

ارائه روش جدید درونیایی پایدار در طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

سید محمدجواد معافی مدنی^۱، ایمان محمدزمان^۲

^۱ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، javadmadany@yahoo.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱/۱۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۳/۲۴)

چکیده: در این مقاله یک روش جدید درونیایی پایدار برای طراحی خودخلبان مقاوم یک رهگیر ارائه شده است. روش ارائه شده بر مبنای درونیایی بین نواحی مشترک پایدار کنترل کننده های محلی بوده و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته را در کل فضا می نماید. برای پیدا کردن نواحی پایدار هر کنترل کننده محلی از ابزار v-gap metric استفاده شده و از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ برای طراحی کنترل کننده های محلی استفاده شده است. همچنین پیچیدگی روش ارائه شده نسبت به سایر روش های درونیایی حفظ کننده پایداری کمتر می باشد. نتایج شبیه سازی سه درجه آزادی نشان دهنده تضمین کارآیی و پایداری سیستم حلقه بسته در طول مسیر پرواز می باشد.

کلمات کلیدی: خودخلبان مقاوم، درونیایی حفظ کننده پایداری، کنترل کننده زمان بندی بهره، v-gap metric.

A New Stability Preserving Interpolation Method in Robust Gain Scheduling Autopilot Design

Mohammad Javad Moafi Madani, Iman Mohammadzaman

Abstract: This paper presents a new stability preserving interpolation technique for robust gain scheduling autopilot design. The interpolation method is based on interpolation in the common stability region of local controllers and generates a gain-scheduled controller that is stabilizing at every operating point of a closed loop system. For selection of stability region of local controllers, the notion of the v-gap metric and its connection to robust loop-shaping theory is used. The proposed method facilitates the design of gain-scheduled controllers that preserves stability of the closed loop system. The simulation results given show the generality and effectiveness of the proposed control strategy in terms of the stability, performance and robustness, of the system.

Keywords: Robust autopilot, stable interpolation, gain scheduling controller, v-gap metric.

Q: فشار دینامیکی

S: سطح مرجع

D: قطر

V_M : سرعت رهگیر

X: نیروی وارد بر رهگیر در راستای x بدنی

Y: نیروی وارد بر رهگیر در راستای y بدنی

Z: نیروی وارد بر رهگیر در راستای z بدنی

L: گشتاور حول محور رول

فهرست علائم

RH_∞ : فضای توابع کسری حقیقی محدود و آنالیتیک در نیمه

راست صفحه مختلط

$\bar{\sigma}(\cdot)$: بزرگترین مقدار تکین ماتریس

$\underline{\sigma}(\cdot)$: کوچکترین مقدار تکین ماتریس

$\|\cdot\|_\infty$: نرم بی نهایت ماتریس

$\mathcal{E}[G_S, k_\infty]$: حاشیه پایداری مقاوم سیستم $[G_S \quad k_\infty]$

γ : معکوس حاشیه پایداری مقاوم

M : گشتاور حول محور پیچ N : گشتاور حول محور یاء P : سرعت زاویه‌ای حول محور X بدنی Q : سرعت زاویه‌ای حول محور Y بدنی R : سرعت زاویه‌ای حول محور Z بدنی m : جرم رهگیر I_y : ممان اینرسی طولی I_z : ممان اینرسی عرضی δ : زاویه بالک عملگر $C_{z\delta}$: تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه بالک $C_{z\alpha}$: تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه حمله $C_{m\delta}$: تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه بالک $C_{m\alpha}$: تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه حمله

۱- مقدمه

طراحی خودخلبان برای رهگیرها و تحلیل پایداری و کارایی آن در طول مسیر پروازی یکی از مسائل مورد توجه مهندسين کنترل بوده و تلاش‌های تحقیقاتی زیادی را به خود جلب نموده است [۱]-[۳]. پیچیدگی‌های حاکم بر دینامیک رهگیر مثل رفتار غیرخطی، وجود نامعینی و دینامیک وابسته به پارامتر منجر به گسترش تحقیقات پیرامون طراحی کنترل کننده برای این سیستم و تحلیل پایداری و کارایی آن شده است. از این میان، روش زمان‌بندی بهره یکی از رایج‌ترین روش‌ها در تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیرخطی وابسته به پارامتر و همچنین طراحی خودخلبان رهگیرها می‌باشد [۴]. در حالت کلی می‌توان روش‌های زمان‌بندی بهره را با توجه به نحوه خطی‌سازی مدل غیرخطی به دو دسته زمان‌بندی بهره بر مبنای مدل خطی متغیر با پارامتر و زمان‌بندی بهره بر مبنای مدل خطی غیرمتغیر با زمان تقسیم کرد [۵]. در روش‌های مبتنی بر مدل خطی متغیر با پارامتر، دینامیک سیستم غیرخطی به صورت یک سیستم خطی با ماتریس‌های فضای حالت تغییر پذیر با زمان مدل می‌شود و تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده در این روش‌ها با استفاده از تحلیل تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک انجام می‌شود [۶]. تحلیل پایداری با استفاده از تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک محافظه کارانه بوده و در نهایت ساختار کنترل کننده از نظر شبیه‌سازی و پیاده‌سازی پیچیده خواهد بود. علاوه بر آن ممکن است شرایط امکان‌پذیری توابع لیاپانوف برقرار نباشد و وجود کنترل کننده فراگیر تضمین شده نیست (منظور از کنترل کننده فراگیر کنترل کننده زمان‌بندی بهره است که از ترکیب کنترل کننده‌های محلی و احتمالا دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دست آمده است).

در روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان عموماً چند سیستم خطی از روی سیستم غیرخطی اولیه در نقاط کار مختلف به دست آمده و برای هر کدام از آن‌ها کنترل کننده محلی طراحی می‌گردد که لزوماً دارای ساختار مشابه نیستند و در نهایت به منظور دست‌یافتن به

کنترل کننده زمان‌بندی بهره نهایی بین این کنترل کننده‌ها، درونیایی انجام می‌شود [۷]-[۸]. روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، روش‌های بدون محافظه‌کاری بوده و وجود کنترل کننده زمان‌بندی بهره همواره در این روش‌ها تضمین شده است ولی تحلیل پایداری در این روش‌ها با پیچیدگی همراه است. در سال‌های گذشته از سوئیچینگ سخت، درونیایی بین صفر و قطب و بهره تابع تبدیل، درونیایی بین ضرایب تابع تبدیل کنترل کننده‌های محلی در هنگام انتقال از یک ناحیه به ناحیه دیگر و ترکیب خروجی کنترل کننده‌های محلی استفاده شده است [۸]-[۹]. تمام این روش‌ها جزء روش‌های قدیمی مبتنی بر مدل خطی بوده و به‌طور خلاصه می‌توان گفت مزیت این روش‌ها در سادگی طراحی و پیاده‌سازی کنترل کننده زمان‌بندی بهره نهایی می‌باشد و مهمترین عیب آن‌ها نیز عدم تضمین پایداری کنترل کننده فراگیر است.

