) انجام می گردد:

$$\bar{q}_{B/I} \otimes \bar{q}_\gamma = (1, 0, 0, 0)^T \quad (21)$$

لذا داریم؛

$$\gamma(\bar{q}_{B/I}) = \bar{q}_\gamma = (\bar{q}_{B/I})^{-1}. \quad (22)$$

در صورتی که  $\bar{q}_\gamma = \gamma(\bar{q}_{B/I})$  فرض شود و  $\bar{q}_{B/I}$  تخمین چهارگان باشد، خطای خروجی غیر متغیر به صورت ذیل بدست می آید:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \varphi_{(\bar{q}_\gamma)}(\hat{y}) - \varphi_{(\bar{q}_\gamma)}(\bar{y}) = \\ & \begin{bmatrix} P^{pn}(\bar{q}_{B/I} \otimes P^B \hat{y}_b) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} - P^{pn}(\bar{q}_{B/I} \otimes P^B y_b) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} \\ P^{pn}(\bar{q}_{B/I} \otimes P^M \hat{y}_b) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} - P^{pn}(\bar{q}_{B/I} \otimes P^M \omega_{B/I}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

با خلاصه سازی و در نظر گرفتن

$${}^B \hat{y}_b := -[{}^B \hat{\omega}_{B/I}] \times {}^B \bar{B} + P^{pn}(\bar{q}_{B/I}^{-1} \otimes P^M \bar{\omega}_{B/I}) \otimes \bar{q}_{B/I}$$

$$\text{و } \bar{E} = \begin{pmatrix} \bar{E}_b \\ \bar{E}_b \end{pmatrix} \text{، رابطه ی (۲۴) بیان می شود:}$$

$$d\zeta = \begin{bmatrix} dL_F^0(g_1) & \dots & dL_F^0(g_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ dL_F^{m-1}(g_1) & \dots & dL_F^{m-1}(g_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$P \begin{pmatrix} {}^B \omega_{B/I} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^B \bar{\omega}_{B/I} \\ 0 \end{pmatrix}$$

آخرین درایه ی آن برای بردار  $\bar{\omega}_{B/I}$  بیان شده در چارچوب بدنه (محاسبه طبق رابطه ی (۱۷)) صفر است. بردار خروجی اندازه گیری که شامل حسگر مغناطیس سنج  ${}^B \bar{B}$  و تخمین مشتق میدان مغناطیسی است طبق رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} {}^B \bar{y} &= (P^{pn}((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P^I \mathbf{B}) \otimes \bar{q}_{B/I}), -[{}^B \bar{\omega}_{B/I}] \times {}^B \bar{B} \\ & + P^{pn}((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P^I \dot{\mathbf{B}}) \otimes \bar{q}_{B/I} \\ & = ({}^B \bar{y}_b, {}^B \bar{y}_b) \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه ی (۱۸)،  ${}^I \bar{B} = B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3$  بردار میدان مغناطیسی زمین در چارچوب لخت و مشتق میدان مغناطیسی از دید چارچوب لخت بیان شده در دستگاه لخت  ${}^I(D_I \bar{B}) = {}^I \dot{\bar{B}}$  می باشد. همچنین  $P^{pn}(v, s) := \bar{v}$  تصویر چهارگان بر روی قسمت برداری  $\bar{v}$  بوده و  $s$  نمایش قسمت اسکالر آن می باشد.

گام دوم بدست آوردن معادلات دینامیکی غیر متغیر است. مفهوم غیر متغیر بدین صورت است که دینامیک های حالت  $(d/dt)x = f(x, u)$  و خروجی  $y = h(x, u)$  با تبدیلی تحت عملکرد گروه لی تغییر نکند؛ یا به عبارت دیگر  $f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D\varphi_g(x) \cdot f(x, u)$  و غیر متغیر  $G$  نامیده می شود که  $(d/dt)X = f(X, U)$  و  $(X, U) = (\varphi_g(x), \psi_g(u))$  باشد [۱۱]. در این تعریف، تابع تبدیل از نوع گروه لی با اعمال بر روی متغیرهای حالت  $\varphi_g(x)$  و  $\psi_g(u)$  با اعمال بر روی ورودی است. همین تبدیل می بایست در خروجی ها به صورت  $Y = h(X, U)$  نیز برقرار باشد. هدف از بیان این تعریف بدست آوردن معادلات دینامیکی خطای غیر متغیر است که باعث می گردد دینامیک های آن مستقل از حالت های ناشناخته شود.

لذا اولین گام برای بدست آوردن این دینامیک های غیر متغیر، یافتن نگاشت های  $(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I})$  و  $\varphi_{(\bar{q}_g, \bar{\omega}_g)}(\bar{\tau})$  طبق [۲۰] می باشد.

$$\begin{aligned}
 & P \left( \sum_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i^{\bar{q}} (\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}})^B \mathbf{e}_i \right) \otimes \bar{q}_{B/I} = \\
 & P \left( \sum_{i=1}^3 (\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b)^B \mathbf{e}_i \right) \otimes \bar{q}_{B/I} = \\
 & P \left( \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{F}}_{b,1}^{\bar{q}} \\ \bar{\mathfrak{F}}_{b,2}^{\bar{q}} \\ \bar{\mathfrak{F}}_{b,3}^{\bar{q}} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_b + \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{F}}_{b,1}^{\bar{q}} \\ \bar{\mathfrak{F}}_{b,2}^{\bar{q}} \\ \bar{\mathfrak{F}}_{b,3}^{\bar{q}} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{E}}_b \right) \otimes \bar{q}_{B/I} \quad (29)
 \end{aligned}$$

به گونه ای که  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}$ ،  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}$ ،  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}$ ،  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}$  توابعی از  $(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b)$  می باشند. در نتیجه با فرایندی مشابه برای معادله دوم (۲۷)، می توان شکل فشرده پیش رؤیت گر غیر متغیر را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \hat{q}_{B/I} &= \frac{1}{2} \hat{q}_{B/I} \otimes P({}^B \hat{\omega}_{B/I}) + P(\bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b) \otimes \hat{q}_{B/I} \\
 \frac{d}{dt} {}^M \hat{\omega}_{B/I} &= ({}^M \mathbf{J}^{-1}) ({}^M \mathbf{J} ({}^M \hat{\omega}_{B/I}) \times {}^M \hat{\omega}_{B/I} + {}^M \bar{\boldsymbol{\tau}}) \\
 &+ P^{pm} (\hat{q}_{B/I}^{-1} \otimes P(\bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b) \otimes \hat{q}_{B/I}) \quad (30)
 \end{aligned}$$

البته هنوز  $P(\bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b)$  به چهارگانی وابسته است که همان اول آن صفر است.

گام پنجم که یافتن معادلات دینامیکی خطای حالت است، بر طبق گام چهارم طبق زیر تعریف می شود:

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = \varphi_{\gamma(\bar{q})}(\hat{q}_{B/I}, \hat{\omega}_{B/I}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) - \varphi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}). \quad (31)$$

با این فرض که  $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (\bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{\omega}})$  و  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}} = \hat{q}_{B/I} \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} - (\bar{\mathbf{0}}, 1)$

برقرارند. همچنین بدلیل این که فضای حالت متعلق به  $SO(3)$  است، لذا  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}} = \hat{q}_{B/I} \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}$  به عنوان خطای تخمین وضعیت در نظر گرفته می شود.  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  مرتبط با خطای چهارگان است که نقطه کاری آن با اعمال اغتشاش کوچک در حدود  $\bar{\mathbf{0}}$  بوده و خود  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  نیز نزدیک  $(\bar{\mathbf{0}}, 1) = \bar{\mathbf{1}}$  می باشد. لذا مشتق زمانی این خطای حالت برابر رابطه زیر است:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}} &= \left( \frac{1}{2} \hat{q}_{B/I} \otimes P({}^B \hat{\omega}_{B/I}) + P(\bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b) \otimes \hat{q}_{B/I} \right) (\bar{q}_{B/I})^{-1} \\
 &- \hat{q}_{B/I} \otimes \left( \frac{1}{2} P({}^B \omega_{B/I}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}} \otimes \bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{\omega}} + P(\bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_b^{\bar{q}} \bar{\mathbf{E}}_b) \otimes \bar{\boldsymbol{\eta}}_{\bar{q}} \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{E}}_b &= {}^B \bar{\mathbf{B}} - P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^B \mathbf{y}_b) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}) \\
 \bar{\mathbf{E}}_b &= {}^B \bar{\mathbf{B}} \\
 &- [P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^B \hat{\omega}_{B/I}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1})] \times [P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^B \mathbf{B}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1})] \\
 &- P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^B \mathbf{y}_b) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

(۲) میدان های برداری غیرمتغیر: با توجه به رابطه (۲۲)،

$$(D\varphi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I})^{-1} = D\varphi_{\gamma^{-1}(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}))$$

به همراه  $\gamma^{-1}(\bar{q}_{B/I}) = \bar{q}_{B/I}$  بدست آورده می شوند. بدنبال آن، مجموعه ای از میدان های برداری به صورت زیر نمایش داده می گردند:

$$\begin{aligned}
 D\varphi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_i \\ \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq 3} &= \\
 \begin{pmatrix} P({}^B \mathbf{e}_i) \otimes \bar{q}_{B/I} \\ \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq 3}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D\varphi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{e}}_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq 3} &= \\
 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ P^{pm} ((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P({}^M \mathbf{e}_i) \otimes \bar{q}_{B/I}) \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq 3}.
 \end{aligned}$$

(۳) محاسبه ی غیرمتغیر: بدلیل این که بعد  $G$  (برابر ۳) کمتر از بعد خمینه (برابر ۶) است، لذا طبق [۱۹]، مجموعه ی غیرمتغیرهای ورودی و حالت ها طبق زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{I}}(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) &= (\varphi_{\gamma(\bar{q})}^b(\bar{q}_{B/I}, \bar{\omega}_{B/I}), \psi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{\boldsymbol{\tau}})) = \\
 (P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^M \hat{\omega}_{B/I}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}), P^{pm} (\bar{q}_{B/I} \otimes P({}^M \boldsymbol{\tau}) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1})). \quad (26)
 \end{aligned}$$

در گام چهارم که طراحی پیش رؤیت گر غیر متغیر است، بر مبنای [۱۹] طبق ذیل انجام می شود:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \bar{q}_{B/I} &= \frac{1}{2} \bar{q}_{B/I} \otimes P({}^B \hat{\omega}_{B/I}) + P \left( \sum_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i^{\bar{q}} (\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}})^B \mathbf{e}_i \right) \otimes \bar{q}_{B/I} \\
 \frac{d}{dt} {}^M \hat{\omega}_{B/I} &= ({}^M \mathbf{J}^{-1}) ({}^M \mathbf{J} ({}^M \hat{\omega}_{B/I}) \times {}^M \hat{\omega}_{B/I} + {}^M \bar{\boldsymbol{\tau}}) \\
 &+ \sum_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i^{\bar{q}} (\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}) P^{pm} ((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P({}^M \mathbf{e}_i) \otimes \bar{q}_{B/I}), \quad (27)
 \end{aligned}$$

که در رابطه بالا،  $\mathfrak{F}_i^{\bar{q}}$  و  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}$  وابسته به  $\bar{\mathbf{I}}$  و  $\bar{\mathbf{E}}$  است. به علاوه، روابط  $\mathfrak{F}_i^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$  و  $\bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$  نیز برقرارند. با در نظر گرفتن (۲۴)، توابع ذیل بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}_i^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) &= \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) \bar{\mathbf{E}}_b \\
 \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) &= \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) \bar{\mathbf{E}}_b + \bar{\mathfrak{F}}_{b,i}^{\bar{q}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{E}}_b, \bar{\mathbf{E}}_b) \bar{\mathbf{E}}_b. \quad (28)
 \end{aligned}$$

با جایگذاری (۲۸) در قسمت دوم معادله (۲۷)، روابط زیر حاصل می گردد:

خطی سازی شده، این روابط در معادله‌ی بالا جایگذاری می‌شود که نتیجه به صورت ذیل است:

$$\begin{aligned} \delta \bar{E}_b &= P^{mn} \left( -\delta \bar{\eta}_q \otimes P({}^I \mathbf{B}) + P({}^I \mathbf{B}) \otimes \delta \bar{\eta}_q \right) = 2{}^I \bar{\mathbf{B}} \times \delta \bar{\eta}_q \\ \delta \bar{E}_b &= 2{}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}} \times \delta \bar{\eta}_q - \delta \bar{\eta}_q \times {}^I \bar{\mathbf{B}}, \end{aligned} \quad (37)$$

که  $\delta \bar{\eta}_q$  و  $\delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}}$  قسمت‌های برداری  $\delta \bar{\eta}_q$  و  $\delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}}$  به ترتیب هستند. در ادامه، معادلات خطای ساده شده بصورت ذیل داده شده‌اند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \bar{\eta}_q &= \frac{1}{2} \delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}} + 2\bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \bar{\mathbf{B}} \times \delta \bar{\eta}_q \right) + 2\bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}} \times \delta \bar{\eta}_q \right) \\ &\quad + \bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \bar{\mathbf{B}} \times \delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}} \right) \\ \frac{d}{dt} \delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}} &= 2\bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \bar{\mathbf{B}} \times \delta \bar{\eta}_q \right) + 2\bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}} \times \delta \bar{\eta}_q \right) \\ &\quad + \bar{\mathcal{E}}_b \left( {}^I \bar{\mathbf{B}} \times \delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

رابطه‌ی دوسویه‌ی میان تحلیل پایداری سامانه‌های غیرخطی و سامانه خطی سازی شده حول نقطه تعادل، طبق [۲۱] و [۲۲] وجود دارد. لذا ارجح تر است که شرایط پایداری سامانه خطی سازی شده مورد بررسی قرار گیرد. به منظور یافتن پارامترهای صحیح تنظیمی بر مبنای قضایای پایداری، روش این مقاله استفاده از معادله ریکاتی دیفرانسیلی متناوب است تا بتوان  $\bar{\mathcal{E}}_b$ ،  $\bar{\mathcal{E}}_q$ ،  $\bar{\mathcal{E}}_b$  و  $\bar{\mathcal{E}}_b$  را پیدا کرد. این معادله به عنوان یک انتخاب برای حل ماتریس بهره می‌باشد. به دلیل این که معادله‌ی خطای دینامیکی خطی سازی شده تقریباً متناوب است، لذا می‌توان معادله‌ی ریکاتی دیفرانسیلی زیر را بیان کرد [۱۸]:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} = -\mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (39)$$

که در رابطه‌ی بالا،  $\mathbf{P}$ ،  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{Q}$  کواریانس‌های خطای حالت، نوز اندازه گیری و فرایند به ترتیب می‌باشند. همچنین  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  (که تقریباً متناوب با دوره‌ی تناوب بردار میدان مغناطیسی) هستند، طبق (۴۰) از روابط (۳۷) و (۳۸) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \text{zeros}(3) & 0.5\text{eye}(3) \\ \text{zeros}(3) & \text{zeros}(3) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -2[{}^I \bar{\mathbf{B}} \times] & \text{zeros}(3) \\ -2[{}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}} \times] & -[{}^I \bar{\mathbf{B}} \times] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

بنابراین، بهره‌ی حالت ماندگار  $\mathbf{K}$  طبق ذیل بدست می‌آید [۱۸]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (41)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{E}}_q & \bar{\mathcal{E}}_q \\ \bar{\mathcal{E}}_b & \bar{\mathcal{E}}_b \\ \bar{\mathcal{E}}_b & \bar{\mathcal{E}}_b \end{bmatrix} \quad (42)$$

این ماتریس بهره‌ی رؤیت گر  $\mathbf{K}$ ، برای دینامیک‌های خطای رابطه (۴۳) که معادل رابطه‌ی (۳۸) است، بکار می‌رود.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\eta}_{\bar{\omega}} &= \bar{q}_{B/I} \otimes \\ &\quad \left( P \left( ({}^M \mathbf{J}^{-1}) \left( ({}^M \mathbf{J} \left( {}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} \right) \times {}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} \right) - ({}^M \mathbf{J}^{-1} \left( {}^M \bar{\omega}_{B/I} \right) \times {}^M \bar{\omega}_{B/I} \right) \right) \right) \\ &\quad + (\hat{q}_{B/I})^{-1} \otimes \left( P \left( \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b + \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b \right) \otimes \hat{q}_{B/I} \right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} \\ &\quad + \bar{q}_{B/I} \otimes P \left( {}^M \bar{\omega}_{B/I} \times ({}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} - {}^M \bar{\omega}_{B/I}) \right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} \\ &= \bar{q}_{B/I} \otimes \\ &\quad \left( P \left( ({}^M \mathbf{J}^{-1}) \left( ({}^M \mathbf{J} \left( {}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} \right) \times {}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} \right) - ({}^M \mathbf{J} \left( {}^M \bar{\omega}_{B/I} \right) \times {}^M \bar{\omega}_{B/I} \right) \right) \right) \\ &\quad \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1} + (\bar{\eta}_q)^{-1} \otimes \left( P \left( \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b + \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b \right) \right) \otimes \bar{\eta}_q \\ &\quad + \bar{q}_{B/I} \otimes P \left( {}^M \bar{\omega}_{B/I} \times ({}^M \hat{\bar{\omega}}_{B/I} - {}^M \bar{\omega}_{B/I}) \right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