اما از میان روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، می‌توان به روش‌هایی اشاره کرد که در آن‌ها در مورد پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی نیز تضمین‌هایی داده شده است. یکی از روش‌های درونیایی که در آن در مورد پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی بحث شده است روش درونیایی فیدبک حالت و مشاهده‌گر می‌باشد. این روش به علت درونیایی بین چندین ماتریس فضای حالت دارای پیچیدگی فراوانی است ولی در مقالاتی برای اثبات پایداری این روش ایده‌هایی مطرح شده است [۱۰]. یکی دیگر از روش‌هایی که توانایی تضمین پایداری سیستم زمان‌بندی بهره نهایی را دارد روش‌های درونیایی بین ماتریس‌های نمایش پارامتر یولای^۱ است و در نتیجه ساختار کنترل کننده زمان‌بندی بهره نهایی به صورت ترکیب کسری خطی از سیستم وابسته به پارامتر با کنترل کننده‌های محلی می‌باشد [۱۱]-[۱۳]. در [۱۲] و [۱۳] یک روش درونیایی حفظ کننده پایداری بر مبنای درونیایی روی پارامترهای یولای ارائه شده و از آن برای طراحی خودخلبان رهگیر استفاده شده است. این مهمترین شرط درونیایی در این روش شرط پوشش پایداری است. این شرط بیان می‌کند که هر کنترل کننده محلی باید توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را به‌ازای پارامترهای فریز شده سیستم داشته باشد و درونیایی نیز درون نواحی مشترک پایداری امکان‌پذیر است. اما در این روش درجه کنترل کننده فراگیر بسیار بالاتر از درجه کنترل کننده‌های محلی بوده و پیاده‌سازی آن دارای پیچیدگی فراوانی می‌باشد. همچنین پایداری سیستم وابسته به پارامتر در مرحله طراحی مدنظر قرار نگرفته و تنها پایداری سیستم به‌ازای پارامترهای فریز شده مورد بررسی قرار می‌گیرد و بعد از مرحله طراحی با بررسی یک قید روی بیشینه نرخ تغییرات متغیر زمان‌بندی بهره، پایداری سیستم وابسته به پارامتر نهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به منظور بهبود مشکلات و پیچیدگی‌های بیان شده در بالا، در این مقاله یک روش جدید برای درونیایی پایدار بین کنترل کننده‌های محلی ارائه شده است. مهمترین شرط درونیایی در این روش، شرط پوشش

^۱ Youla parameter

بیان‌کننده مقدار مقاومت سیستم در برابر نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی می‌باشد، در این مقاله از روش شکل‌دهی حلقه H_∞ برای طراحی کنترل‌کننده محلی استفاده می‌شود. زیرا در این روش نیز کنترل‌کننده مقاوم به گونه‌ای طراحی می‌شود که حاشیه پایداری مقاوم سیستم در برابر نامعینی‌های روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی بیشینه گردد. البته به‌منظور رفع مشکل درجه بالای کنترل‌کننده روش شکل‌دهی حلقه H_∞ از یک نوع روش طراحی استفاده شده است تا کنترل‌کننده مقاوم طراحی شده دارای درجه پایینی باشد. این روش به‌نام روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ شناخته می‌شود. تحقق فضای حالت G_s را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n_u}$, $C \in R^{n_y \times n}$, $D \in R^{n_y \times n_u}$ سیستم شکل‌دهی شده در روش شکل‌دهی حلقه H_∞ می‌باشد [۱۶]. تحقق مینیمال فضای حالت ضرایب نسبت هم اول G_s به‌صورت زیر می‌باشد [۱۶]:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \begin{bmatrix} A+LC & L \\ E^{-1/2}C & E^{-1/2} \end{bmatrix} \\ \tilde{M} &= \begin{bmatrix} B+LD & L \\ E^{-1/2}D & E^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $E = I + DD^T$ و $L = -(BD^T + ZC^T)E^{-1}$ بوده و ماتریس Z جواب معادله جبری ریکاتی زیر است:

$$(A - BF^{-1}D^TC)Z + Z(A - BF^{-1}D^TC)^T - ZC^TE^{-1}CZ + BF^{-1}B^T = 0 \quad (3)$$

که در رابطه فوق $F = I + D^TD$ می‌باشد. علاوه بر آن تحقق فضای حالت سیستم کلی‌شده^۱ متناظر با روش شکل‌دهی حلقه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۶]:

$$P = \begin{bmatrix} A_s & -LE^{1/2} & B \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ E^{1/2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ D \end{bmatrix} \\ C & E^{1/2} & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

لم زیر شرایط وجود کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ که با K_∞ نمایش داده می‌شود را بیان می‌نماید:

لم ۱: تحقق فضای حالت سیستم شکل‌دهی شده G_s مطابق رابطه (۱) و نرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه‌بسته از اغتشاش به خروجی مطابق رابطه زیر می‌باشد:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\| \leq \gamma = \varepsilon^{-1} \quad (5)$$

پایداری وابسته به پارامتر است بطوریکه با برقراری شرط مذکور، پایداری کلی سیستم تضمین شده و ساختار ساده‌ای برای کنترل‌کننده فراگیر بدست می‌آید. تفاوت بین این شرط با شرط پوشش پایداری بیان شده در مراجع [۱۲] و [۱۳] این است که در مراجع مذکور تنها به بررسی پایداری سیستم برای مقادیر فریز شده می‌پردازد. این پایداری بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای مقادیر ثابت متغیر زمان‌بندی بهره به‌صورت یک سیستم LTI تبدیل شده و سپس پایداری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. ولیکن در شرط پایداری وابسته به پارامتر ارائه‌شده در این مقاله، یک همسایگی باز حول نقطه نامی مشخص می‌شود که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای تغییرات پارامترهایش درون ناحیه مورد نظر به‌صورت کلی پایدار باشد. پایداری کلی در این جا بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به‌ازای تغییرات متغیر زمان‌بندی بهره (بدون فریز شدن)، پایدار بماند. در حقیقت در شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر، بررسی مقادیر ویژه سیستم به تنهایی کافی نمی‌باشد و لذا برای پیدا کردن همسایگی باز حول هر نقطه نامی به گونه‌ای که شرط مورد نظر را ارضا کند، ابزار v-gap metric پیشنهاد شده است. با استفاده از این ایده برای هر کنترل‌کننده محلی نواحی محلی پایدار مشخص شده و روشی برای درونیایی بین دو کنترل‌کننده محلی مجاور درون ناحیه اشتراک پایداری دو کنترل‌کننده ارائه می‌شود. همچنین کنترل‌کننده فراگیر ارائه شده در این مقاله تنها با ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی به‌دست می‌آید ولی در سایر روش‌ها با ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی و سیستم وابسته به پارامتر به‌دست می‌آید. در حقیقت با ورود دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دینامیک کنترل‌کننده فراگیر، دشواری و پیچیدگی فراوانی در پیاده‌سازی کنترل‌کننده فراگیر حاصل می‌شود که با این ایده این مشکل برطرف می‌گردد.

از آنجایی که قضایای پایداری که توسط ابزار v-gap metric معرفی می‌شود با روش شکل‌دهی حلقه H_∞ مرتبط است، بنابراین در این مقاله برای طراحی کنترل‌کننده محلی از روش کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞ استفاده شده است که در آن درجه کنترل‌کننده مقاوم صفر بوده و درجه کنترل‌کننده فراگیر تنها برابر درجه وزن‌های شکل‌دهی حلقه می‌باشد و لذا منجر به یک کنترل‌کننده با درجه نسبی پایین می‌گردد که مشکلات پیاده سازی عملی را بر خلاف روش کلاسیک شکل‌دهی حلقه H_∞ نخواهد داشت. این ویژگی باعث سادگی فراوان در پیاده‌سازی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره نهایی خواهد شد [۱۴].

۲- کنترل‌کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_∞

برای طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره با استفاده از درونیایی پایدار بین کنترل‌کننده‌های محلی، لازم است کنترل‌کننده‌های محلی توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را داشته باشند. از آنجایی که در این مقاله از ابزار v-gap metric برای پیدا کردن همسایگی باز حول نقطه نامی استفاده می‌شود و این ابزار در حقیقت

¹ Generalized plant

در این قسمت به ارائه برخی تعاریف و فرضیات مورد استفاده در مقاله پرداخته شده است. برای سادگی فرض می شود سیستم وابسته به پارامتر تنها به یک پارامتر وابستگی دارد و تعمیم این روش برای حالت بیشتر از یک پارامتر به سادگی قابل انجام است.

تعریف ۱: سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر $G(\rho)$ به همراه مجموعه بسته $\Gamma \subset R$ که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است ($\rho \in \Gamma$)، داده شده است. همچنین فرض کنید به ازای مقادیر ثابت $\rho_1, \dots, \rho_q \in \Gamma$ کنترل کننده های خطی تغییرناپذیر با زمان $K_1, \dots, K_\rho$ طراحی شده است به گونه ای که هر کنترل کننده قادر به حفظ پایداری سیستم خطی غیرمتغیر با زمان $G(\rho_i)$ متناظر با خود باشد. کنترل کننده تغییرپذیر با پارامتر $K(\rho)$ را که از روی $K_1, \dots, K_\rho$ ساخته شده است، کنترل کننده حفظ کننده پایداری می گویند اگر شرایط زیر برقرار باشد [۱۳]:

۱. ضرایب $K(\rho)$ به صورت توابع پیوسته ای از ρ باشند.

۲. $K(\rho_i) = K_i$ for $i=1, \dots, q$

۳. $K(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را به ازای تمام $\rho \in \Gamma$ پایدار کند.

با استفاده از تعریف ۱، در این مقاله یک روش درونیایی حفظ کننده پایداری ارائه شده است که در آن مهمترین شرطی که روی کنترل کننده های خطی تغییرناپذیر با زمان که بین آن ها درونیایی پایدار صورت می گیرد؛ شرط پوشش پایداری سیستم وابسته به پارامتر می باشد. این شرط بدین معنی است که هر کنترل کننده محلی در این حالت بایستی توانایی تضمین پایداری سیستم حلقه بسته به ازای یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به ازای تغییرات پارامترهای سیستم را نیز داشته باشد. ولیکن در روش های قبلی درونیایی حفظ کننده پایداری، هر کنترل کننده محلی بایستی سیستم را در یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به صورت فریز شده پایدار کند.

تعریف ۲ (شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر): سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر $G(\rho)$ به همراه مجموعه بسته $\Gamma \subset R$ که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است را در نظر بگیرید که کنترل کننده های محلی $K_1, K_2, \dots, K_q$ در نقاط کار $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ به گونه ای طراحی شده اند که K_i سیستم نامی $G(\rho_i)$ را پایدار کند. حال اگر به ازای هر کنترل کننده محلی K_i یک همسایگی باز U_i که شامل ρ_i است وجود داشته باشد به گونه ای که K_i سیستم $G(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات $\rho \in U_i$ ، $i=1, \dots, q$ پایدار کند و شرط $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$ برقرار باشد، آن گاه گفته می شود که شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر ارضا شده است.

از آنجایی که در این مقاله هدف آن است سیستم وابسته به پارامتر به ازای یک محدوده تغییرات پارامتر به صورت کلی پایدار بماند، آزمون موقعیت مقادیر ویژه کافی نمی باشد. لذا برای این کار ابزار v-gap

کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ (k_∞) به گونه ای که رابطه (۵) کمینه گردد؛ وجود دارد اگر $\gamma > 1$ و ماتریس معین مثبت R وجود داشته باشد بطوریکه دو نامساوی زیر را ارضا نمایند:

$$R(A+LC)^T + (A+LC)R < 0 \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T - \gamma BB^T & RC^T - \gamma BD^T & -LE^{1/2} \\ CR - \gamma BD^T & -\gamma E & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & E^{1/2} & -\mathcal{M}_{n_y} \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

□

بعد از بررسی شرایط امکان پذیری مساله در نامساوی های فوق، کنترل کننده K_∞ با استفاده از لم کران حقیقی به صورت زیر ساخته می گردد [۱۴]:

$$K_\infty = \tilde{k}(I + D\tilde{k})^{-1} \quad (8)$$

که در آن $\tilde{k}$ با حل نامساوی زیر به دست می آید:

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{k}\tilde{C} + \tilde{C}^T \tilde{k}^T \tilde{B}^T < 0 \quad (9)$$

که در رابطه فوق ماتریس های $\tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{A}$ به صورت زیر می باشند:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} AR+RA^T & 0 & RC^T & -LE^{1/2} \\ 0 & -\mathcal{M}_{n_u} & 0 & 0 \\ CR & 0 & -\mathcal{M}_{n_y} & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & 0 & E^{1/2} & -\mathcal{M}_{n_y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ I_{n_u} \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} CR & 0 & 0 & E^{1/2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

که در آن ماتریس لیاپانوف R با استفاده از لم ۱ بدست می آید.

در حالت کلی طراحی وزن های شکل دهی حلقه به دید مهندسی و تجربه طراح بستگی دارد. این وزن ها می بایست به گونه ای طراحی شوند که تمامی معیارهای کارآیی در حوزه فرکانس به خوبی ارضا شوند. یعنی بهره تابع در فرکانس های پایین و بالا به ترتیب به اندازه کافی بزرگ و کوچک شود. همچنین در حوالی فرکانس عبور پاسخ فرکانسی دارای شیب تند نباشد. برای اجتناب از طراحی وزن ها به صورت کلاسیک اخیرا روش های سیستماتیکی ارائه شده است [۱۷]، [۱۸]. در این مقاله از روش سیستماتیک ارائه شده در [۱۸] برای طراحی وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم استفاده شده است.

۳- تعاریف و فرضیات

کنترل کننده محلی استفاده شده است. اساس این ایده تبدیل یک سیستم وابسته به پارامتر به یک سیستم LTI بوده که در آن وابستگی به پارامتر به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم LTI مدل می گردد و با استفاده از لم ۲ تحلیل پایداری سیستم وابسته به پارامتر انجام می گیرد.

سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in U_i$ در نظر بگیرید. این سیستم را می توان به صورت یک سیستم LTI $(G(\rho_i))$ در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی های سیستم به پارامتر ρ به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می توان سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به ازای تغییرات پارامتر $\rho \in U_i$ در تمام نقاط فریز کرد و با G_Δ نمایش داد که در آن G_Δ به صورت زیر می باشد:

$$G_\Delta = G(\rho) \Big|_{\rho=\rho_k, \rho_k \in U_i} \quad (1)$$

فرض کنید درون هر ناحیه U_i نقطه ρ_i به عنوان نقطه نامی انتخاب گردد. می توان به ازای هر سیستم فریز شده G_Δ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی $G(\rho_i)$ را مطابق رابطه (۱) به گونه ای یافت که سیستم نامی به سیستم G_Δ تبدیل شود و آن را با $\delta_v(G(\rho_i), G_\Delta)$ نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $\rho \in U_i$ ، برای آن که سیستم نامی به سیستم G_Δ تبدیل شود با β_i نمایش داده می شود یعنی:

$$\sup_{G_\Delta \in G(\rho) \text{ for } \rho \in U_i} \delta_v(G(\rho_i), G_\Delta) = \beta_i \quad (2)$$

آن گاه می توان سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in U_i$ را به صورت یک سیستم نامی $G(\rho_i)$ در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه β_i می باشد. در نتیجه مطابق لم ۲ می توان گفت چنانچه کنترل کننده ای بتواند سیستم نامی $G(\rho_i)$ را پایدار کند و $\mathcal{E}[G(\rho_i), K_i] > \beta_i$ باشد معادل این است که بتواند سیستم وابسته به پارامتر $G(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in U_i$ پایدار نماید.