به دلیل کمتر بودن بعد خمینه‌ی  $X$  نسبت به  $G$  در رابطه‌ی (۳۳)، گزاره‌های متغیر در آن ظاهر شدند. لذا به منظور برطرف کردن این مشکل، تقریبی نزدیک به عمل  $H \left( {}^M \bar{\omega}_{B/I} \right) \approx \bar{\mathbf{0}}$  در رابطه‌ی (۶) بدلیل مقادیر ماتریس ممان اینرسی بیان شده در چارچوب اصلی، در نظر گرفته می‌شود. این مسئله بدان علت است که در ماهواره‌ی مکعبی با این مقادیر ممان اینرسی حاصل ضرب داخلی در رابطه‌ی (۶) یا  $H$  تقریباً صفر می‌گردد. همچنین مقدار ماتریس ممان اینرسی بیان شده در چارچوب بدنه در سامانه مفروض به صورت زیر است:

$${}^M \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.3771 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4252 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4617 \end{bmatrix} \quad (34)$$

میانگین مقادیر این ماتریس نزدیک به  $0.4I$  بوده که  $I$  ماتریس یکه می‌باشد. با در نظر گرفتن این مسئله، معادله‌ی خطای دینامیکی برای سرعت زاویه‌ای به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \bar{\eta}_{\bar{\omega}} = (\bar{\eta}_q)^{-1} \otimes \left( P \left( \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b + \bar{\mathcal{E}}_b \bar{E}_b \right) \right) \otimes \bar{\eta}_q \quad (35)$$

به گونه‌ای که خطای خروجی غیرمتغیر بر حسب خطای حالت غیرمتغیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{E}_b &= {}^I \bar{\mathbf{B}} - P^{mn} \left( \bar{\eta}_q \otimes P({}^I \mathbf{B}) \otimes (\bar{\eta}_q)^{-1} \right) \\ \bar{E}_b &= {}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}} - \left[ P^{mn} \left( \bar{\eta}_q \otimes \bar{\eta}_{\bar{\omega}} \otimes (\bar{\eta}_q)^{-1} \right) \times \left[ P^{mn} \left( \bar{\eta}_q \otimes P({}^I \mathbf{B}) \otimes (\bar{\eta}_q)^{-1} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - P^{mn} \left( \bar{\eta}_q \otimes P({}^I \dot{\bar{\mathbf{B}}}) \otimes (\bar{\eta}_q)^{-1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

که در رابطه (۳۶)،  ${}^B \bar{\mathbf{B}} = P^{mn} \left( (\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P({}^I \mathbf{B}) \otimes \bar{q}_{B/I} \right)$  نیز در نظر گرفته شده است.

لذا طبق (۳۲) و (۳۶)، سامانه‌ی خطای غیرمتغیر، خود گردان است که تنها به خطای حالت غیرمتغیر وابسته است. لذا می‌توان به طریق تحلیلی، به تحلیل پایداری پرداخت.

در گام ششم به تحلیل همگرایی دینامیک‌های خطای غیرمتغیر خطی سازی شده می‌پردازد. به منظور یافتن پارامترهای رؤیت گر غیر

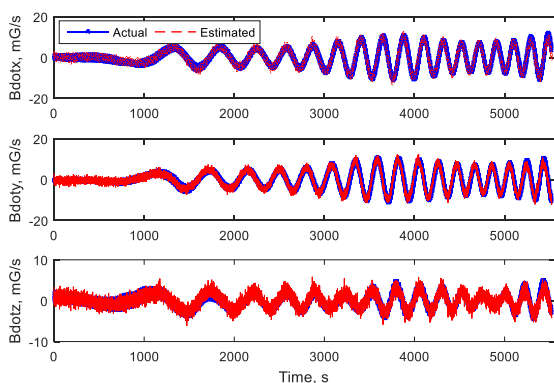
متغیر، خطای غیر متغیر بوسیله‌ی تقریب مرتبه اول  $\bar{\eta}_q = \dot{\bar{\eta}}_q + \delta \bar{\eta}_q$  و  $\bar{\eta}_{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\eta}}_{\bar{\omega}} + \delta \bar{\eta}_{\bar{\omega}}$  نزدیک به ۱ می‌باشد و  $\bar{\eta}_{\bar{\omega}}$  نزدیک به صفر است. برای یافتن معادله خطای

سرعت مداری	۱۵/۶۴۳۹ دور در روز
خروج از مرکز	۰/۰۱۱۱

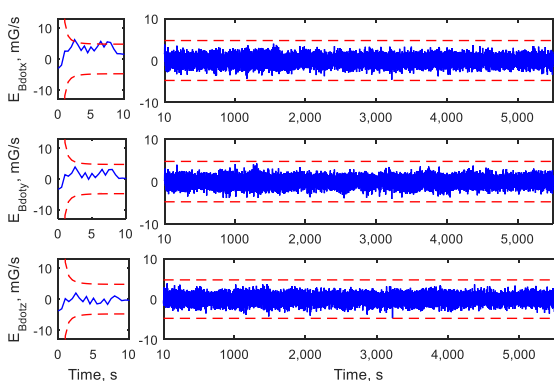
با توجه به جدول فوق، ماهواره یک دوره مداری خود را در مدت حدود ۵۵۲۰ ثانیه سپری می کند که تقریباً یک سوم از این مدت را در کسوف طی می کند. لذا اهمیت تخمین در این مدت با وجود داشتن گشتاورهای اغتشاشی زمین و فشار خورشیدی باعث نتایج شبیه سازی ذیل می گردد.

#### ۱-۴ نتایج شبیه سازی فیلتر مرحله اول

برای جبران کمبود داده، مشتق میدان مغناطیسی با استفاده از فیلتر کالمن توسعه یافته تخمین زده می شود که به عنوان داده ی اندازه گیری دوم در فیلتر مرحله اول مورد استفاده قرار می گیرد. نتیجه ی این تخمین و خطای آن در شکل های (۲) و (۳) نشان داده شده است:



شکل ۲: تخمین مشتق میدان مغناطیسی بیان شده در چارچوب بدنه با فیلتر کالمن توسعه یافته



شکل ۳: خطای تخمین فیلتر مرحله اول برای داده مشتق میدان مغناطیسی

به منظور این که نتیجه تخمین اهمیت بالایی دارد، لذا همانطور که در شکل (۳) مشاهده می شود با وجود خطای اولیه توانسته است خطایی کمتر از محدوده ی سه برابر جذر ماتریس کواریانس خطای حالت داشته باشد.

#### ۲-۴ نتایج شبیه سازی فیلتر مرحله دوم

با توجه به این که نتایج شبیه سازی در مسئله ی مورد تعریف، در زمان کسوف برای ما اهمیت دارد، لذا تا ۱۲۰۰ ثانیه اول این نتایج نشان داده

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{\eta} = (A - \mathbf{K}C) \delta \vec{\eta} \quad (۴۳)$$

پایداری نمائی اطراف نقطه تعادل صفر رابطه ی (۴۳) با در نظر گرفتن این دو فرض اثبات شده است. فرض (۱):  $C$  می بایست به صورت کراندار  $|C| \leq \bar{C}$  برای مقادیر حقیقی  $\bar{C} > 0$  برقرار باشد. فرض (۲):  $pI \leq P(t) \leq \bar{p}I$  برای مقادیر حقیقی مثبت  $p$  و  $\bar{p}$  صادق باشد. که این مفروضات در این مقاله برقرار هستند. اثبات این مسئله در بخش ۳-۶ پیوست، آورده شده است.

#### خلاصه تئوری رؤیت گر حفظ تقارن - معادلات دینامیکی و

سینماتیکی سامانه تعیین وضعیت روابط (۶) و (۱۷) را در نظر بگیرید. رؤیت گر غیرخطی نهایی سامانه بصورت رابطه ی (۴۴) است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{q}_{B/I} &= \frac{1}{2} \hat{q}_{B/I} \otimes P({}^B \hat{\omega}_{B/I}) + P(\bar{\mathcal{E}}_b^q \bar{E}_b + \bar{\mathcal{E}}_b^q \bar{E}_b) \otimes \hat{q}_{B/I} \\ \frac{d}{dt} {}^M \hat{\omega}_{B/I} &= ({}^M \mathbf{J}^{-1}) ({}^M \mathbf{J} ({}^M \hat{\omega}_{B/I}) \times {}^M \hat{\omega}_{B/I} + {}^M \bar{\tau}) \\ &+ P^{mn} (\hat{q}_{B/I}^{-1} \otimes P(\bar{\mathcal{E}}_b^{\omega} \bar{E}_b + \bar{\mathcal{E}}_b^{\omega} \bar{E}_b) \otimes \hat{q}_{B/I}) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

که در رابطه ی فوق،  $\bar{E}_b$  و  $\bar{E}_b^q$  طبق رابطه ی (۲۴) هستند و ماتریس بهره رؤیت گر برای  $\bar{\mathcal{E}}_{b,i}$ ،  $\bar{\mathcal{E}}_{b,i}^q$ ،  $\bar{\mathcal{E}}_{b,i}^{\omega}$  و  $\bar{\mathcal{E}}_{b,i}^{\omega q}$  طبق (۴۲) به گونه ای طراحی شده اند که معادلات دینامیکی غیرمتغیر خطای حالت (۳۲) و (۳۵)، به طور نمائی اطراف نقطه تعادل صفر پایدار باشد (رفتار همگرایی این معادلات غیرمتغیر، به طور کامل مستقل از مسیر حالت است). لذا رؤیت گر غیرمتقارن حفظ تقارن (۴۴)، پایداری نمائی در خطای  $\vec{\eta} = \vec{0}$  است.