با توجه به روش بیان شده، می توان محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره $(\rho \in \Gamma)$ را به گونه ای به چند زیرناحیه $U_i, (i=1, \dots, q)$ تقسیم کرد که اولاً اجتماع این زیرناحیه ها تمام فضای تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره را پوشش دهد (یعنی $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$) و همچنین هر کنترل کننده نامی طراحی شده برای هر زیرناحیه توانایی تضمین پایداری برای سیستم وابسته به پارامتر درون زیرناحیه مربوط به خود را داشته باشد. با فرض این که زیرناحیه های $U_i, (i=1, \dots, q)$ با توجه به روش بیان شده انتخاب شده اند قضیه زیر یک روش درونیابی پایدار بین دو کنترل کننده محلی مجاور هم و درون ناحیه مشترک پایداری این دو کنترل کننده ارائه می کند. این ناحیه

metric پیشنهاد شده است. انگیزه گسترش ایده های gap یا v-gap metric در اندازه گیری تفاوت رفتار حلقه بسته دو سیستم از روی رفتار حلقه باز آن ها می باشد. **Error! Reference source not found.** فرض کنید ضرایب نسبت به هم اول سیستم G به صورت $G = NM^{-1}$ باشد. آن گاه فاصله v-gap بین سیستم های G, G_Δ $(\delta_v(G, G_\Delta))$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۵]:

$$\delta_v(G, G_\Delta) = \inf_{\substack{\begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \in RL_\infty \\ w_{\text{node}}(M+\Delta_M) = \eta(G)}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \right\|_\infty : G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} \right\} \quad (1)$$

که در آن $w_{\text{node}} g(s)$ برابر تعداد چرخش منحنی نایکوئیست تابع $g(s)$ حول مبدا در جهت چرخش عقربه های ساعت بوده و $\eta(G)$ برابر تعداد قطب های سمت راست سیستم G می باشد. این رابطه بیان گر آن است که می توان با پیدا کردن مقدار کمینه نامعینی لازم روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی به گونه ای که به سیستم اغتشاش یافته تبدیل شود، به مقدار مشابهت رفتار دینامیکی حلقه بسته دو سیستم با یک فیدبک پی برد. لم زیر ارتباط بین مفهوم v-gap و پایداری را به خوبی بیان می کند [۱۵]:

لم ۲: سیستم نامی G که در آن $\beta \leq \alpha < \varepsilon_{\text{opt}}(G)$ است را در نظر بگیرید. برای کنترل کننده داده شده K و برای تمام سیستم های غیر نامی که دارای ویژگی $\delta_v(G, G_\Delta) \leq \beta$ هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$\arcsin \mathcal{E}[G, K] > \arcsin \alpha - \arcsin \beta \quad (2)$$

اگر و فقط اگر: $\mathcal{E}[G, K] > \alpha$

با قرار دادن $\beta = \alpha$ در لم ۲ می توان گفت $[G_\Delta \ K]$ پایدار است اگر و فقط اگر $\mathcal{E}[G, K] > \alpha$.

لم ۳: فرض کنید سیستم فیدبک $[G \ K]$ پایدار باشد. مجموعه های π و κ را به صورت زیر در نظر بگیرید **Error! Reference source not found.**

$$\begin{aligned} \pi &:= \{G_\Delta : \delta_v(G_\Delta, G) < r_1\}, \\ \kappa &:= \{K_\Delta : \delta_v(K_\Delta, K) < r_2\}, \end{aligned} \quad (3)$$

آن گاه سیستم فیدبک $[G_\Delta \ K_\Delta]$ برای تمام $G_\Delta \in \pi, K_\Delta \in \kappa$ پایدار است اگر و فقط اگر:

$$\arcsin \mathcal{E}[G, K] \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \quad (4)$$

۴- روش درونیابی پایدار پیشنهادی

در این بخش روش درونیابی حفظ کننده پایداری ارائه می شود. ابتدا روشی برای تحلیل پایداری یک سیستم وابسته به پارامتر با ابزار v-gap metric ارائه می گردد. همچنین از این روش برای پیدا کردن ناحیه محلی پایدار برای یک سیستم وابسته به پارامتر استفاده خواهد شد. در مرجع [۵] از ایده ای مشابه این روش برای پیدا کردن نقاط کار بهینه برای طراحی

مشترک از اشتراک دو زیرناحیه پایدار دو کنترل کننده مجاور به دست آمده است. چنانچه اثبات پایداری برای درونیایی بین دو کنترل کننده مجاور K_i و K_{i+1} و برای ناحیه مشترک پایداری $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ انجام گیرد، به راحتی می توان همین اثبات را برای نواحی مشترک پایداری بعدی انجام داد و کنترل کننده زمان بندی بهره کلی را یافت.

قضیه ۱: کنترل کننده های محلی K_i و K_{i+1} در نقاط ρ_i و ρ_{i+1} را در نظر بگیرید بطوری که سیستم $G(\rho)$ را در زیرناحی U_i و U_{i+1} پایدار می کنند و ناحیه مشترک پایداری آن ها به صورت $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ می باشد. کنترل کننده درونیایی شده $\hat{K}_i(\rho)$ بصورت:

$$\hat{K}_i(\rho) = \left(\frac{b_i - \rho}{b_i - a_i} \right) K_i + \left(\frac{\rho - a_i}{b_i - a_i} \right) K_{i+1} \quad (3)$$

سیستم $G(\rho)$ را به ازای ناحیه $[a_i \ b_i]$ پایدار می نماید اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\arcsin_{G(a_i), K_i} \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \quad (4)$$

که در آن r_1 و r_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sup_{G_\Delta \subset G(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i \ b_i]} \delta_v(G(\rho_i), G_\Delta) = r_1 \quad (5)$$

$$\sup_{K_\Delta \subset K(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i \ b_i]} \delta_v(K_i, K_\Delta) = r_2 \quad (6)$$

و G_Δ و K_Δ برابر با $G(\rho)$ و $\hat{K}_i(\rho)$ به ازای مقادیر فریز شده $\rho \in [a_i \ b_i]$ می باشند.

اثبات: فرض کنید کنترل کننده محلی K_i و K_{i+1} سیستم $G(\rho)$ را به ازای $[a_i \ b_i]$ و $[\rho_i \ \rho_{i+1}]$ (در نتیجه ناحیه مشترک پایداری $\rho \in [a_i \ b_i]$ باشد). با استفاده از لم ۳ می توان نشان داد کنترل کننده زمان بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را پایدار می کند. روش کار به صورت زیر می باشد:

کنترل کننده زمان بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ را به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \ b_i]$ در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم $G(\rho)$ به ازای $\rho = a_i$ به عنوان سیستم نامی و کنترل کننده محلی K_i مربوط به ناحیه پایداری $[a_i \ b_i]$ نیز به عنوان کنترل کننده نامی در نظر گرفته شود، آن گاه کنترل کننده وابسته به پارامتر $\hat{K}_i(\rho)$ را می توان به صورت یک کنترل کننده نامی LTI در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی های کنترل کننده به پارامتر ρ به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می توان کنترل کننده زمان بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ را به ازای تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \ b_i]$ در نقاط مختلف فریز کرد و با K_Δ نمایش داد. همچنین

می توان به ازای هر سیستم فریز شده K_Δ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول کنترل کننده نامی K_i را مطابق رابطه (۱) به گونه ای یافت که کنترل کننده نامی به کنترل کننده K_Δ تبدیل شود و آن را با $\delta_v(K_i, K_\Delta)$ نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $\rho \in [a_i \ b_i]$ ، برای آن که کنترل کننده نامی به کنترل کننده K_Δ تبدیل شود مطابق رابطه (۶) با r_2 نمایش داده می شود. آن گاه می توان کنترل کننده زمان بندی بهره $\hat{K}_i(\rho)$ به ازای محدوده تغییرات پارامتر $\rho \in [a_i \ b_i]$ را به صورت یک کنترل کننده نامی K_i در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه r_2 می باشد. همچنین اگر بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر ρ درون ناحیه $\rho \in [a_i \ b_i]$ ، برای آن که سیستم نامی $G(a_i)$ به سیستم G_Δ تبدیل شود مطابق رابطه (۵) با r_1 نمایش داده شود، آن گاه مطابق لم ۳ می توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۴) برقرار باشد آن گاه کنترل کننده $\hat{K}_i(\rho)$ سیستم $G(\rho)$ را درون ناحیه مشترک پایداری $\rho \in [a_i \ b_i]$ پایدار می کند. □

باید توجه کرد اگر شرط رابطه (۴) برقرار نباشد می بایست ناحیه مشترک پایداری را کوچکتر انتخاب کرد و این کار می بایست آن قدر ادامه یابد تا شرط مذکور صادق باشد. در نهایت با استفاده از قضیه ۱، به منظور برقراری پایداری سیستم در کل بازه $\rho \in [\rho_i \ \rho_{i+1}]$ کنترل کننده فراگیر بصورت زیر تعریف می شود:

$$K_i(\rho) = \begin{cases} K_i & \rho \in [\rho_i \ a_i] \\ \hat{K}_i(\rho) & \rho \in [a_i \ b_i] \\ K_{i+1} & \rho \in [b_i \ \rho_{i+1}] \end{cases} \quad (7)$$

که در آن ضرایب کنترل کننده تابع پیوسته ای از پارامتر ρ خواهند بود. حال می توان روش ارائه شده برای درونیایی پایدار در محدوده تغییرات $[\rho_i \ \rho_{i+1}]$ را به راحتی تعمیم داد به گونه ای که تمام فضای تغییرات پارامتر ρ را پوشش دهد. برای این کار فرض کنید به ازای هر ناحیه مشترک پایداری $[a_i \ b_i]$ کنترل کننده های حفظ کننده پایداری $K_i(\rho)$ مطابق رابطه (۷) طراحی شده است. کنترل کننده زمان بندی بهره حفظ کننده پایداری نهایی برای تمام ناحیه Γ به صورت زیر خواهد بود:

$$K(\rho) = \begin{cases} K_i, & \rho \in U_i, \rho \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} [a_j \ b_j], i=1, \dots, q \\ \hat{K}_j(\rho), & \rho \in [a_j \ b_j], j=1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (8)$$

به منظور شفاف تر شدن مراحل طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره، تمام مراحل طراحی در قالب نمودار گردش در شکل ۱ آمده است.

۵- طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

$$\begin{aligned}
 Y &= QSD \left(C_{y\beta} \beta + C_{y\delta} \delta_r + C_{y_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right) \\
 Z &= QSD \left(C_{z\alpha} \alpha + C_{z\delta} \delta_e + C_{z_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\
 L &= QSD \left(C_{l\delta} \delta_a + C_{l_p} \cdot \frac{D}{2V} P \right) \\
 M &= QSD \left(C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta} \delta_e + C_{m_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\
 N &= QSD \left(C_{n\beta} \alpha + C_{n\delta} \delta_e + C_{n_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات فوق در کانال پیشش، بعد از خطی سازی توسط یک سیستم خطی وابسته به پارامتر $G(\rho)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$G(\rho) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & 0 \\ V_m Z_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \\ V_m Z_\delta \end{bmatrix} \delta \quad (3)$$

که در رابطه فوق ضرایب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= \frac{SQ C_{z_\alpha}}{m} & M_\alpha &= \frac{SQ D C_{m_\alpha}}{I_y} \\
 Z_\delta &= \frac{SQ C_{z_\delta}}{m} & M_\delta &= \frac{SQ D C_{m_\delta}}{I_y}
 \end{aligned} \quad (4)$$

مدل فوق وابسته به پارامترهای فشار دینامیکی (Q)، و عدد ماخ (M) می باشد. اما به منظور سهولت پیاده سازی و طراحی تنها از متغیر فشار دینامیکی ($\rho = Q$) که بیشترین تاثیر را در رفتار دینامیکی سیستم حلقه بسته دارد، برای زمان بندی بهره استفاده شده و اثر متغیر دیگر روی پایداری با ابزار v-gap مورد بررسی قرار گرفته است. محدوده تغییرات پارامتر زمان بندی بهره ρ به صورت زیر می باشد که با Γ مشخص شده است:

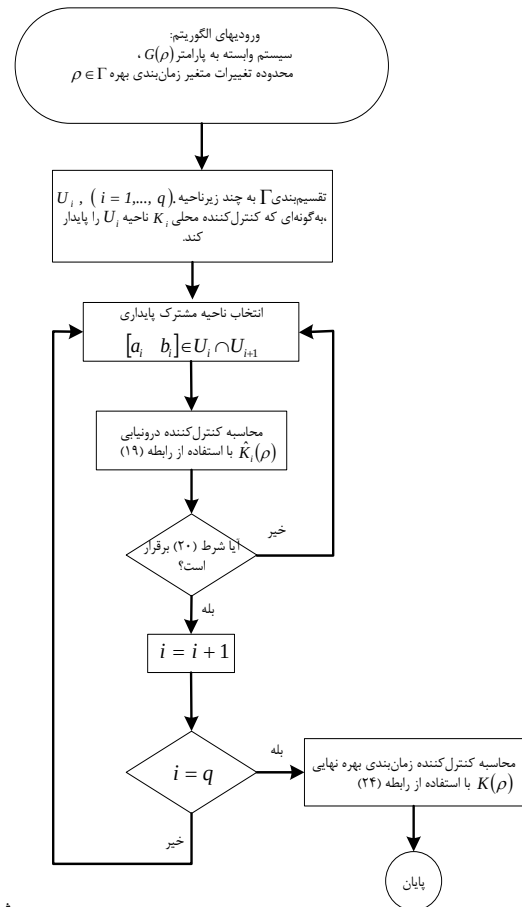
$$\Gamma: 30000 < \rho < 200000 \quad (5)$$

خروجی سیستم، شتاب رهگیر (a_z) بوده و ورودی نیز تغییر زاویه بالک (δ_e) می باشد. تابع تبدیل عملگر بالک نیز با یک تابع تبدیل درجه ۲ با فرکانس طبیعی ۲۰۰ rad/sec و ضریب میرایی ۰/۷ به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$\frac{\delta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

با استفاده از مدل بیان شده در رابطه (۳) به سادگی می توان توابع تبدیل شتاب خروجی (a_z) نسبت به تغییر زاویه بالک (δ) و سرعت زاویه ای (q) نسبت به δ را یافت. معمولاً به منظور داشتن پاسخ گذرای مناسب در حلقه خودخلبان، از حلقه داخلی سرعت زاویه ای مطابق شکل ۲ استفاده می شود. با استفاده از ژيروسکوپ نرخ و با فیدبک گرفتن از

مدل دینامیکی رهگیر یک مدل غیرخطی وابسته به پارامتر می باشد. معادلات شش درجه آزادی رهگیر در دستگاه بدنی به صورت زیر می باشد [۱۹]:



ش

کل ۱. نمودار گردش مراحل طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره.