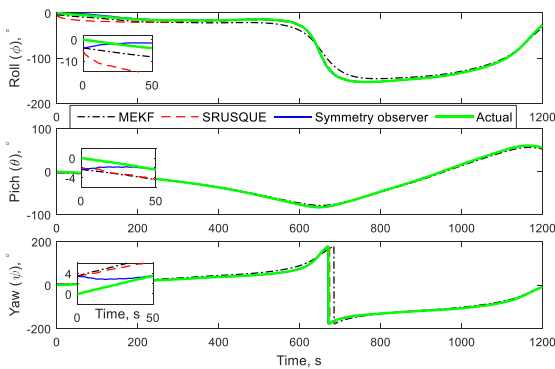
#### ۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش، عملکرد میان تخمین گرهای تصادفی و قطعی برای تخمین چهارگان با تنها اندازه گیر مغناطیس سنج مورد بررسی قرار می گیرد. ابتدا پارامترهای مداری که در این سامانه فرض شده است، طبق جدول (۱) بیان می شوند:

جدول ۱: پارامترهای مداری

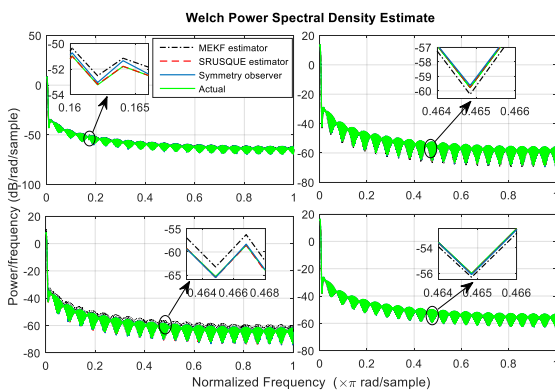
ارتفاع اوج	۴۵۰ کیلومتر
ارتفاع حضیض	۳۰۰ کیلومتر
مدت زمان یک دوره ی مداری	۵۵۲۲/۹ ثانیه
زاویه ی میل	۵۶ درجه
زاویه ی بعد	۷/۱۳۴۸ درجه
آرگومان حضیض	۱۸۰ درجه

پیشنهادی symmetry observer توانسته است نتایج بهتری را نسبت به دو روش دیگر تصادفی از خود نشان دهد و همگرایی بهتری مشاهده می شود. گرچه این تفاوت در خطای اولیه کمی قابل اغماض است. از میان دو روش تصادفی نیز به ازای نرم خطای اولیه  $6/46$  درجه، الگوریتم SRUSQUE با خطای میانگین جذر مربعی (RMSE)  $4/56$  درجه نسبت به MEKF که RMSE آن  $9/69$  درجه است، عملکرد بهتری را ارائه داده است.



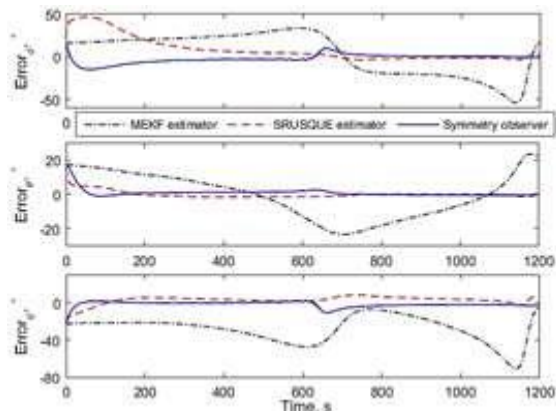
شکل ۶: مقایسه تخمین زوایای اولر با روش های تصادفی و رؤیت گر پیشنهادی با خطای اولیه کوچک

به منظور بررسی عملکرد میان روش های تخمین، معیار تحلیل طیفی<sup>۱</sup> فرکانس، میان سیگنال چهارگان تخمینی و واقعی در شکل (۷) صورت گرفته است. در این شکل، نحوه توزیع توان سیگنال در فرکانس های سازنده آن بر مبنای چگالی طیفی توان نشان داده شده است. به عبارت دیگر، این شکل مشخص می کند که هر مؤلفه ی فرکانسی سیگنال دارای چه میزان توانی است. برای بررسی نحوه عملکرد آن، با چگالی طیفی توان سیگنال واقعی مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می شود، مطابق با نتایج RMSE، روش های رؤیت گر و تخمین گر جذر مربعی چهارگان بی رد، چگالی طیفی نزدیک به سیگنال واقعی را دارند؛ در صورتی که روش چهارگان ضریبی، با مقداری تفاوت نسبت به دو روش مذکور می باشد.



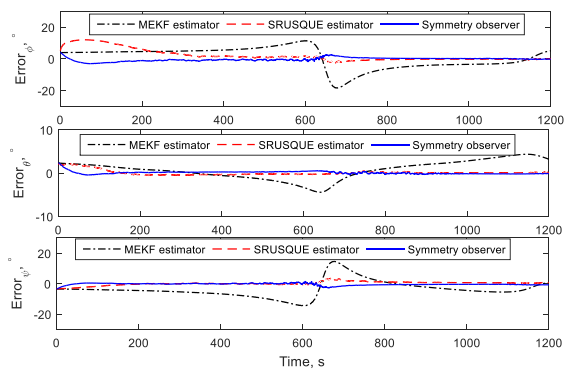
شکل ۷: تحلیل طیفی فرکانس میان چهارگان تخمینی و واقعی در روش های تخمین

شده اند. در شکل (۴)، نتیجه تخمین زوایای اولر با فرض خطای اولیه بالا میان سه نوع تخمین گر نشان داده است تا میزان مقاومت نسبت به خطای اولیه تخمین مورد بررسی قرار گیرد. زوایای اولر که شامل غلتش ( $\phi$ )، خمش ( $\theta$ ) و گردش ( $\psi$ ) بر حسب زاویه هستند، در شکل های زیر به نمایش گذاشته شده اند. همان گونه که مشاهده می شود، در خطای تخمین اولیه حدود ۲۹ درجه، رؤیت گر غیرخطی غیرمتغیر حفظ تقارن (Symmetry observer) توانسته است نتایج بهتری را به لحاظ پایداری و همگرایی نسبت به الگوریتم های تصادفی که در این مسئله فیلتر کالمن توسعه یافته ضریبی (MEKF) و جذر مربعی چهارگان بی رد (SRUSQUE) هستند، داشته باشد. الگوریتم MEKF در مرجع [۹] به تفصیل بیان شده است. لذا در این مقاله، نتایج مقایسه ی میان این الگوریتم ها در سامانه ی تک حسگره ی مغناطیس سنج، نمایش داده شده است.



شکل ۴: خطای تخمین زوایای اولر برای خطای تخمین اولیه تقریباً بزرگ میان سه نوع مختلف تخمین گر

همچنین در سناریویی که این خطای تخمین کم و مقدار حدود  $6/5$  درجه است، در شکل (۵) نمایش داده شده است.



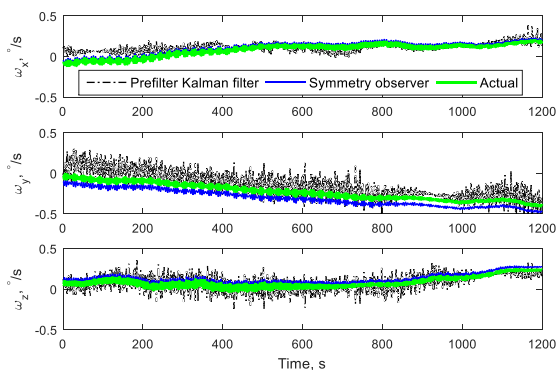
شکل ۵: خطای تخمین زوایای اولر برای خطای تخمین اولیه نسبتاً کوچک میان سه نوع مختلف تخمین گر

به منظور این که تفاوت کم میان این سه نوع تخمین گر با اعمال خطای اولیه کوچک در سیگنال اصلی تخمین نیز نشان داده شود، در شکل (۶) زوایای اولر نیز نمایش داده شده اند. طبق این شکل رؤیت گر

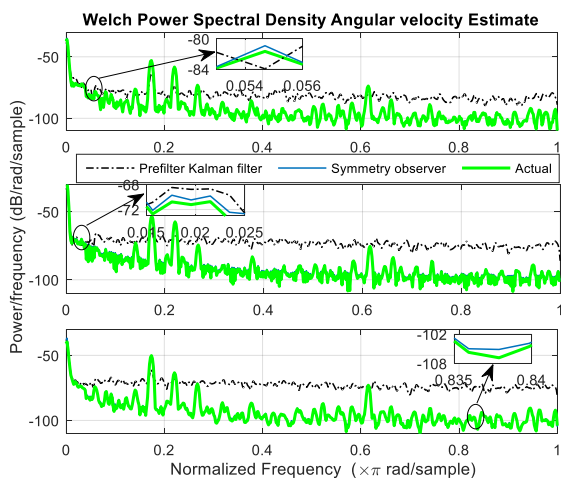
<sup>۱</sup> Spectrum analysis

همچنین، الگوریتم قطعی با افزایش نویز حسگر، بازمم برتری خود را نسبت به روش های تصادفی حفظ می کند.

به علاوه، سرعت زاویه ای با دو روش رؤیت گر متقارن و فیلتر کالمن توسعه یافته تخمین زده شده است. به دلیل این که معادلات سرعت زاویه ای می تواند در پیش فیلتر محاسبه شده و نیازمند الگوریتم های تصادفی چهارگان برای تخمین آن نیست، لذا تنها مقایسه میان رؤیت گر و فیلتر کالمن توسعه یافته انجام شده است. نتایج مربوط به آن نیز در شکل های (۹) و (۱۰) نشان داده شده اند.



شکل ۹: مقایسه سرعت زاویه ای تخمین زده شده با رؤیت گر پیشنهادی و پیش فیلتر کالمن توسعه یافته

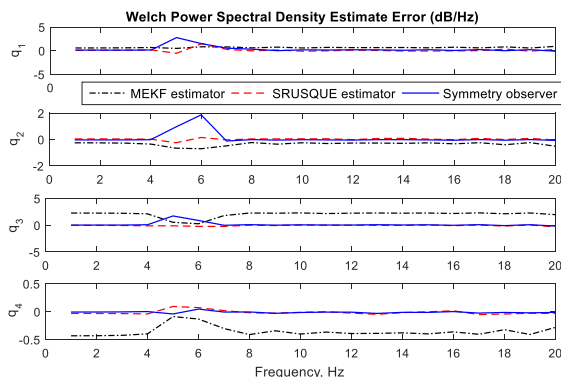


شکل ۱۰: مقایسه چگالی طیفی توان سرعت زاویه ای میان رؤیت گر پیشنهادی و پیش فیلتر کالمن توسعه یافته

همانگونه که مشاهده می شود، در این قسمت نیز رؤیت گر غیرخطی به دلیل داشتن روشی برای تنظیم پارامترهای آن بر اساس قضیه پایداری لیاپانوف، مقاومت بهتری در برابر خطای تخمین اولیه از خود نشان می دهد و نویزهای کمتری در تخمین سرعت زاویه ای مشاهده می شود. همینطور با توجه به شکل (۱۰)، رفتار پاسخ فرکانسی نیز مؤید نتایج حوزه زمان است و رؤیت گر حفظ تقارن؛ خطای چگالی طیفی توان پایین تری نسبت به فیلتر کالمن توسعه یافته دارد.

### ۵- نتیجه گیری

به منظور تحلیل سیگنال در زمانی که نویز با فرکانس پایین وجود دارد، رفتار پاسخ فرکانسی بررسی شده است. طبق شکل (۸)، نتایج تخمین گر جذرمربعی چهارگان بی رد نسبت به سایر روش ها، خطای چگالی طیفی کمتری بخصوص در فرکانس پایین دارد. البته رؤیت گر هم به طور کلی، خطای چگالی طیفی توان کمی برای سیگنال چهارگان در فرکانس های پایین از خود نشان می دهد.



شکل ۸: تحلیل طیفی فرکانس خطای چهارگان در روش های تخمین

جدول (۲) به منظور بررسی خطای RMSE با شرایط اولیه یکسان در هر سه روش، به همراه تغییرات ۰.۱، ۱ و ۱۰ برابر واریانس نویز مغناطیس سنج که مقداری برابر  $7e-14$  Tesla دارد، نشان داده شده است. در این جدول، کاهش میزان خطای میانگین جذرمربعی به همراه زمان همگرایی را میان سه روش مطرح شده نشان می دهد. با توجه به نتایج این جدول، با نرم خطای اولیه  $13/7716$  درجه، روش رؤیت گر غیر خطی حفظ تقارن عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر از خود نشان داده است. با توجه به اینکه در این جدول، خطای اولیه حالت مقدار قابل توجهی دارد، اثر بیشتری بر مقدار RMSE داشته و تغییرات

زمان همگرایی (ثانیه)	$10 \times \sigma_B^2$	$\sigma_B^2$	$0.1 \times \sigma_B^2$	نوع تخمین گر / RMSE (درجه)
۷۰	۴/۱۲۳۰	۳/۳۳۸۰	۳/۶۹۷۸	Observer
۱۲۰	۱۱/۰۱۴۵	۱۰/۸۶۴۱	۱۰/۸۳۹۸	SRUSQUE
۲۰۰	۲۰/۹۰۱۶	۲۰/۸۹۴۲	۲۰/۸۹۲۰	MEKF

واریانس نویز برای سنسوری که ۰.۱ و ۱۰ برابر دقت داشته است، در هر سه روش کمتر از ۱ درجه است.

جدول ۲: مقایسه عملکرد روش های تصادفی و الگوریتم قطعی به همراه تغییرات واریانس نویز حسگر

طبق نتایج جدول (۲)، زمانی که خطای اولیه بیشتر می شود، الگوریتم قطعی مقاومت بیشتری در برابر افزایش خطای اولیه از خود نشان می دهد.

$$V(\lambda, \phi', r, t) = a \sum_{d=1}^D \left(\frac{a}{r}\right)^{d+1} \sum_{j=1}^d (k_j^d(t) \cos(j\lambda) + q_j^d(t) \sin(j\lambda)) L_j^d \sin(\phi') \quad (1-پ)$$

به طوری که  $r$  فاصله تا مرکز زمین است،  $\phi'$  عرض جغرافیایی و  $\lambda$  طول جغرافیایی نقطه‌ی مورد نظر بر روی زمین است. طول و عرض جغرافیایی از روی موقعیت ماهواره در دستگاه ECEF به صورت زیر قابل دستیابی است.

$$r^E = \begin{bmatrix} r_x^E \\ r_y^E \\ r_z^E \end{bmatrix}, r = \sqrt{(r_x^E)^2 + (r_y^E)^2 + (r_z^E)^2}, \quad (2-پ)$$

$$\phi' = \sin^{-1} \left( \frac{r_z^E}{r} \right), \lambda = \tan^{-1} \left( \frac{r_y^E}{r_x^E} \right)$$

همچنین  $a$  شعاع استوائی زمین،  $k_j^d$  و  $q_j^d$  ضرایب گوسی هستند.  $L_j^d \sin(\phi')$  تابع لژاندر از درجه‌ی  $j$  و مرتبه‌ی  $d$  است. درجه‌ی توسعه‌ای مدل مغناطیسی زمین (WMM<sup>1</sup>) نیز با  $D$  نشان داده شده است که برابر ۱۲ است.

در این مقاله، از مدل IGRF2010 آماده‌ی موجود در نرم‌افزار Matlab برای شبیه‌سازی استفاده شده است. اطلاعات خروجی بدست آمده از این مدل، در دستگاه شمال-شرق-پایین (NED) است. در الگوریتم‌های تعیین وضعیت احتیاج است که میدان مغناطیسی زمین در دستگاه مختصات مرجع (اینرسی) وجود داشته باشد.