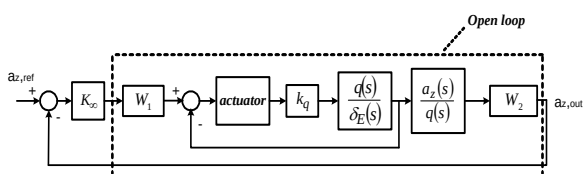
$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} (\dot{U} + QW - RV) \\ (\dot{V} + RU) \\ (\dot{W} - QU) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{P} \\ I_y \dot{Q} \\ I_z \dot{R} \end{bmatrix}$$

که نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در روابط بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

سرعت زاویه‌ای کانال پیچ می‌توان به سادگی کنترل کننده تناسبی k_q را طراحی کرد.

در مشخصات هر زیرناحیه U_i به همراه بیشینه v-gap و حاشیه پایداری مقاوم آن آمده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود ملاحظات پایداری بیان شده در رابطه (۴) در هر زیر ناحیه رعایت می‌گردد. در جدول ۲ مشخصات سیستم حلقه باز نامی به همراه وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم طراحی شده برای مدل رهگیر آمده است. همان گونه که ملاحظه می‌گردد کنترل کننده مقاوم بدون درجه می‌باشد. در جدول ۱ زیرناحیه‌های محلی U_i به گونه‌ای پیدا شد که اجتماع آن‌ها تمام محدوده تغییرات پارامتر Γ را پوشش دهد. در ادامه می‌بایست نواحی مشترک پایداری $[a_i \ b_i]$ درون اشتراک دو زیرناحیه محلی مجاور را به گونه‌ای یافت که شرط پایداری بیان شده در رابطه (۴) ارضا شود. برای این منظور ابتدا نواحی مشترک پایدار به صورت $[a_i \ b_i] = (U_i \cap U_{i+1})$ انتخاب می‌شوند. برای این نواحی می‌بایست شرط پایداری (۴) مورد بررسی قرار گیرد. اگر این شرط برقرار نبود بازه‌ی $[a_i \ b_i]$ باید به صورت محدودتر و به صورت زیرمجموعه ناحیه اشتراک پایداری بصورت $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ انتخاب گردد. بازه‌ی $[a_i \ b_i]$ می‌بایست آن قدر کوچک شود که رابطه (۴) برقرار گردد. در جدول ۳ مشخصات نواحی $(U_i \cap U_{i+1})$ و بازه‌های $[a_i \ b_i]$ بیان شده است.



شکل ۲. تابع حلقه باز شکل‌دهی شده برای تحلیل پایداری با ابزار v-gap

به منظور طراحی خودخلبان مقاوم برای رهگیر ارائه شده، می‌بایست ابتدا زیر نواحی پایدار $U_i, (i=1, \dots, q)$ درون محدوده تغییرات پارامتر Γ به گونه‌ای یافت شود که در هر زیرناحیه شرط پایداری بیان شده صادق باشد $(\varepsilon[G(\rho_i), k_i] > \beta_i)$. برای این منظور نقطه ابتدای محدوده‌ی تغییرات پارامتر زمان بندی بهره $\rho_1 = 30000$ به عنوان نقطه نامی اول برای طراحی کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H_{∞} انتخاب می‌شود. وزن شکل‌دهی حلقه W_1 برابر یک و W_2 نیز با استفاده از مساله بهینه‌سازی (۱۵) و الگوریتم به دست آمده در [۱۸] طراحی می‌شود. حال با توجه به شکل ۲ تابع شکل‌دهی شده $G_s(\rho_1) = W_2 G(\rho_1) W_1$ به عنوان تابع حلقه باز نامی (تابع نشان داده شده در شکل ۲ درون نقطه چین) انتخاب شده و کنترل کننده استاتیکی مقاوم مطابق روابط (۸)–(۱۲) برای آن طراحی می‌گردد. حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل‌دهی شده $G_s(\rho_1)$ نیز با استفاده از الگوریتم به دست آمده در **Error! Reference source not found.** محاسبه می‌گردد. بعد از به دست آمدن حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل‌دهی شده $G_s(\rho_1)$ ، می‌توان ناحیه‌ی U_1 که در آن شرط پوشش پایداری ارضا می‌شود را به دست آورد. برای این منظور پارامتر ρ آن قدر افزایش می‌یابد تا بیشینه v-gap ایجاد شده بین سیستم‌های شکل‌دهی شده و سیستم نامی (مطابق رابطه (۲)) از حاشیه پایداری مقاوم سیستم شکل‌دهی شده نامی کمتر باشد. به همین ترتیب انتهای بازه U_1 به عنوان نقطه ابتدای بازه U_2 انتخاب شده و تمام مراحل بیان شده در این جا برای پیدا کردن بازه U_1 دوباره تکرار می‌گردد. این کار آن قدر انجام می‌شود تا اجتماع زیرناحیه‌های محلی U_i تمام محدوده تغییرات پارامتر Γ را پوشش دهد (یعنی $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$).

جدول ۱. مقایسه حاشیه پایداری مقاوم با بیشینه v-gap به دست آمده درون هر زیرناحیه

زیرناحیه ۴	زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۱	
۰/۵۵	۰/۵۲	۰/۴۵	۰/۳۱	حاشیه پایداری مقاوم
۰/۴	۰/۴۹	۰/۴۲	۰/۲۷	بیشترین v-gap
$100000 < U_1 < 200000$	$70000 < U_1 < 140000$	$35000 < U_2 < 90000$	$30000 < U_1 < 55000$	محدوده بازه‌های U_i

جدول ۲. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی و وزن‌های شکل‌دهی حلقه در هر نقطه

کنترل کننده استاتیکی مقاوم	وزن شکل‌دهی حلقه	سیستم نامی	
$K_{\infty,1} = 0.78$ $k_{q,1} = -1.25$	$W_{2,1} = \frac{0.001(s+3)(s^2+91s+20000)}{(s+117)(s+16)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1 = 30000$	زیرناحیه ۱
$K_{\infty,2} = 0.52$ $k_{q,2} = -0.95$	$W_{2,2} = \frac{0.001(s+60000)(s^2+26s+0.95)}{(s+7420)(s+6.4)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2 = 60000$	زیرناحیه ۲

$K_{\infty,3} = 0.63$ $k_{q,3} = -0.75$	$W_{2,3} = \frac{0.005(s+20000)(s^2+4.6s+35)}{(s+3183)(s+8.15)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	زیرناحیه ۳
$K_{\infty,4} = 0.86$ $k_{q,4} = -0.45$	$W_{2,4} = \frac{0.003(s+2600)(s^2+5.5s+29)}{(s+3401)(s+14)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	زیرناحیه ۴