با استفاده از ماتریس انتقال (پ-۳) می‌توان از دستگاه مختصات NED به دستگاه مختصات ECEF رسید. در ادامه با استفاده از ماتریس انتقال (پ-۴) می‌توان از دستگاه ECEF به دستگاه ECI رسید.

$${}_{NED}^{ECF} C = \begin{bmatrix} -\sin(\phi') \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & -\cos(\phi') \cos(\lambda) \\ -\sin(\phi') \sin(\lambda) & \cos(\lambda) & -\cos(\phi') \sin(\lambda) \\ \cos(\phi') & 0 & -\sin(\phi') \end{bmatrix} \quad (3-پ)$$

برای انتقال از دستگاه ECEF به دستگاه ECI، زاویه‌ی بین خط برج حمل و طول جغرافیایی صفر به دو بخش  $\Theta$  (زاویه‌ی بین اعتدال بهاری و طول جغرافیایی صفر در نیمه‌شب UT1) و زاویه‌ی حاصل ضرب زمان گذشته از نیمه شب و سرعت دوران زاویه‌ای زمین است.

$${}_{ECEF}^{ECI} C = \begin{bmatrix} \cos(\Theta + \omega_{\oplus} \Delta t) & \sin(\Theta + \omega_{\oplus} \Delta t) & 0 \\ -\sin(\Theta + \omega_{\oplus} \Delta t) & \cos(\Theta + \omega_{\oplus} \Delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-پ)$$

در این مقاله به تخمین وضعیت چهارگان با سه روش مختلف، با تنها داده‌ی مغناطیس سنج در مدت زمان کسوف پرداخته شد. دو نوع الگوریتم مختلف که یکی از جنس تصادفی و دیگری از نوع رؤیت گر غیرخطی است معرفی شده‌اند. از دسته الگوریتم‌های تصادفی، دو فیلتر به نام‌های کالمن توسعه یافته ضریبی و جذر مربعی چهارگان بی‌رد برای مقایسه با رؤیت گر پیشنهادی حفظ تقارن مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین پایداری این رؤیت گر با تابع لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از مزیت‌های این روش، داشتن ساز و کاری برای تنظیم پارامترهای آن می‌باشد که در مورد فیلترهای کالمن با سعی و خطا انجام شده است تا بهترین تخمین بدست آید. نتایج نهایی در تخمین، نشان از این دارد که برای خطای اولیه‌ی کوچک تقریباً نتایج این سه نوع الگوریتم مشابه هم هستند. در شرایطی که داده‌ی حسگر خورشیدی وجود دارد و به دلیل کسوف از دسترس خارج می‌شود، خطای تخمین اولیه معمولاً خیلی بزرگ نیست. اما در شرایطی که خطای تخمین اولیه بزرگ باشد و مقدار حدودی از آن در دسترس نیست، رؤیت گر پیشنهادی نتایج خیلی بهتری را در همگرایی به نمایش می‌گذارد. لذا مقاومت این نوع رؤیت گر غیرخطی که از خواص غیرمتغیر بودن دینامیک‌های خطای حالت استفاده می‌کند، نسبت به الگوریتم‌های جذر مربعی چهارگان بی‌رد و چهارگان ضریبی عملکرد بهتری دارد. همچنین رفتار پاسخ فرکانسی نیز مورد بررسی قرار گرفت و تخمین گرهای غیرخطی، رفتار پاسخ فرکانسی یکسانی داشته و نتایج بهتری را در خروجی چگالی طیفی توان نشان داده‌اند. روش پیشنهادی، هزینه‌ی محاسباتی کمتری به نسبت روش تصادفی چهارگان بی‌رد دارد که برای ناوماهواره مورد نظر به صرفه تر نیز خواهد بود. به علاوه، سرعت زاویه‌ای نیز در این روش پیشنهادی با خطایی کمتر از پیش فیلتر تصادفی فیلتر کالمن توسعه یافته توانسته است تخمین را انجام دهد. میان دو روش تصادفی نیز که در مقایسه با روش پیشنهادی مطرح شدند، الگوریتم جذر مربعی چهارگان بی‌رد که برای سامانه‌ی غیرخطی طراحی شده است نسبت به الگوریتم چهارگان ضریبی که نوع تعمیم یافته فیلتر کالمن توسعه یافته است عملکرد مطلوب‌تری را در نتایج شبیه‌سازی از خود نشان داده است.

## ۶- پیوست

### ۶-۱ مدل میدان مغناطیسی زمین

مدل یک توصیف ریاضی استاندارد از میدان مغناطیسی زمین در این مقاله، بکار گرفته شده است. آخرین نسخه‌ی این مدل، IGRF-11 از مرتبه‌ی ۱۳ با دقت یک دهم نانو تسلا است. IGRF از ضرایب گوسی استفاده می‌کند. این پتانسیل توسط رابطه‌ی زیر توصیف می‌شود:

$\alpha$  تعیین کننده ی پراکندگی نقاط سیگما حول  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  است و معمولاً مقدار مثبت اندکی برای آن در نظر گرفته می شود (  $0 < \alpha < 0.0001$  ). ثابت  $\kappa$  پارامتر مقیاس ثانوی است که معمولاً 0 یا  $3-m$  تنظیم می شود و درجه آزادی برای تنظیم دقیق گشتاورهای مراتب بالاتر در اختیار قرار می دهد. برای مقادیر منفی  $\kappa$  این احتمال وجود دارد که کواریانس پیش بینی شده مثبت نیمه معین نشود. به علاوه، ماتریس های کواریانس در ارتباط با خطای حالت با  $\mathbf{P}_k$  و نویز فرایند با  $\mathbf{Q}_k$  نمایش داده می شوند. طبق رابطه ی (پ-۹)، اگر مقادیر ماتریس های کواریانس در طی بروزسانی منفی شود، قطعاً در همین مرحله ی اولیه الگوریتم متوقف می شود. یک راه برای تضمین مثبت معین ماندن ماتریس کواریانس خطای تخمین استفاده از نسخه ی جذر مربعی الگوریتم فیلتر ذره ای است که در آن  $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$  در نظر گرفته می شود [۲۳]. یک روش مؤثر برای محاسبه جذر ماتریس در (پ-۹)، استفاده از تجزیه ی چولسکی است. همچنین در رابطه ی (پ-۹-۹)، منظور از اندیس  $i$  آن است که بردار  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  به ترتیب با هریک از ستون های  $\gamma\sqrt{\mathbf{P}_k}$  جمع/تفریق شده و حاصل که یک بردار  $m$  بعدی است به عنوان یک نقطه سیگما در یکی از ستون های ماتریس  $\mathbf{X}_k$  قرار می گیرد. اگر ارتباط بین خطای تخمین وضعیت و چهارگان به صورت  $\delta\bar{\mathbf{p}}_{B/I} \equiv s[\delta\bar{\mathbf{Q}} / (a + \delta q_4)]$  مقادیر  $a$  و  $s$  به ترتیب ۰ و ۱ در نظر گرفته شود، بردار  $\delta\bar{\mathbf{p}}_{B/I}$  بردار گیز خواهد بود.

لذا اولین مرحله در این الگوریتم با مقدار دهی اولیه به صورت (  $chol$  نماد تجزیه چولسکی است که یک ماتریس مثبت معین هرمیتی یا خودالحاقی را به حاصلضرب یک ماتریس پایین مثلثی و ترانهاد آن تبدیل می کند که  $\mathbf{S}$  همان تجزیه چولسکی است):

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\bar{\mathbf{x}}_0], \quad (پ-۱۰)$$

$$\mathbf{S}_0 = chol\{E[(\bar{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\bar{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]\}$$

در مرحله ی دوم، با اصلاح رابطه ی (پ-۹)، تعیین نقاط سیگما طبق رابطه ی ذیل انجام می شود:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,1} = \bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,1} = \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,i} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + (\gamma \mathbf{S}_k) \quad \text{for } i = 2, \dots, m+1 \quad (پ-۱۱)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,i} = \hat{\mathbf{x}}_k^- - (\gamma \mathbf{S}_k) \quad \text{for } i = n+2, \dots, 2m+1$$

مرحله ی بعدی، گام تعیین و انتشار نقاط سیگمای چهارگان با استفاده از ارتباط میان خطای ( $\delta$ ) چهارگان و نقاط سیگما است:

به طوری که  $\omega_{\oplus}$  سرعت دوران زاویه ای زمین برابر با  $2\pi/8.6164130e4$  رادیان بر ثانیه است. طول یک روز نجومی برابر  $8.6164130e4$  ثانیه است.  $\Theta$  با استفاده از روابط زیر بدست می آید.

$$T_U = (JD - 2451545.0) / 36525 \quad (پ-۵)$$

زمان نجومی میانگین گرینویچ<sup>۱</sup> نیز از رابطه ی زیر قابل محاسبه است:

$$GMST^{\ominus} = 24110.54841 + 8640184.812866T_U + 0.0931047T_U^2 - 6.2 \times 10^{-6}T_U^3 \quad (پ-۶)$$

با توجه به این موضوع که در مدت زمان یک روز نجومی،  $360^\circ$  درجه طی می شود، زاویه ای که توسط این کسری (زمان نجومی میانگین گرینویچ) از یک روز نجومی طی می شود، همان زاویه ی بین اعتدال بهاری و طول جغرافیایی صفر در نیمه شب UT1 است.

$$\Theta = \omega_{\oplus} \times (\text{mod}(GMST, 2\pi / \omega_{\oplus})) \quad (پ-۷)$$

که در رابطه فوق،  $\text{mod}$ ، تابعی است که باقیمانده میان دو عدد را ارائه می دهد.

لذا در نهایت می توان مختصات میدان مغناطیسی در دستگاه اینرسی را طبق ذیل بیان کرد [۸]:

$${}^E\bar{\mathbf{B}}(\lambda, \phi', r, t) = -\nabla V(\lambda, \phi', r, t); \quad (پ-۸)$$

$${}^I\bar{\mathbf{B}} = \frac{ECI}{ECEP} C({}^E\bar{\mathbf{B}})$$

## ۶-۲ الگوریتم چهارگان کالمن بی رد

اولین مرحله در این الگوریتم محاسبه ی نقاط سیگما طبق رابطه (پ-۹) می باشد:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,1} = \bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,1} = \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,i} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + (\gamma\sqrt{\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k}) \quad \text{for } i = 2, \dots, m+1 \quad (پ-۹)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_k^{\delta p,i} = \hat{\mathbf{x}}_k^- - (\gamma\sqrt{\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}_k}) \quad \text{for } i = m+2, \dots, 2m+1$$

که در رابطه فوق  $\gamma = \sqrt{m + \lambda}$  و  $\lambda = \alpha^2(m + \kappa) - m$  به عنوان پارامتر ترکیبی مقیاس و  $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  (متغیر حالت) می باشد که این روش به نقاط سیگما معروف است بدین صورت است که به تعداد  $M = 2m + 1$  نقاط سیگما  $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{2m+1}$  به ازاء  $k \in \{1, \dots, \infty\}$  وجود دارد. ثابت

<sup>۱</sup> Greenwich Mean Sidereal Time

نشان  $S = cholupdate\{S, u, \pm v\}$  با  $P \pm \sqrt{vuu}^T$  داده می شود. وزن های  $w_i^{(c)}$  نیز به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$w_1^{(c)} = \lambda / (\lambda + m) + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (۲۰-پ)$$

$$w_i^{(c)} = 1 / \{2(\lambda + m)\} \quad i = 2, \dots, 2m + 1 \quad (۲۱-پ)$$

ثابت  $\beta$  به منظور وارد کردن اطلاعات قبلی توزیع  $\vec{x}$  در محاسبه وزن های کواریانس  $w_1^{(c)}$  مورد استفاده قرار می گیرد. مقدار بهینه ی  $\beta$  برای توزیع گوسی  $\beta = 2$  است [۱۳].

مرحله ی هفتم، محاسبه ی پیش بینی خروجی بر حسب میانگین نقاط سیگما است؛

$$\hat{y}_{k+1} = \frac{1}{m + \lambda} \{ \lambda \gamma_{k+1}(1) + \sum_{i=2}^{2m} \gamma_{k+1}(i) \} \quad (۲۲-پ)$$

$$\gamma_{k+1}(i) = \left[ \begin{array}{c} {}^B C[\hat{q}^-(i)]^T \bar{B} \\ {}^B \dot{C}(\hat{q}^-(i))^T \bar{B} + {}^B C[\hat{q}^-(i)]^T (D_I \bar{B}) \end{array} \right]_{k+1} \quad (۲۳-پ)$$

در مرحله ی هشتم، محاسبه ی جذر کواریانس خروجی  $S_{\bar{y}k+1}^+$  و ماتریس همبستگی متقابل  $P_{k+1}^{xy}$  انجام می گردد:

$$S_{\bar{y}k+1}^+ = qr \left( \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\omega_2^{(c)}} \left( h(\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 2:2m+1}) - \hat{y}_{k+1}^+ \right) \\ \sqrt{R_{k+1}} \end{array} \right], h(\hat{x}_k^-) \right) \quad (۲۴-پ)$$

$$\left[ \begin{array}{c} {}^B C(\hat{q}_{B/I}^-)^T \bar{B} \\ {}^B \dot{C}(\hat{q}_{B/I}^-)^T \bar{B} + {}^B C(\hat{q}_{B/I}^-)^T (D_I \bar{B}) \end{array} \right]_{k+1}$$

$$S_{\bar{y}k+1}^+ = cholupdate(S_{\bar{y}k+1}^+, h(\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 1}) - \hat{y}_{k+1}^+, w_1^{(c)}) \quad (۲۵-پ)$$

$$P_{\bar{y}k+1}^+ = \sum_{i=1}^{2m+1} w_i^{(c)} (\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, i} - \hat{x}_{k+1}^-) (h(\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, i}) - \hat{y}_{k+1}^+)^T \quad (۲۶-پ)$$

مرحله ی بعدی، محاسبه ی بهره الگوریتم است:

$$K_{k+1} = (P_{\bar{y}k+1}^+ / S_{\bar{y}k+1}^+)^T / S_{\bar{y}k+1}^+ \quad (۲۷-پ)$$

$$\delta \bar{Q}_k^+(i) = s^{-1} [a + \delta q_{4k}^+(i)] \bar{\chi}_k^{\delta p, i}, \quad i = 2, \dots, 2m + 1$$

$$\delta q_{4k}^+(i) = \frac{-a \|\bar{\chi}_k^{\delta p, i}\|^2 + s \sqrt{s^2 + (1 - a^2)} \|\bar{\chi}_k^{\delta p, i}\|^2}{s^2 + \|\bar{\chi}_k^{\delta p, i}\|^2} \quad (۱۲-پ)$$

$$\hat{q}_k^+(1) = \hat{q}_k^+;$$

$$\hat{q}_k^+(i) = \delta \bar{q}_k^+(i) \otimes \hat{q}_k^+, \quad i = 2, \dots, 2m + 1 \quad (۱۳-پ)$$

$$\hat{q}_{k+1}^+(i) = \Omega({}^B \bar{\omega}_{B/I}) \hat{q}_k^+(i), \quad i = 1, \dots, 2m + 1$$

$$\Omega({}^B \bar{\omega}_{B/I}) = \left[ \begin{array}{cc} \cos(0.5 \|{}^B \bar{\omega}_{B/I}\| \Delta t) I_{3 \times 3} - [{}^B \bar{w}_k \times] & {}^B \bar{w}_k \\ -{}^B \bar{w}_k^T & \cos(0.5 \|{}^B \bar{\omega}_{B/I}\| \Delta t) \end{array} \right]$$

$${}^B \bar{w}_k = \sin(0.5 \|{}^B \bar{\omega}_{B/I}\| \Delta t) {}^B \bar{\omega}_{B/I} / \|{}^B \bar{\omega}_{B/I}\| \quad (۱۴-پ)$$

مرحله ی چهارم، انتشار خطای چهارگان است:

$$\delta \hat{q}_{k+1}^-(i) = \hat{q}_{k+1}^+(i) \otimes [\hat{q}_{k+1}^+(1)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, 2m + 1 \quad (۱۵-پ)$$

پنجمین مرحله، پیش بینی نقاط سیگمای مربوط به خطای تخمین وضعیت است؛

$$\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 1} = \bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 1} = 0$$

$$\bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, i} = s \frac{\delta \bar{Q}_{k+1}^-(i)}{a + \delta q_{4k+1}^-(i)} \quad \text{for } i = 2, \dots, 2m + 1 \quad (۱۶-پ)$$

در مرحله ی ششم، مرحله ی پیش بینی متغیر حالت و جذر کواریانس خطای حالت می باشد.

$$\hat{x}_{k+1}^- = \frac{1}{m + \lambda} \{ \lambda \bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 1} + \sum_{i=2}^{2m+1} \bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, i} \} \quad (۱۷-پ)$$

$$S_{k+1}^- = qr \left( \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\omega_2^{(c)}} \left( \bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 2:2m+1} - \hat{x}_{k+1}^- \right) \\ \sqrt{Q_{k+1}} \end{array} \right] \right) \quad (۱۸-پ)$$

$$S_{k+1}^- = cholupdate\{S_{k+1}^-, \bar{\chi}_{k+1}^{\delta p, 1} - \hat{x}_{k+1}^-, w_1^{(c)}\} \quad (۱۹-پ)$$

در رابطه ی (Error! Reference source not found.)، تجزیه

QR ( $qr$ ) ماتریس A توسط معادله  $A^T = QR$  انجام می شود که در آن Q یک ماتریس متعامد و R ماتریسی بالامثلثی است. همچنین  $Cholupdate$  نیز نشان دهنده ی فاکتور چولسکی روزرسانی رتبه یک ماتریس  $P_k$  است. به عبارت دیگر، فاکتور چولسکی عبارت

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta\vec{\eta}, t) &= \delta\vec{\eta}^T \Pi(t) \delta\vec{\eta} + \delta\vec{\eta}^T \dot{\Pi}(t) \delta\vec{\eta} \\ &+ \delta\vec{\eta}^T \Pi(t) \delta\vec{\eta} \\ &= \delta\vec{\eta}^T [\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)A \\ &+ A^T \Pi(t) + 2C^T R^{-1}C] \delta\vec{\eta} \end{aligned} \quad (پ-۳۴)$$

که در آن  $\Pi(t) = \mathbf{P}^{-1}$  با جایگذاری  
 $\dot{\Pi}(t) = -\Pi(t)\dot{\mathbf{P}}\Pi(t)$  در (پ-۳۴)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta\vec{\eta}, t) &= \\ \delta\vec{\eta}^T [-C^T R^{-1}C + \Pi(t)Q\Pi(t)] \delta\vec{\eta} \end{aligned} \quad (پ-۳۵)$$

اگر  $s' < s$  کوچکترین مقدار ویژه  $Q$  باشد، سپس  $s'I < Q$ . لذا  
 می توان نامساوی زیر را بیان کرد:

$$\dot{V}(\delta\vec{\eta}, t) \leq \frac{-s'}{\bar{p}^2} \|\delta\vec{\eta}\|^2 \leq \frac{-ps'}{\bar{p}^2} V(\delta\vec{\eta}, t) \quad (پ-۳۶)$$

بنابراین،  $\dot{V}$  منفی معین بوده و رابطه ی (پ-۳۷) را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} V(\delta\vec{\eta}, t) &\leq V(\delta\vec{\eta}(0), 0) \exp\left(-\frac{ps'}{\bar{p}^2} t\right) \\ \|\delta\vec{\eta}\| &\leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{p}} \|\delta\vec{\eta}(0)\| \exp\left(-\frac{ps'}{2\bar{p}^2} t\right) \end{aligned} \quad (پ-۳۷)$$

با در نظر گرفتن قضیه ی ۴۵ مرجع [۲۱] و معادلات (پ-۳۳) و  
 (پ-۳۶-۳۷)، معادلات خطای (۳۸) پایدار نمائی در نقطه تعادل صفر  
 هستند. بنابراین، سامانه ی خطای غیرمتغیر (۳۶)، پایدار نمائی اطراف نقطه  
 تعادل صفر یا خطای  $\vec{\eta} = \vec{0}$  بر طبق تئوری ۳.۱۱ مرجع [۲۰] می باشد.

مرحله ی دهم نیز بروزرسانی متغیر حالت و ماتریس کواریانس خطا  
 می باشد:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} [\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}^-], \quad (پ-۲۸)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}}^+ \\ \mathbf{S}_{k+1}^+ &= \text{cholupdate}(\mathbf{S}_{k+1}^-, \mathbf{U}, -1) \end{aligned} \quad (پ-۲۹)$$

در مرحله ی یازدهم، بروزرسانی خطای چهارگان طبق (پ-۳۰) و  
 وضعیت آن طبق (پ-۳۱) انجام می گردد:

$$\begin{aligned} \delta\vec{q}_{k+1}^+ &= \\ s^{-1} [a + \delta q_{4k+1}^+] \delta\vec{p}_{k+1}^+, \\ \delta q_{4k+1}^+ &= \\ \frac{-a \|\delta\vec{p}_{k+1}^+\|^2 + s \sqrt{s^2 + (1-a^2)} \|\delta\vec{p}_{k+1}^+\|^2}{s^2 + \|\delta\vec{p}_{k+1}^+\|^2} \end{aligned} \quad (پ-۳۰)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1}^+ = \delta\hat{\mathbf{q}}_{k+1}^+ \otimes [\hat{\mathbf{q}}_{k+1}^- (1)]^{-1} \quad (پ-۳۱)$$

در مرحله ی نهمی این الگوریتم نیز به دلیل این که خطای وضعیت به  
 تخمین چهارگان تبدیل می شود، تخمین خطای وضعیت طبق (پ-۳۲)  
 صفر می شود.

$$\delta\vec{p}_{k+1}^+ = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (پ-۳۲)$$

در گام بعد از آخرین مرحله ی بروزرسانی، فرایند با داده ی  
 اندازه گیری جدید، با محاسبه ی بهره ی کالمن طبق (پ-۲۷) تکرار  
 می شود.

### ۳-۶ اثبات پایداری نمائی

**اثبات-** در ادامه، بررسی پایداری نمائی با تابع لیاپانوف مثبت معین  
 زیر تعیین می گردد: ( $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی بردار می باشد).

$$\begin{aligned} V(\delta\vec{\eta}, t) &= \delta\vec{\eta}^T \mathbf{P}^{-1} \delta\vec{\eta} \\ \frac{1}{\bar{p}} \|\delta\vec{\eta}\|^2 &\leq V(\delta\vec{\eta}, t) \leq \frac{1}{p} \|\delta\vec{\eta}\|^2 \end{aligned} \quad (پ-۳۳)$$

در مرحله ی بعدی، مشتق تابع لیاپانوف بصورت زیر بدست می آید:

## مراجع

- Sensor Measurements”, Elsevier, IFAC Papers OnLine, Vol. 51, 2018, pp.89-94.
- [۱۲] خسرویان همایی، علیرضا، طراحی رؤیت کننده و کنترل کننده ی غیرخطی برای تخمین و کنترل وضعیت ماهواره، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، شهریور ۸۹
- [13] Bonnabel, S., Martin, P. and Rouchon, P., “Symmetry-preserving observers”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 11, 2008, pp.2514-2526.
- [14] Sidi, M.J., Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach, Vol. 7, Cambridge university press, 2000.
- [۱۵] کیانی، مریم، تخمین تلفیقی پارامترهای مداری و وضعی ماهواره با استفاده از فیلترهای غیرخطی هیبرید، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، دی ۹۳.
- [16] Anguelova, M., Observability and identifiability of nonlinear systems with applications in biology. Gothenburg, Sweden: Chalmers University of Technology, 2007.
- [۱۷] ازگلی، سجاد و عاروان، محمدرضا، مدل سازی و شبیه سازی سامانه های متحرک، انتشارات یامهدی، ۱۳۸۹.
- [18] Carletta, S. and Teofilatto, P., “Design and Numerical Validation of an Algorithm for the Detumbling and Angular Rate Determination of a CubeSat Using Only Three-Axis Magnetometer Data”, International Journal of Aerospace Engineering, 2018.
- [19] Simon, D., Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. John Wiley & Sons, 2006.
- [20] Olver, P.J., Equivalence, invariants and symmetry, Cambridge University Press, 1995.
- [21] Khalil, H.K. and Grizzle, J.W., Nonlinear systems, Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002.
- [22] Vidyasagar M., Nonlinear systems analysis, Vol. 42. Siam, 2002.
- [23] Sarkka, S., “On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems”, IEEE Transactions on automatic control, Vol. 52, No. 9, 2007, pp.1631-1641.
- [1] Cilden-Guler, Demet, et al., “Nanosatellite Attitude Estimation using Kalman-Type Filters with Non-Gaussian Noise”, Elsevier, Aerospace Science and Technology, Vol. 92, 2019, pp.66-76.
- [2] Burton, R., Rock, S., Springmann, J. and Cutler, J., “Online attitude determination of a passively magnetically stabilized spacecraft”, Elsevier, Acta Astronautica, Vol. 133, 2017, pp.269-281.
- [3] Firoozi, D. and Namvar, M., “Analysis of gyro noise in non-linear attitude estimation using a single vector measurement”, IET Control Theory & Applications, Vol. 6, No. 14, 2012, pp.2226-2234.
- [4] Hajiyev, C. and Guler, D.C., “Review on gyroless attitude determination methods for small satellites”, Progress in Aerospace Sciences, 90, 2017, pp.54-66.
- [5] Psiaki, M.L., Martel, F. and Pal, P.K., “Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 3, 1990, pp.506-514.
- [6] Natanson, M., Challa, J., Deutchmann, D. and Baker, F., “Magnetometer-Only Attitude and Rate Estimation for Gyroless Spacecraft”, In Proceedings of the Third International Symposium on Space Mission Operations and Ground Data Systems, 1994.
- [7] Searcy, J.D. and Pernicka, H.J., “Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 35, No. 6, 2012, pp.1693-1701.
- [8] Searcy, J.D., “Observability-enhanced dual-filter design for attitude estimation with minimum observations”, Ph.D. thesis, Missouri University of Science and Technology, 2013.
- [9] Springmann, J.C., “Satellite Attitude Determination with Low-Cost Sensors”, Ph.D. thesis, University of Michigan, 2013.
- [10] Tuthill, J.D., “Design and simulation of a nano-satellite attitude determination system”, Doctoral dissertation, Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2009.
- [11] Chingiz Hajiyev, Demet Cilden-Guler, “Gyroless Nanosatellite Attitude Estimation in Loss of Sun