جدول ۳. مشخصات اشتراک نواحی محلی پایدار به همراه نواحی تضمین کننده پایداری $[a_i \ b_i]$

زیرناحیه ۱ و زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۲ و زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۳ و زیرناحیه ۴	زیرناحیه ۱ و زیرناحیه ۲
محدوده اشتراک دو زیرناحیه محلی	$U_1 \cap U_2 =$ [35000 55000]	$U_2 \cap U_3 =$ [70000 90000]	$U_3 \cap U_4 =$ [100000 140000]
محدوده مشترک پایداری $[a_i \ b_i]$	$[a_1 \ b_1] =$ [40000 50000]	$[a_2 \ b_2] =$ [75000 85000]	$[a_3 \ b_3] =$ [110000 130000]

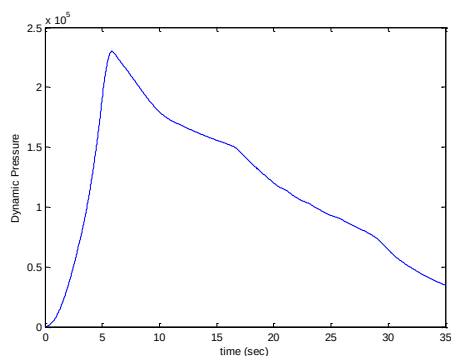
۸- نتایج شبیه سازی

در ادامه برای نشان دادن کارآیی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی در سیستم غیرخطی، شبیه سازی سه درجه آزادی انجام می گیرد. به منظور مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با سایر روش های کلاسیک زمان بندی بهره، درونیایی بین صفر-قطب-بهره (zpk) کنترل کننده های محلی که یکی از روش های کلاسیک درونیایی است نیز مورد بررسی و شبیه سازی قرار می گیرد [۲۰]-[۲۱]. در روش درونیایی بین صفر-قطب-بهره کنترل کننده های محلی، ابتدا در نقاط کار مختلف کنترل کننده های محلی طراحی شده و سپس با درونیایی خطی بین این کنترل کننده ها، کنترل کننده زمان بندی بهره به دست می آید. انتخاب نقاط کار در این روش کلاسیک بستگی به تجربه طراح داشته و فاقد روش سیستماتیک است. همچنین روش مورد نظر دارای اثبات پایداری نمی باشد. به منظور مقایسه بین دو روش بیان شده از همان نقاط کار به دست آمده در جدول ۲ برای طراحی کنترل کننده های محلی استفاده شده است. همچنین برای طراحی کنترل کننده های محلی از کنترل کننده PID استفاده می شود. در جدول ۴ مشخصات کنترل کننده های محلی برای نقاط کار مختلف برای روش PID آمده است.

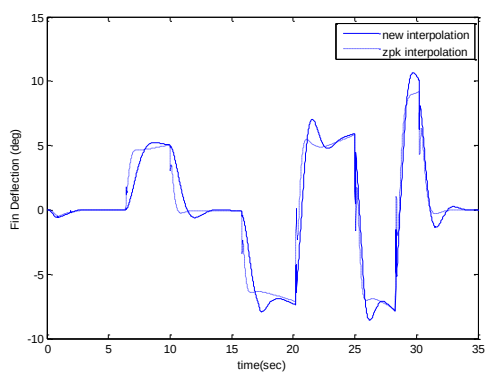
دستور ورودی مطابق شکل ۵ به سیستم غیرخطی اعمال شده و نتایج تعقیب دستور ورودی برای هر دو روش نشان داده شده است. مشاهده می گردد که روش درونیایی ارائه شده دارای عملکرد بهتری می باشد. علاوه بر آن روش درونیایی ارائه شده دارای اثبات پایداری می باشد در حالی که در روش کلاسیک درونیایی، تضمینی برای پایداری سیستم وابسته به پارامتر وجود ندارد. در شکل ۶ نشان داده شده است که تمام ناحیه پروازی رهگیر با سناریوی طراحی شده تحریک می گردد.

به منظور بررسی روش مذکور در پایداری و کارآیی کنترل کننده فراگیر نهایی شبیه سازی سه درجه آزادی انجام می گردد. شبیه سازی سه درجه آزادی بر مبنای معادلات غیرخطی (۱) و (۲) انجام شده است. نتایج ارائه شده در این جا برای یک رهگیر از نوع کنترل با دم بوده و به منظور سادگی، فرمان شتاب تنها به کانال پیچ اعمال می گردد. همان گونه که بیان شد برای بهبود عملکرد سیستم در تعقیب دستور ورودی، ابتدا می بایست حلقه داخلی سرعت زاویه ای (حلقه داخلی نشان داده شده در شکل ۲) با ضریب مناسب k_q بسته شود. در جدول ۲ ضریب k_q در نقاط کار مختلف آمده است. بعد از طراحی ضریب k_q ، وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_{∞} با استفاده از الگوریتم بیان شده در مرجع [۱۸] در هر نقطه کار طراحی شده که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. در نهایت درونیایی بین کنترل کننده های محلی با استفاده از روش بیان شده در بخش قبل انجام می گیرد. سناریوی پروازی رهگیر به گونه ای انتخاب می شود که تمام ناحیه تغییرات پارامتر زمان بندی بهره (فشار دینامیکی) را پوشش دهد. بررسی نتایج شبیه سازی در دو مرحله صورت می گیرد. در مرحله اول پایداری و کارآیی کنترل کننده های محلی در نقاط کار نامی مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله دوم عملکرد کنترل کننده فراگیر در سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرد. برای مشاهده کارایی کنترل کننده زمان بندی بهره در سیستم خطی، پاسخ پله سیستم حلقه بسته در حالت نامی و در نقاط کار اول تا چهارم به همراه حد بهره و حدهای آن ها در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می شود که تمامی معیارهای کارآیی و پایداری در حالت خطی به خوبی ارضا شده است.

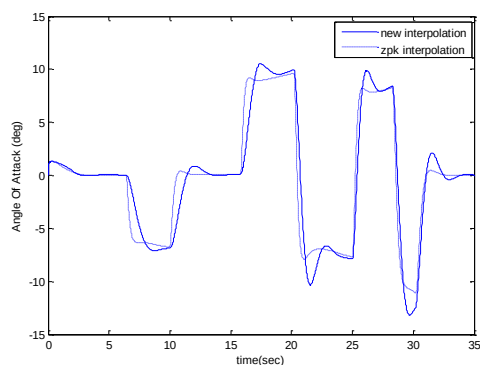
¹ Zero-pole-gain interpolation



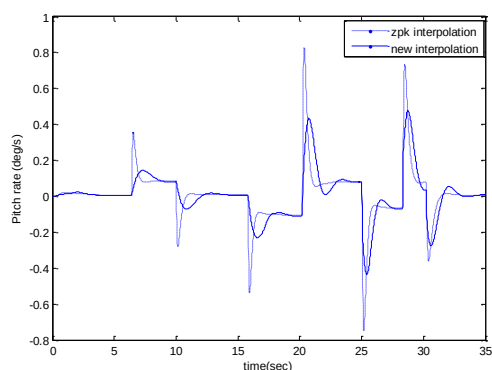
شکل ۶. فشار دینامیکی



شکل ۷. سیگنال کنترلی ورودی به عملگر

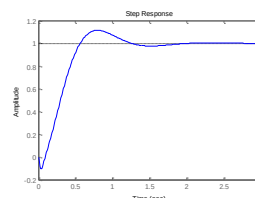
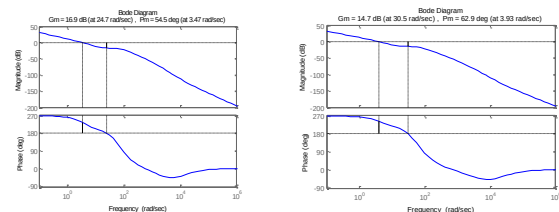


شکل ۸. زاویه حمله

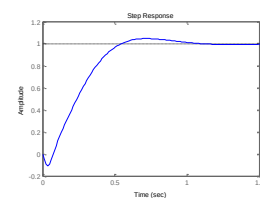


شکل ۹. سرعت زاویه‌ای کانال پیچ

مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره خوب بوده و مطابق شکل ۷ سیگنال‌های کنترلی تولید شده نیز مناسب می‌باشد. زاویه حمله رهگیر و سرعت زاویه‌ای کانال پیچ نیز در شکل ۸ و شکل ۹ آمده است که نشان‌دهنده عملکرد مطلوب سیستم می‌باشد.

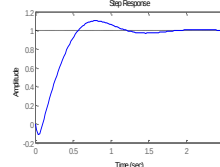
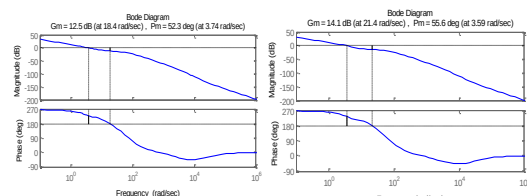


فشار دینامیکی $Q_2 = 60000$

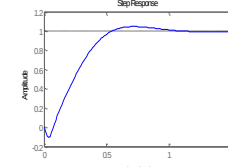


فشار دینامیکی $Q_3 = 30000$

شکل ۳. پاسخ پله و حذبیره و حذفاز برای نقاط کار اول و دوم

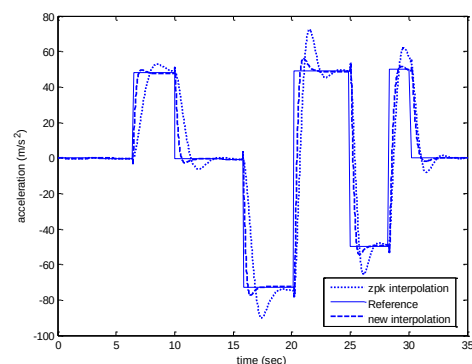


فشار دینامیکی $Q_4 = 150000$



فشار دینامیکی $Q_5 = 100000$

شکل ۴. پاسخ پله و حذبیره و حذفاز برای نقاط کار سوم و چهارم



شکل ۵. سیگنال شتاب مرجع و خروجی

جدول ۴. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی PID

نقاط کار	سیستم نامی	کنترل کننده محلی PID
۱	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1 = 30000$	$K_1 = -0.18 \frac{1+0.96s}{s}$
۲	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2 = 60000$	$K_2 = -3.69 \frac{1+0.5s}{s}$
۳	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	$K_1 = -0.047 \frac{1}{s}$
۴	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	$K_1 = -0.02 \frac{1+0.14s}{s}$

[5] S. Theodoulis and G. Duc, "Missile autopilot design: gain scheduling and the gap metric", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No.3, pp. 986-996, 2009.

[6] M. Sato . "Gain Scheduled Output-feedback depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent lyapunov functions". *Automatica*, Vol.47, pp.2786 2790, 2011.

[7] F. Blanchini, S. Miani, F. Mesquine. "A separation principle for linear switching systems and parameterization of all stabilizing controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 279-292, 2009.

[8] F.D. Bianchi, R.S. Sanchez-Pena, M. Guadayol, "Gain scheduled control based on high fidelity local wind turbine models". *Renewable energy*, Vol.37, pp.233-240, 2012.

[9] B. Hency, A. Alleyne. "Robust controller interpolation design technique". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, pp. 1-10, 2010.

[10] F.D. Bianchi., R.S. Sanchez Pena, "Interpolation for gain-scheduled control with guarantees"; *Automatica*, Vol. 47, pp.239 243, 2011.

[11] B.P. Rasmussen, and A. Alleyne, "Gain scheduled control of an air conditioning system using the youla parameterization", *IEEE Transactions on Control system technology*, Vol.18, No.5, pp.1216 1225, 2010.

[12] D.J. Stilwell, "state space interpolation for a gain scheduled autopilot", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, pp. 460 465, 2001.

[13] D.J. Stilwell., and W.J. Rugh. "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain

۸- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش درونیایی پایدار برای طراحی خودخلبان رهگیر ارائه شده است. روش پیشنهادی دارای پیچیدگی کمتری نسبت به سایر روش های درونیایی بوده و علاوه بر آن تضمین کننده پایداری سیستم متغیر با پارامتر نیز می باشد. علاوه بر آن نشان داده شد که با استفاده از ابزار v-gap metric می توان نقاط کار مناسب برای طراحی کنترل کننده محلی انتخاب کرد. علاوه بر آن با کمک این ابزار می توان نواحی محلی پایداری را برای هر کنترل کننده محلی مشخص نمود. نتایج شبیه سازی سه درجه آزادی نشان دهنده عملکرد مطلوب کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی می باشد.

مراجع

- [1] H. Buschek, "Full Envelope Missile Autopilot Design Using Gain Scheduled Robust Control", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 1, pp.115 122, 1999.
- [2] S. Kang, H.J. Kim, J.I. Lee, B.E. Jun, and M.J. Tahk, "Roll-pitch-yaw integrated robust autopilot design for a high angle-of attack missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, pp. 1622 1628, 2009.
- [3] D. Saussie, L. Saydy, and O. Akhrif, "Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot", *AIAA Guidance, Navigation, and Control conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [4] D. J. Leith, W. E. Leithead, "Survey of gain scheduling analysis and design", *International journal of control*, Vol. 73, No.11, pp. 1001-1025, 2000.

حلقه H_∞ ، نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال سیزدهم، شماره دوم، صفحه ۷۹-۹۴، پاییز ۱۳۹۰.

- [19] G.M. Siouris, "Missile guidance and control systems", New York, Springer-verlag, Inc., 2004.
- [20] R.A. Nichols, R.A. Reichert, W.J. Rugh, "Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol(1), N(2), 69-79, 1993.
- [21] B. Paijmans, W. Sysmens, H.V. Brussel, J. Swevers, "A gain scheduling control technique for mechatronic systems with position-dependent dynamics", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2933-2938, 2006.

scheduled controllers", *Automatica*, Vol. 36, pp.665 671, 2000.

- [14] E. Prempain, I. Postlethwaite, "Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter" *Automatica*, Vol. 41, pp. 1517 1528, sept. 2005.
- [15] G. Vinnicombe . *Uncertainty and feedback: h-infinity loop shaping and the v-gap metric*, Imperial college press, 1999.
- [16] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, "Essential of robust control", Prentice Hall, 1998.
- [17] A. , Lanzon, "Weight optimization in H_∞ loop shaping" *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1201 1208, 2005.

[18] معافی مدنی، محمد جواد، محمدزمان، ایمان، "طراحی

خودخلیان با استفاده از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی